
エンタングルメントで理解する量子の世界

はじめに

- エンタングルメントは、現代では、量子の世界のもっとも基本的な現象だと考えられている。アインシュタインが今から80年以上前に、量子論の「矛盾」を示すものとして提示したこの現象は、当時の量子論の主流派であったボーアたちからは、黙殺された。
- それが現代では、量子論の重要な「原理」の一つとして扱われている。「パラドックス」から「原理」へ。こうした　大物理学者をまきこんだ数奇なドラマも、エンタングルメントをなにか神秘的で奇妙なものだという一般の印象を強めているのかもしれない。
- ただ、そういうイメージを払拭したいと僕は考えている。また、それは可能だと考えている。今回のセミナーの目的は、エンタングルメントを、できるだけ多くの人に理解してもらうことである。

はじめに

- 主要に、三つの話をする。
- 第一は、エンタングルメントが起きるメカニズムの説明である。ここでは、二つの独立したシステムを一つのシステムとして捉える「テンソル積」の話をする。
- 量子が一個だけではエンタングルメントはおきない。しかし、量子が二個集まると、エンタングルメントは簡単に起こりえる。それは、二つの量子の状態それ自体を一つの状態として捉えようとすると、単純な把握からこぼれ落ちる状態として自然に生まれてくる。
- 第二は、二つ以上の量子が取る状態は、基本的にはエンタングルした状態と、そうでない状態（「分離可能な状態」と言う）の二つの状態に大きく分かれることを明確にする。それが古典論と量子論を分かつ大きな違いになる。

はじめに

- 今日では、少なくない人が、コンピュータ上で量子ゲートを組み合わせて、量子コンピュータの基本動作のシミレーションをすることが可能なのだが、残念ながら、その多くの場合の「例題」は、「分離可能な状態」を対象としていて、エンタングルした状態が、量子ゲートとどのような作用をするのか触れていない。今回のセミナーでは、その問題を丁寧に説明して行きたいと思う。
- 第三に、エンタングルメントの状態が、簡単に起こりうることを解説したいと思う。実は、もっとも基本的なエンタングルメントの状態は、0と1の状態に、たった二つの量子ゲートを作用させるだけで作り出すことができる。

はじめに

- 今回のセミナーには、実は、隠れた目標がもう一つある。
それは、この回路の構成を通じて、エンタングルを含んだ状態の量子回路上での計算を、行列とベクトルの計算を用いずに「暗算」（正確には簡単な「筆算」）で行うやり方をマスターしてもらうことである。
- エンタングルメントは、自然界でも量子コンピュータ上でも、いたるところでごく自然に発生している。エンタングルメントを理解することは、量子の世界を理解する大事なステップだと僕は考えている。

エンタングルメントで理解する量子の世界

Agenda

- 第一話：　エンタングルメントの発見
- 第二話：　エンタングルメントという状態はどのようにして生まれるのか？
- 第三話：　量子の状態の変化を量子ゲートで追跡・理解する
- 第四話：　エンタングルメントを生み出す量子回路

第一話:

