カテゴリー論基礎 2
-- Adjoint --

Agenda

カテゴリー論基礎 2 -- Adjoint

はじめに

Part 1 Adjoint functor成立以前

Part 2 Adjoint functor

Part 3 unitとcounit

はじめに

はじめに

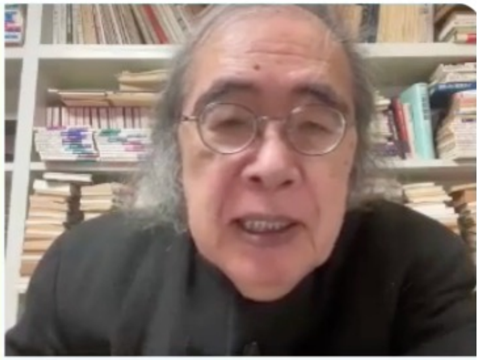
今回のセミナーは、今年5月に行った
「カテゴリー論基礎」の続編です。
https://www.marulabo.net/docs/category-theory/

5月のセミナーでは、カテゴリー論の基本的な構成要素である、Category, Functor, Natural Transformation とは何かを概説し、その上で、LimitやCoLimit,という構成を可能にするUniversal Propertyというコンセプトを紹介してきました。

1.00

Agenda Part 1 CategoryとFunctor

- Part 1-1 Category
  - Categoryとは何か？
  - Categoryの例
- Part 1-2 Functor
- Part 1-3 Natural Transformation



なぜ、「カテゴリー論基礎」なのか
前回のセミナーの「はじめに」から

科学・技術の急速な変化の中で、それらの基礎としての数学に関心を持つ人が、確実に増えていると僕は感じています。

ただ、新しく、あるいは新しい数学の勉強を始めようしようという人にとって、数学を学ぶことの難しさも増しているように思います。

数学の応用のスタイルは大きく変化しています。例えば、大規模言語モデルの振る舞いの理解に、copresheafや enriched category を使うなどは、以前には考えられなかったことです。

ただ、これまでの丸山のセミナーでは、copresheafやYoneda embeddingの話をしながら、カテゴリー論の基礎については系統的に話すことはなく、カテゴリー論の重要なlimitやadjointの概念についてはほとんど触れることができませんでした。

基本的な反省は、個々のトピックスでの数学の「応用」の範囲でカテゴリー論に触れているだけで、これから数学を学ぶなら、まずカテゴリー論を学ぶべきというメッセージを明確に出していなかったことだと考えています。

今後マルレクでは、カテゴリー論の基礎をきちんと学ぶことを目標の一つにとして、「カテゴリー論基礎」のセミナーを継続的に開催しようと思っていいます。

「カテゴリー論基礎」を始めた もう一つのきっかけ

5月に、この「カテゴリー論基礎」のセミナーを始めようと思い立ったきっかけが、もう一つあります。

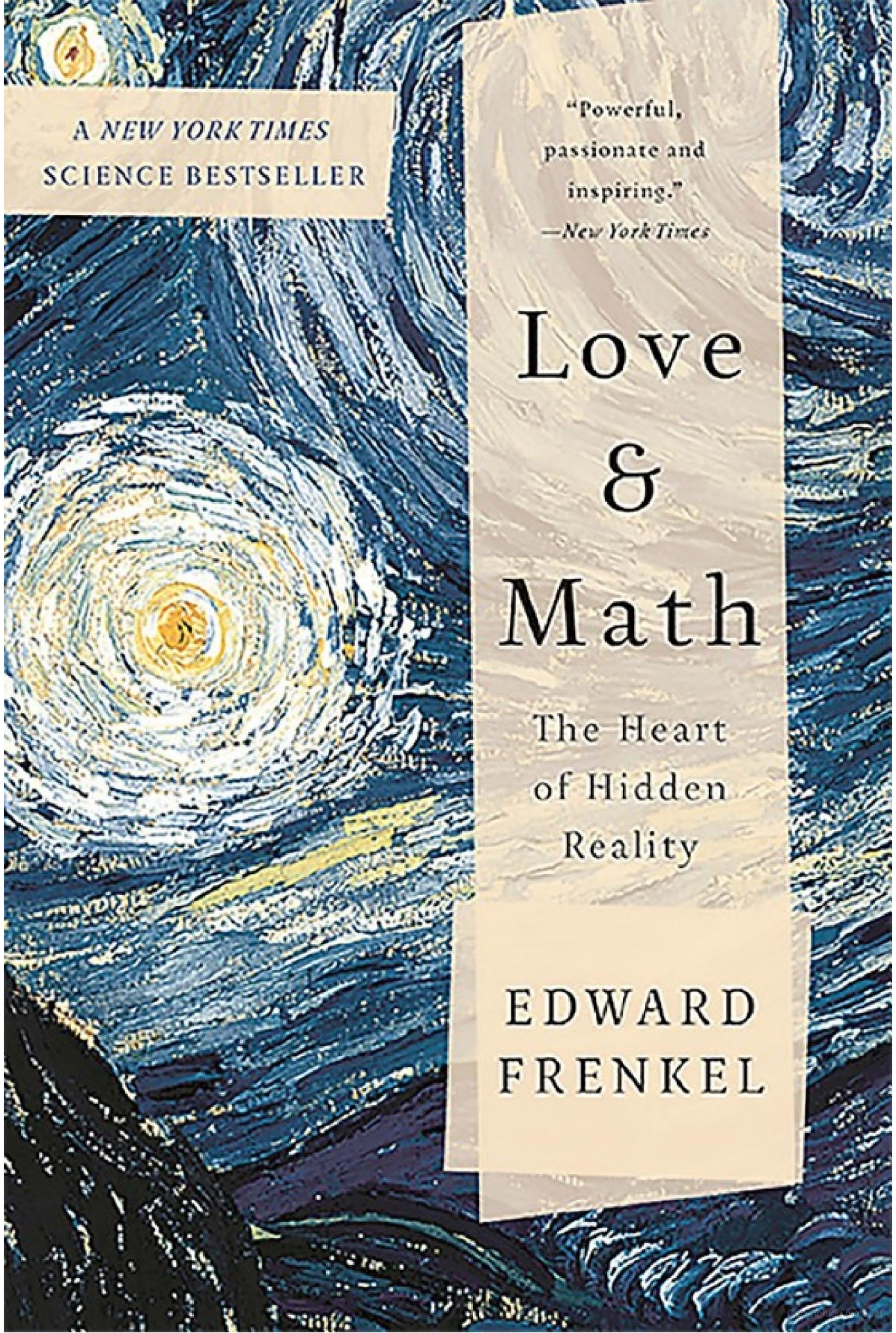
5月の連休中に、「ラングランズ予想」の一部が解かれたというニュースが飛び込んできました。

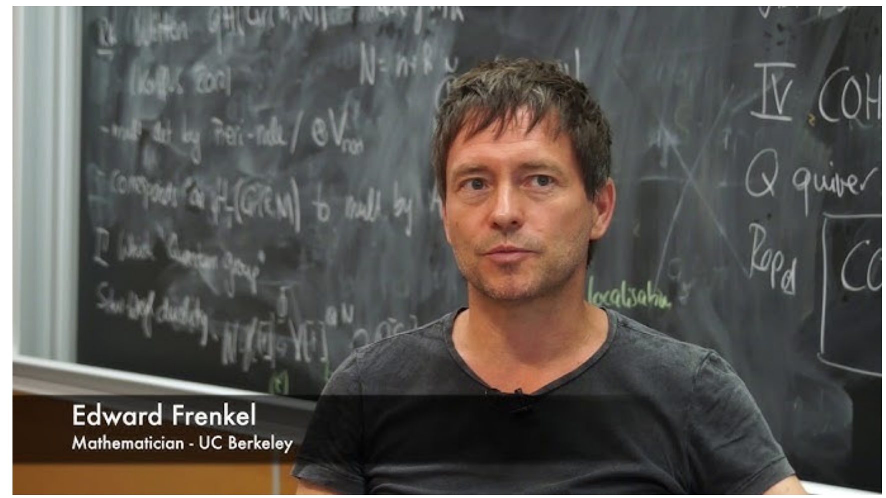
「ラングランズ予想」については、次の本が参考になると思います。

Edward Frenkel

Love and Math: The Heart of Hidden Reality

https://www.amazon.co.jp/-/en/Edward-Frenkel/dp/0465064957


A NEW YORK TIMES
SCIENCE BESTSELLER
"Powerful, passionate and inspiring."
—New York Times
Love & Math
The Heart of Hidden Reality
EDWARD FRENKEL


Edward Frenkel
Mathematician - UC Berkeley

今回の証明の意義については、Quanta誌の次の記事をお読みください。

"Monumental Proof Settles Geometric Langlands Conjecture"
https://www.quantamagazine.org/monumental-proof-settles-geometric-langlands-conjecture-20240719/

重要なことは、数学の「応用」だけでなく、数学そのものも、今、大きく変わろうとしているということです。

カテゴリー論の「基礎」とそこで使われている「言葉」をまず知ることが、進行中の数学の変化の「意味」を知る上で、必要な第一歩だと考えています。

マルレクでも、いつかは、「ラングランズ予想」を中心に、21世紀の数学の未来について話をしたいと考えています。

参考文献について

今回のセミナーの参考文献を上げたいと思います。

前回のセミナーと同様に、次の二つの資料は、おおいに参考になりました。

- **Tai-Danae Bradley**, **Category Theory**, https://www.math3ma.com/categories/category-theory
- **Tom Leinster**, **Basic Category Theory**, https://arxiv.org/pdf/1612.09375

今回のAdjointのセミナーについては、次の二つの資料を追加したいと思います。

- **John Baez**, **Applied Category Theory Course**
  https://math.ucr.edu/home/baez/act_course/index.html

- **Emily Riehl**, **Category Theory in Context**
  https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/Riehl-CTC.pdf

前者は、カテゴリー論とその応用についての、初心者向けに書かれたわかりやすい素晴らしいテキストです。注目すべきなのは、Baezの叙述には、Adjoint概念が一貫して貫かれていることです。カテゴリー論の理解に、Adjoint概念の理解が重要であることがよくわかります。

後者は、少し難しいのですが、最終章のタイトルが、"All Concepts are Kan Extensions" になっています。カテゴリー論の全ての概念は、"Kan Extension" に包摂されるという立場で書かれたカテゴリー論のテキストです。このテキストでも、Adjoint概念の重要さがわかります。

Part 1

Adjoint 概念成立以前

Agenda
カテゴリー論基礎 2 Part 1

Part 1 Adjoint functor成立以前

Adjointとは何か？

Adjoint operator

Galois connection

Adjointとは何か？

カテゴリー論基礎 2 Part 1-1

Adjunctionとは、特別に素晴らしい方法で相互作用するfunctorのペアのことです。

もちろん、これにはまだ続きがあるので、まずはAdjointを研究する動機についてお話ししたいと思います。

動機と形式的な定義、そしていくつかの例を1つの論文にまとめるのではなく、じっくりと時間をかけるのがいいでしょう。

....

adjoint functorという概念は、カテゴリー論のレンズなしでは見えない重要な数学的現象を捉えているのです。

Tai-Danae Bradley, What is an Adjunction?

確かに、私は、明らかに挑発的な主張をしようと思う。

すなわち、adjointnessは、数学の他の分野では捉えられていない、論理的にも数学的にも根本的に重要な概念である、という主張だ。

Steve Awodey, Category Theory, Oxford Logic Guides

その当時、私たちはカテゴリー論をさらなる研究努力のための分野とは見なさず、それは単なる言語であり、方向づけであると考えていた。

それが、adjoint functorの登場までの10年ほどの間、私たちが従ってきた限界であった。

Saunders Mac Lane,
Concepts and categories in perspective

Kan Extensionの概念は、カテゴリー論の他のすべての基本概念を包摂している。

Saunders Mac Lane,

Categories for the Working Mathematician

Saunders Mac Laneの本 “Categories for the Working Mathematician”のスローガンは、

「Adjoint functorはいたるところに存在する」

である。

この言葉の真偽を確かめるために、数学のさまざまな分野におけるAdjoint functorの例を見ていく。例から得た理解を補うために、3つの異なる方向からadjointの理論にアプローチしていく。

Tom Leinster, Basic Category Theory

これは f_*とほとんど同じに見える。唯一の違いは、

left adjoint $f_!$ が「for some」を用いて定義されているのに対し、right adjoint f_*は「for all」を用いて定義されている点である。

論理学では、「for some x」は存在量化子 $\exists x$ と呼ばれ、「for all x」は全称量化子 ∀x と呼ばれる。つまり、存在量化子と全称量化子が、左と右のadjointとして生じるということである。

これは、Bill Lawvereが次の革命的な論文で発見したものである。

F. Willam Lawvere, Adjointness in foundations, Dialectica 23 (1969).

John Baez, Applied Category Theory Course

この論文では、1967年にすでにカテゴリー論が、数学の日常的な実践に入り込んでいた多くの概念的進歩をいかに明確にしていたかを見ている。例えば、局所的なGalois connection（代数幾何学、モデル理論、線形代数など、)が、Specのようなfunctorにグローバル化され、より多くの情報を持つようになった。

また、「理論」は（記号的に提示される場合でも）明示的にカテゴリーとみなされ、モデルの受け皿となる集合の背景宇宙も同様である。(モデルそのものはfunctorであり、それゆえ、他の論理演算が局所的adjointとして特徴づけられる置換/合成の基本演算を保持する)。

Lawvere, Adjointness in foundations

数学とその基礎における形式と概念のDuality

数学と呼ばれる正確な知識の追求は、形式的なものと概念的なものと呼ばれる2つの側面を本質的に含んでいるように思われる。例えば、私たちは代数的に多項式を操作し、幾何学的に対応する曲線を視覚化する。また、ある瞬間には群論の公理から定理を導くことに集中し、次の瞬間にはその定理が参照する実際の群のクラスについて考える。このように、概念的なものはある意味で形式的なものの主題なのである。

Lawvere, Adjointness in foundations

数学者はdualityが大好きだ。例を挙げてdualityについて簡単に説明した後、最も純粋で美しいもののひとつを紹介しよう: Isbellのdualityである。

任意のカテゴリー Cに対して、これはC上のpresheafのカテゴリー、すなわち functor category $[\mathsf{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ と、C上のcopresheafのカテゴリー、すなわち $[\mathsf{C}, Set]^{op}$ の間のadjoint関係を与える。

$$(\mathcal{O} \dashv \mathrm{Spec})\colon \mathrm{CoPresheaves} \underset{\mathrm{Spec}}{\overset{\mathcal{O}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Presheaves}$$

John Baez, Isbell Duality

presheafを一般化された空間として、copresheafをCをモデルとした一般化された量として解釈すると（Lawvere 86, see at space and quantity）、Isbellの双対性は、数学に広く見られる幾何学と代数学の双対性（Gelfandの双対性、Stoneの双対性、平滑多様体のR代数の形式的双対への埋め込みなど）の原型となる。

Isbell Duality in nlab

Adjoint Operator

カテゴリー論基礎 2 Part 1-2

このトピック(ヒルベルト空間)に関するvon Neumannの2つの論文は、Springer Verlag社の雑誌『Mathematische Annalen』に受理されていた。

その原稿を見たMarshall Stoneは、von Neumannに、ヒルベルト空間上の線形作用素Tの扱いについて、線形変換Tの随伴項T*という概念を用いれば、より効果的なものになることを指摘した。

$$< Ta, b > = < a, T^{*}\mathrm{b} >$$

von Neumannは、彼が常にそうであったように、すぐにそのことに気づき、出版前に論文を撤回することを望んだ。それはすでに、タイプにかけられていたのだが。Springerは、フォン・ノイマンがこのテーマに関する本を書くという条件で、最終的にキャンセルすることに同意した[1932]。

この話（ Marshall Stoneから聞いた）は、adjoint operatorの定義が示す重要な概念の優位性を示している。

Stone（ George D. Birkhofの教え子）は線形微分方程式を研究していたので、そこで使われるAdjoint微分作用素の考え方を知っており、したがってこのadjointの概念をヒルベルト空間の文脈にどのように移行させるかをよく理解することができた。

その後、adjoint微分方程式の古いやや複雑な説明を読んだとき、これらの説明は理解しにくいと感じた。

これは、functor Fにright adjoinするfunctor Gを自然な同型性で記述するための一歩である。

$$\hom(Fa, b) \cong \hom(a, Gb)$$

しかし、後述するように、この一般概念は1957年まで現れなかった！

この観察は、新しい重要な概念が、段階を踏んで、ゆっくりと、そして通常、ヒルベルト-フォン・ノイマン-ストーンの場合のように、多くの人々の手によって発展していくことを示している。

Saunders Mac Lane,
Concepts and categories in perspective

adjointという名前の由来

Mac Laneの回想から、von Neumannのヒルベルト空間論に出てくる、線形作用素Tと そのadjoint operator T*の関係を表す次の式は、もともとはStoneのアイデアだったことがわかります。

$$< Ta, b > = < a, T^* b >$$

もっとも、この式から adjoint functorの基本的な定式への一歩である次の式

$$\hom(Fa, b) \cong \hom(a, Gb)$$

に至るまで、30年近い時間が必要だったことになります。

adjoint operator

このセッションでは、adjoint functorの祖先である adjoint operatorの基本的な性質を見ておこうと思います。

ただ、ここで述べられていることは、正確な議論ではありません。operatorのBoundednessに関する議論は、省略されています。

adjoint operatorとは？
随伴作用素とは？

線形作用素 Aに対して、次の式を満たすものとして定義されるA^*を、Aのadjoint operatorと呼びます。<・,・>は、内積を表しています。

$$< Ax, y > = < x, A^* y >$$

作用素Aを表す行列を同じくAで表すことにして、行列Aのエルミート共役(Hermitian conjugate)をとった行列を$\mathrm{A}^\dagger$とすると、

$$\mathrm{A}^\dagger = \overline{A^T} = \overline{(A)}^T$$

は、上の式を満たすことがわかります。

$$< Ax, y > = < x, \mathrm{A}^\dagger y >$$

ここでTは行列の行と列を入れ替える[転置]（transpose） $\left(A_{ij}\right)^T = A_{ji}$

$\bar{A}$は、Aのすべての要素を、その[複素共役]で置き換えたものです。

Hermitian adjoint
エルミート随伴

先の操作(Hermitian transpose)でAから作られる$\mathrm{A}^{\dagger}$を
Hermitian adjoint と呼びます。

次のような性質を持ちます。

- $A^{\dagger\dagger} = A$
- Aが逆を持つなら$\mathrm{A}^{\dagger}$もそうである。$\left(\mathrm{A}^{\dagger}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\dagger}$
- $(A + B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$
- $(\lambda A)^{\dagger} = \bar{\lambda} A^{\dagger}$
- $(\mathrm{AB})^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$

self-adjoint operator
自己随伴作用素

作用素Aが$A = A^\dagger$であるとき、Aをself-adjoint operatorと呼びます。

self-adjoint operatorを行列で表現したものを、self-adjoint matrix、あるいはHermitian matrix と呼びます。

Hermitian operator
エルミート演算子

$H=H^\dagger$ である時、Hをエルミート行列という。

cが複素数の時、$c=c^*$ $(=c^\dagger)$ は、cが実数であることと同値である。$H=H^\dagger$は、$c=c^*$ の行列バージョンと考えていい。

量子の世界では、量子の状態は直接観測できず、物理的に観測可能な量(Observable)は、実数に近い性質を持つエルミートな線形演算子として記述される。

実際に観測される量は、エルミート演算子の固有値である。

エルミート演算子の固有値は、実数である。

スカラー・ベクトル・行列のエルミート共役

スカラー

a = x + yi ⟺ a* = x − yi

ベクトル

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \langle v| = (a_1^*,\ a_2^*,\ a_3^*,\ \cdots\ ,\ a_n^*)$$

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$$

Hermitian matrix
エルミート行列

行列のエルミート共役が元の行列に等しい行列を、エルミート行列という。

行列Mがエルミート $\Longleftrightarrow$ $M = M^\dagger$

エルミート行列の例

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の時、$X^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。Xはエルミートである。

$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の時、$Z^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。Zはエルミートである。

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の時、$\mathrm{H}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。Hはエルミートである。

Unitary Matrix
ユニタリ行列

行列のエルミート共役と元の行列の積が単位行列 I に等しい行列を、ユニタリ行列という。

行列Uがユニタリ ⟺ $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I$

ユニタリ行列の例

$$X^{\dagger}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 。Xはユニタリである。

$$Z^{\dagger}Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Zはユニタリである。

$$H^{\dagger}H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hはユニタリである。

Normal Matrix
正規行列

行列Nが、次の条件を満たす時、正規行列という。

行列Nが正規 ⟺ $NN^{\dagger} = N^{\dagger}N$

ユニタリ行列は正規行列である。

$NN^{\dagger} = N^{\dagger}N = I$ だから

エルミート行列は、正規行列である。

N がエルミートの時、$N = N^{\dagger}$ だから

$$NN^{\dagger} = N^2 = \left(N^{\dagger}\right)^2 = N^{\dagger}N$$

エルミート行列の固有値は、実数である

エルミート行列Lの固有ベクトルを|λ>、固有値をλとする。

エルミート行列　　固有値

$$\mathbf{L}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

固有ベクトル　　固有ベクトル

この時、 $$\langle\lambda|\mathbf{L}^\dagger = \langle\lambda|\lambda^*$$ である。

最初の式に左から<λ|、二つ目の式に右から|λ>をかけて、

$$\langle\lambda|\mathbf{L}|\lambda\rangle = \lambda\ \langle\lambda|\lambda\rangle$$
$$\langle\lambda|\mathbf{L}|\lambda\rangle = \lambda^*\ \langle\lambda|\lambda\rangle$$

ここで、L†=L (Lはエルミートだから)を使った。

これから、λ*=λ。すなわち、λは実数である。

エルミート行列の固有ベクトルは直交基底をなす

エルミート行列 Lの異なる二つの固有ベクトルを $|\lambda_1>$, $|\lambda_2>$、その固有値をλ_1, λ_2 とすると、

$$\mathbf{L}|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle$$

$$\mathbf{L}|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle$$

ここでは、固有値が実数であることを使っている。

$$\langle\lambda_1|\mathbf{L} = \lambda_1\langle\lambda_1|$$

$$\mathbf{L}|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\lambda_1|\mathbf{L}|\lambda_2\rangle &= \lambda_1\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \\ \langle\lambda_1|\mathbf{L}|\lambda_2\rangle &= \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle\end{aligned}}$$

エルミート行列の固有ベクトルは、直交基底をなす。

$$\boxed{(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0.}$$

Galois connections

カテゴリー論基礎 2 Part 1-3

本稿は、1941年にシカゴ大学で開催されたアメリカ数学会の夏期大会で行われた、数学的関係の理論に関する私のコロキウム講義の一部を中心にまとめたものである。

…

本稿の目的は、私がGalois connexion と呼んでいる、構造間の一般的な対応について議論することである。

このような対応関係は、実にさまざまな数学理論に登場し、関係の理論にもいくつかの例がある。したがって、その主な性質と解釈について個別に説明することが望ましいと思われる。

この名前は、通常のガロア方程式論からとったもので、部分群と部分体の間の対応は、このタイプの特別な対応を表している。

Oystein Ore, Galois Connexions

数学者は次のような状況に精通している:

2つの「世界」があり、これらの世界を行き来する2つの変換関数がある。さらに、あるオブジェクトが1つの世界からもう1つの世界へ変換され、そして最初の世界へ戻された後、さらなる変換が同じ結果を生むというある安定性に達する。

特に、3つの変換は常に1つの変換と同じ結果をもたらす(どこから始めても)。さらに、どちらの世界も自然な秩序を持つことが多い。変換プロセスがこれらの秩序を尊重する場合、単純かつ豊かで、非常にエレガントな方法で処理できる状況が頻繁に発生する。

その単純さは簡潔な定義（定義1を参照）に反映され、その豊かさは定義から導かれる結果の豊かさに現れる（命題2-6を参照）。これらの楽しい状況に惹きつけられ、体の拡張E：Fと、部分体Fを固定するEの自己同型写像の群の部分群の世界との間の関係の研究を開始した（例1と19を参照）。今日、この分野はガロア理論として知られている。

本論文の多くの結果の証明はよく知られているか、簡単に得られるので、ここでは省略する。Galoia connection(ガロア接続)は元々、（順序を保存するのではなく）順序を逆にする変換を伴う対称的だが逆変形的な形で表現されていた。

M.Erne et al,
A Primer on Galois Connections

OreのGalois connection論

前回のセッションで、Kanのadjoint functorの理論に先行するものとして、1930年代初頭の von Neumann (正確に言うと inspired by Marshall Stone)　のヒルベルト空間論での adjoint operatorの導入があると言う話をしました。

self-adjoint operator としてのエルミート演算子の特徴づけは、現在に至るも、量子論の理論的枠組みの最も基本的なツールの一つです。

1940年代に入ると、数学のまったく異なる分野からadjoint概念の豊かさに注目した研究が生まれます。Oystein OreのGalois connection論です。

彼は、順序関係（前順序 preorder）が定義されている二つの集合 A, B の間に二つの単調関数(monotone function)

