

場の理論と量子回路複雑性

片桐奏羽 *

2021 年 3 月 13 日

概要

場の量子論における量子状態の複雑性を Nielsen(量子計算の方のニールセン) の議論に従って自由場の場合に計算した Jefferson と Myers の [2] を紹介し、さらに ϕ^4 理論に拡張した Bhattacharyya, Shekar と Sinha の [3] についてふれる。

1 基本的アイデア

量子計算はある状態 $|\psi_R\rangle$ に対して様々な量子ゲートをユニタリ変換として作用させて計算を行い、 $|\psi_T\rangle$ という結果を得る。

$$|\psi_T\rangle = U_1 U_2 U_3 \dots U_N |\psi_R\rangle \quad (1.1)$$

このゲートがかかった状態を量子回路とよぶ。量子ゲートとしては様々なとり方があるが、組み合わせに使う量子ゲートを基本ゲートとよぶ。

複雑性とは $|\psi_T\rangle$ という状態を構成するのに必要は最小の基本ゲートの数であるところでは仮定する。量子光学では基本ゲートとして

ビームスプリッター

$$\hat{S} = \frac{1}{2i} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) \quad (1.2)$$

変位 (ディスプレースメント)

$$\hat{D}(\alpha) = i (\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (1.3)$$

位相シフター

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.4)$$

スクイーズ

$$\hat{L} = i (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \quad (1.5)$$

3 次の非線形光学過程、例えば光カー効果

$$\hat{K} = \hat{N}_1 \hat{N}_2 \quad (1.6)$$

があれば任意の量子状態はこの組み合わせで書けることが知られている。

これらの組み合わせを使って制御ノットゲートやアダマールゲートといった量子計算に必要なゲートを構成することができる。

* So.Katagiri@gmail.com

例として、制御ノットゲートは

$$U|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle \quad (1.7)$$

$$U|0\rangle|1\rangle = |0\rangle|1\rangle \quad (1.8)$$

$$U|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|1\rangle \quad (1.9)$$

$$U|1\rangle|1\rangle = |1\rangle|1\rangle \quad (1.10)$$

つまり、

$$U|n\rangle|m\rangle = |n\rangle|(n+m) \bmod 2\rangle \quad (1.11)$$

という操作であるが、これは光カー効果とビームスプリッターを組み合わせることで実現できる。

2 自由スカラー場の複雑性

ここでは

$$H = \frac{1}{2} \int d^{d-1}x [\pi^2 + \nabla\phi^2 + m^2\phi^2] \quad (2.1)$$

という自由スカラー場の理論を考え、その状態の複雑さを計算してみる。

自由スカラー場は格子間隔を δ として離散化すると無限個の調和振動子の結合した理論になっている。

実際、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \left\{ \frac{p(\vec{n})^2}{\delta^{d-1}} + \delta^{d-1} \left[\frac{1}{\delta^2} \sum_i (\phi(\vec{n}) - \phi(\vec{n} - \hat{x}_i))^2 + m^2\phi(\vec{n}) \right] \right\} \quad (2.2)$$

のように離散化して

$$X(\vec{n}) = \delta^{d/2}\phi(\vec{n}) \quad (2.3)$$

$$P(\vec{n}) = \frac{p(\vec{n})}{\delta^{d/2}} \quad (2.4)$$

$$M = \frac{1}{\delta} \quad (2.5)$$

$$\omega = m \quad (2.6)$$

$$\Omega = \frac{1}{\delta} \quad (2.7)$$

ととれば

$$H = \sum_{\vec{n}} \left\{ \frac{P(\vec{n})^2}{2M} + \frac{1}{2}M \left[\omega^2 X(\vec{n})^2 + \Omega^2 \sum_i (X(\vec{n}) - X(\vec{n} - \hat{x}_i))^2 \right] \right\} \quad (2.8)$$

のように1次元の調和振動子が隣接した者同士結合した模型になっている。

よって、まずこれを調和振動子 2 個に制限した模型を考える。

$$H = \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2 + \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \Omega(x_1^2 - x_2^2)] \quad (2.9)$$