エンタングルメントの発見

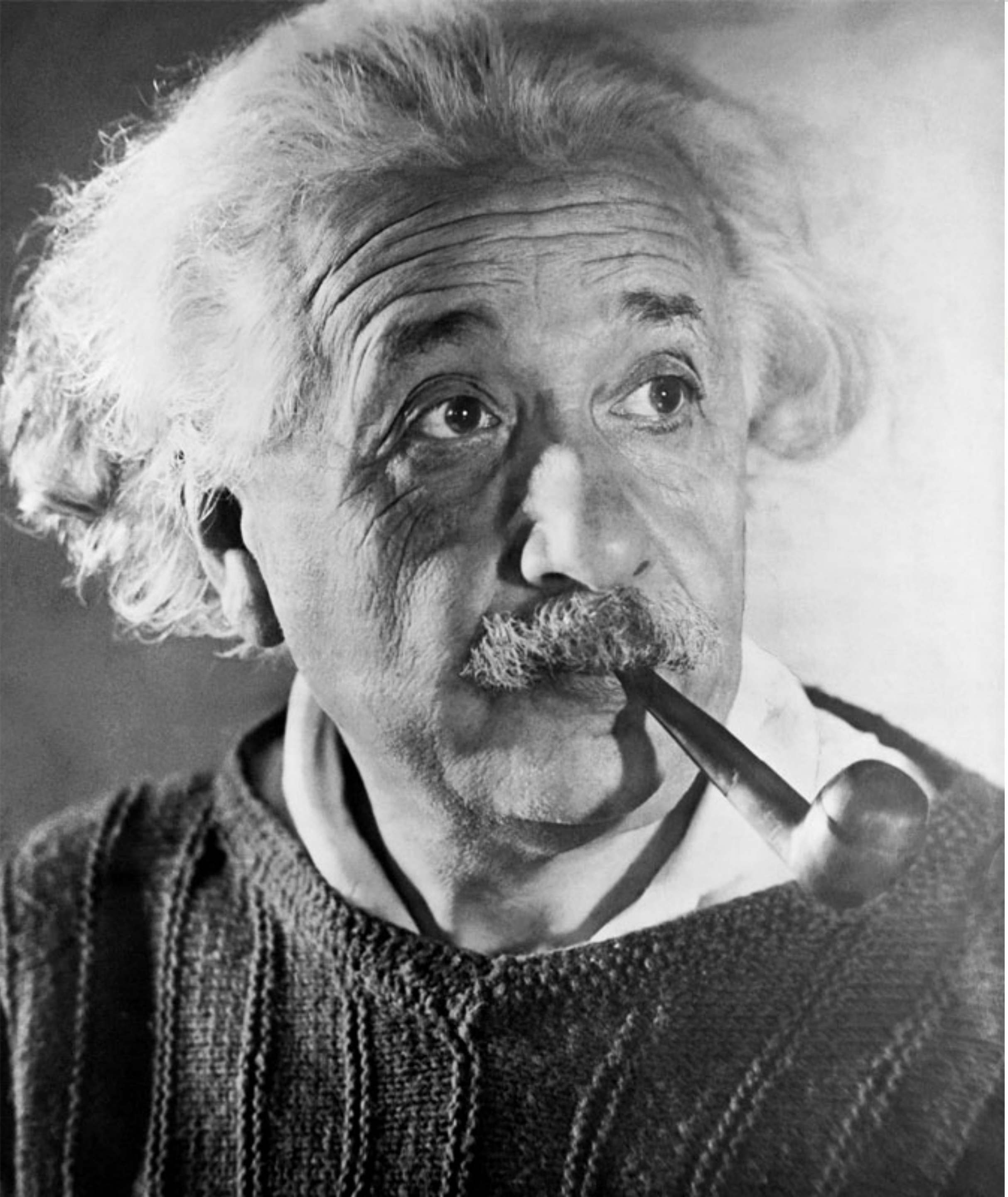
エンタングルメントの発見

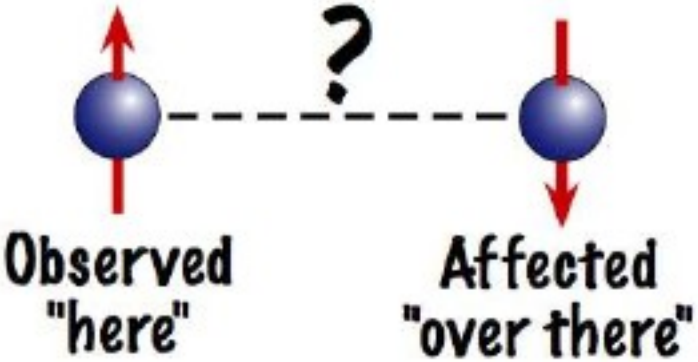
- 重力を一般相対性理論で時空の性質として説明することに成功したアインシュタインは、量子論に満足せず、1935年、量子のエンタングルメント(「もつれ合い」)という奇妙な現象を発見する。
- 「量子もつれ」は、量子のあいだに特別の相関関係が生まれる現象である。アインシュタインは、量子論の矛盾を示すものとして、これに注目した。

エンタングルメントの発見

- ただ、アインシュタインの「隠れた変数」は、1964年Bellによって理論的に否定され、その後、Bellの主張は、1982年Aspectによって実験的に実証された。
- 「Superposition」が現象としては既に19世紀末に確認され、20世紀に入って量子論の成立とともに理論化が進んだのに対して、「entanglement」が実験的に確証されたのは、20世紀の後半である。

アインシュタインの発見





1935年

EPRの逆理

Einstein,
Podolsky,
Rosen

エンタングルメント
もつれあった二つの量子の状態の発見

- 1935年に、アインシュタインとポドルスキーとローゼンは、次の論文を発表する。（三人の著者の頭文字をとって、EPR論文と呼ばれる。）
- "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?"「物理的な実在の量子力学の記述は、完全なものと考えることができるか？」 https://goo.gl/qAWacP
- この論文で、アインシュタインは、量子論では、二つの量子の「もつれあい」の状態が現れることを指摘した。

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality.

Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

EPR論文を報ずる1935年のニューヨークタイムズ紙

EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

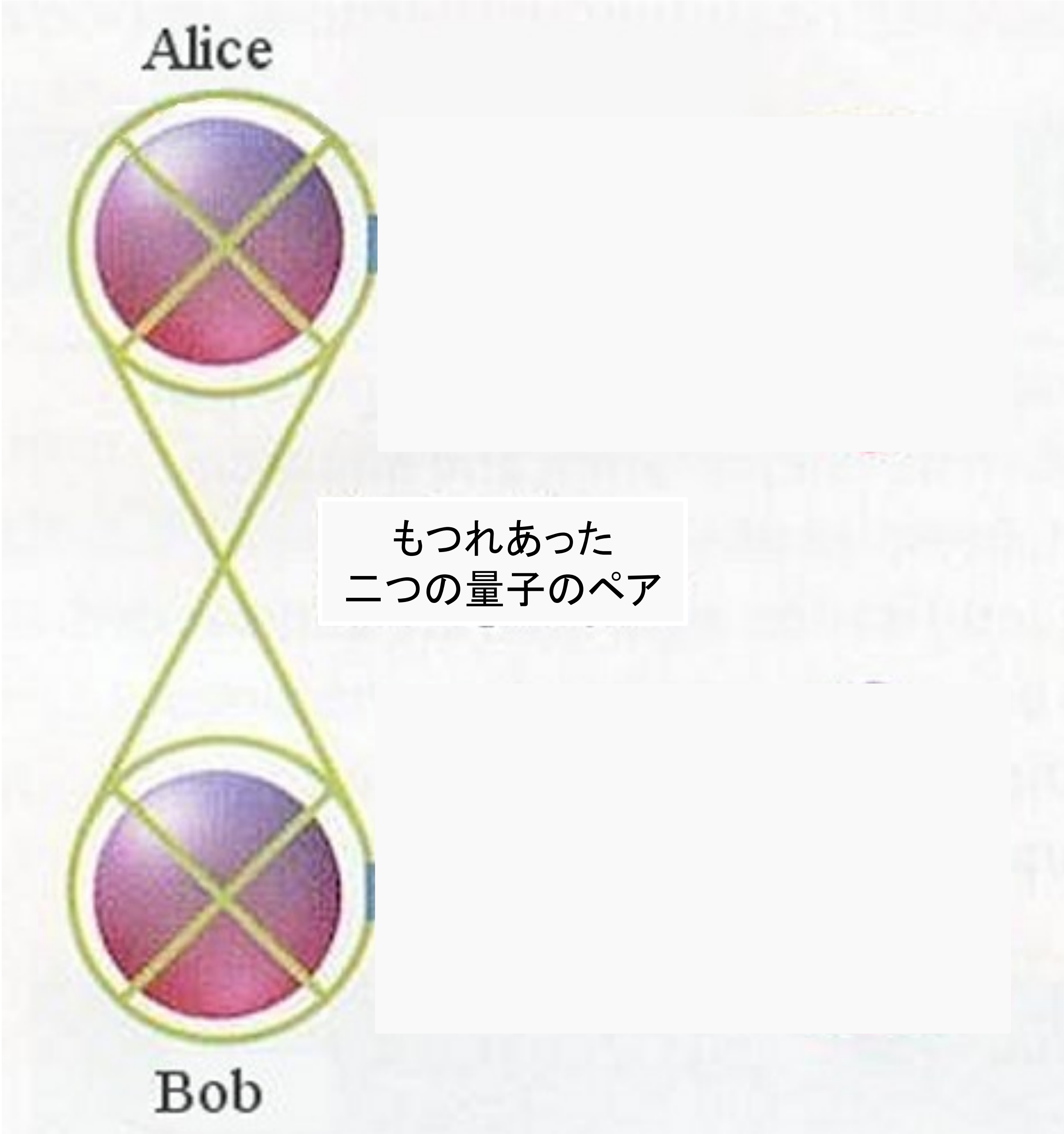
Scientist and Two Colleagues Find It Is Not 'Complete' Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

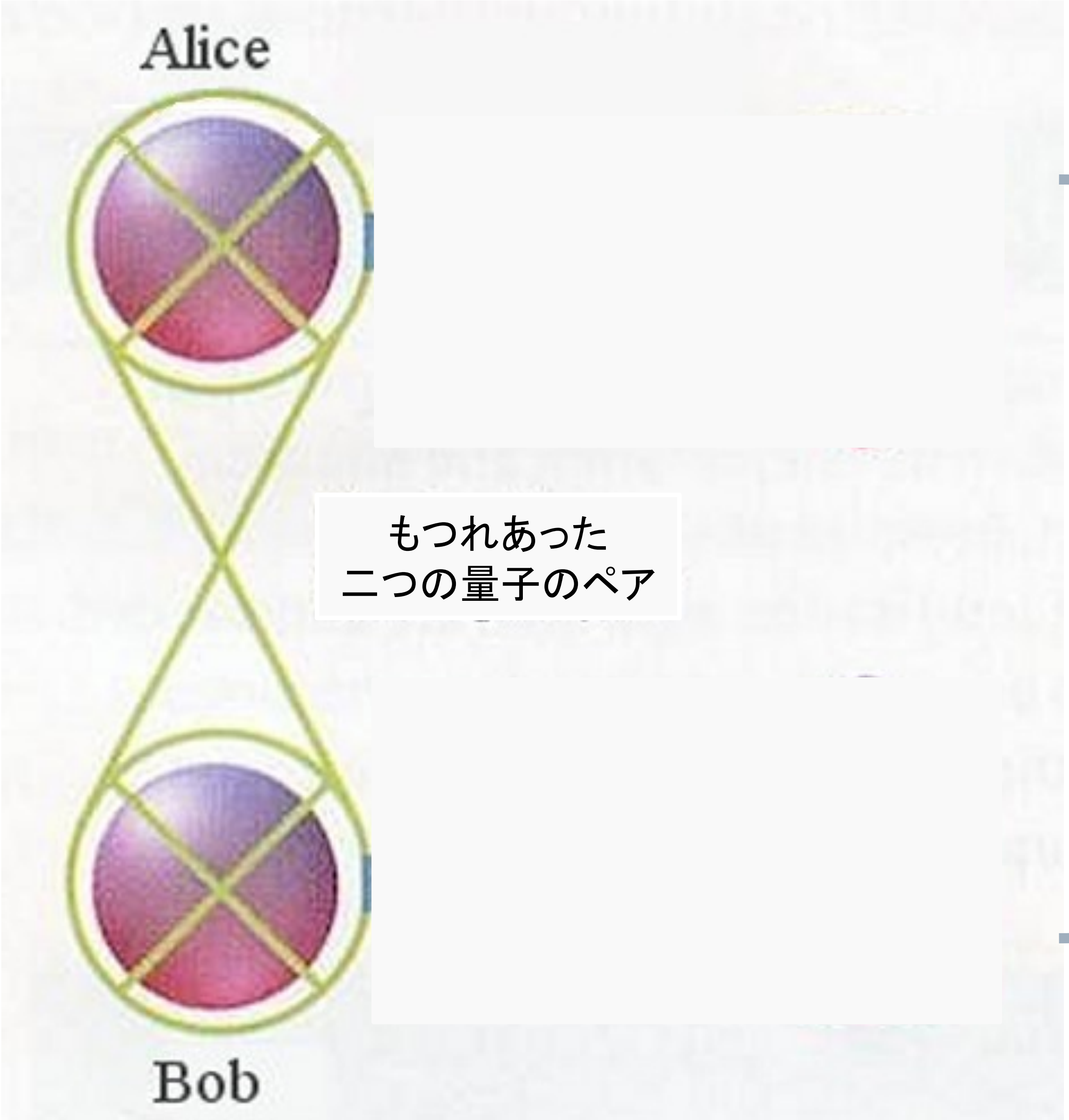
Believe a Whole Description of 'the Physical Reality' Can Be Provided Eventually.