$F : A \to B$ と $G : B \to A$ が定義されている時、A, B のすべての要素 $a \in A, b \in B$ について次の式が成り立つ時、AとBは、Galois connection の関係にあると言います。

$$F(a) \le b \ \ if\ and\ only\ if \ \ a \le G(b)$$

preorder(前順序) $\le$ の定義

$a \le a$

$a \le b$ かつ $b \le c$ ならば $a \le c$

partial order(半順序) $\le$ の定義

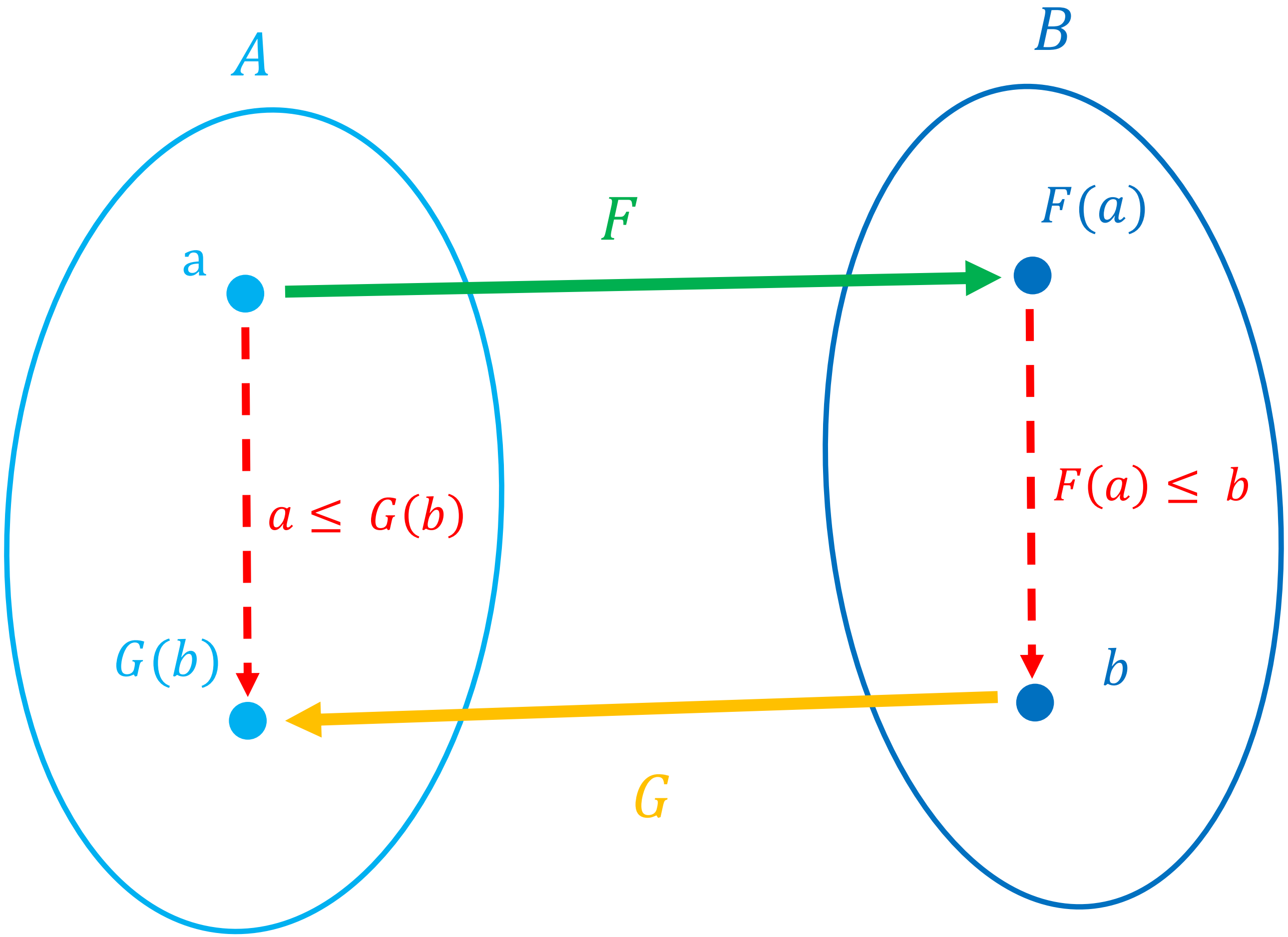
$\le$ はpreorder

$a \le b$ かつ $b \le a$ なら $a = b$

monotone function $f : A \to B$ の定義

$x \le_A y$ ならば $f(x) \le_B f(y)$

Galois connection



すべての $a \in A, b \in B$ について

$$F(a) \le b \text{ if and only if } a \le G(b)$$

Galois connectionで結ばれた
FとGの関係を考える

Galois connectionで結ばれた二つの関数FとGの関係を考えてみましょう。

一見すると、GとFは互いに逆の関数になっているように見えるかもしれません。関数FをF(x)=2xだとしましょう。確かに、AとBを実数全体の集合Rだとすれば、G(x)=x/2とF(x)の逆関数をとれば、この互いに逆のF,Gの組は、 Galois connectionの条件を満たします。

ただ、この(F,G)=(2x, x/2)の組は、A,Bが自然数全体の集合の場合にはうまく働きません。たとえば、Bの要素である3を取った時、G(3)=3/2 は、Aの要素ではありません。方程式 2x=3の解xは、自然数の中にはないのです。

この辺りの議論は、Baezの講義のLecture 6 “Computing Adjoints”に展開されています。
https://math.ucr.edu/home/baez/act_course/lecture_6.html
そこでは、カテゴリー論的なadjointの用語を使っているのですが、結論だけを紹介します。

- もし$f: A \to B$がright adjoint $g: B \to A$を持ち、Bが半順序ならば、right adjointはユニークに決まり、次の式で表される。(最小上界)

$$g(b) = \bigwedge \{a \in A: f(a) \leq_A b\}$$

- もしg: $B \to A$が left adjoint f: $A \to B$を持ち、Aが半順序ならば、left adjointはユニークに決まり、次の式で表される。(最大下界)

$$\mathrm{f}(a) = \bigvee \{b \in B: a \leq_B g(b)\}$$

Adjoint functor へ

これまで、カテゴリー論のAdjoint functor に先行した、二つのAdjoint概念を紹介してきました。

- ヒルベルト空間論でのAdjoint operator

$$< Ax, y > = < x, \mathrm{A}^{\dagger} y >$$

- 順序が定義された集合上でのGalois connection

$$F(a) \leq\ b\ =\ a \leq\ G(b)$$

次回から、カテゴリー論のAdjoint functorを紹介したいと思います。

$$\hom(Fa, b) \cong \hom(a, Gb)$$

参考資料

- Øystein Ore, *Galois connexions* , Trans. AMS ***55*** (1944) pp.493-513. https://www.ams.org/journals/tran/1944-055-00/S0002-9947-1944-0010555-7/S0002-9947-1944-0010555-7.pdf

- M. Erné, E. Koslowski, A. Melton, G. E. Strecker, *A primer in Galois connections* , Annals New York Academy of Sciences ***704*** (1993) pp.103-125. https://www.scribd.com/document/332360871/A-Primer-on-Galois-Connections

- John Baez, Applied Category Theory Course https://math.ucr.edu/home/baez/act_course/index.html

Part 2

Adjoint functor

Agenda
カテゴリー論基礎 2 Part2

Part 2 Adjoint functor

Adjoint functorの定義

Forgetful functor とFree functor

Free functor とベクトル空間

$Free \dashv Forgetful$ のペアではないAdjoint functor

Adjoint Functor の定義

理論の目的は、実際には、次の世代、つまり私たちの生徒やそのまた生徒などが、できるだけ苦痛を味わうことなく、本質的な部分を吸収できるように、過去の経験を体系的に整理することにある、

そしてこれこそが、あらゆる科学的活動を、最終的に行き詰まることなく積み重ねることができる唯一の方法なのである。

Attyah, How research is carried out

adjointを理解することは、数学的ツールキットに貴重な追加を与える。プロの純粋数学者のほとんどは、カテゴリーやファンクターが何であるかを知っているが、adjointについて知っている人ははるかに少ない。

さらに言えば、adjoint functorは一般的で簡単なものであり、adjointを知ることは数学に固有な風景のパターンを見つけるのに役立つ。

Tom Leinster, Basic Category Theory

Adjoint Functor

二つのカテゴリー$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$について、$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$の間の次のような反対の向きを持つfunctorのペア FとGを考えます。

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B} \qquad \begin{aligned} F &: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \\ G &: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \end{aligned}$$

大雑把に言えば、$A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について、

写像 $F(A) \to B$と写像 $B \to G(A)$ が、本質的に等しい時、
FはGのleft adjoint 、GはFのleft adjoint
であるといいます。

Adjoint Functorの定義

すこし形式的に整理しましょう。

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$$ で、

$A \in \mathfrak{A}$ と $B \in \mathfrak{B}$ について、「自然に」

$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$ が成り立つ時、

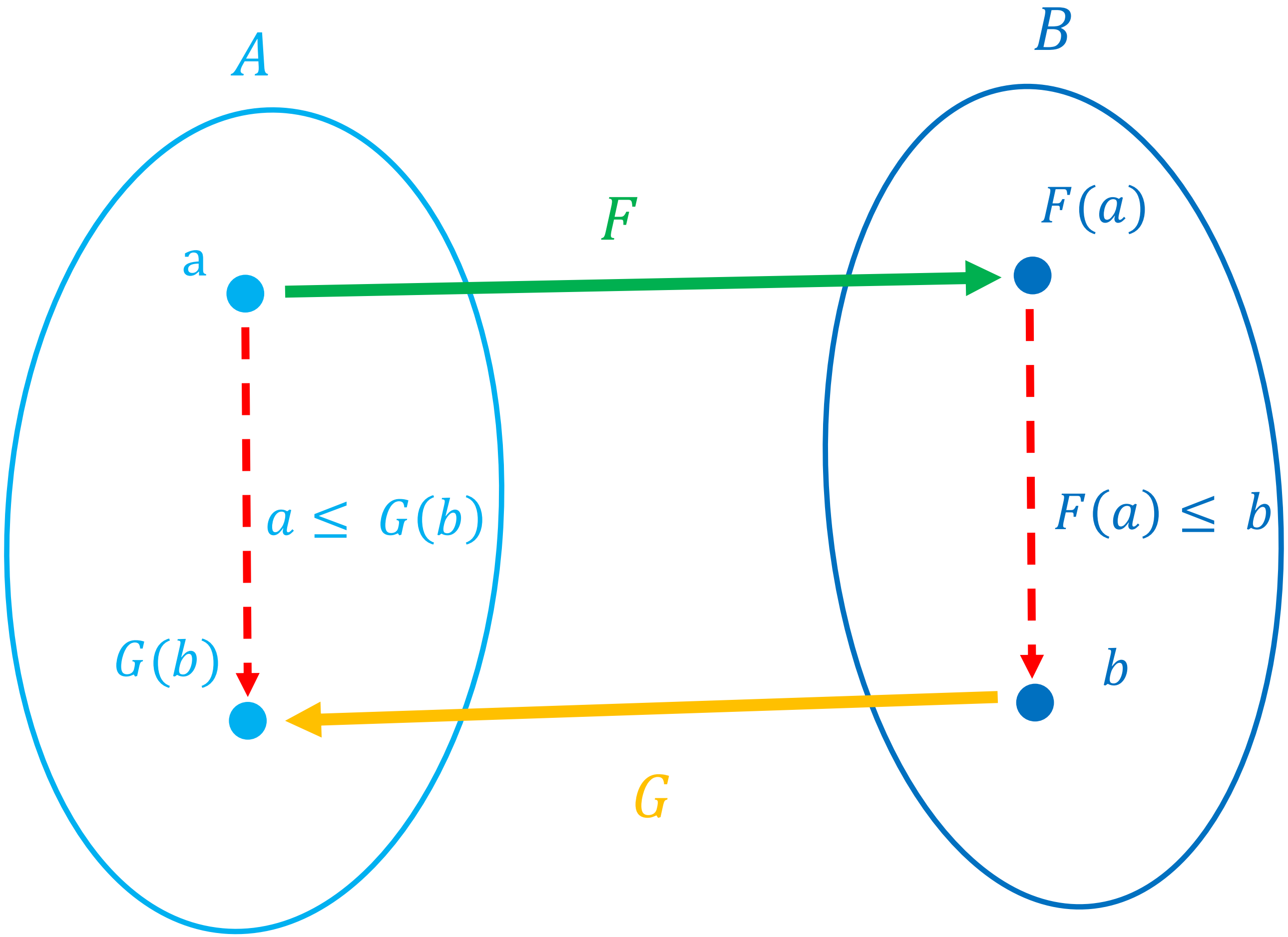
FをGの$left\ adjoint$

GをFの$right\ adjoint$

と呼んで、$F \dashv G$ と表す。

先のセッションで見た、Galoia connectionの図を少し書き換えると次のような関係になります。

Galois connection



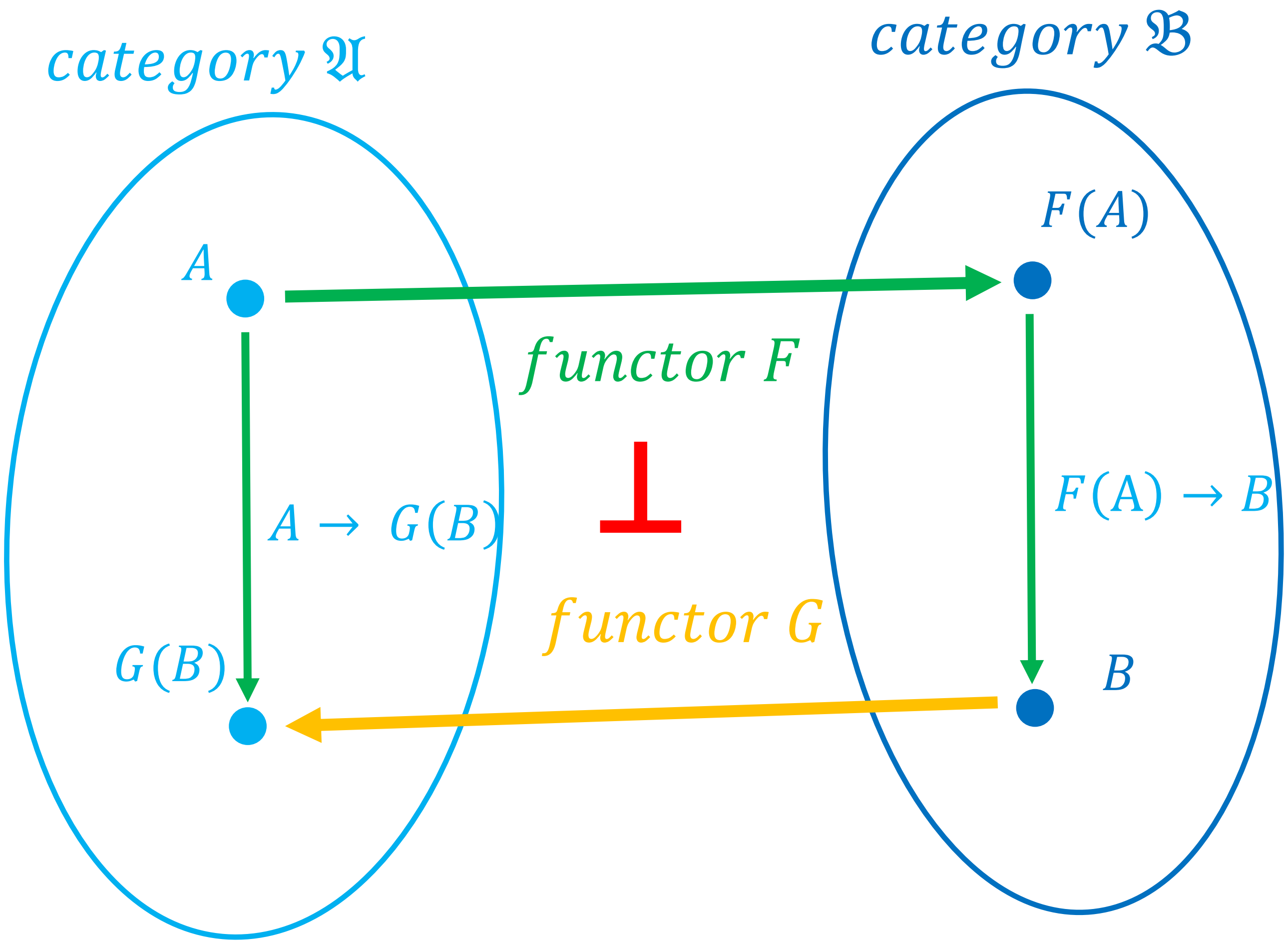
すべての $a \in A, b \in B$ について

$$F(a) \leq b \;\; if\ and\ only\ if \;\; a \leq G(b)$$

Adjoint functor $F \dashv G$

すべての $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

$$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$$



$A \rightarrow\ G(B)$
$F(\mathrm{A}) \rightarrow B$ は、functor F,Gの natural transformationである。

$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$の二つの条件

$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$ とは、

- $\mathfrak{B}(F(A), B)$ならば$\mathfrak{A}(A, G(B))$が成り立ち、かつ
- $\mathfrak{A}(A, G(B))$ならば$\mathfrak{B}(F(A), B)$が成り立つと言うことです。

前者は

$$(g: F(A) \rightarrow B) \longmapsto (\bar{g}: A \rightarrow G(B))$$

後者は、

$$(\bar{f}: F(A) \rightarrow B) \longleftarrow (f: A \rightarrow G(B))$$

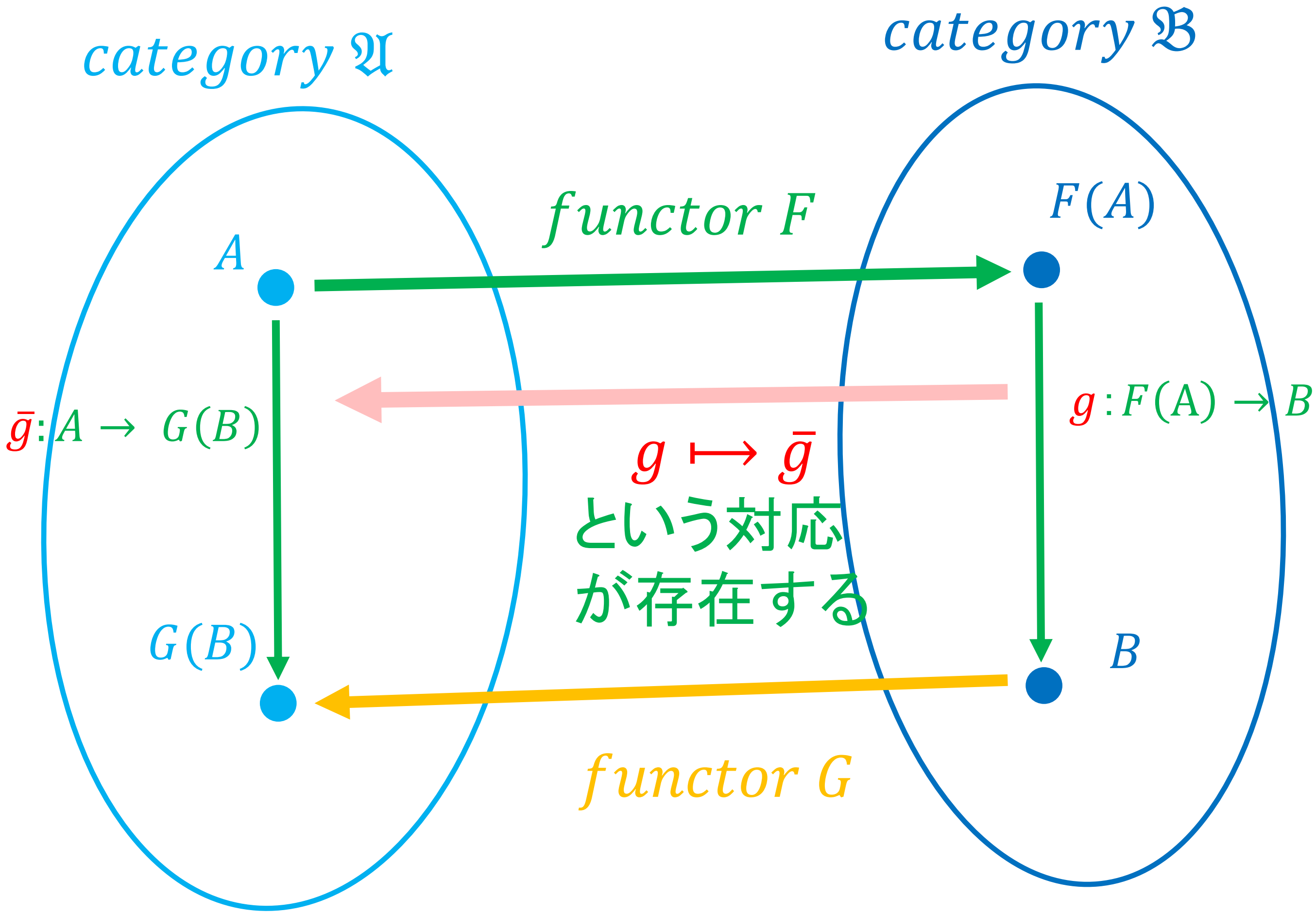
という対応が存在することを意味します。

$\bar{g}$ をgの$transpose$,

$\bar{f}$をfのtransposeと言います。

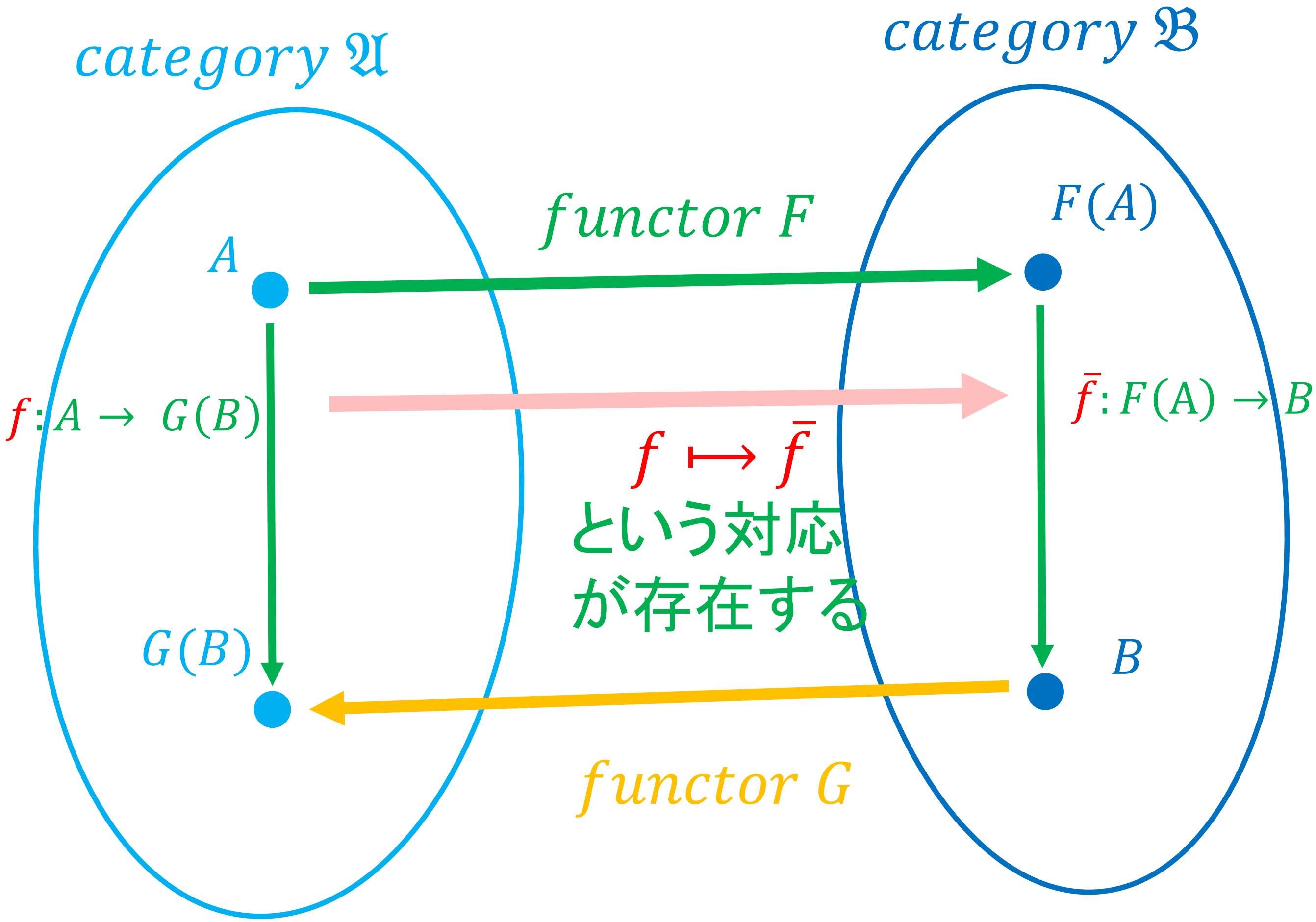
すべての A $\in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$について

$\mathfrak{B}(F(A), B) \longrightarrow \mathfrak{A}(A, G(B))$ならば



すべての $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$ について

$\mathfrak{B}(F(A), B) \longleftarrow \mathfrak{A}(A, G(B))$ ならば



transposeの性質

$A \to\ G(B)$や$F(\mathrm{A}) \to B$ は、二つのfunctor間の関係を表すnatural transformation であるのだが、さきの図での説明は、特定のAまたはBについての議論である。