このハミルトニアンは変数変換で解くことができ基底状態は

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{(\omega_1\omega_2 - \beta^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + 2\beta x_1 x_2) \right] \quad (2.10)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_+ + \tilde{\omega}_-) \quad (2.11)$$

$$\tilde{\omega}_+^2 = \omega^2 \quad (2.12)$$

$$\tilde{\omega}_-^2 = \omega^2 + 2\Omega^2 \quad (2.13)$$

$$\beta = \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_+ - \tilde{\omega}_-) < 0 \quad (2.14)$$

と求まる。ここでこの基底状態の複雑性を求めたい。

$$\psi_T(x_1, x_2) = \psi_0(x_1, x_2) \quad (2.15)$$

参照状態としてはガウス状態

$$\psi_R(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \exp \left[-\frac{\omega_0}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] \quad (2.16)$$

をとることにする。

基本ゲートとしては $a, b = 1, 2$ として

$$O_{ab} = ix_a p_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (2.17)$$

をとることにする。

よって問題は

$$\psi_T = U\psi_R \quad (2.18)$$

となるときユニタリ変換 U を構成する最小の基本ゲートの数を求めることになる。

$$\psi \simeq \exp \left[-\frac{1}{2} x_a A_{ab} x_b \right] \quad (2.19)$$

と書けば

$$A_R = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$A_T = \begin{pmatrix} \omega_1 & \beta \\ \beta & \omega_2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

のように書ける。

ニールセンの方法は

$$U = T \exp \int_0^1 ds Y^{ab} O_{ab} \quad (2.22)$$

として書けるとしたときの

$$D(U) = \int_0^1 \mathcal{L}(U, \dot{U}) ds \quad (2.23)$$

を最小が複雑性を定義するというもだった [1]。

$\mathcal{L}$ には様々なとり方がある

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{\sum_I G_{IJ} Y^I Y^J}, G_{IJ} = \delta_{IJ} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{L}_1 = \sum_I |Y^I| \quad (2.25)$$

などがある。ゲート数が複雑性をあらわすという当初の意味では $\mathcal{L}_1$ が適切であるが、 $\mathcal{L}_2$ の最小は測地線の長さを表しており、物理屋に好まれる。

ここでは [2] に従い $\mathcal{L}_2$ を用いることにする。

3 詳細な議論

$$\psi \simeq \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.1)$$

と行列で書けているので

$$O_{ab} = i x_a p_b + \dots \quad (3.2)$$

$$U = T \exp \left[\int_0^1 ds Y^{ab} x_a p_b + \dots \right] \quad (3.3)$$

と書けるので、例えば

$$U = e^{\epsilon x_1 p_1} \quad (3.4)$$

は x_1 を $x_1 + \epsilon$ にずらすので

$$U\psi \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + \epsilon & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 + \epsilon \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.5)$$

$$\propto \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \left(1 + \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) A \left(1 + \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.6)$$

$$\equiv \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} e^{\epsilon M_{11}} A (e^{\epsilon M_{11}})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.7)$$

のように A が変換することがわかる。よって

$$U\psi_R = \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} V A_R V^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.8)$$

$$V = T \exp \left[\int_0^1 ds Y^{ab} M_{ab} \right] \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

と書ける。ここで

$$V(s) = T \exp \left[\int_0^s d\tilde{s} Y^{ab}(\tilde{s}) M_{ab} \right] \quad (3.15)$$

とすれば

$$\frac{d}{ds} V(s) = Y^{ab}(s) M_{ab} V(s) \quad (3.16)$$

となるので

$$Y^{ab} = \text{tr} (\partial_s V(s) V^{-1}(s) M_{ab}^T) \quad (3.17)$$

と Y^{ab} を書くことができるので

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{\sum_I G_{IJ} Y^I Y^J} = \sqrt{\delta_{ab,a'b'} \text{tr} (\partial_s V(s) V^{-1}(s) M_{ab}^T) (\partial_s V(s) V^{-1}(s) M_{a'b'}^T)} \quad (3.18)$$

を計算したい。

そこで $V(s)$ は実の 2×2 行列であるから $GL(2, R)$ である。

これを

$$V = e^y \begin{pmatrix} \cos \tau \cosh \rho - \sin \theta \sinh \rho & -\sin \tau \cosh \rho + \cos \theta \sinh \rho \\ \sinh \tau \cosh \rho + \cos \theta \sinh \rho & \cos \tau \cosh \rho + \sin \theta \sinh \rho \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