エンタングルメント ＝ EPRペア
一つの式で表される二つの量子の状態

- もつれあった二つの量子を、この現象の発見者(Einstein, Podolsky, Rosen)の頭文字をとってEPRペア と呼ぶことがある。
- EPRペアの状態は一つの式で表される。それにもかかわらず、それは二つの量子の状態、すなわち、からみあった二つの量子の状態を表しているのである。
- 興味ふかいのは、こうしたからみあった二つの量子の関係は、二つの量子の間の距離には関係のない性質だということである。この関係は、二つの量子が、たとえ銀河を隔てて何万光年離れたとしても、からみあいはそのまま維持されるのである。

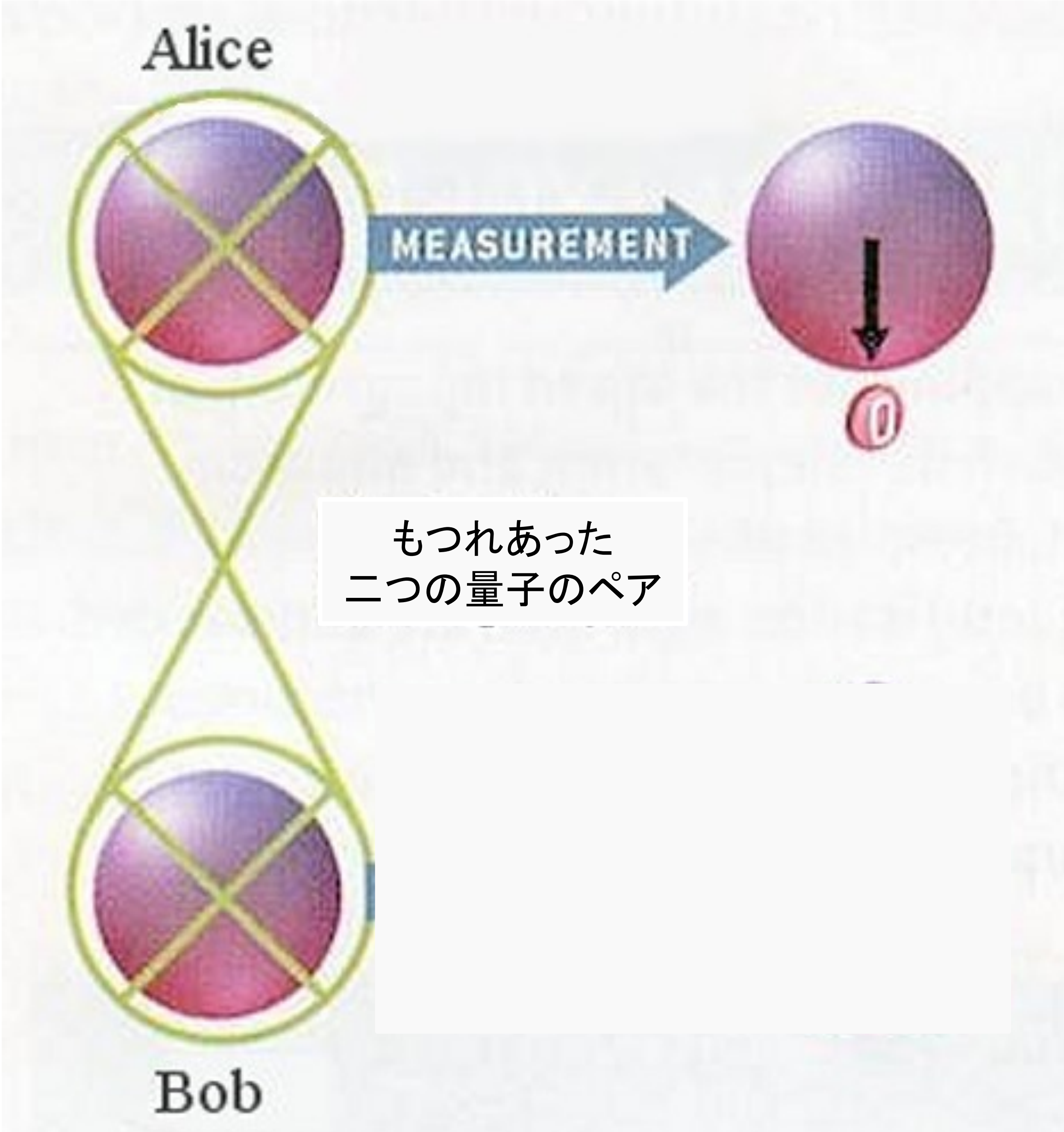


もつれあった
この二つの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。



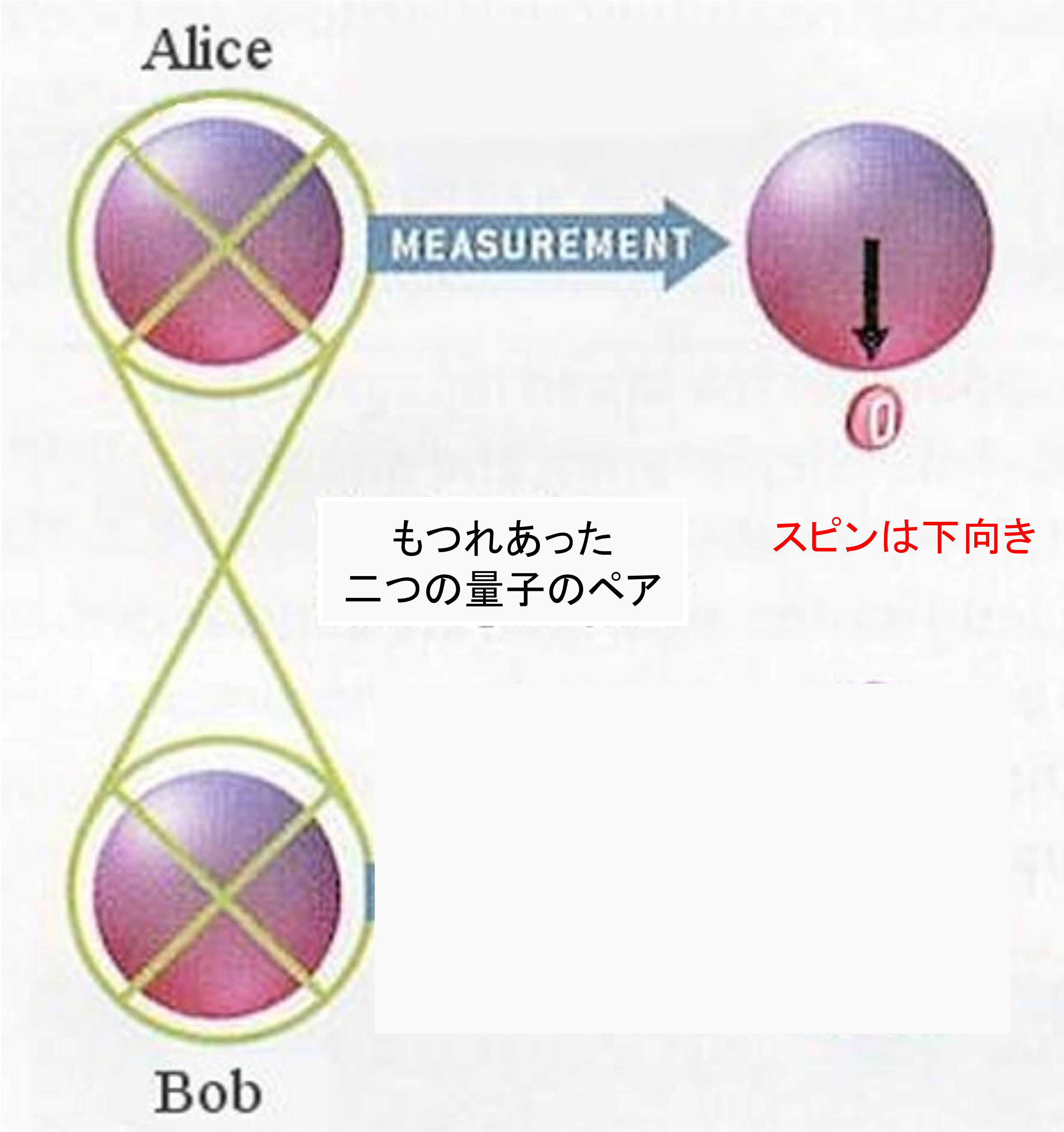
もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、