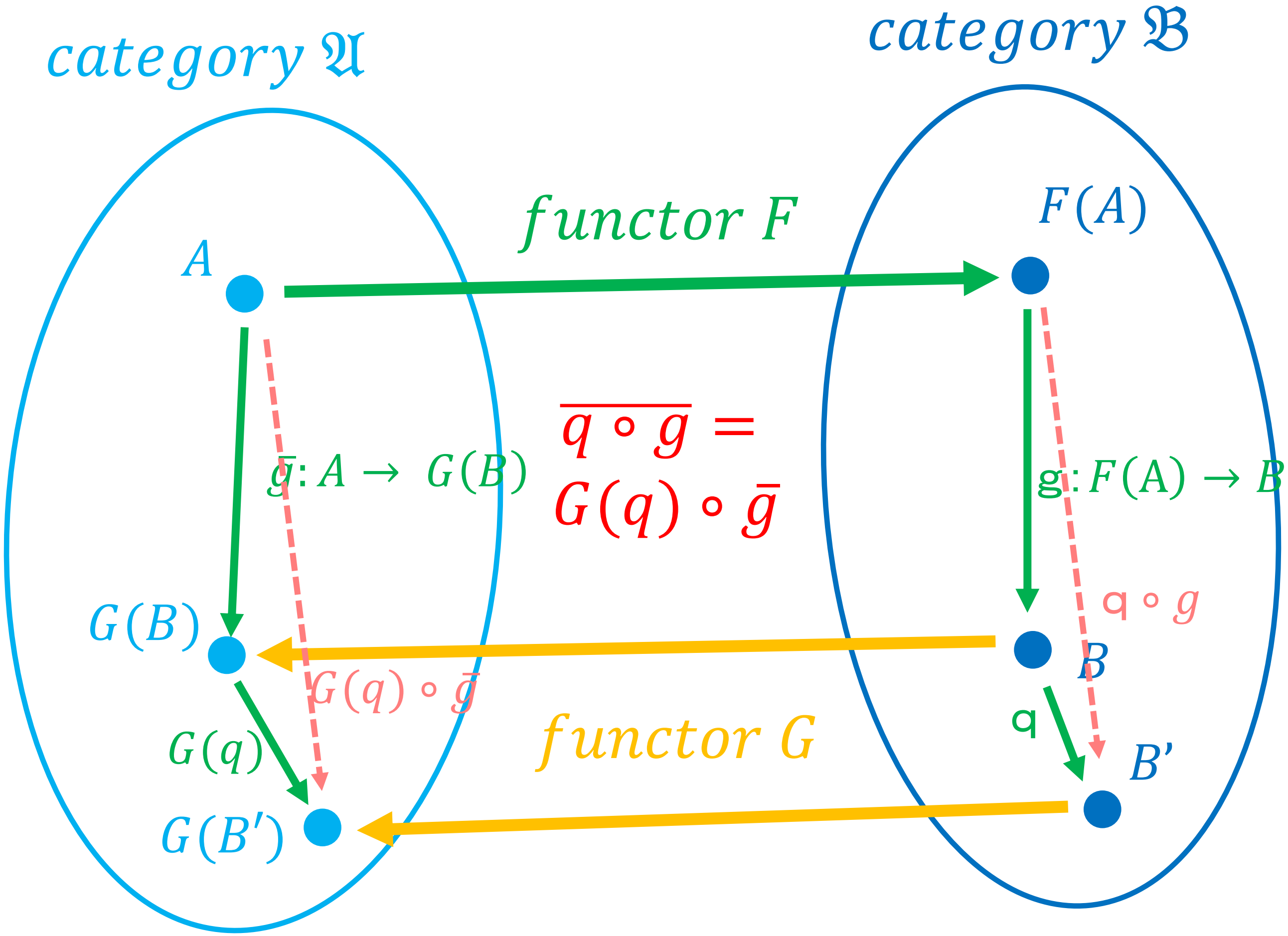
先に定義したAdjointという関係が、すべての $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について成り立つ関係であるかは、本当は、検証が必要である。

カテゴリー$\mathfrak{B}$で $q\colon B \to B'$で与えられる任意の$B' \in \mathfrak{B}$について、あるいは、カテゴリー$\mathfrak{A}$で $p\colon A' \to A$で与えられる任意の$A' \in \mathfrak{A}$について、transposeがどのような性質を持つのか調べてみよう。

すべての $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

$\mathfrak{B}(F(A), B) \longrightarrow \mathfrak{A}(A, G(B))$ならば

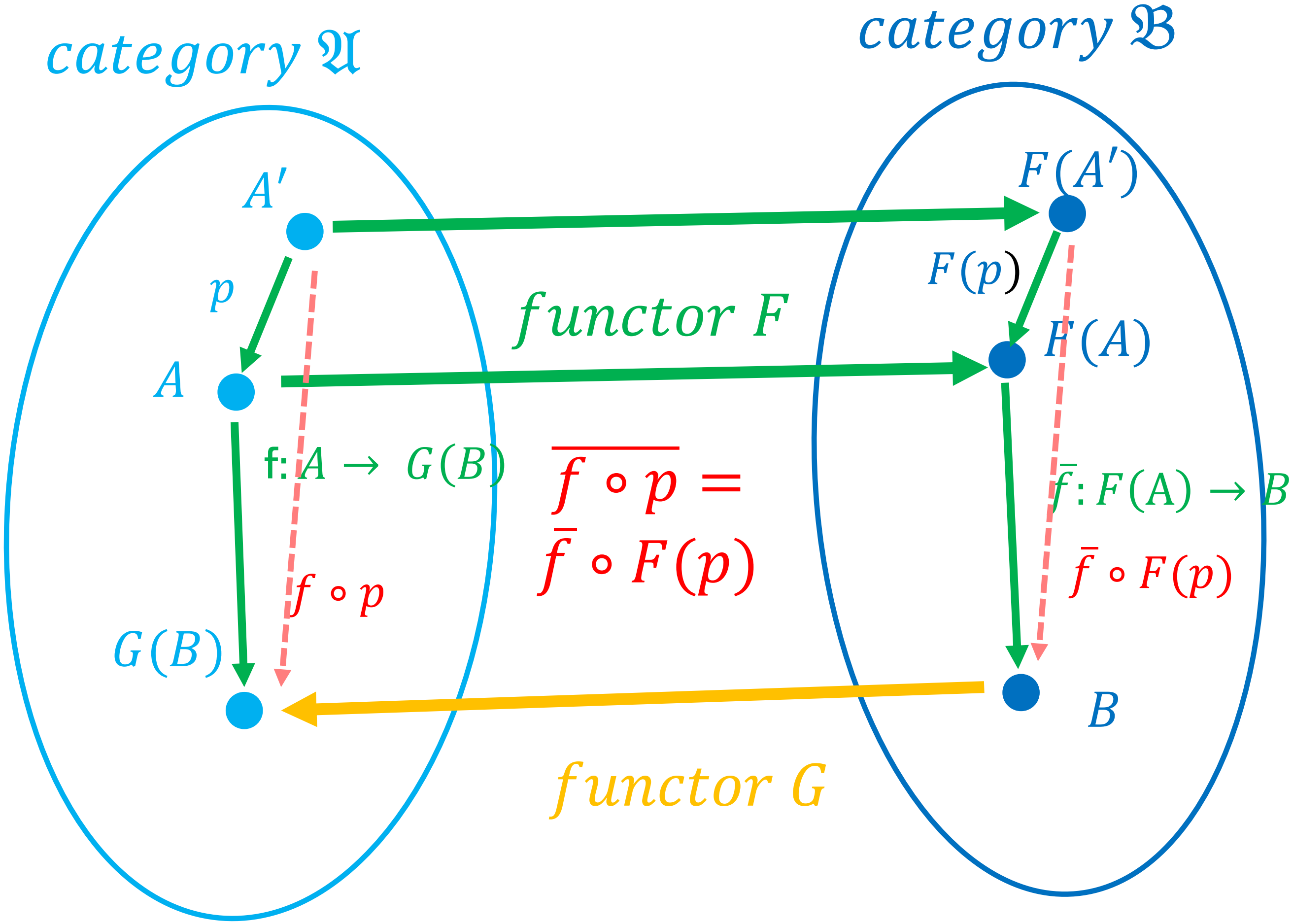
$$\overline{\left(F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'\right)} = \left(A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B')\right)$$



すべての $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

$\mathfrak{B}(F(A), B) \longleftarrow \mathfrak{A}(A, G(B))$ならば

$$\overline{\left(A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)\right)} = \left(F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B\right)$$



Forgetful functor とFree functorの例

群のカテゴリーの生成

カテゴリー論基礎 2 Part 2-2

Adjoint functorの定義

$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$ で、

$a \in \mathfrak{A}$ と $b \in \mathfrak{B}$ について、

$\mathfrak{B}(F(a), b) \cong \mathfrak{A}(a, G(b))$ が成り立つ時、

FをGの$left\ adjoint$、GをFの$right\ adjoint$

と呼んで、$F \dashv G$ と表す。

二つのカテゴリー A, Bの間に、反対の向きを持つfunctorのペア
F: A → B と G: B → Aがあって、A, Bのオブジェクト a, b について、
Bの射 F(a) → b と Aの射 a → G(b) が同値である時、
FをGのleft adjoint、GをFのright adjointと呼んで、
F ⊣ G と表します。

代表的なAdjoint functorのペア

Free functor $\dashv$ Forgetful functor

今回のセッションでは、adjoint関係を満たす、二つのカテゴリー間の反対方向の向きをもつAdjoint functor F, Gの組 $F \dashv G$ の代表的な例を紹介しようと思います。

カテゴリー論的に興味深いのは、Free functorと呼ばれるfunctorと、Forgetful functor と呼ばれるfunctorの間の、次のようなadjoint関係です。

Free functor $\dashv$ Forgetful functor

Forgetful functor

まずは、Forgetful functorが、どのようなfunctorかを見ておきましょう。

Forgetful functor U: A → B は、カテゴリー A に作用して、A のオブジェクトの一部（ある場合には全部）、あるいはAの性質（それは、Aの射の性質によって定義されています）の一部（ある場合には全部）を忘れ去ったカテゴリー B に変えます。

Forgetful functorのいくつかの例を見てみましょう。

Forgetful functorの例

- Forgetful functor U: **Grp** → **Set** を次のように定義します。ここに**Grp**は群のカテゴリーで**Set**は集合のカテゴリーです。U(G)を、群Gの要素からなる集合とします。f: G → H を**Grp**の群準同型写像とする時、U(f)は単なるfという名前の関数に移されます。Uは、群の構造と準同型写像を忘れさせるのです。

- **Ring**を環のカテゴリーとします。
Forgetful functor U: **Ring** → **Set** は、環の構造をすべて忘れて、構造のない単なる集合を作ります。

- **Vect**を体k上のベクトル空間とします。
Forgetful functor U: **Vect** → **Set** は、ベクトル空間のの構造をすべて忘れて、単なる集合を作ります。

なんでも忘れてしまう Forgetful functorが、数学的に何の役に立つのかはっきりしないと思われたかもしれません。

たとえば、U: **Grp** → **Set** を先に見た群のカテゴリーに作用するForgetful functor とします。Uの作用の結果は、確かにつまらないものでした。

ただ、次のような問題を考えてみましょう。

Uを U: **Grp** → **Set** というForgetful functor とする時、
F ⊣ UであるUのleft adjoint functor F は存在するか？

実は、この場合には、F: **Set** → **Grp** で F ⊣ Uであるfunctor Fが存在します。

Free functor

Forgetful functor Uに対して、そのleft adjoint になる functor を、Free functor と言います。

Free functor
left adjoint

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Grp} \arrow[d, shift left=2, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left=2, "F"] \end{tikzcd}$$

Forgetful functor
right adjoint

Forgetful functor Uは、このFree functor F と組み合わせて、$F \dashv U$ の形を作ると、いろいろ面白いことが起こります。

すべてのfunctorが left adjointを持つとは限りません。また、すべての left adjoint functor が Free functor と呼ばれるわけではありません。

Free group

Free functorの”Free”という名前は、“Free group（自由生成群）”の”Free”と同じものです。

次に見るように、ある集合Sに対して F(S)が群になるように、functor F: **Set** → **Grp** を構成することは容易です。また、その構成から、F(S)が Free groupであることは、すぐにわかります。

Free functor
left adjoint

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \arrow[d, shift left=2, "U"] \\
\mathbf{Set} \arrow[u, shift left=2, "F"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

Forgetful functor
right adjoint

F(S)のオブジェクトの構成

- Sの要素 $x, y, z, \ldots \in S$ に対してF(S)の要素を $x^{-4}y^2xz^{-3}$ といったSの要素に $x^{-1}, \mathrm{y}^{-1}, \mathrm{z}^{-1}, \ldots$ を加えたもの（「アルファベット」）の任意の自由な並びの「語」とします。$xxx = x^3, y^{-1}y^{-1} = y^{-2}, \ \ldots$ 等々と表記しています。
- この時、$xx^{-1}, x^{-1}x, yy^{-1}, y^{-1}y, \ldots$という「アルファベット」の並びが「語」の中に現れたら、それらを「語」から削除することにします。ですから、x^3xyも$x^4yz^{-1}z$も$x^2yy^{-1}\ x^2y$もF(S)の中では、x^4yに等しくなります。
- F(S)の要素である語の積を、語の「連接」と定義します。語 $x^{-4}yx$ と語 xzy^{-3} の積は、$x^{-4}yx^2y^{-3}$ になります。

F(S)が群(Free group)の構造を持つのは明らかです。

F(f)の射の構成

カテゴリー **Set**内の任意の射 $f\colon S \to S'$ がカテゴリー**Grp**の射 $F(f)\colon F(S) \to F(S')$に移され、それが群の準同型写像となっていることを見ておきましょう。

たとえば、**Set**内の射 $f\colon S \to S'$ が

$$f\colon \{w, x. y, z\} \to \{u, v\}$$

で、$f(w) = f(x) = f(z) = u, f(z) = v$ で定義されているとしましょう。この時、

$$F(f)\colon F(\{w, x. y, z\}) \to F(\{u, v\})$$

は、群の準同型写像で、

$$x^{-4}yx^2zy^{-3} \in F(\{w, x. y, z\}) \text{ を}$$
$$u^{-4}uu^2vu^{-3} = u^{-1}vu^{-3} \in F(\{u, v\})\text{に移します。}$$

Fはfunctorになっています。

Free functorとベクトル空間

カテゴリー論基礎 2 Part 2-3

ベクトル空間は、ベクトルの加算である二項演算 v+wと、基礎となる体k上のスカラーc に対する単項乗算c･vを備えた、ある公理を満たす集合である。ベクトル空間からその基礎となる「ベクトル」の集合への移行はfunctor的である。つまり、その基礎となる関数への線形変換の Forgetful Functor $\mathrm{U}：\mathrm{Vect}_{\mathrm{k}} \rightarrow \mathrm{Set}$が存在する。

より興味深い課題は、この変換の方向を逆にし、集合Sからベクトル空間 を構築することである。

カーディナリティの制限により、kベクトル空間のベクトル集合としてSを直接使用することができない場合がある。また、この制約がないとしても、Sにおけるベクトルの加算を定義する自然な方法はない。

その代わりのベクトル空間を作るもっと自然な方法は、Sの要素を基底とすることである。こうすれば、ベクトルは、$k_i \in k$、$s_i \in S$、$n \geq 0$ の有限和 $k_1 s_1 + \cdots + k_n s_n$となる。これによって、次元がSのカーディナリティに等しいベクトル空間k[S]を定義する。これは、集合S上の自由ベクトル空間と呼ばれる。

さらに、「自然な」という形容詞を使ったことが示すように、
関数 f : S → T は、基底要素上で定義された線形写像
k[f] : k[S] → k[T] を明白な方法で生成する。

Emily Riehl, Category Theory in Context

Free functorとベクトル空間

前回のセッションでは、集合のカテゴリー**Set**から群のカテゴリー**Grp**を生成する Free functor Fの働きを見てきました。

このFree functor Fは、U:**Grp** → **Set** である Forgetful functor Uのleft adjoint なのですが、そのことについてはきちんと説明していませんでした。

今回のセッションでは、集合のカテゴリー**Set**からベクトル空間のカテゴリー**Vect**を生成する Free functor Fの構成を見ていこうと思います。

自由ベクトル空間の生成

Forgetful functor $U\colon \boldsymbol{Vect} \to \boldsymbol{Set}$ の働きでつくられた集合をSとします。Free functor $F\colon \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Vect}$ が生成する$F(S)$を次のように定義します。

$F(S)$の要素を、$s \in S$とスカラー$\lambda_s \in k$の次のような形の可能な自由なすべての組み合わせとします。

$$\sum_{s \in S} \lambda_s\, s$$

冒頭で Emily Riehl が、「Sの要素を基底とする」と言ったのは、この形のことです。

$F(S)$はベクトル空間

こうした $F(S)$が、ベクトル空間を作ることは、次のようにして簡単にわかります。

$F(S)$の要素には、和が定義できます。

$$\sum_{s\in S}\lambda_s s+\sum_{s\in S}\mu_s s=\sum_{s\in S}(\lambda_s+\mu_s)s \quad \in F(S)$$

また、$F(S)$の要素には、スカラー倍が定義できます。

$$c\sum_{s\in S}\lambda_s s=\sum_{s\in S}(c\lambda_s)s \quad \in F(S)$$

Free functor F は、Forgetful functor Uの left adjoint であること

$U\colon \boldsymbol{Vect_k} \to \boldsymbol{Set}$ を forgetful functor

$V\colon \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Vect_k}$を Uのright adjointのfree functorとします。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Vect}_k \arrow[d, shift left=2, "U"] \\
\mathbf{Set}, \arrow[u, shift left=2, "F"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

$F \dashv U$　ということは、ある集合Sとあるベクトル空間Vをとった時、カテゴリー$\boldsymbol{Vect_k}$の射である線型写像 $F(S) \to \mathrm{V}$ と

カテゴリー $\boldsymbol{Set}$の射である関数 $S \to U(V)$ とが、本質的には等しいということです。

証明すべきこと

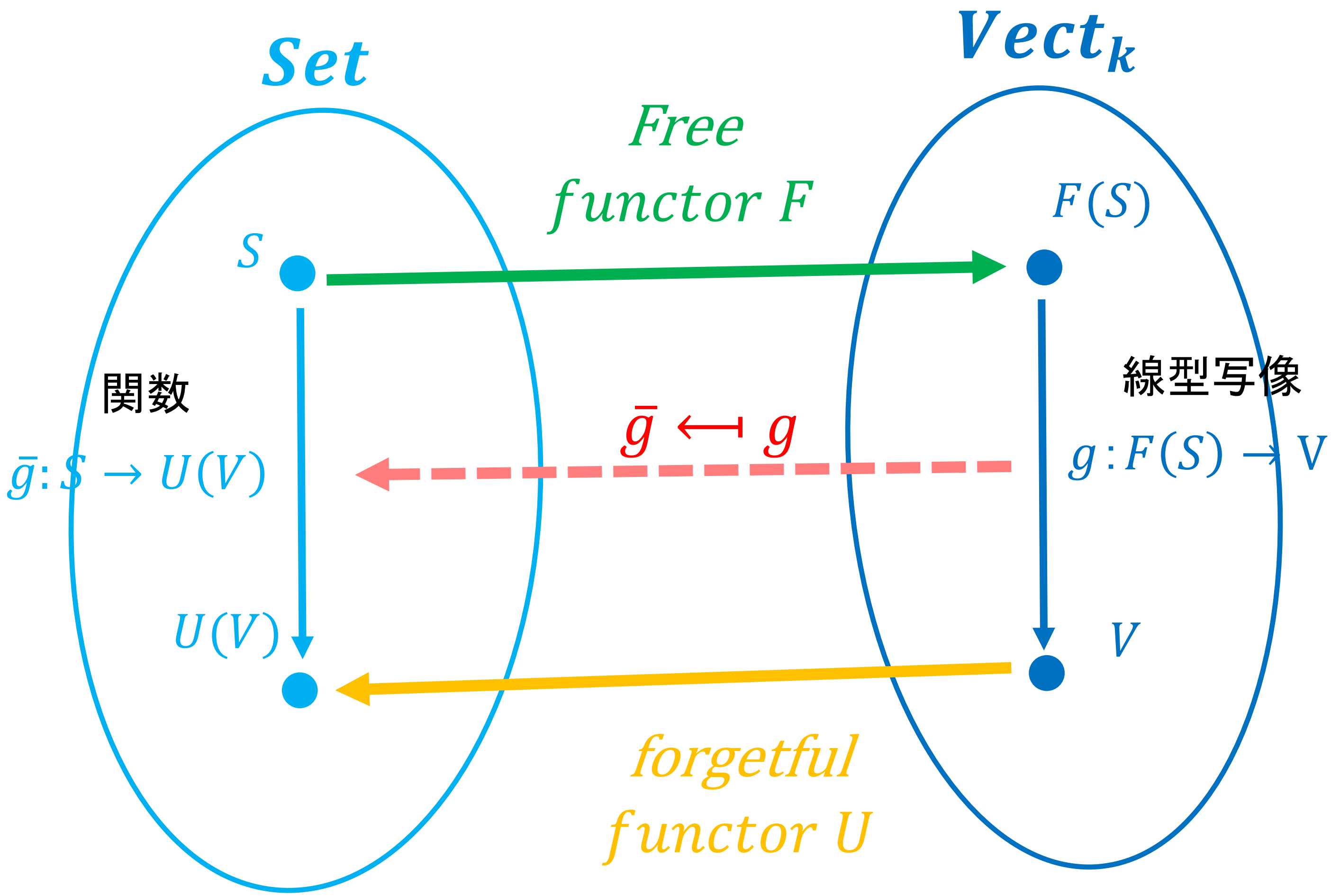
$$\boldsymbol{Vect_k}(F(S), V) \cong \boldsymbol{Set}(S, U(V))$$

$\boldsymbol{Vect_k}(F(S),V) \to \boldsymbol{Set}(S,U(V))$の対応

まず、Forgetful functor U による、
$\boldsymbol{Vect_k}(F(S),V) \to \boldsymbol{Set}(S,U(V))$の対応を考えてみましょう。

次の図式を見てください。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Vect}_k \arrow[d, shift left=2, "\boxed{U}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Set}, \arrow[u, shift left=2, "F"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Vect}_k(F(S), V) & \to & \mathbf{Set}(S, U(V)) \\
g & \mapsto & \bar{g}.
\end{array}
$$



集合Sとベクトル空間Vを固定して考えます。

線型写像 $g: F(S) \to V$ に対して、集合間の関数 $\bar{g}: S \to U(V)$ をどう対応づけられるかを考えます。

すべての $s \in S$について $\bar{g}(s) = g(s)$として定義すればいいことがわかります。

これが、次の関数の定義を与えます。

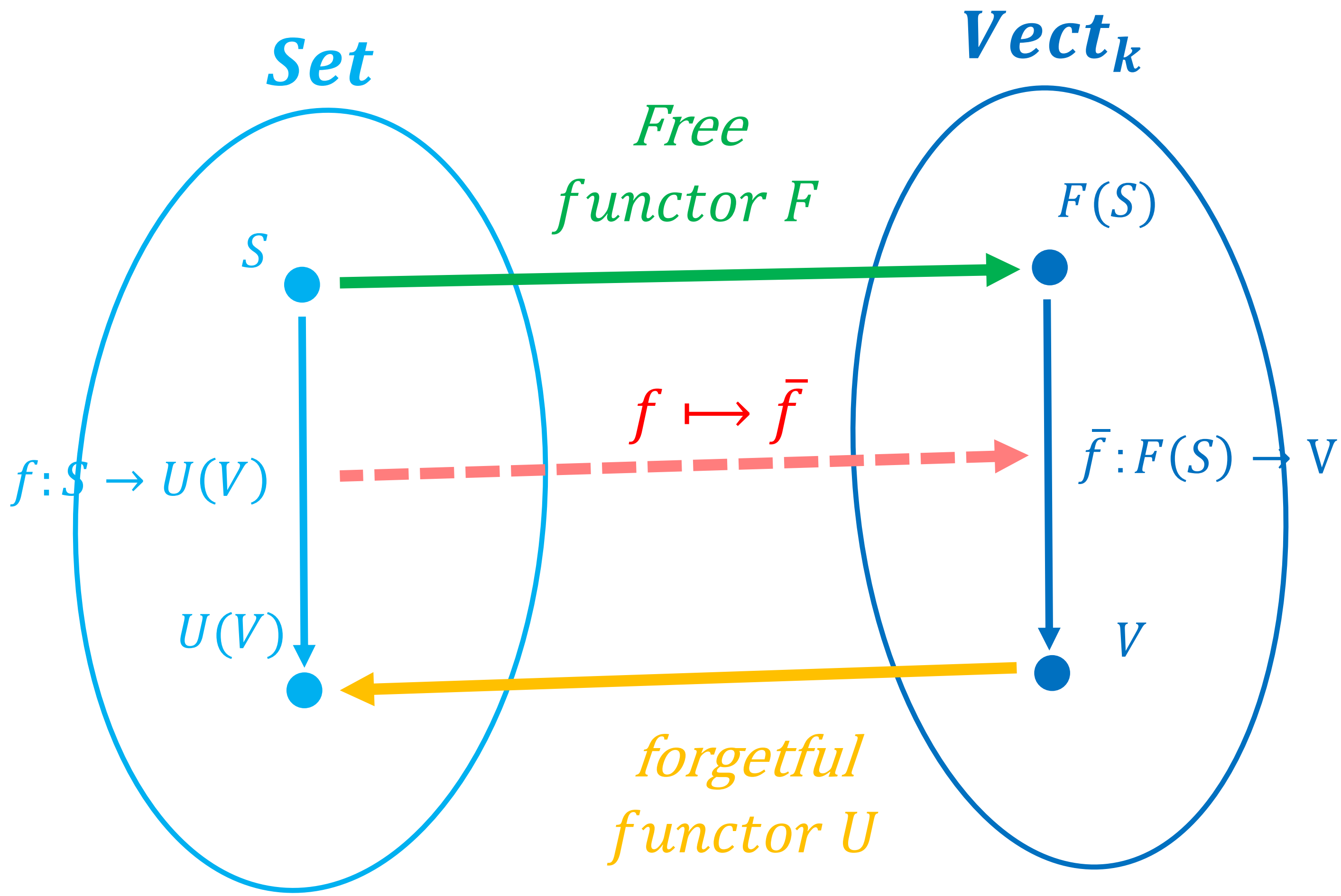
$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Vect}_k(F(S), V) & \to & \mathbf{Set}(S, U(V)) \\
g & \mapsto & \bar{g}.
\end{array}
$$