という極座標系で展開すると

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{-2\dot{y}^2 + 2\dot{\rho}^2 + 2 \cosh^2 \rho \dot{\tau}^2 + 2 \cosh 2\rho \sinh^2 \rho \dot{\theta}^2 - 2 \sinh^2 2\rho \dot{\tau} \dot{\theta}} \quad (3.20)$$

$$= \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad (3.21)$$

と求まる。

$$V(s=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

であるから

$$y(0) = 0, \rho(0) = 0, \tau(0) = 0, \theta(0) = \theta_0 \quad (3.23)$$

である。

$$A_T = V(s=1)A_R V(s=1)^T = \omega V(s=1)V(s=1)^T \quad (3.24)$$

$$= \omega_0 e^{2y(1)} \begin{pmatrix} \cos 2\rho(1) - \sin(\theta(1) + \tau(1)) \sinh 2\rho(1) & \cos(\theta(1) + \tau(1)) \sinh \rho(1) \\ \cos(\theta(1) + \tau(1)) \sinh 2\rho(1) & \cosh 2\rho(1) + \sin(\theta(1) + \tau(1)) \sinh(\rho(1)) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_1 & \beta \\ \beta & \omega_2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

より境界条件が

$$e^{2y(1)} = \frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}}{\omega} \quad (3.27)$$

$$\cosh 2\rho(1) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}} \quad (3.28)$$

$$\tan(\theta(1) + \tau(1)) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\beta} \quad (3.29)$$

のように求まる。

この境界条件を満たす y, ρ, θ, τ を計算するのに便利なキリングベクトル k^i を求める。

キリングベクトルとは計量を不変にするような x^i の変換 $k^i = \delta x^i$ である。

測地線のパラメータを s としたとき (つまり $\mathcal{L}_2$ が極値をとるとき)、キリングベクトルは

$$\frac{d}{ds} \left(k_i \frac{d}{ds} x^i \right) \equiv \frac{d}{ds} c \equiv 0 \quad (3.30)$$

となる保存量があることが知られている。

今の場合、キリングベクトルは5個あり [2]、対応する保存量は

$$c_1 = 2\dot{y} \quad (3.31)$$

$$c_2 = 2 \sin(\theta - \tau) \dot{\rho} + \cos(\theta - \tau) \left[(\sinh 4\rho - \sinh 2\rho) \dot{\theta} - (\sinh 4\rho + \sinh 2\rho) \dot{\tau} \right] \quad (3.32)$$

$$c_3 = 2 \cos(\theta - \tau) \dot{\rho} - \sin(\theta - \tau) \left[(\sinh 4\rho - \sinh 2\rho) \dot{\theta} - (\sinh 4\rho + \sinh 2\rho) \dot{\tau} \right] \quad (3.33)$$

$$c_4 = (\cosh 4\rho - \cosh 2\rho) \dot{\theta} - (\cosh 4\rho + \cosh 2\rho) \dot{\tau} \quad (3.34)$$

$$c_5 = (1 - \cosh 2\rho) \dot{\theta} + (1 + \cosh 2\rho) \dot{\tau} \quad (3.35)$$

である。

c_1 より

$$c_1 s = 2y(s) - 2y(0) = 2y(s) \quad (3.36)$$

よって

$$c_1 = 2y(1) \quad (3.37)$$

となるので

$$y(s) = y(1)s \quad (3.38)$$

である。詳細は略すが $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0 = 0$ を仮定する^{*1}と境界条件より

$$\theta(s) = \theta_0 \quad (3.39)$$

$$\tau(s) = 0 \quad (3.40)$$

$$\rho(s) = \rho(1)s \quad (3.41)$$

がわかるので $D(U)$ に代入すれば

$$D(U) = \sqrt{2(y(1)^2 + \rho(1))^2} \quad (3.42)$$

$$= \sqrt{\left(\log \frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}}{\omega}\right)^2 + \left(\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}}\right)\right)^2} \quad (3.43)$$

4 自由スカラー場

前節の議論を離散化した自由スカラー場に対してに適応すれば

$$D(U) = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \log \left(\frac{\tilde{\omega}_k}{\omega} \right)} \quad (4.1)$$

$$\tilde{\omega}_k^2 \equiv \omega^2 + 4\Omega^2 \sin^2 \frac{\pi k}{N} = m^2 + \frac{4}{\delta^2} \sin^2 \frac{\pi k}{N} \quad (4.2)$$