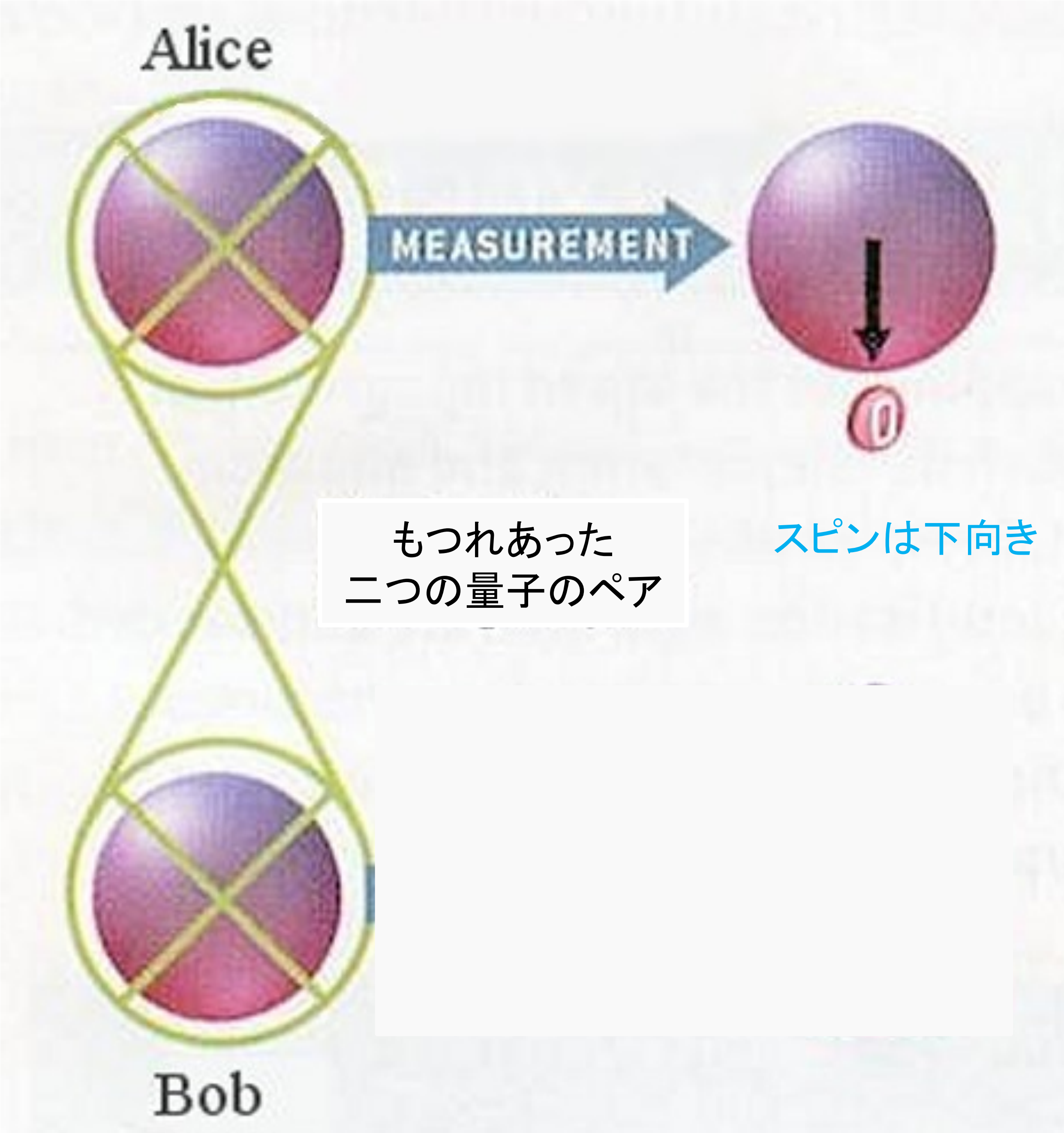
もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、



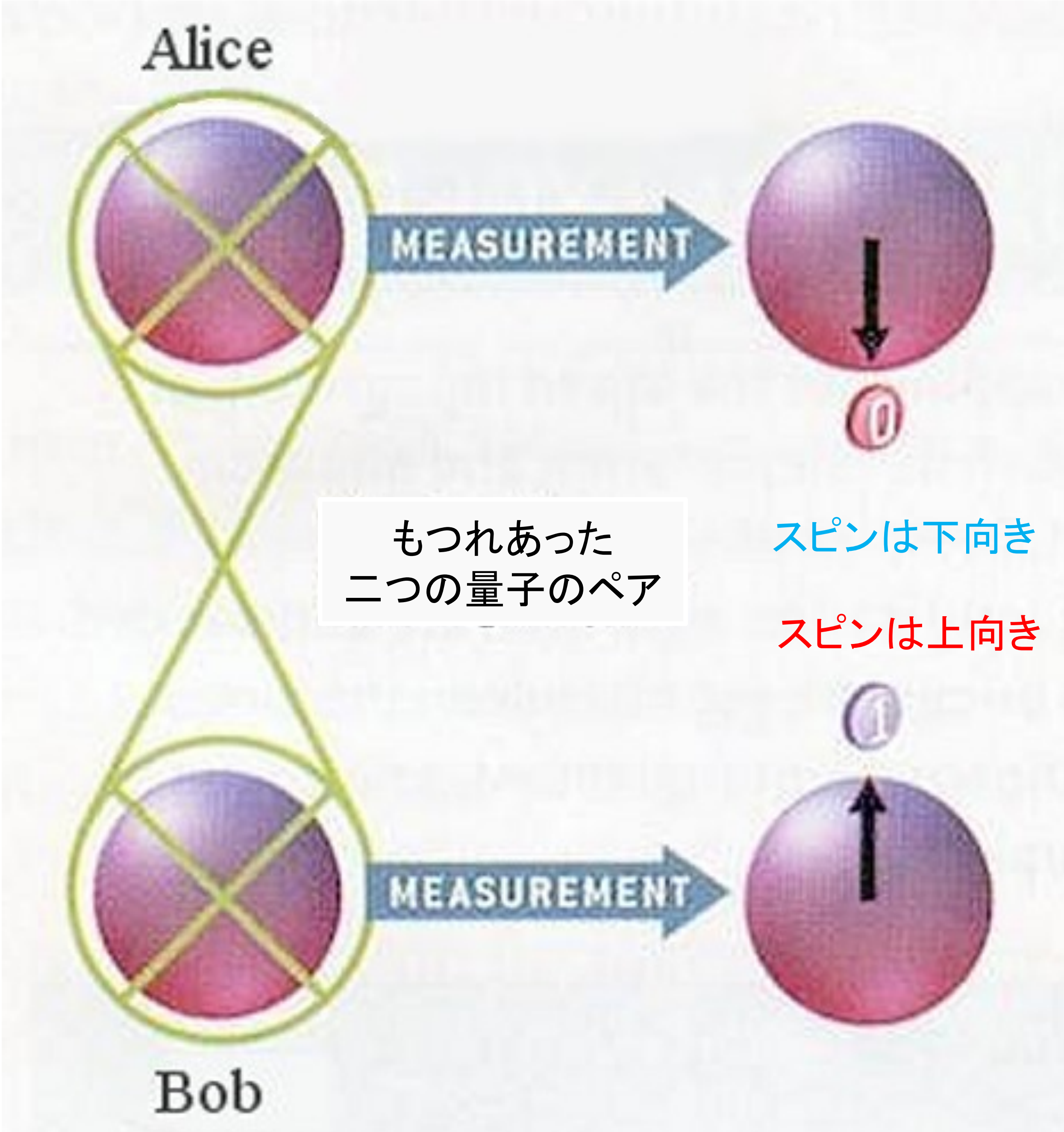
もつれあった
この二つの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、