$\boldsymbol{Set}\big(S, U(V)\big) \to \boldsymbol{Vect_k}(F(S), V)$の対応

今度は、反対方向のFree functor F による、
$\boldsymbol{Set}\big(S, U(V)\big) \to \boldsymbol{Vect_k}(F(S), V)$の対応を考えてみましょう。

次の図式を見てください。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Vect}_k \arrow[d, shift left=2, "U"] \\
\mathbf{Set}, \arrow[u, shift left=2, "\boxed{F}"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Set}(S, U(V)) & \to & \mathbf{Vect}_k(F(S), V) \\
f & \mapsto & \bar{f}.
\end{array}
$$



基底の変換に対応するユニークな線型写像

若干の補足が必要かもしれません。 v_sをベクトル空間Vの基底としましょう。関数 $i: S \to V$ を、$s \in S$に対して $i(s) = v_s$ で定義します。この時、次の図式で Vと i は、universal property を持ちます。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

この図式が可換となる線型写像$\bar{f}$がユニークに存在する。

任意のWと $S \to W$なるすべての関数fについて

すなわち、すべてのベクトル空間Wと $f: S \to W$ なるすべての関数 f について、$\bar{f} \circ i = f$ となるようなユニークな線形写像 $\bar{f}$ が存在します。

$\bar{f} \circ i = f$ ということは、すべての$s \in S$について $\bar{f}(v_s) = f(s)$ であるということです。

先の図式は、

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\forall f"'] & V \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\
& \forall W
\end{tikzcd}
$$

基底の要素上に定義されたすべての関数 $f: S \to W$ は、すべてのV上で定義された線型写像 $\bar{f}: V \to W$ にユニークに拡大されることを意味しています。

集合間の関数 $f: S \to U(V)$が与えられた時、
線型写像 $\bar{f}: \mathrm{F(S)} \to V$を、次のように定義します。
$\sum \lambda_s S \in F(S)$であるすべての線形結合について

$$\bar{f}\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s)$$

これが、次の関数の定義を与えます。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}(S, U(V)) & \to & \mathbf{Vect}_k(F(S), V) \\ f & \mapsto & \bar{f}. \end{array}$$

これらの二つの関数のbarは逆である

$$\bar{\bar{g}} = g,\ \bar{\bar{f}} = f$$

$\sum \lambda_s S \in F(S)$であるすべての線形結合について

$$\bar{\bar{g}}\left(\sum_{s\in S} \lambda_s s\right) = \sum_{s\in S} \lambda_s \bar{g}\,(s) = \sum_{s\in S} \lambda_s g(s) = g(\sum_{s\in S} \lambda_s s)$$

が成り立つ。よって、$\bar{\bar{g}} = g$。

また、任意の集合間の関数$f\colon S \to U(V)$について

すべての $s \in S$で、$\bar{\bar{f}}(s) = \bar{f}(s) = f(s)$

が成り立つ。よって、$\bar{\bar{f}} = f$ 。

結論

こうして、すべての $S \in \boldsymbol{Set},\ V \in \boldsymbol{Vect_k}$について、$\boldsymbol{Set}(S, U(V))$と$\boldsymbol{Vect_k}(F(S), V)$は、一対一に対応することがわかります。

$$\boldsymbol{Vect_k}(F(S), V) \cong \boldsymbol{Set}(S, U(V))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect}_k \arrow[d, shift left=2, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set}, \arrow[u, shift left=2, "F"] \end{tikzcd}$$

$Free \dashv Forgetful$ のペアではないAdjoint functor

$Free \dashv Forgetful$ のペアではない Adjoint functor

これまで見てきたAdjoint functorの例は、いずれも、
$Free\ functor\ \dashv\ Forgetful\ functor$ のペアに形をしていました。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \arrow[d, shift left=2, "U"] \\
\mathbf{Set} \arrow[u, shift left=2, "F"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Vect}_k \arrow[d, shift left=2, "U"] \\
\mathbf{Set}, \arrow[u, shift left=2, "F"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

このセッションでは、$Free \dashv Forgetful$ のペアではない Adjoint functor の例を見ていきたいと思います。

$A\times B$とB^A

二つの集合$A, B \in Set$が与えられた時、

- $A\times B$というの積の表記で、二つの集合の直積(デカルト積)を表します。$x \in A, y \in B$の時、$(x, y) \in A\times B$です。
- また、B^Aという冪乗の表記で、AからBの関数を表します。
  $f \in B^A$の時、$f: A \to B$です。
  B^Aは、$\mathrm{hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = Set(A, B)$と同じです。

functor $-\times B$と functor $(-)^B$

集合Bを固定して、任意の集合とBの積を、$-\times B$ で表すことにします。このブランク(ー)を使った表記で次のようなfunctorを定義します。

$$
\begin{aligned}
-\times B:\ \boldsymbol{Set} &\to \boldsymbol{Set} \\
A &\mapsto A\times B
\end{aligned}
$$

同様に、Bから任意の集合への関数を、$(-)^B$で表して次のようなfunctorを定義します。

$$
\begin{aligned}
(-)^B:\ \boldsymbol{Set} &\to \boldsymbol{Set} \\
C &\mapsto C^B
\end{aligned}
$$

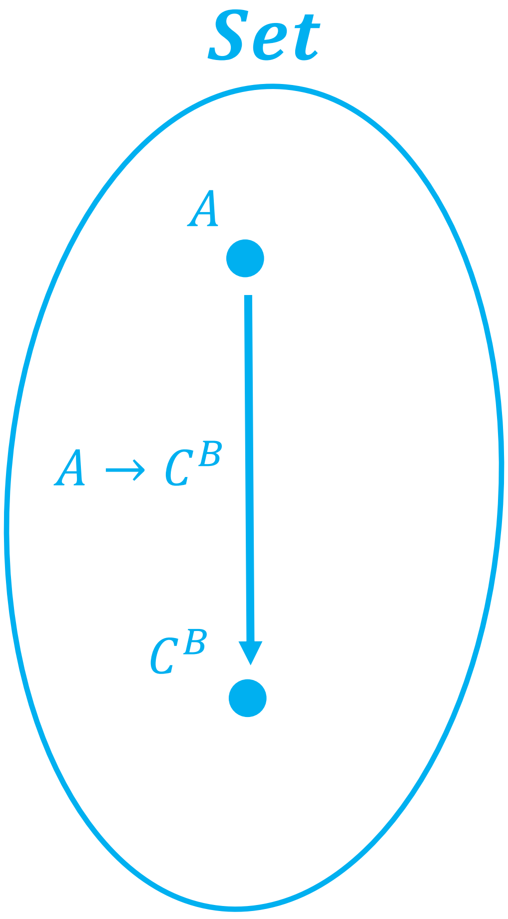
functor $-\times B$と functor $(-)^B$はadjoint

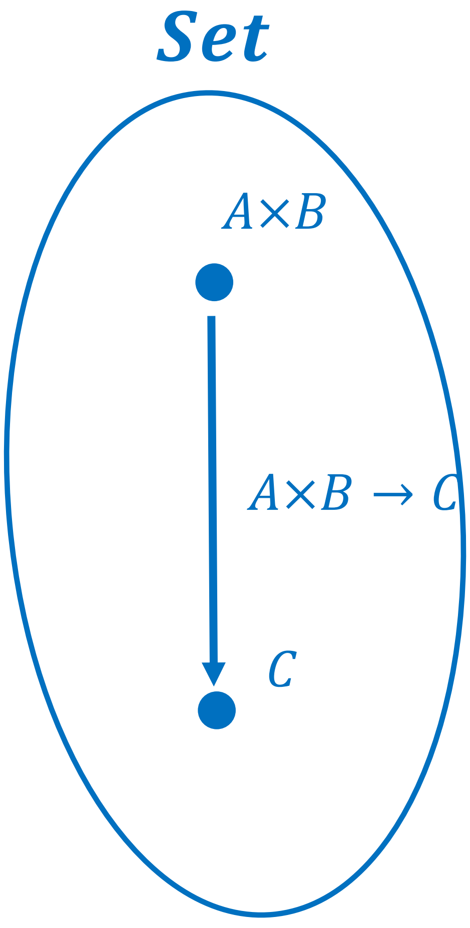
このセッションの目標は、functor $-\times B$と functor $(-)^B$がadjointであることを示すことです。

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[d, shift left=3, "(-)^B"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left=3, "-\times B"] \end{tikzcd}$$

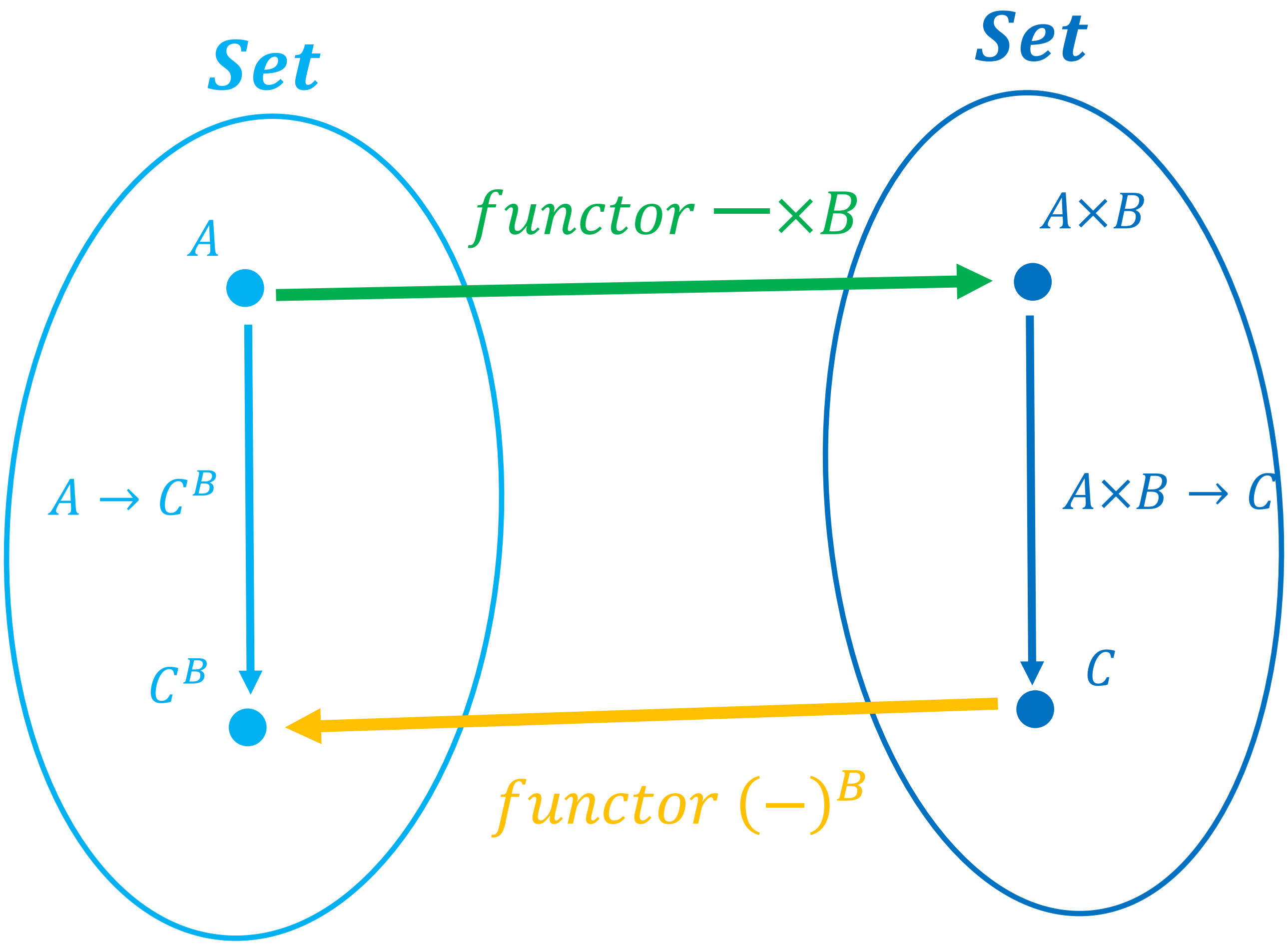
具体的には、$\boldsymbol{Set}(A, C^B)$と$\boldsymbol{Set}(A\times B, C)$のあいだには、一対一の対応があることを示せばいいのです。

関数 $A \to C^B$ と関数 $A \times B \to C$
が定義されている集合を考えます。

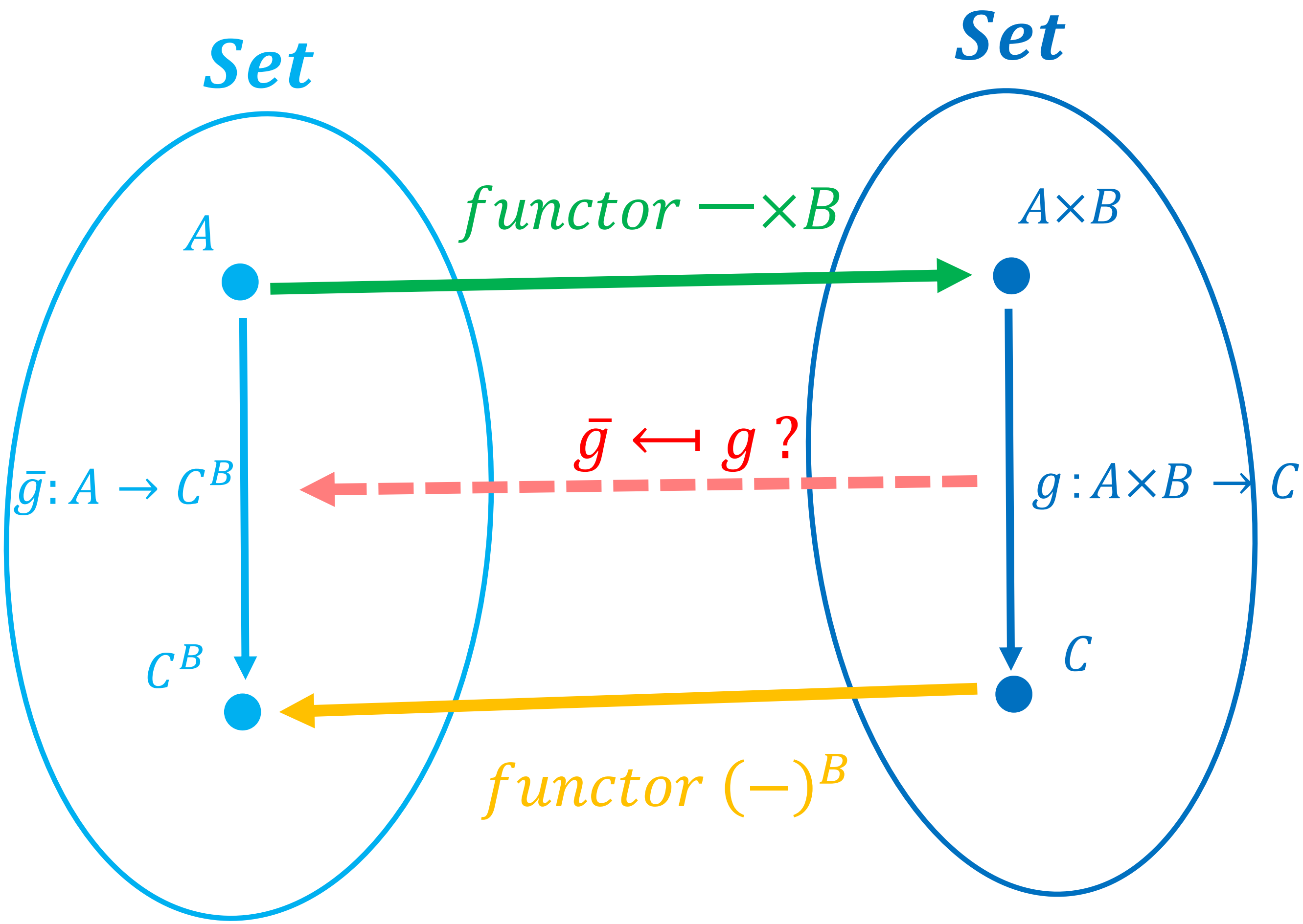




二つの集合を、次のように$functor$ ー$\times B$
と$functor$ $(-)^B$で結びます。

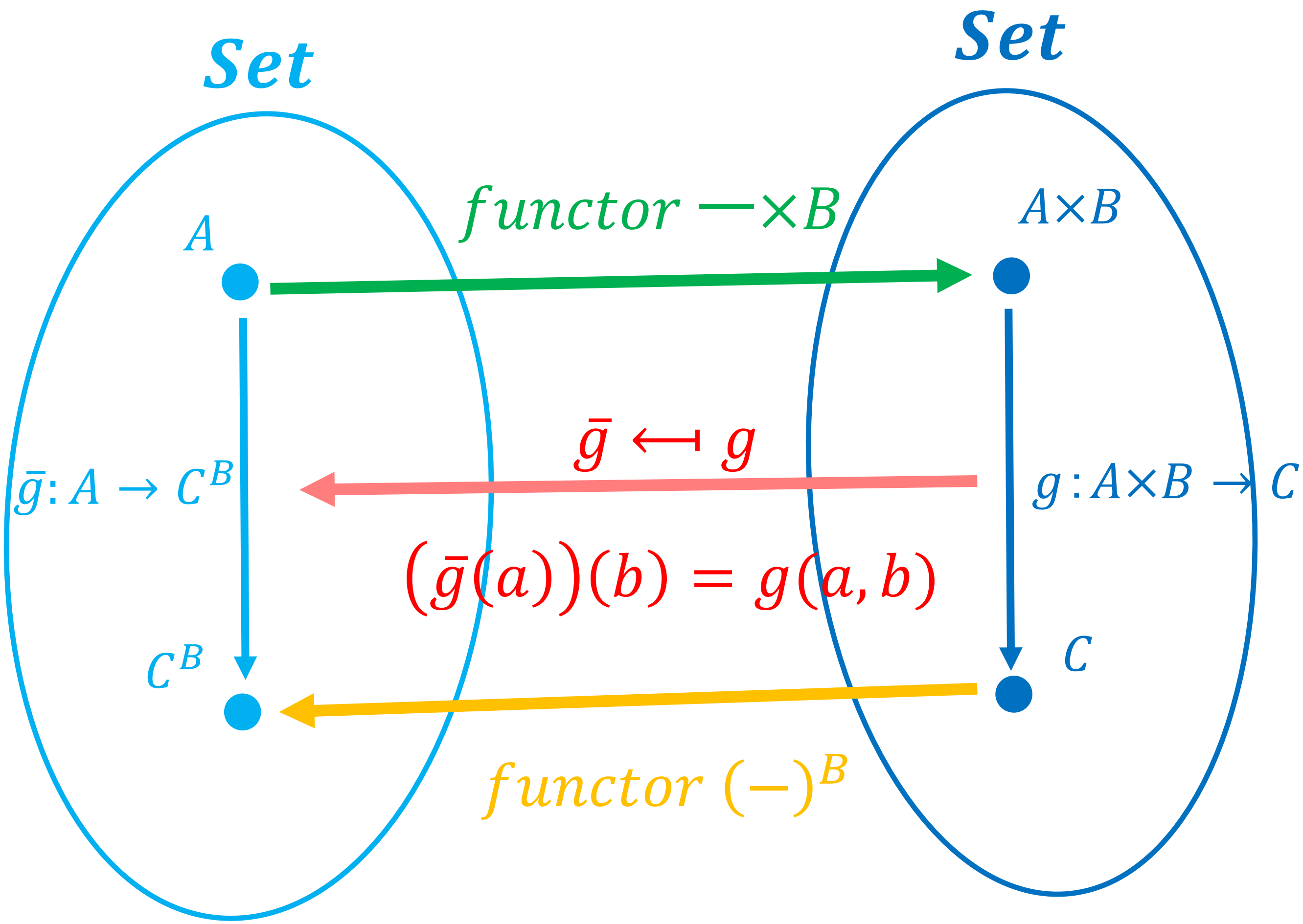


まず、$\boldsymbol{Set}(A\times B, C) \to \boldsymbol{Set}(A, C^B)$の対応
$g \mapsto \bar{g}$が存在するかを考えます。

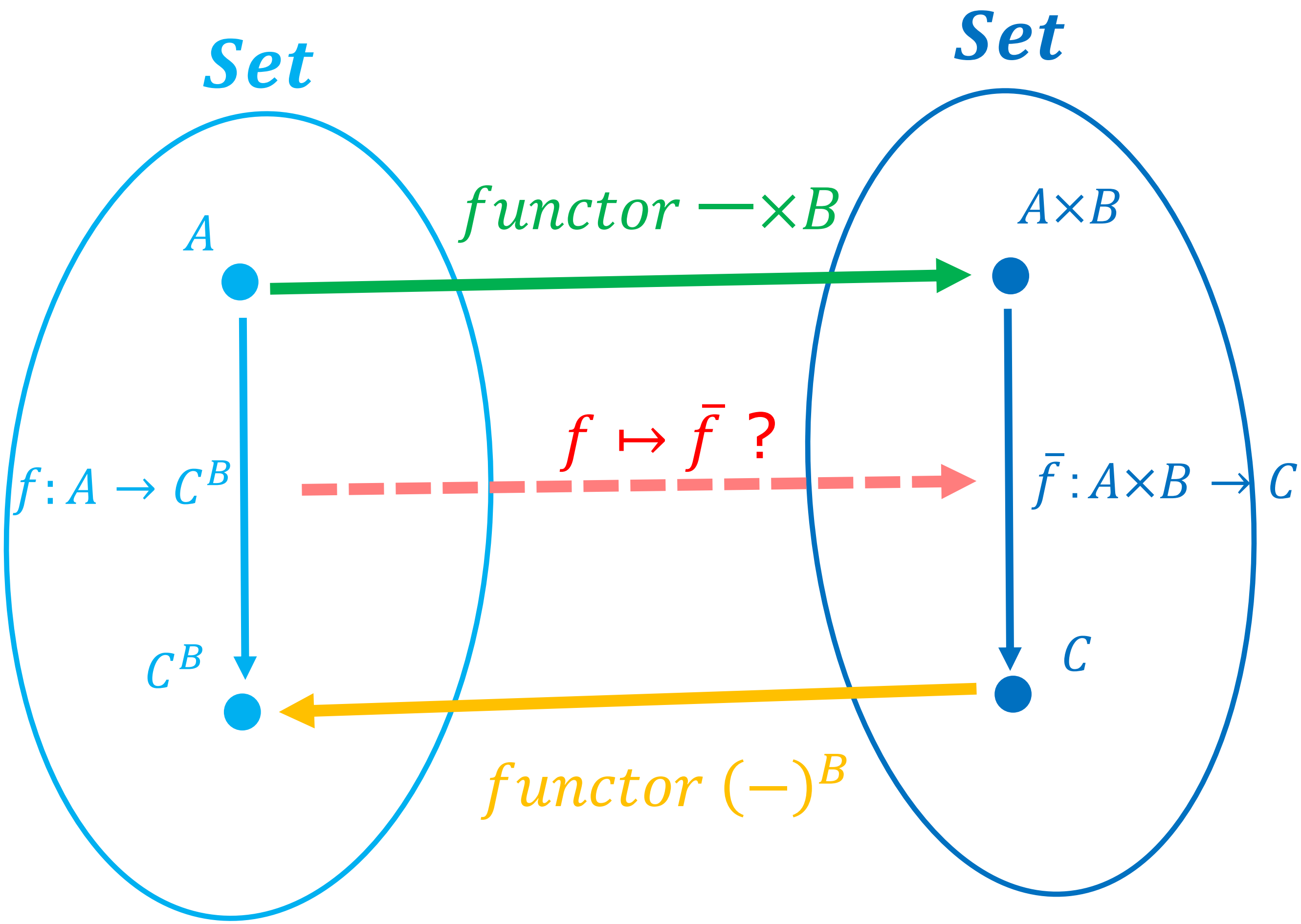


$\bar{g}: A \to C^B$ を $g: A\times B \to C$から次のように定義できます。

$a \in \mathrm{A}, b \in B$について $\big(\bar{g}(a)\big)(b) = g(a, b)$

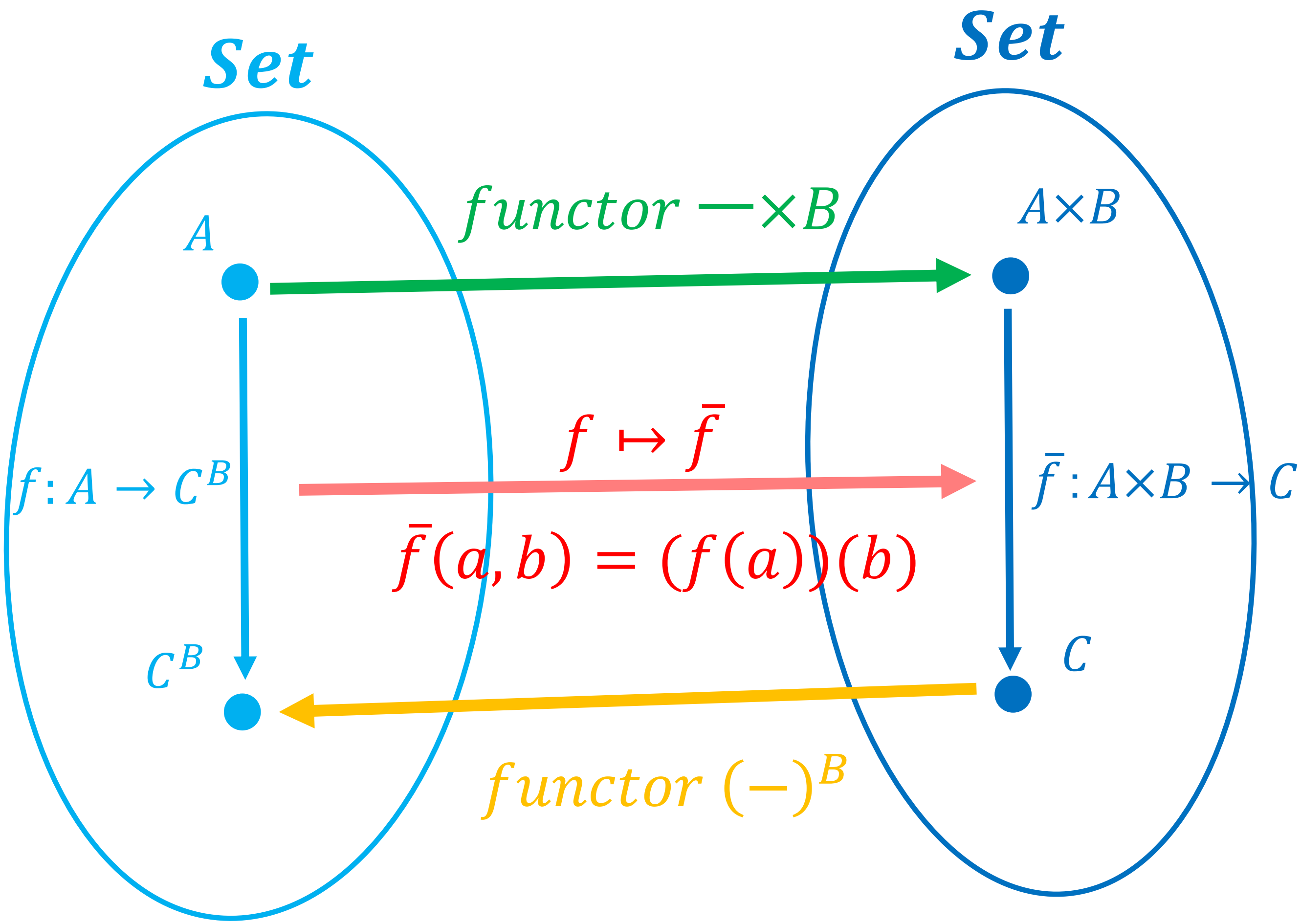


今度は、$\boldsymbol{Set}(A, C^B) \to \boldsymbol{Set}(A\times B, C)$の対応
$f \quad\mapsto\quad \bar{f}$ が存在するか考えます。