これは近似的には

$$D(U) \approx \left(\frac{V}{\delta^{d-1}} \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

$$V = L^{d-1} = (N\delta)^{d-1} \quad (4.4)$$

となる。一方で Holographic complexity を用いて重力側から求めた計算は

$$\frac{V}{\delta^{d-1}} \quad (4.5)$$

であり、 $\frac{1}{2}$ 乗だけ異なる。これは $\mathcal{L}_2$ を用いたことからくる。

^{*1} この仮定で $D(U_0)$ が最小であることは詳細をみていくとわかる。

5 ϕ^4 理論における量子回路複雑性

[3] では同様の手法を用いて相互作用のある場合として ϕ^4 理論を議論している。

$$H = \frac{1}{2} \int d^{d-1}x \left[\pi^2 + \nabla \phi^2 + m^2 \phi^2 + \frac{\hat{\lambda}}{12} \phi^4 \right] \quad (5.1)$$

これを離散化すると

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \left\{ \frac{\pi(\vec{n})^2}{\delta^{d-1}} + \delta^{d-1} \left[\frac{1}{\delta^2} \sum_i (\phi(\vec{n}) - \phi(\vec{n} - \hat{x}_i))^2 + m^2 \phi(\vec{n})^2 + \frac{\hat{\lambda}}{12} \phi(\vec{n})^4 \right] \right\} \quad (5.2)$$

となるので

$$X(\vec{n}) = \delta^{d/2} \phi(\vec{n}) \quad (5.3)$$

$$P(\vec{n}) = \pi(\vec{n}) / \delta^{d/2} \quad (5.4)$$

$$M = 1/\delta \quad (5.5)$$

$$\omega = m \quad (5.6)$$

$$\Omega = 1/\delta \quad (5.7)$$

$$\lambda = \frac{\hat{\lambda}}{24} \delta^{-d} \quad (5.8)$$

として書き換えれば

$$H = \sum_{\vec{n}} \frac{P(\vec{n})^2}{2M} + \frac{1}{2} M \left[\omega^2 X(\vec{n})^2 + \Omega^2 \sum_i (X(\vec{n}) - X(\vec{n} - \hat{x}_i))^2 + 2\lambda X(\vec{n})^4 \right] \quad (5.9)$$

のような結合した調和振動子に X^4 項が付け加わったハミルトニアンが得られる。

自由場のときと同様に、まず2個の場合を考える。また簡単のため $M = 1$ とする。

$$H = \frac{1}{2} \left[p_1^2 + p_2^2 + \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \Omega^2 (x_1 - x_2)^2 + 2\lambda (x_1^4 + x_2^4) \right] \quad (5.10)$$

このハミルトニアンの固有状態は計算することができる [3]。

詳細は略すが自由場と同様の計算 (ただし非常に複雑) をおこなった結果

$$D(U) = \sqrt{2(y(1)^2 + \rho_1(1)^2 + y_2(1)^2 + y_3(1)^2 + \rho_3(1)^2)} \quad (5.11)$$

が得られる (記号の説明も長いので略すが自由場のときと同様の極座標表示)。

以上を一般化し、離散化した ϕ^4 理論では

$$D_\kappa(U) = \frac{1}{2^\kappa} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \log \left(\frac{\lambda_i^{(1)}}{\omega} \right) \right|^\kappa + \mathcal{A} \sum_j \left| \log \left(\frac{\lambda_j^{(2)}}{h_j \omega \lambda} \right) \right|^\kappa \quad (5.12)$$

のように求まる。ここで $\lambda_i^{(1)}, \lambda_j^{(2)}$ は A が 2 つのブロックにわかれ、それぞれの $s = 1$ での固有値。 h_j は適当な数。

参考文献

- [1] Nielsen, M. A., Dowling, M. R., Gu, M., & Doherty, A. C. (2006). Quantum computation as geometry. *Science*, 311(5764), 1133-1135.
- [2] Jefferson, R. A., & Myers, R. C. (2017). Circuit complexity in quantum field theory. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10), 107.
- [3] Bhattacharyya, Arpan, Arvind Shekar, and Aninda Sinha. "Circuit complexity in interacting QFTs and RG flows." *Journal of High Energy Physics* 2018.10 (2018): 140.
- [4] Carmi, D., Myers, R. C., & Rath, P. (2017). Comments on holographic complexity. *Journal of High Energy Physics*, 2017(3), 118.