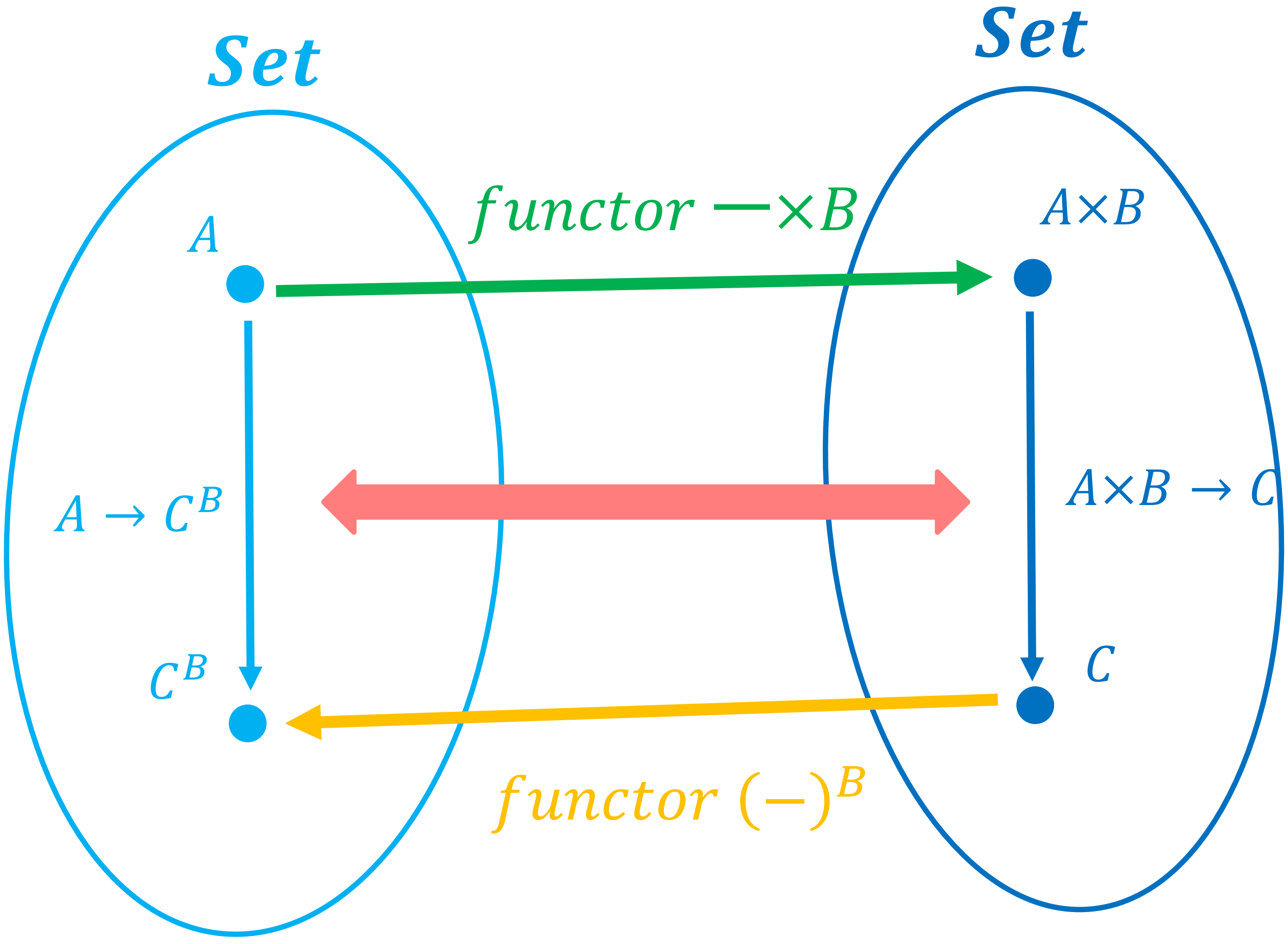


$\bar{f}: A \times B \to C$ を $f: A \to C^B$ から次のように定義できます。

$a \in \mathrm{A}, b \in B$ について $\bar{f}(a, b) = (f(a))(b)$

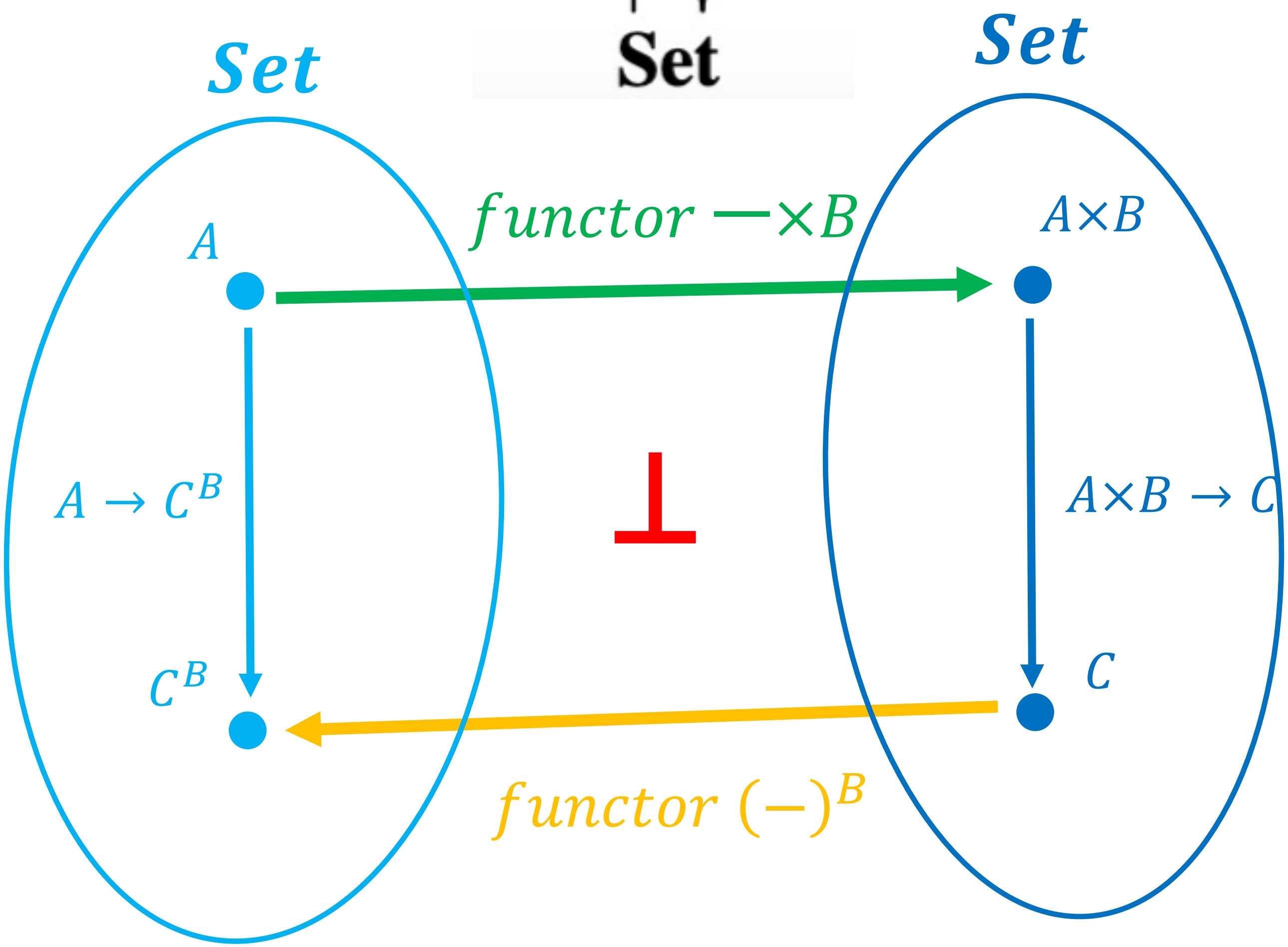


これで、
$$\boldsymbol{Set}(A, C^B) \cong \boldsymbol{Set}(A\times B, C)$$
が言えました。



よって

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[d, shift left=2, "(-)^B"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left=2, "-\times B"] \end{tikzcd}$$

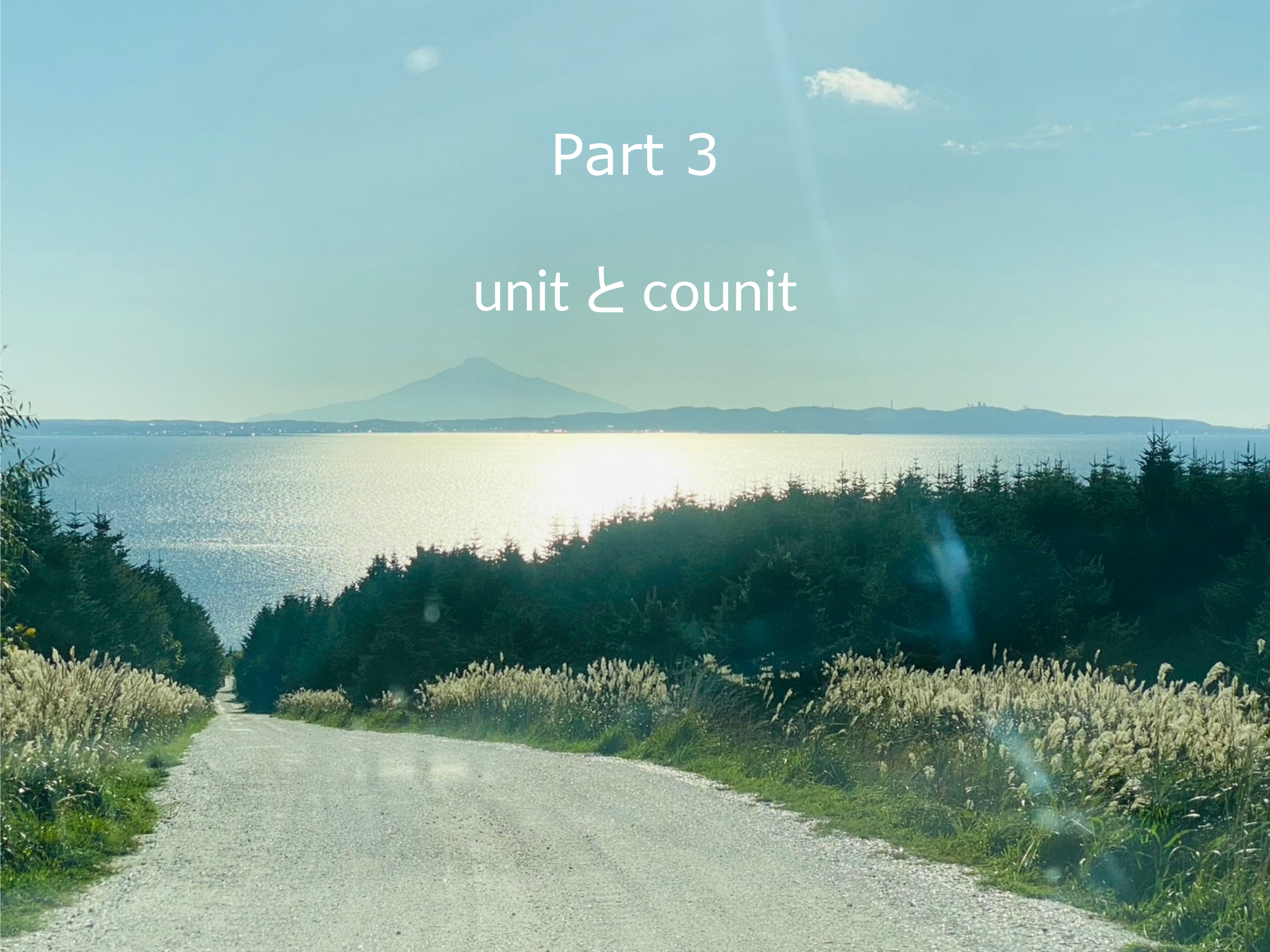


$$- \times B \dashv (-)^B$$

$- \times B$ は $(-)^B$ の left adjoint で、
$(-)^B$ は $- \times B$ の right adjoint です。

Part 3

unit と counit



Agenda
カテゴリー論基礎 2 Part 3

Part 3 unit と counit

adjunctionのもう一つの定義
- unit と counit が存在すれば、adjunctionが成り立つ
- ベクトル空間のunitとcounit
- String Diagrams とunitとcounit

adjunctionのもう一つの定義 unitとcounit

カテゴリー論基礎 2 Part 3-1

Part 3の目標

Part 2 で、functor F, Gが相互にadjointであることの定義を見てきました。

Part 3 では、それとは異なるadjunctionの定義を紹介しようと思います。

これまで見てきた adjunction の定義を振り返る

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$ で、

すべての$A \in \mathfrak{A}$と$B \in \mathfrak{B}$について、「自然に」

$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$ が成り立つ時、

FをGの$left\ adjoint$

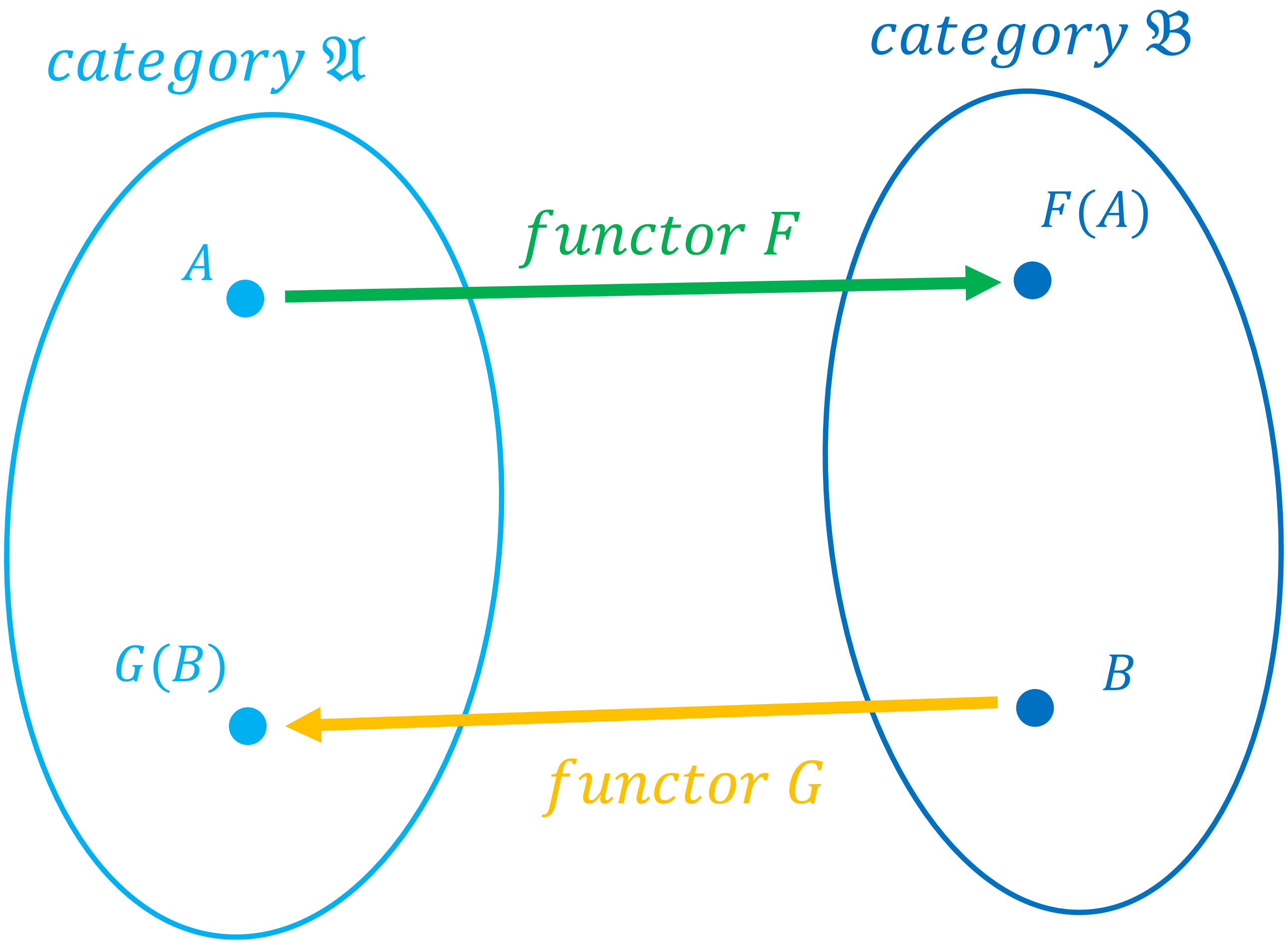
GをFの$right\ adjoint$

と呼んで、$F \dashv G$ と表す。

Adjoint functor $F \dashv G$

すべての $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

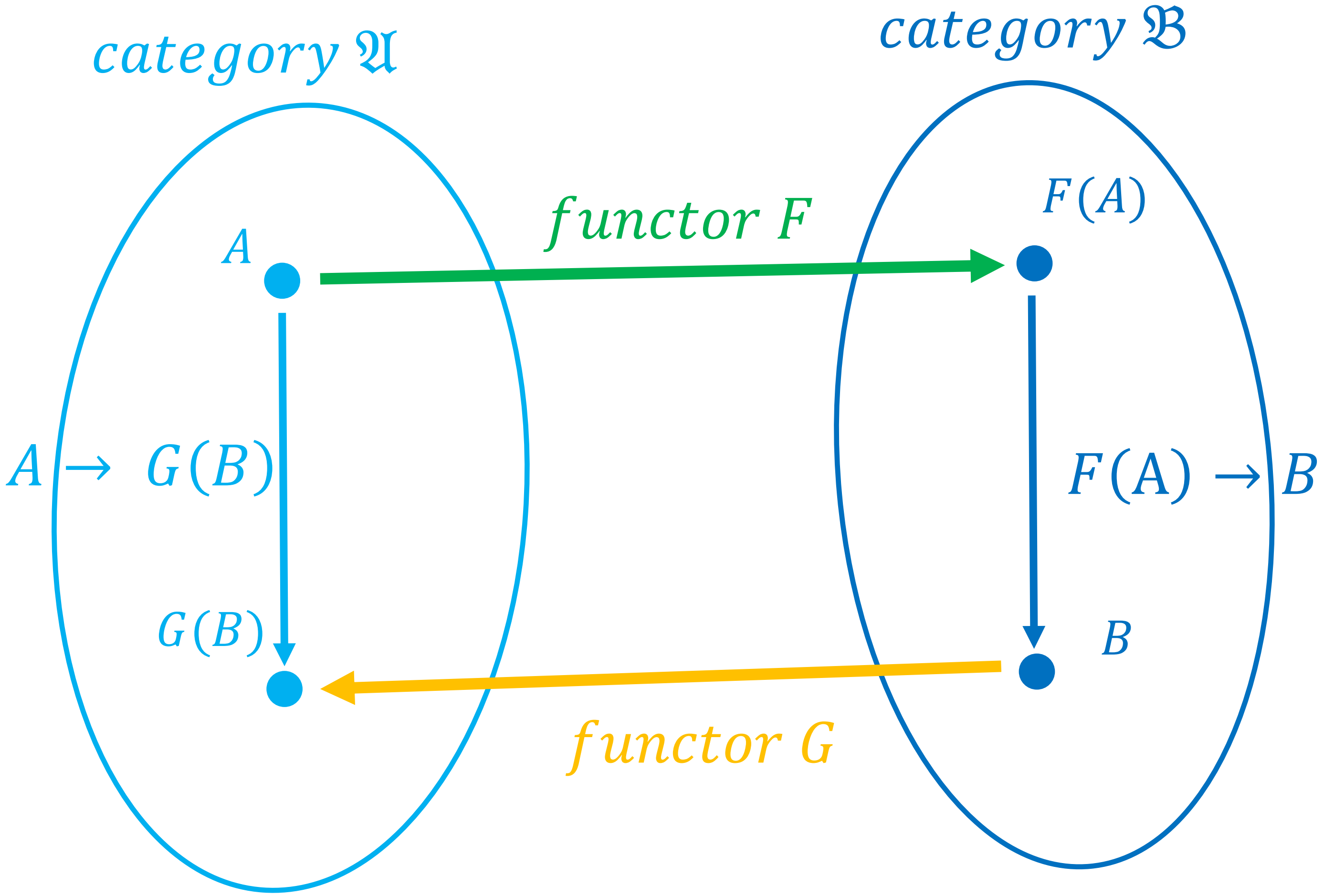
$$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$$



Adjoint functor $F \dashv G$

すべての $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

$$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$$

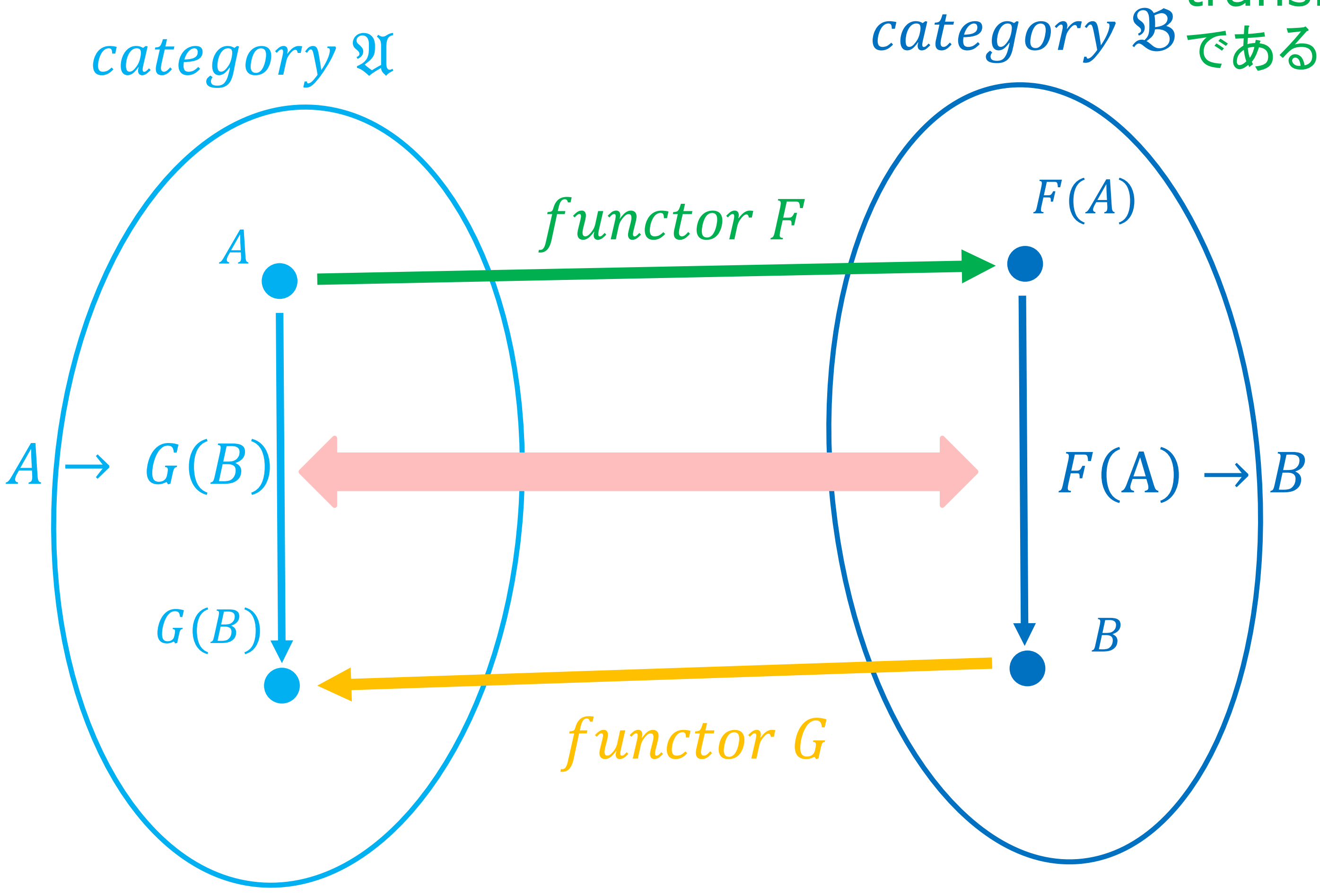


Adjoint functor $F \dashv G$

すべての $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

$$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$$

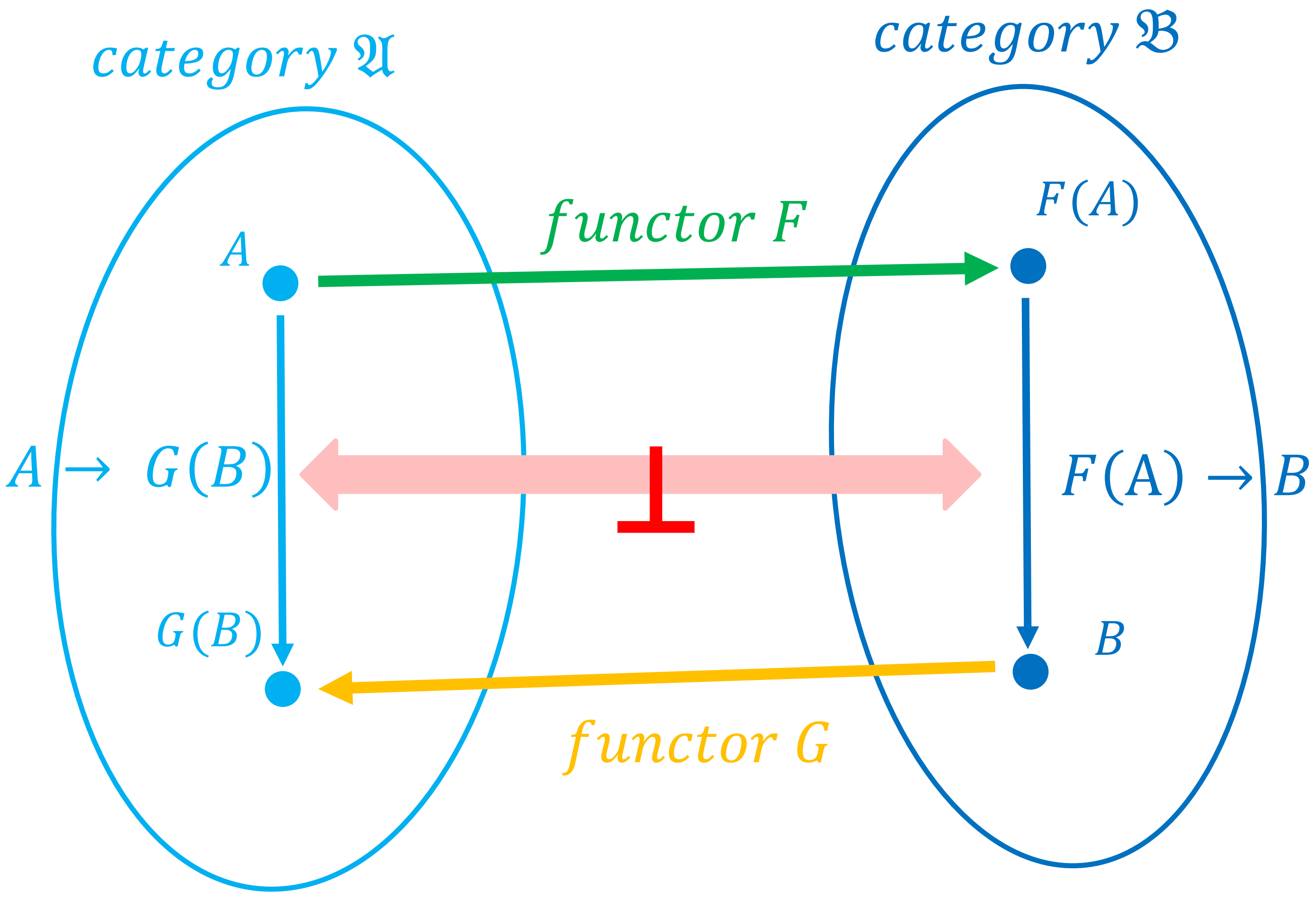
$A \to G(B)$
$F(\mathrm{A}) \to B$ **の対応は、**
functor F,Gの
natural
transformation
である。



Adjoint functor $F \dashv G$

すべての $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$について

$$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$$



adjunctionのもう一つの定義

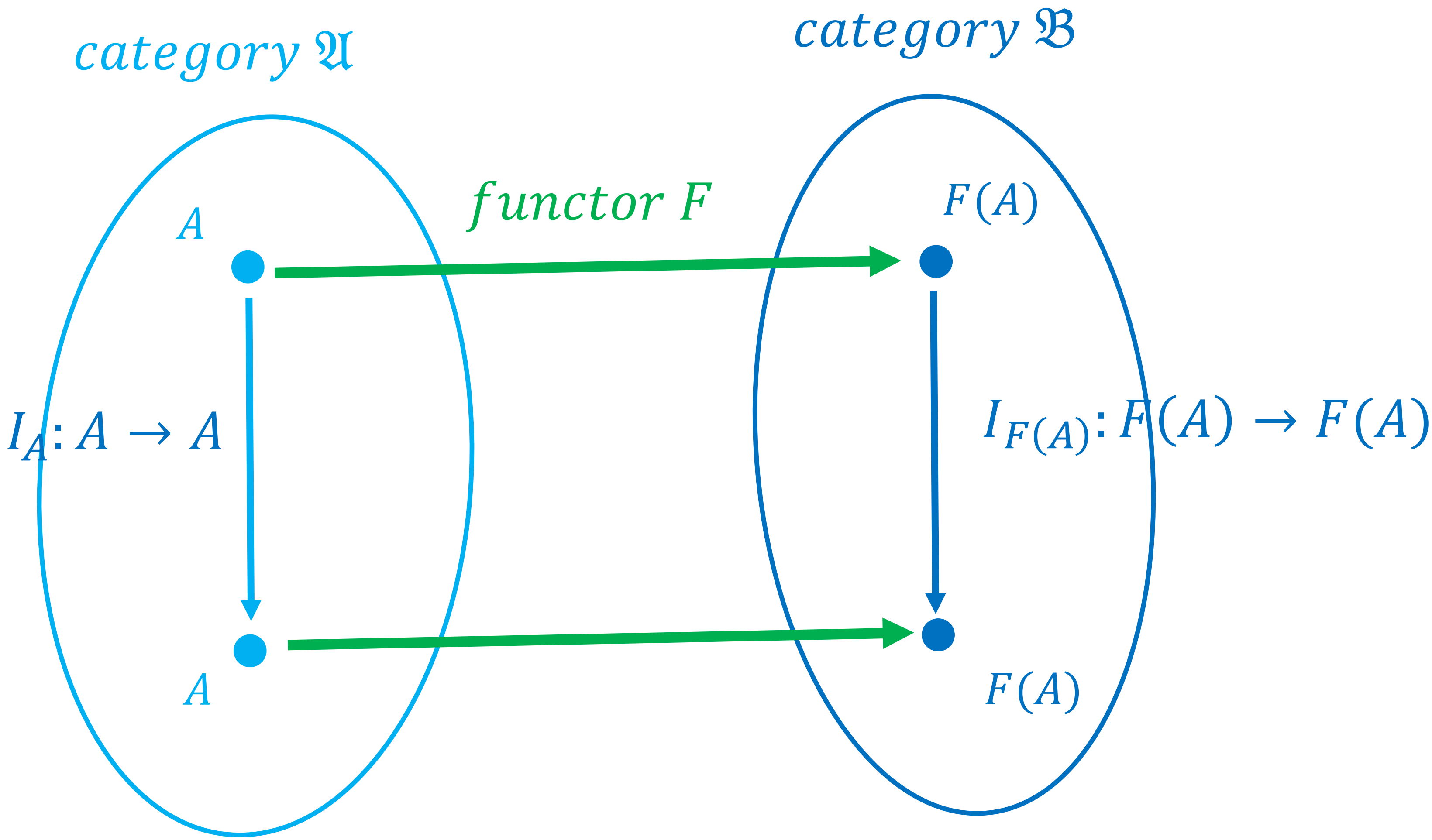
このセッションと次のセッションの2回に分けて、adjunctionのもう一つの定義を与えます。

前半の今回のセッションでは、functor F, G が相互にadjointであるなら、あるnatural transformation のペア(η, ϵ)が存在するという話をします。これを(unit, counit)のペアといいます。

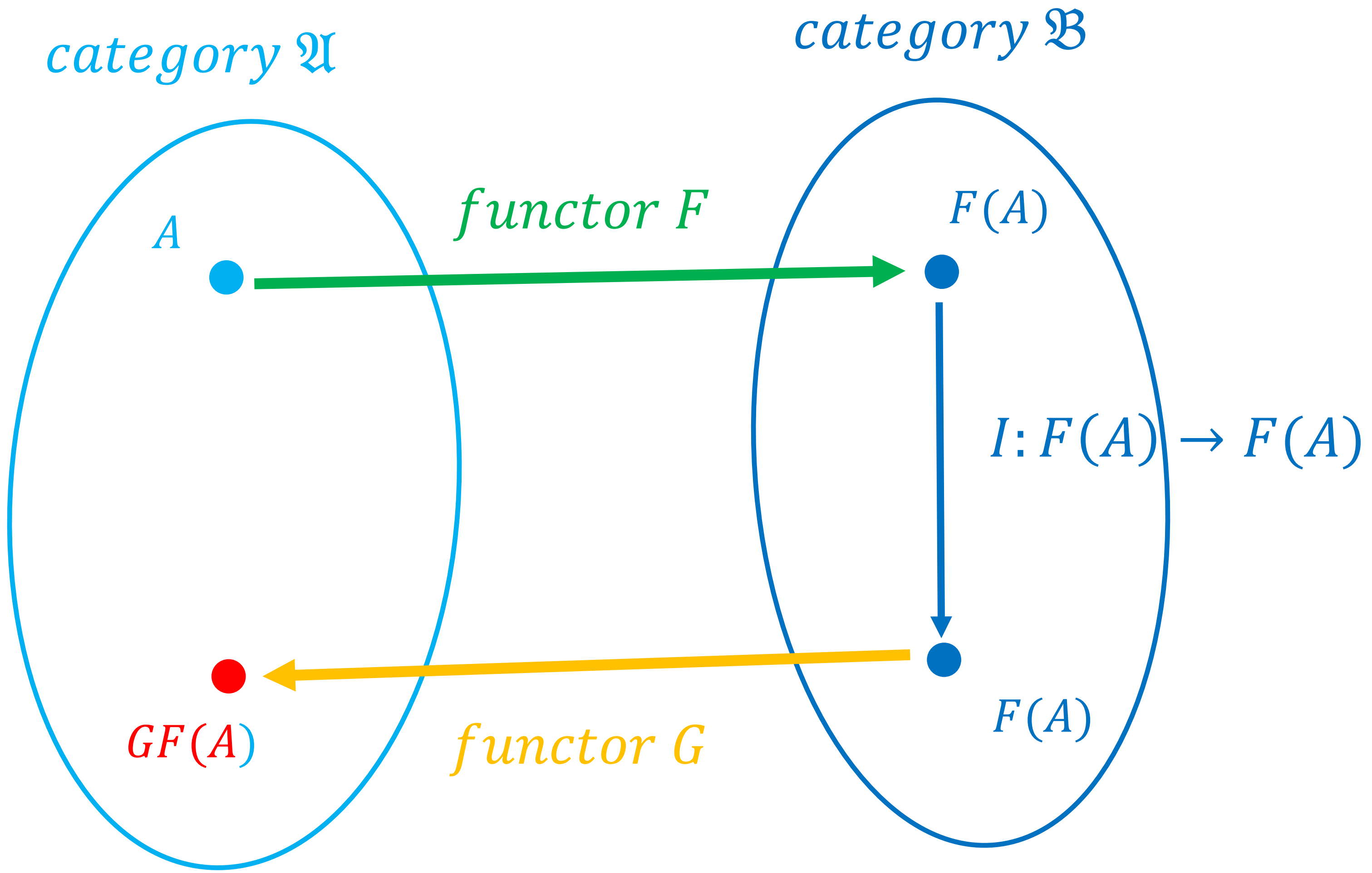
後半の次回のセッションでは、(unit, counit)のペアが与えられれば、functor F, G が相互にadjointであることを証明します。

これで、adjunctionのもう一つの定義を与えることができます。

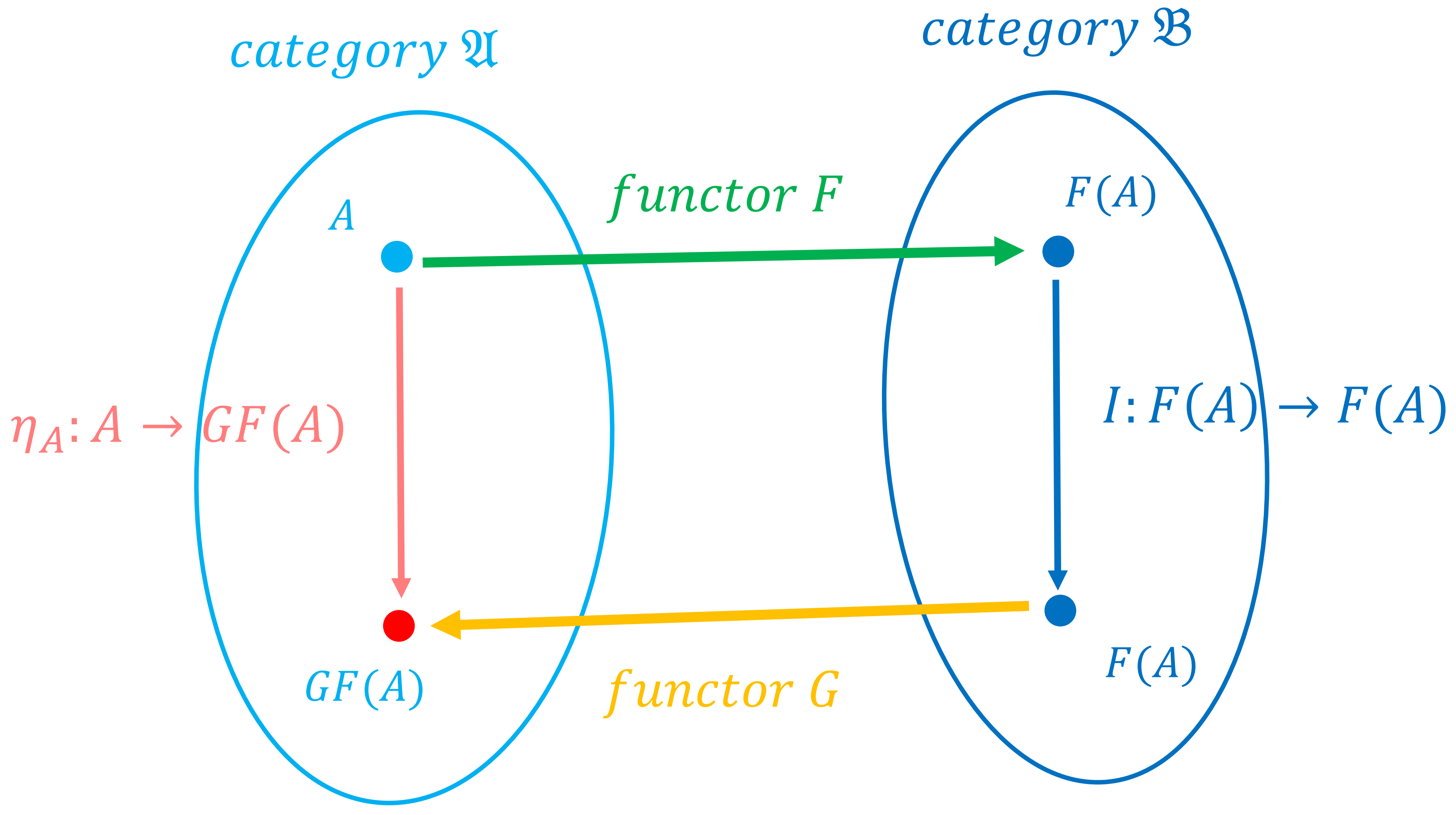
$category\ \mathfrak{A}$ の同一射$A \to \mathrm{A}$と
functor Fの働きを考えます



functor Gで、$F(A)$を$category\ \mathfrak{A}$ の$GF(A)$に移します

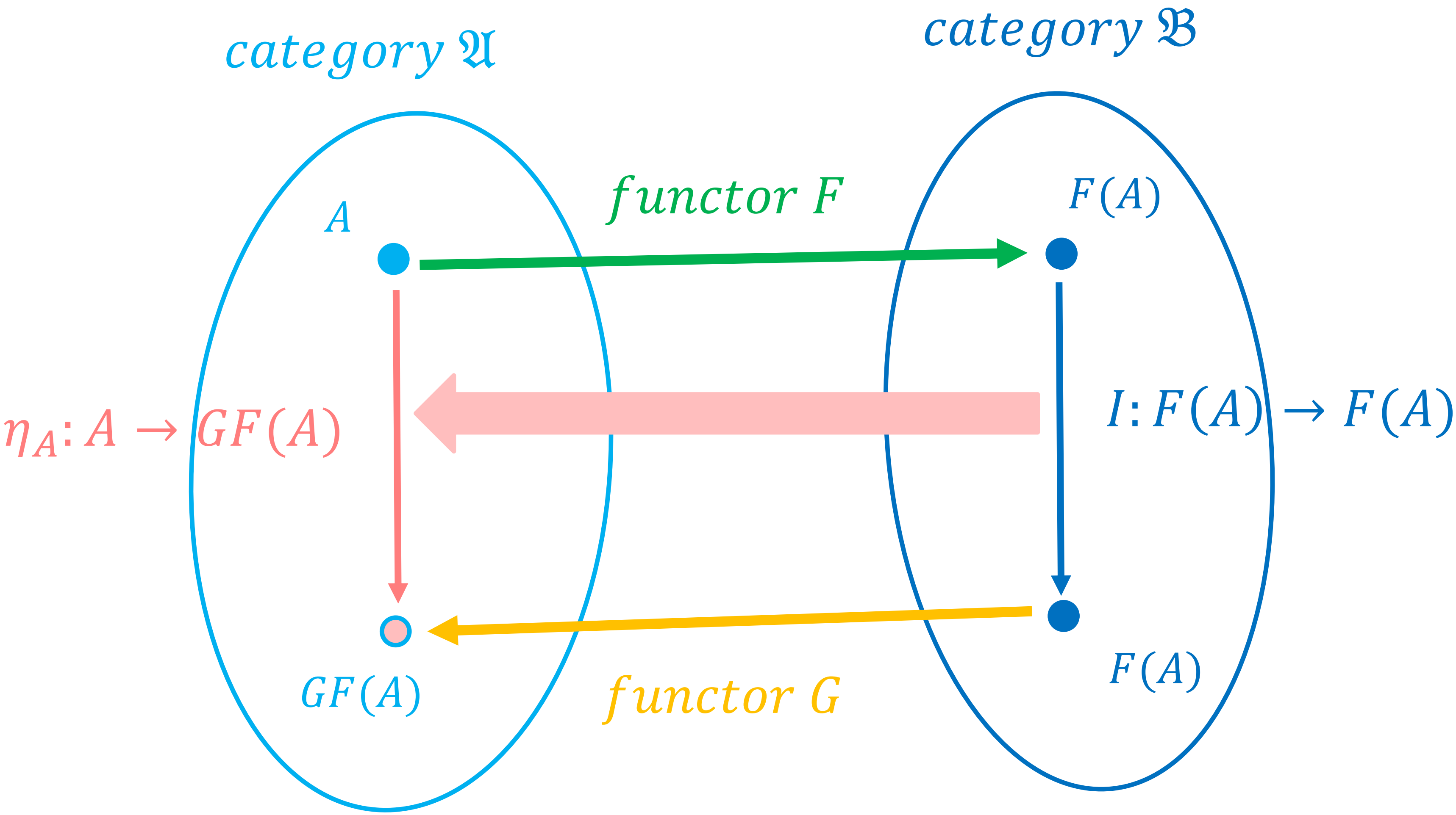


Aから$GF(A)$への射をη_Aとします



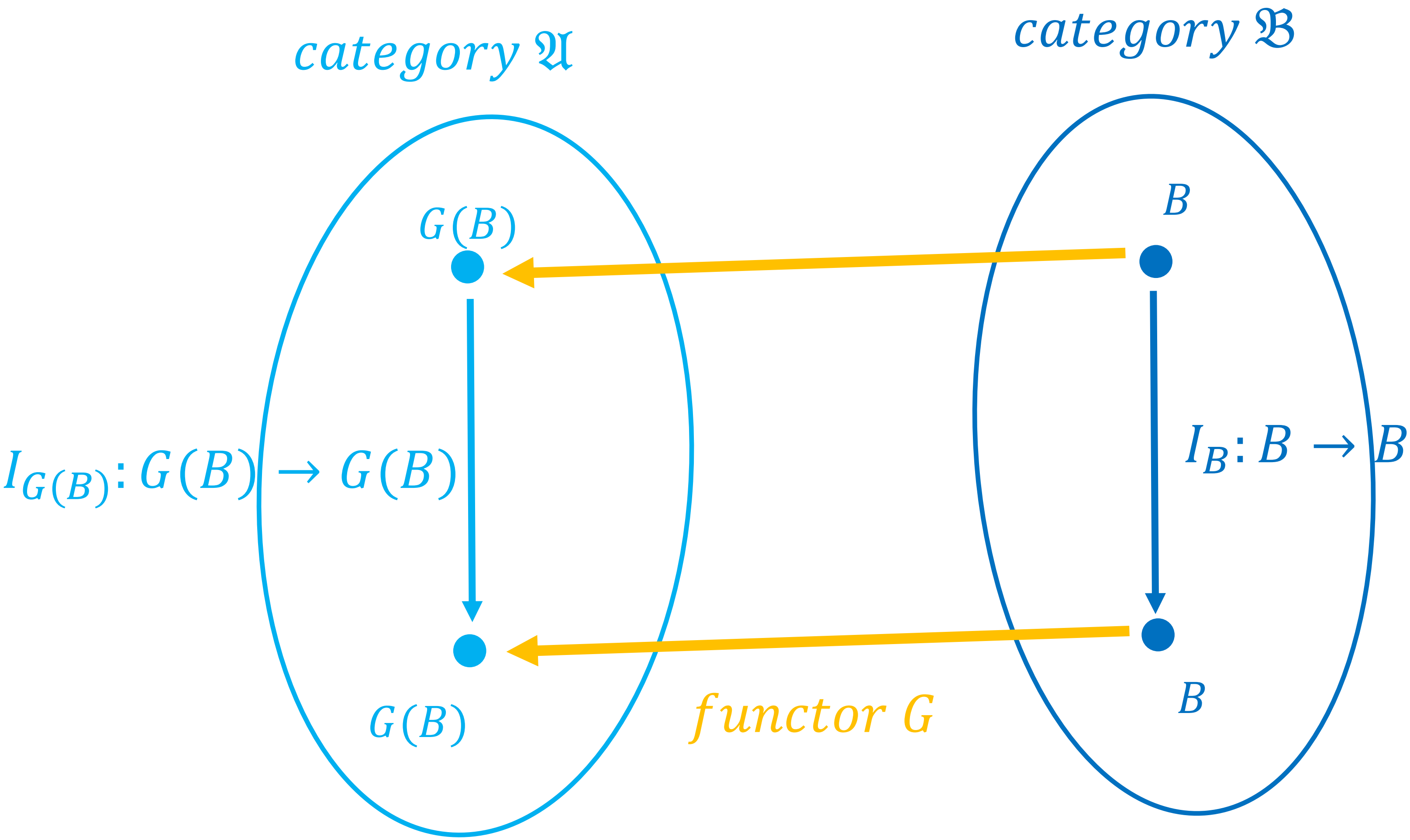
次のような対応を構成できます。

$$(A \xrightarrow{\eta_A} GF(A)) = \overline{(F(A) \xrightarrow{I} F(A))}$$

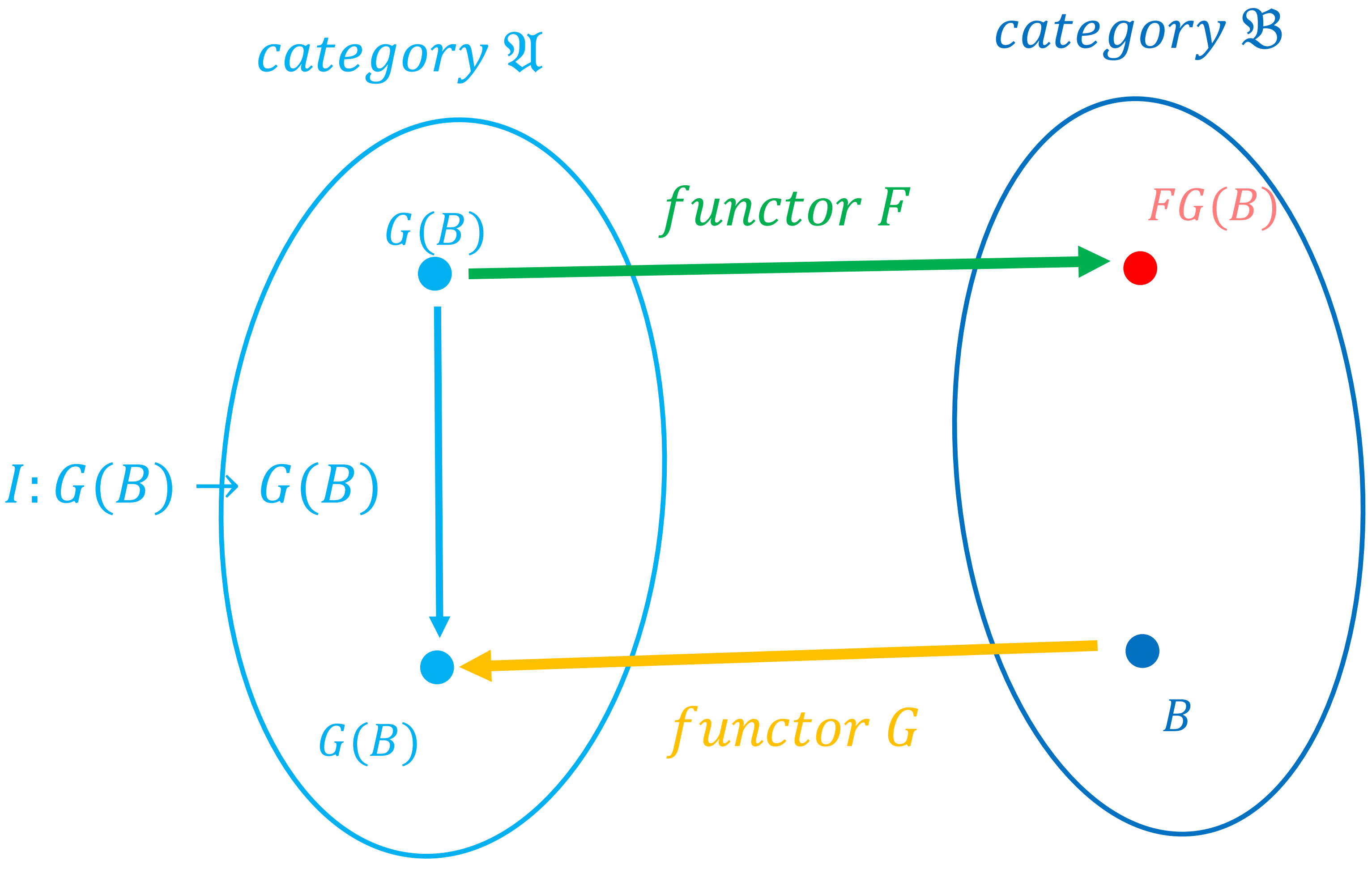


$$\eta: 1_{\mathfrak{A}} \to G \circ F$$

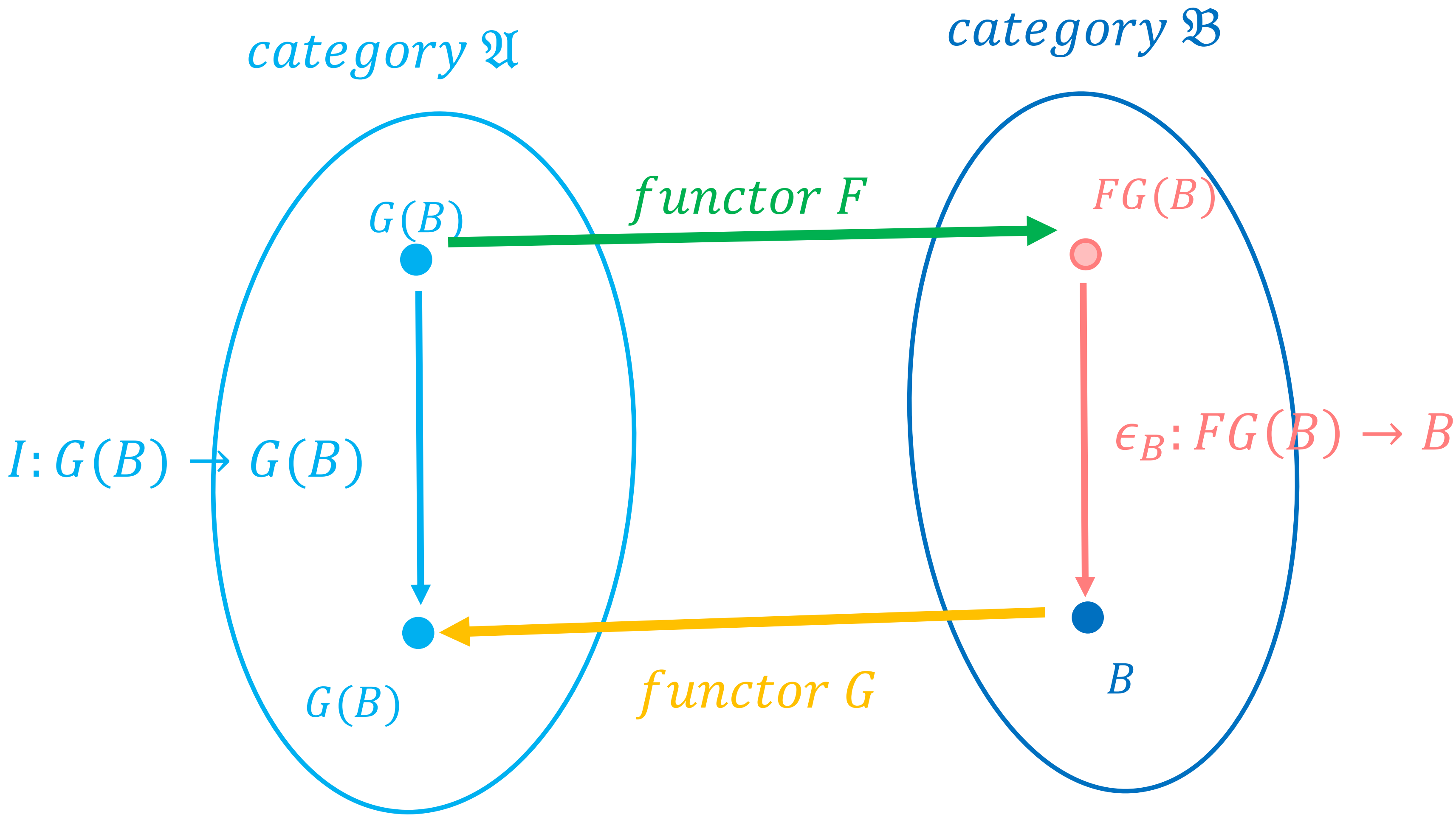
今度は、$category\ \mathfrak{B}$ の同一射$B \to B$ と
functor Gの働きを考えます



functor Fで、$G(B)$を$category\ \mathfrak{B}$ の
$FG(B)$に移します

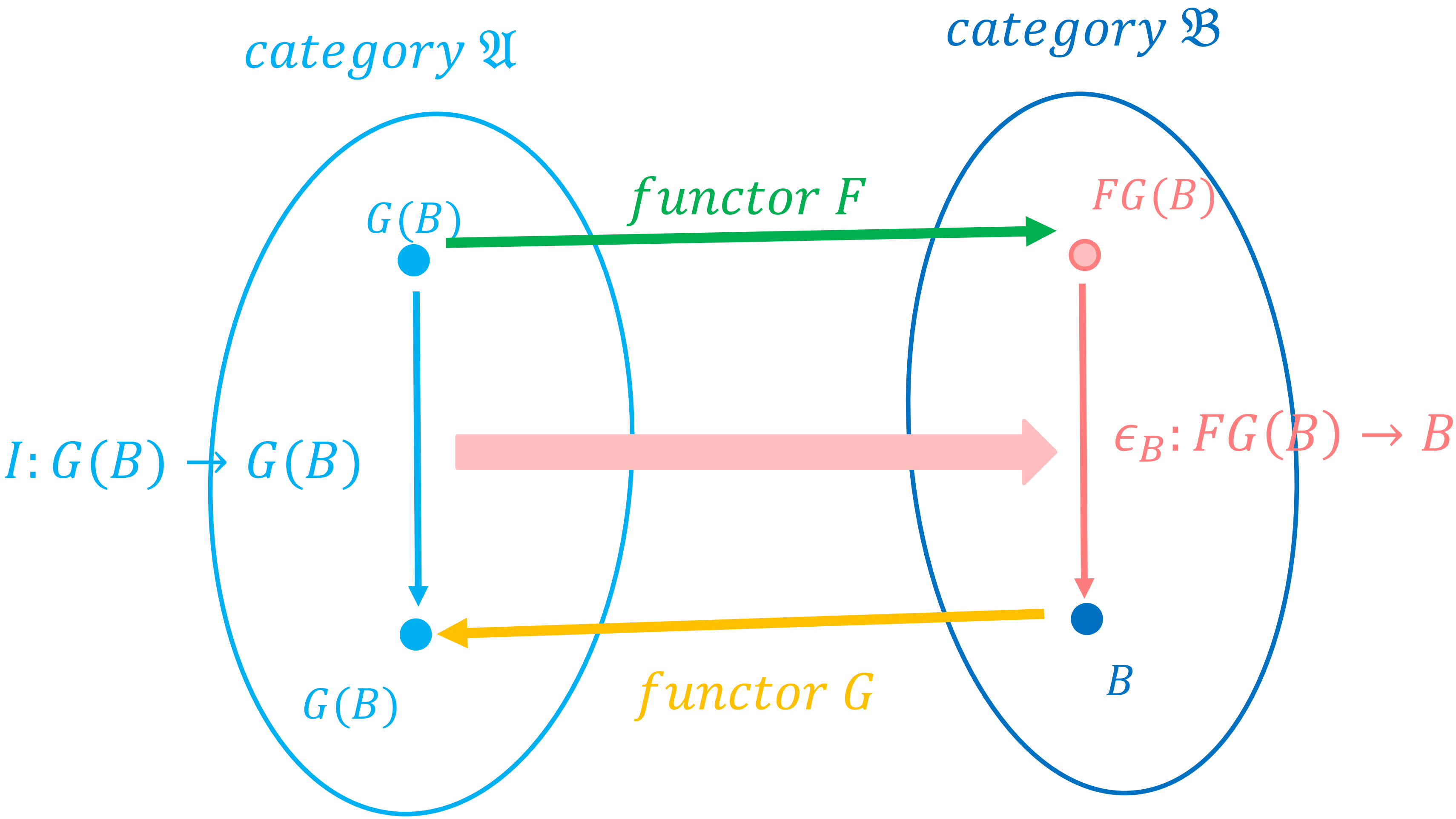


$FG(B)$からBへの射をϵ_Bとします



次のような対応を構成できます。

$$(FG(B) \xrightarrow{\epsilon_B} B) = \overline{(G(B) \xrightarrow{I} G(B))}$$



unitとcounit

すべての$A \in \mathfrak{A}$について、次の対応が存在し、

$$(A \xrightarrow{\eta_A} GF(A)) = \overline{(F(A) \xrightarrow{I} F(A))}$$

すべての$B \in \mathfrak{B}$について、次の対応が存在します。

$$(FG(B) \xrightarrow{\epsilon_B} B) = \overline{(G(B) \xrightarrow{I} G(B))}$$

この時、natural transformation

$$\eta: 1_{\mathfrak{A}} \to G \circ F, \qquad \epsilon: F \circ G \to 1_{\mathfrak{B}}$$

を、adjunctionの unitとcounitと呼びます。

$F \dashv G$ なら unitとcounit が存在します。

unitとcounit の例

今まで見てきた、$\mathbf{Vect}_k \underset{F}{\overset{U}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathbf{Set}$ の時、
そのunitとcounit を考えてみましょう。

unit $\eta: 1_{\boldsymbol{Set}} \to U \circ F$ は次のようなcomponentを持ちます。

$$\eta_S: S \to UF(S) = \{\text{形式的な線形和} \sum_{s \in S} \lambda_s s\}$$

counit $\epsilon: F \circ U \to 1_{\boldsymbol{Vect_k}}$ は次のようなcomponentを持ちます。

$$\epsilon_V: FU(V) \to V$$

これは、形式的な線形和 $\sum_{s \in S} \lambda_s s$ を、実際のVの値に送ります。

このベクトル空間 $FU(V)$は巨大なものです。

たとえば、$k = \mathbb{R}$ で、Vをベクトル空間$\mathbb{R}^2$ だとすると、$FU(V)$はすべての基底 $s \in S$について、そのそれぞれにすべての$\mathbb{R}^2$ の要素を掛けたものをすべて足したものです。それは非可算無限次元の大きさを持ちます。

一方、ϵ_V は、この無限次元の空間を2次元の空間Vに移します。

unit と counit が存在すれば、adjunctionが成り立つ

adjunctionの二つ目の定義

今回のセッションでは、前回のセッションの続編です。adjunctionを、unitとcounit を使って定義するのが目的です。

最初に、adjunctionが成り立っていると仮定した時に、unitとcounit がどういう性質を持つかを見ていきます。次に見る「同一射の三角図式」が可換になるという性質が重要です。

次に、adjunction $F \dashv G$が成り立っていることと、「同一射の三角図式」を可換とするunit, counitが存在することが同値であるという定理を証明します。

この定理の証明のポイントは、unit, counitの存在から出発して、Part 2でみたadjunctionの定義を再現できることを示しているところにあります。

こうして、unitとcounit を使った定義が、adjunctionの二つ目の定義を与えることになります。

同一射の三角図式

unit, counitの議論では、「同一射の三角図式」と言われるものが活躍します。$F \dashv G$ の時、次の二つのdual な図式は、いずれも可換になります。

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "I_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\
 & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "I_{\mathrm{G}}"'] & FGF \arrow[d, "G\epsilon"] \\
 & G
\end{tikzcd}
$$

$F \dashv G$ の時、先の図式が可換になることは、$A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$ であるすべてのA, Bについて、次の図式が可換であることからわかります。そのことを見ていきましょう。

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "I_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{F(A)}"] \\
 & F(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "I_{\mathrm{G}(B)}"'] & FGF(B) \arrow[d, "G(\epsilon_B)"] \\
 & G(B)
\end{tikzcd}
$$

まず、この左側の図式が可換であることから見ていきましょう。

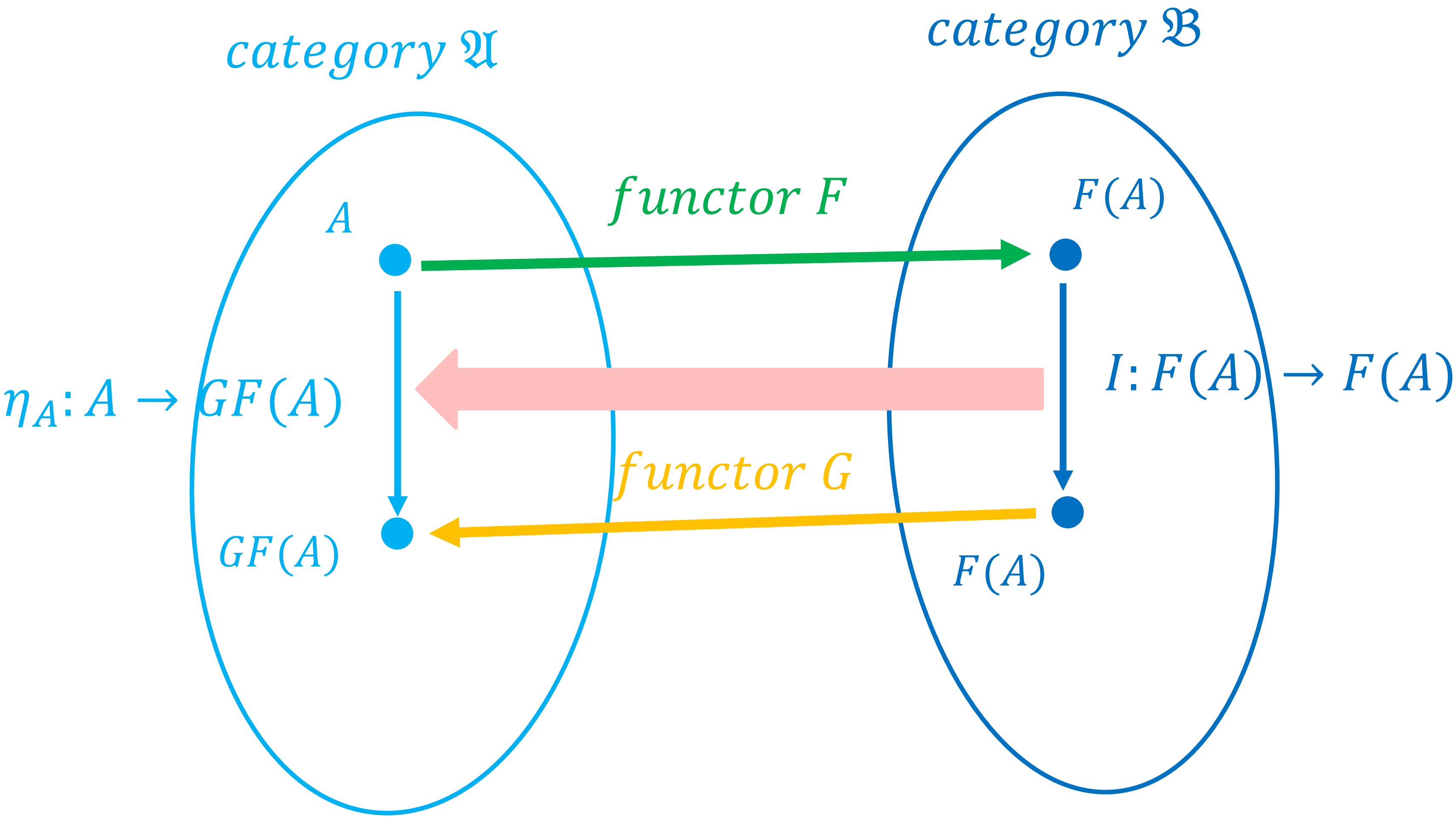
$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "I_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}
$$

右側の図式についての説明は、今回は割愛します。
「Dualであるから」、ほとんど同じ議論が使えます。

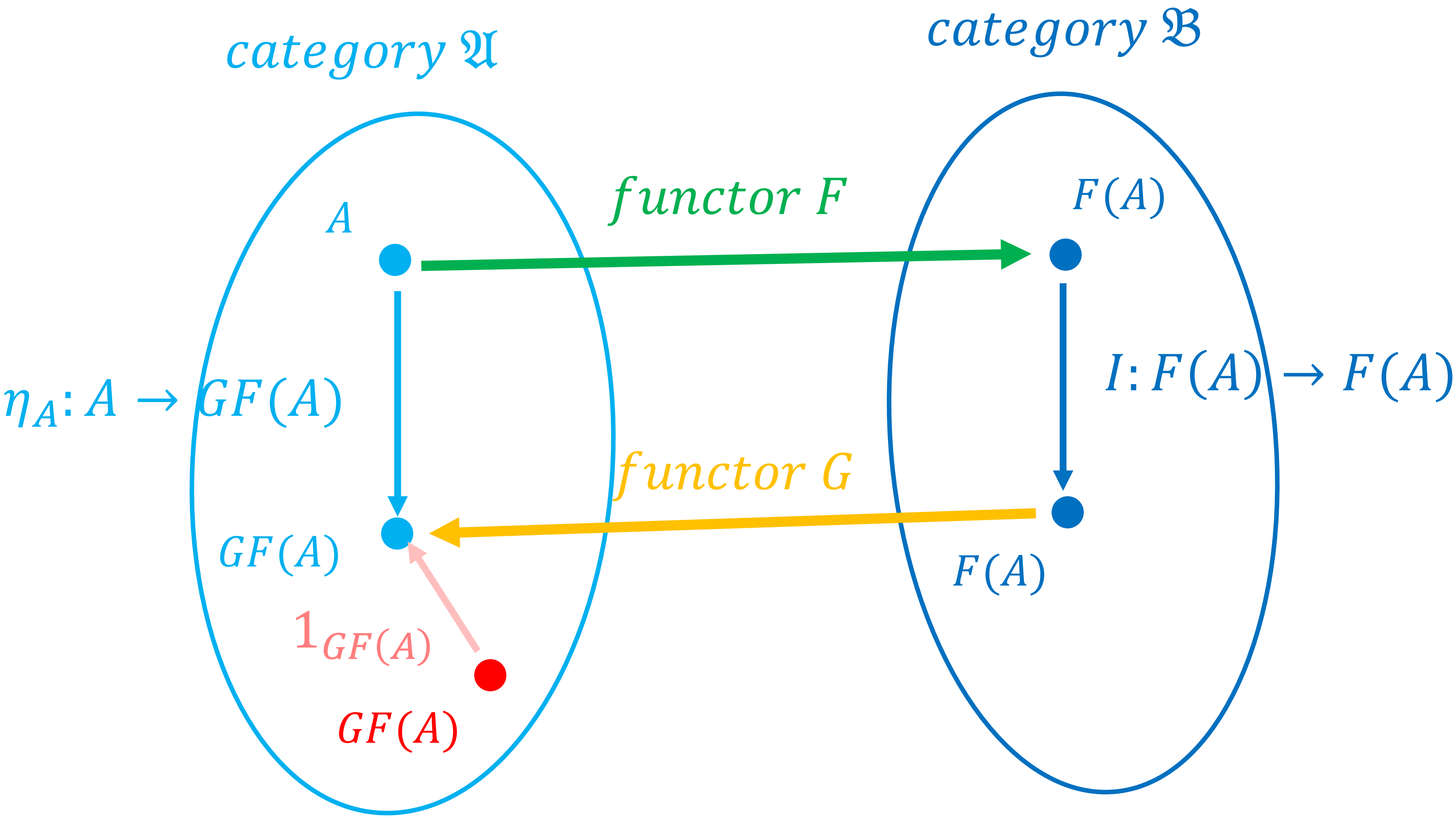
この図式は、どんなところから現れたのでしょう？
以下の議論は、前提として F, Gのadjunction を前提にしていることに注意してください。

$F \dashv G$の時、次の対応があります。

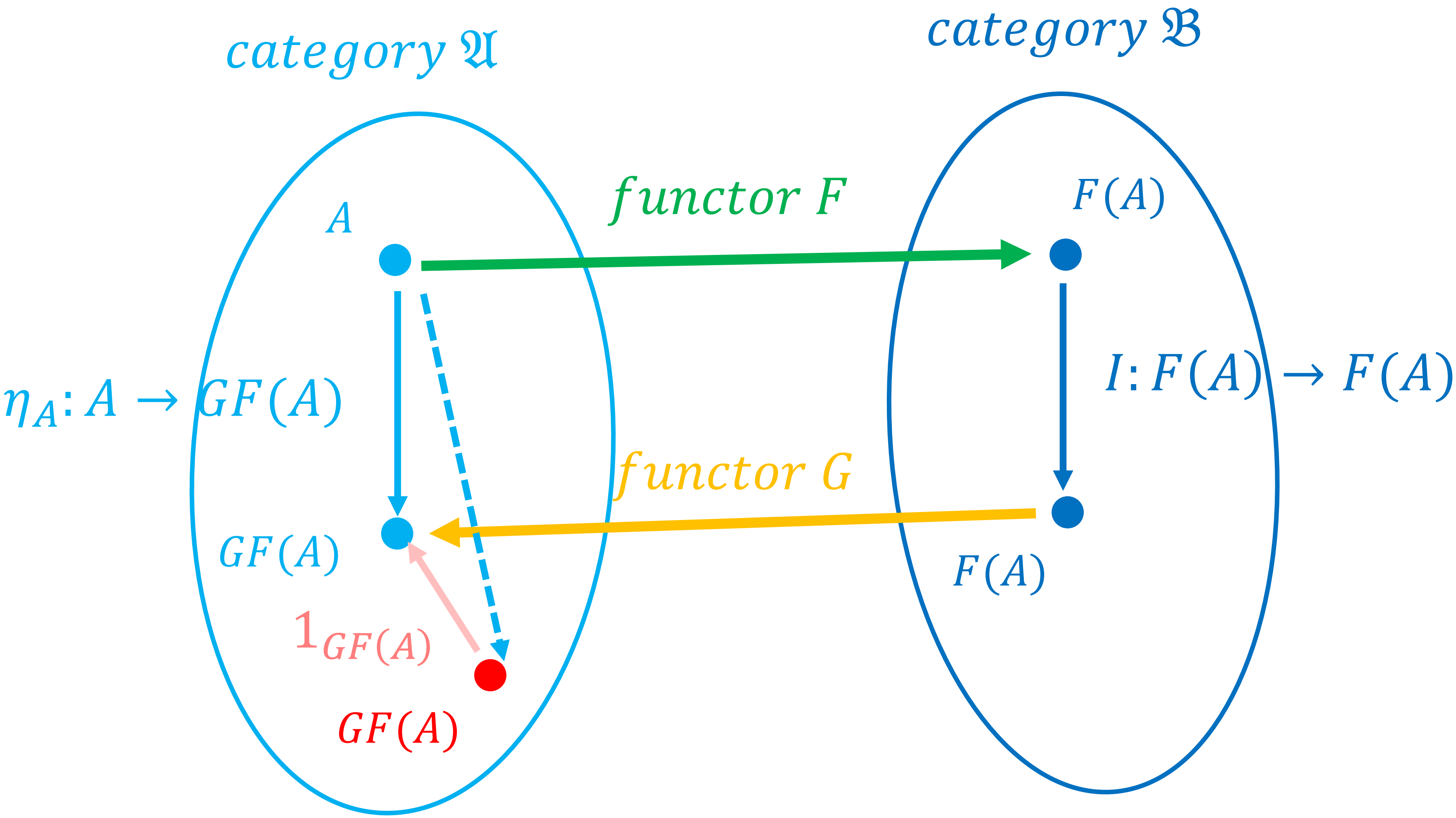
$$(A \xrightarrow{\eta_A} GF(A)) = \overline{(F(A) \xrightarrow{I} F(A))}$$



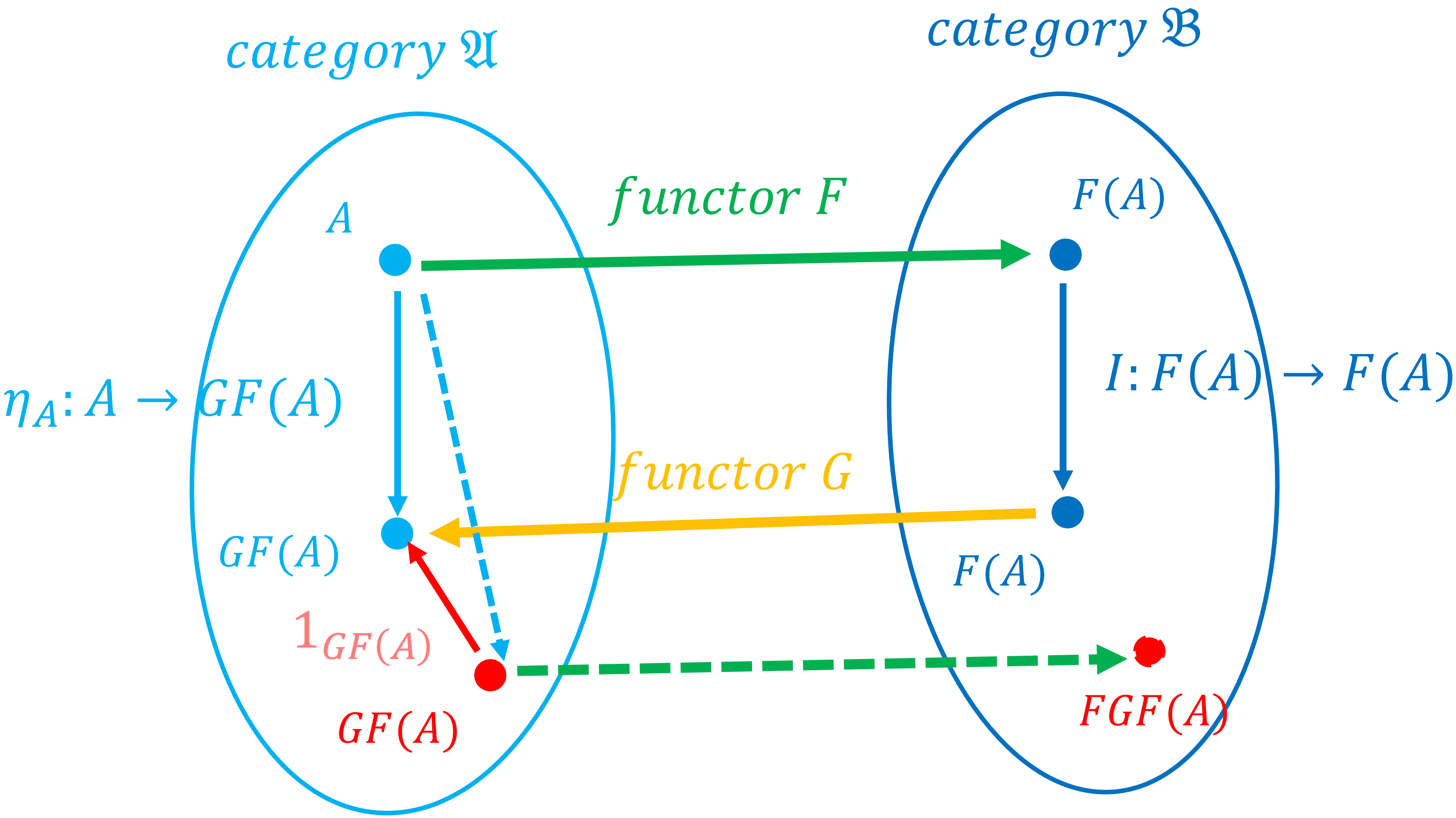
$\mathfrak{A}$の中に、同じ$GF(A)$というオブジェクトを置いて元の$GF(A)$への射$1_{GF(A)}$を考えます。



Aから、新しい$GF(A)$への射η'_Aも、
$\eta = 1 \circ \eta' = \eta'$ ですので同じものです。

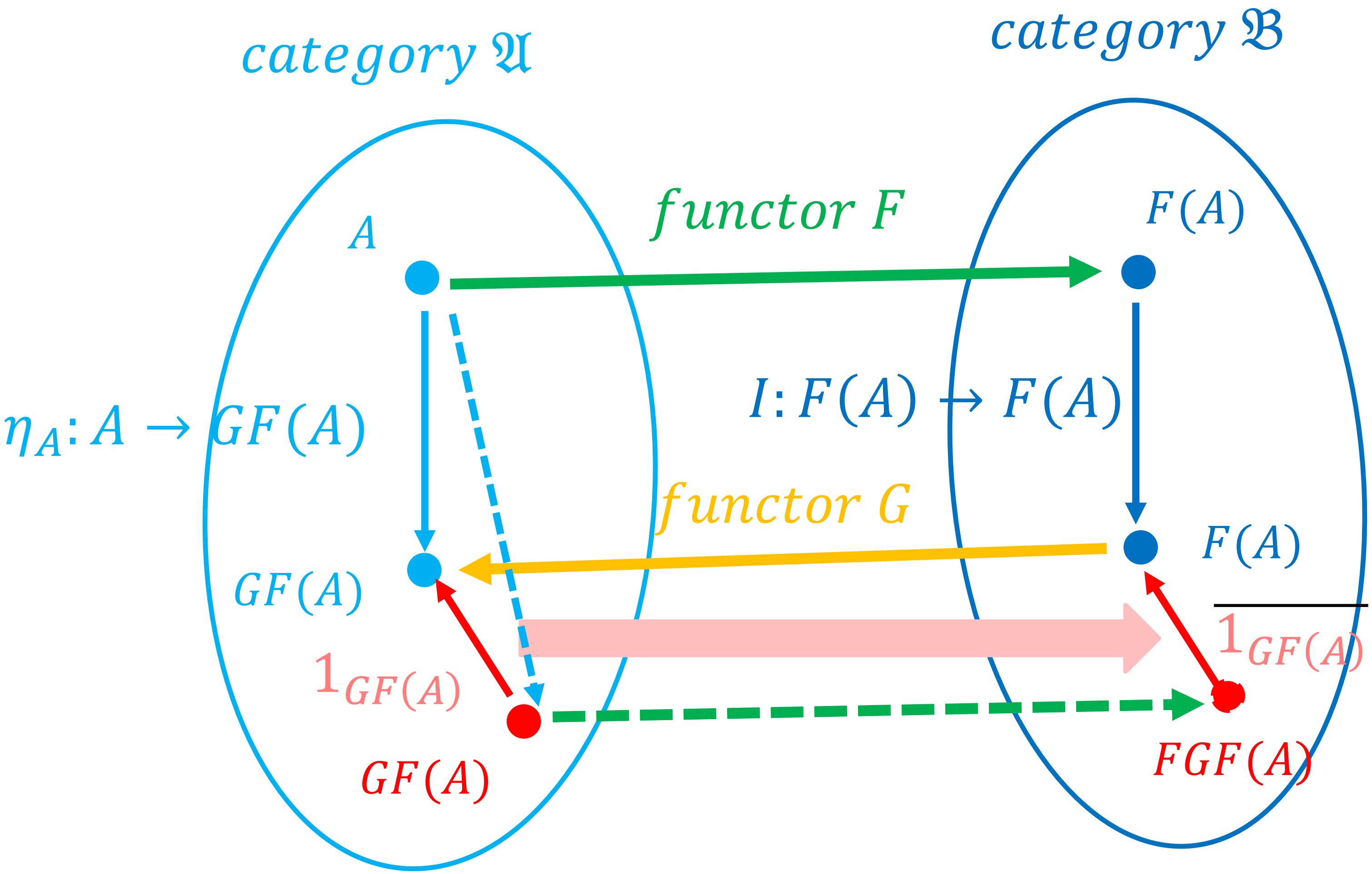


$\mathfrak{A}$の$GF(A)$をfunctor Fで、$\mathfrak{B}$に移します。
$GF(A)$は$FGF(A)$になります。



射$1_{GF(A)}$は射$\overline{1_{GF(A)}}$に移ります。

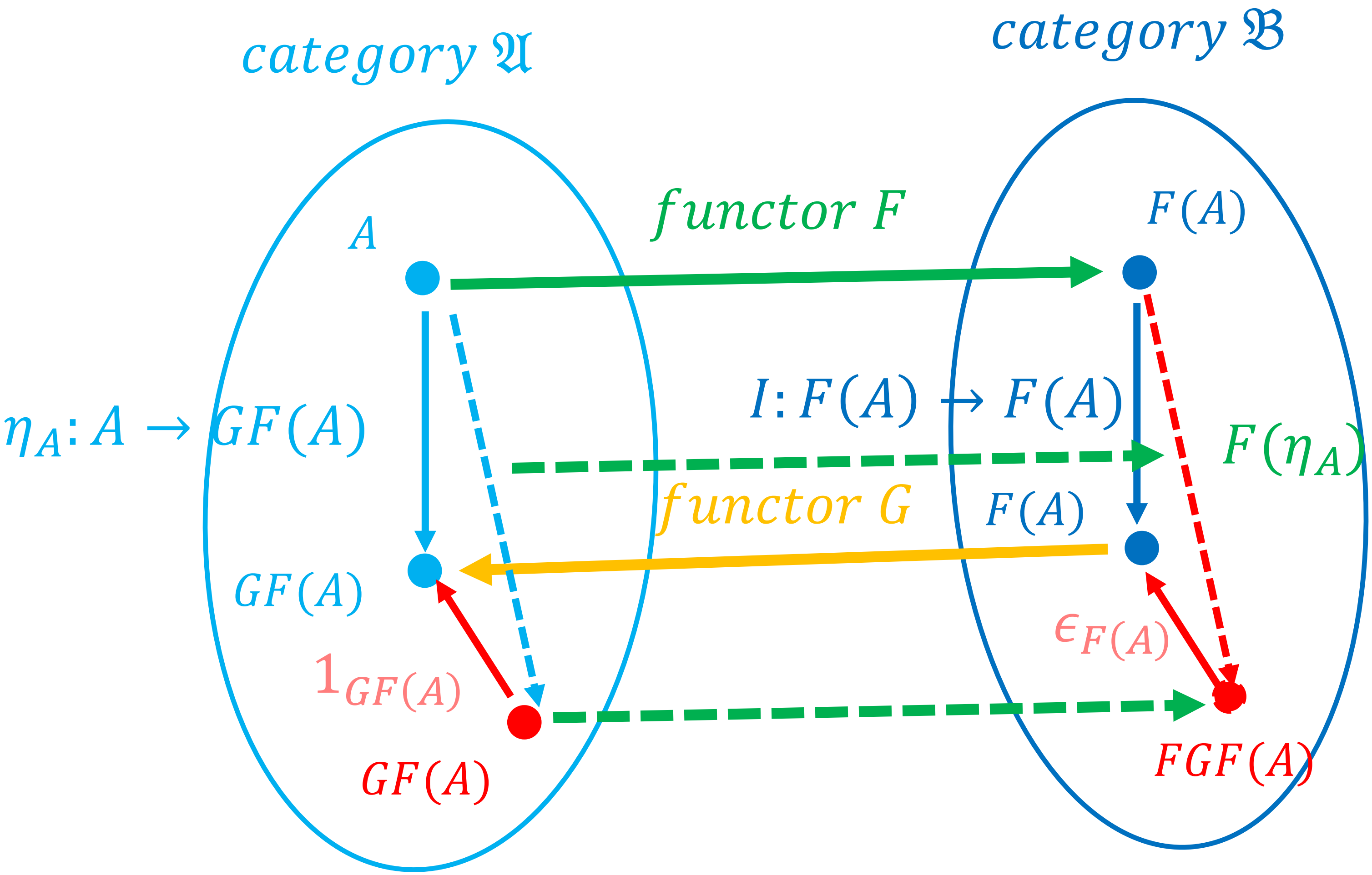
$\overline{1_{GF(A)}} = \epsilon_{F(A)}$に注意してください。



$$\overline{1_{GF(A)}} = FGF(A) \to F(A) = \epsilon_{F(A)}$$

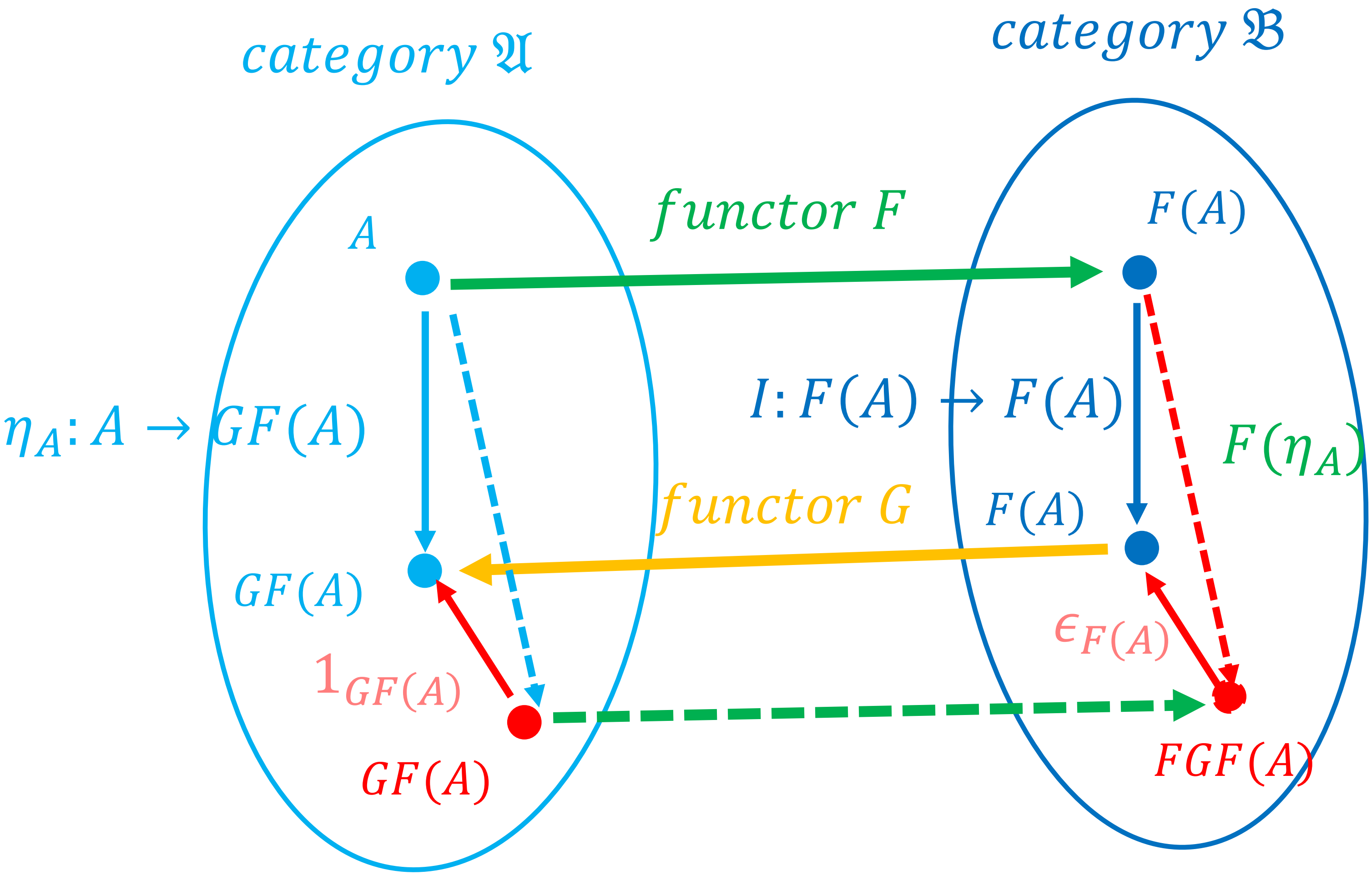
$$\epsilon_B: FG(B) \to B$$

左の赤い破線は、$F(\eta'_A) = F(\eta_A)$です。

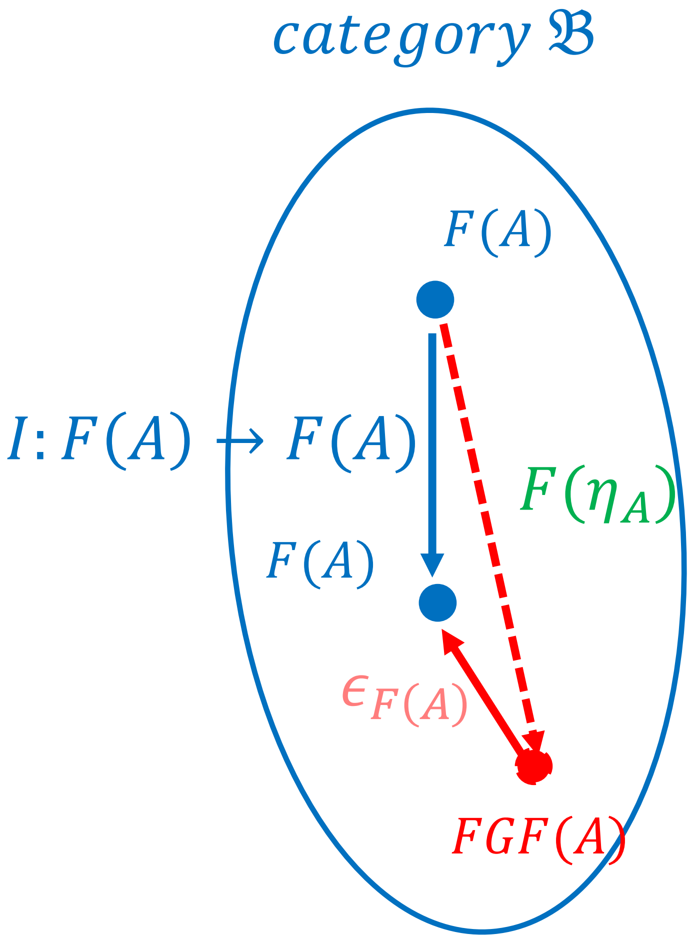


$$\overline{\left(A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \xrightarrow{1} GF(A)\right)} \quad = \quad \left(F(A) \xrightarrow{F(\eta_A)} FGF(A) \xrightarrow{\varepsilon_{F(A)}} F(A)\right).$$

左の三角形も右の三角形も可換です。



左の可換な三角形に注目します



整理すると

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, dashed, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "I: F(A) \to F(A)"'] & & FGF(A) \arrow[dl, "\epsilon_{F(A)}"] \\
& F(A) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "I_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}
$$

adjunctionの最初の定義と、unit, counitの関係

ここから、adjunctionのPart 2でみた最初の定義と、unit, counitの関係 について述べていきたいと思います。

まず、次の補題を紹介したいと思います。（Leinsterの教科書のLemma 2.2.4 です。）

functor $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ が、
$F \dashv G$ で unit η とcounit ϵ を持つ時、

すべての $g: F(A) \to B$ について
$\bar{g} = G(g) \circ \eta_A$が成り立つ。また、

すべての $f: A \to G(B)$ について
$\bar{f} = \epsilon_B \circ F(f)$が成り立つ。

–

補題の証明

すべての射 $g: F(A) \to B$について、次の式が成り立つ。

$$\overline{(F(A) \xrightarrow[g]{} B)} = \overline{(F(A) \xrightarrow[1]{} F(A) \xrightarrow[g]{} B)}$$

$\eta_A: A \to GF(A)$

$$= (A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \xrightarrow{G(g)} G(B))$$

$g: F(A) \to B$
$G(g); GF(A) \to G(B)$

よって、$\bar{g} = G(g) \circ \eta_A$

すべての射 $f: A \to G(B)$について、次の式が成り立つ。

$$\overline{(A \xrightarrow[f]{} G(B))} = \overline{(A \xrightarrow[f]{} G(B) \xrightarrow[1]{} G(B))}$$

$f: A \to G(B)$
$F(f): F(A) \to FG(B)$

$$= (F(A) \xrightarrow{F(f)} FG(B) \xrightarrow{\epsilon_B} B)$$

$\epsilon_B: FG(B) \to B$

よって、$\bar{f} = \epsilon_B \circ F(f)$

adjunctionの二つの定義の同値性の証明

次の定理は、Part 2 で見た定義と、Part 3 で導入した新しい定義が同値であることの証明になります。

【定理】

カテゴリー $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$とfunctor $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ が与えられた時、次の二つの条件は同値である。

- FとGはadjunctionで、$F \dashv G$ である。
- FとGのnatural transformation のunit, counitのペア

$$(\eta: 1_{\mathfrak{A}} \to GF, \epsilon: FG \to 1_{\mathfrak{B}})$$

  について、「同一射の三角図式」は可換である。

定理のポイント

FとGの間のすべてのadjunctionが、同一射の三角図式を可換にすることは、すでに見てきました。この逆の主張が成り立つことを示す必要があります。

すなわち、同一射の三角図式を満たすあるnatural transformationのペア(η, ϵ)があたえられたとしましょう。この時、F, Gのadjunctionがユニークに存在することを説明します。

存在した場合のユニークさは、先の補題から導かれます。

adjunctionの存在は、次のようにしてわかります。

以前のadjunctionの定義を特徴づけていた次の二つの関数を考えます。そうしたtranspose(bar表記)が、unitあるいはcounit で表現されることを示せばいいはずです。

$$\mathfrak{B}(F(A), B) \rightleftarrows \mathfrak{A}\big(B, G(B)\big)$$

- $\mathfrak{B}(F(A), B) \to \mathfrak{A}\big(B, G(B)\big)$の場合

  $g \in \mathfrak{B}(F(A), B)$の時、$\bar{g} = G(g) \circ \eta_A$ とおけば、

  $\bar{g} \in \mathfrak{A}\big(B, G(B)\big)$となります。

- $\mathfrak{A}\big(B, G(B)\big) \to \mathfrak{B}(F(A), B)$の場合

  $f \in \mathfrak{A}\big(B, G(B)\big)$の時、$\bar{f} = \epsilon_B \circ F(f)$ とおけば。

  $\bar{f} \in \mathfrak{B}(F(A), B)$となります。

これらは、adjunctionを定義します。

transposeの性質

これらのtransposeについて、証明は省略しますが、次の性質が成り立つことがわかります。

$$\bar{\bar{g}} = g$$
$$\bar{\bar{f}} = f$$

$$\overline{1_{F(A)}} = G\left(1_{F(A)}\right) \circ \eta_A = 1 \circ \eta_A = \eta_A$$
$$\overline{1_{G(B)}} = \epsilon_B \circ F\left(1_{G(B)}\right) = \epsilon_B \circ 1 = \epsilon_B$$

adjunctionの二つの定義は同値である

これらから、つぎのことがわかります。

カテゴリー $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$とfunctor $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ が与えられた時、次の条件は同値である。

- $F \dashv G$ (最初の定義による)
- 同一射の三角図式を満たすunit, counitが存在する。

これで、unit, counit でadjunctionを定義できることがわかり、adjunctionの二つの定義は同値であることを示すことができました。