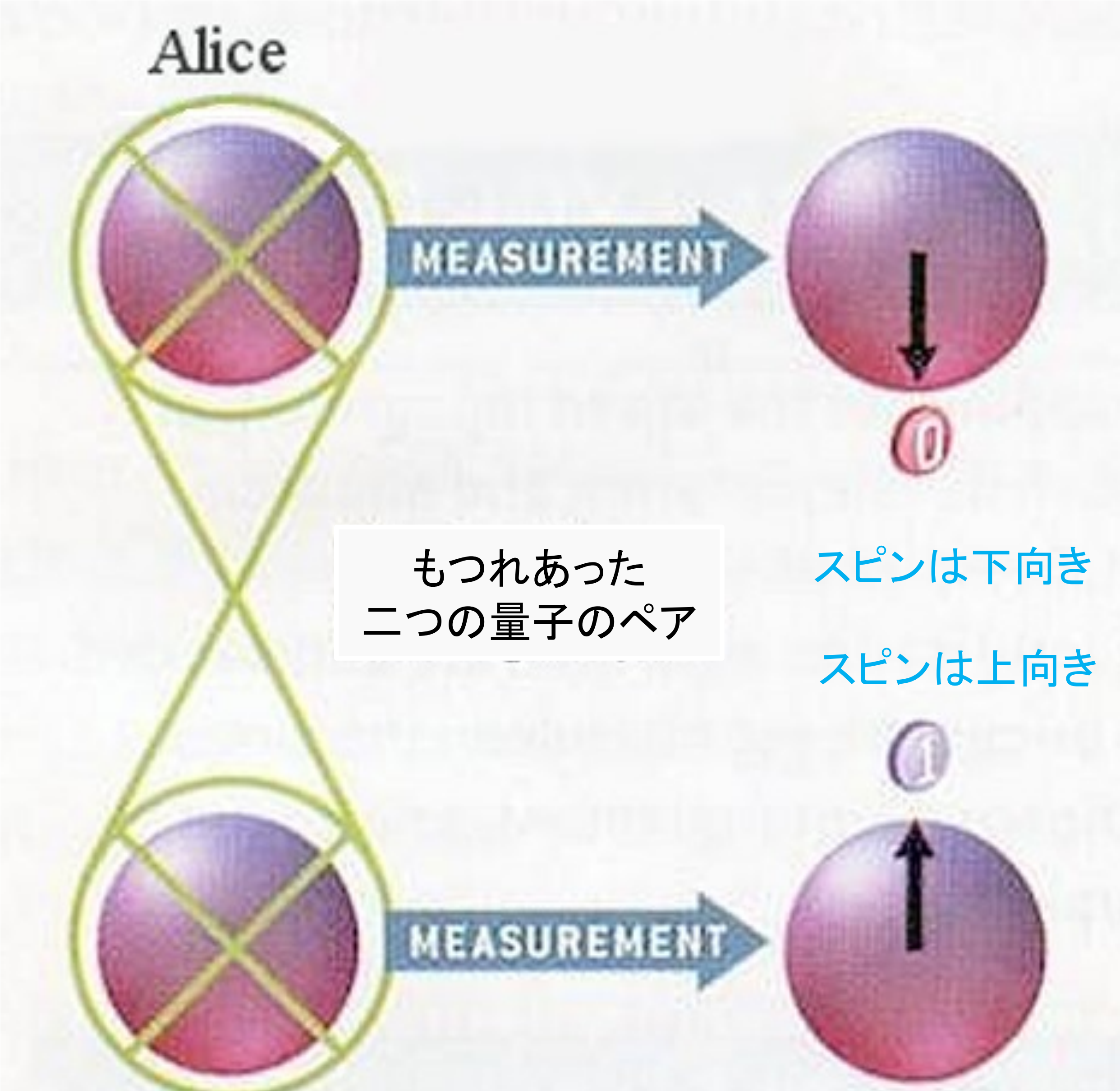
もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。



もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

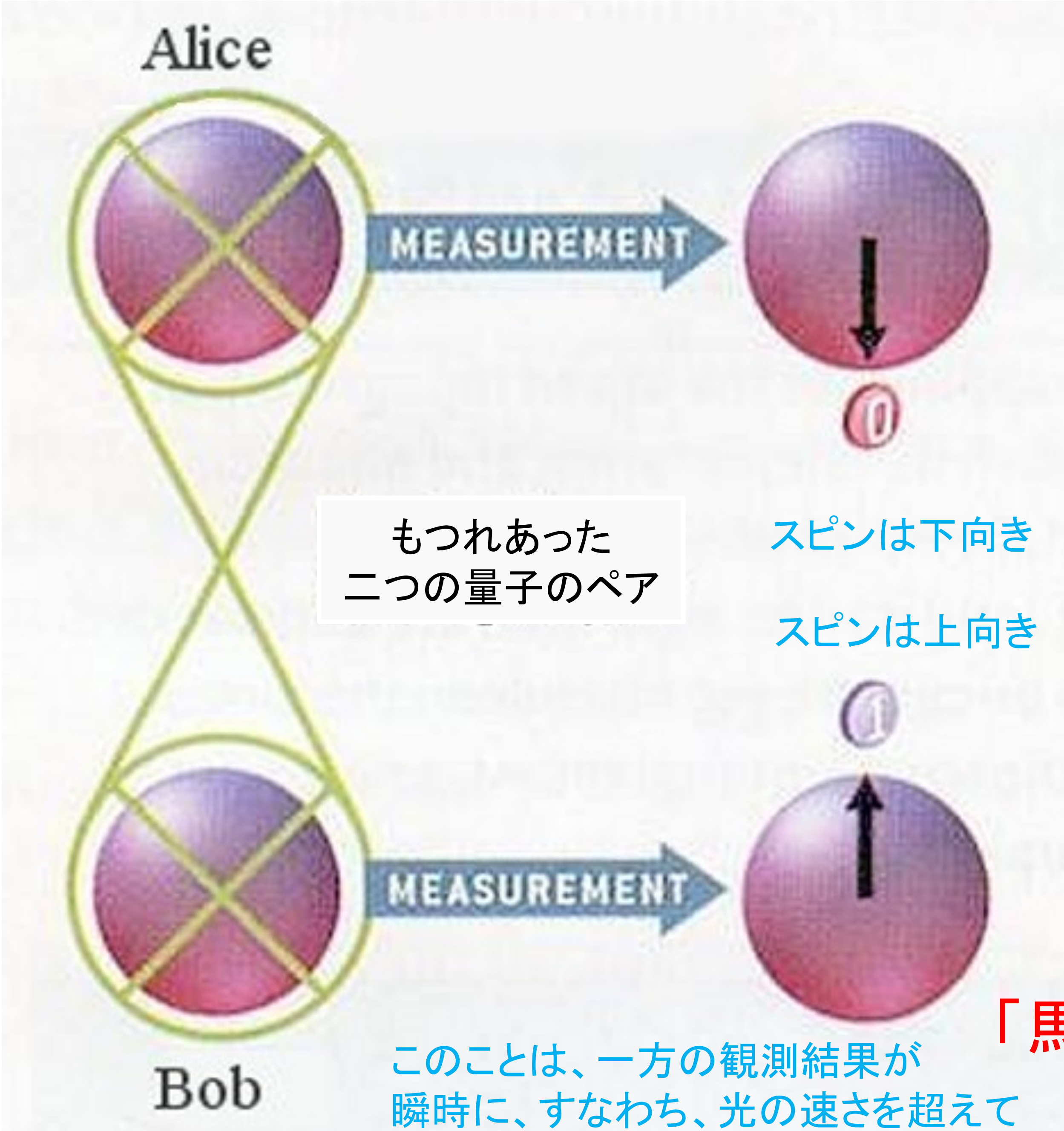
片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。



もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。

このことは、一方の観測結果が
瞬時に、すなわち、光の速さを超えて
他方に伝わることを意味する。



もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。

アインシュタインは、
これを、

「馬鹿げた遠隔作用」

と呼んだ。

このことは、一方の観測結果が
瞬時に、すなわち、光の速さを超えて
他方に伝わることを意味する。

パラドックスから原理へ

- アインシュタインが発見した、量子力学の「矛盾」を、「EPRパラドックス」という。これに「エンタングルメント」という名前をつけたのは、シュレディンガーらしい。
- 「神はサイコロを振らない」
  アインシュタインが、量子論に懐疑的だったことは、よく知られていると思う。量子論の否定は、現在の我々の目から見れば、明らかに、アインシュタインの「誤り」と言っていいものだ。
- 今日では、エンタングルメントは、パラドックスどころか、量子論の基礎を構成するもっとも基本的な原理となっている。
- ただ、このエンタングルメントという奇妙な現象を、誰よりも先に発見したのは、他ならぬアインシュタインであったことは、興味ふかいことである。

But in his final attack Einstein pointed to something so deep, so counterintuitive, so troubling, and yet so exciting, that at the beginning of the twenty-first century it has returned to fascinate theoretical physicists. Bohr's only answer to Einstein's last great discovery— the discovery of entanglement— was to ignore it.

Leonard Susskind

量子論の正しさの理論的解明と実験による検証

1964年　Bellの定理
アインシュタインの「隠れた変数」の否定

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL†
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(*Received 4 November* 1964)

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as a
could not be a complete theory but should be supplemented by additio
ables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this
mathematically and shown to be incompatible with the statistical pred
the requirement of locality, or more precisely that the result of a meas
by operations on a distant system with which it has interacted in the
ficulty. There have been attempts [3] to show that even without such
ment no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is pos
examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variab
tum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interp
local structure. This is characteristic, according to the result to be
reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

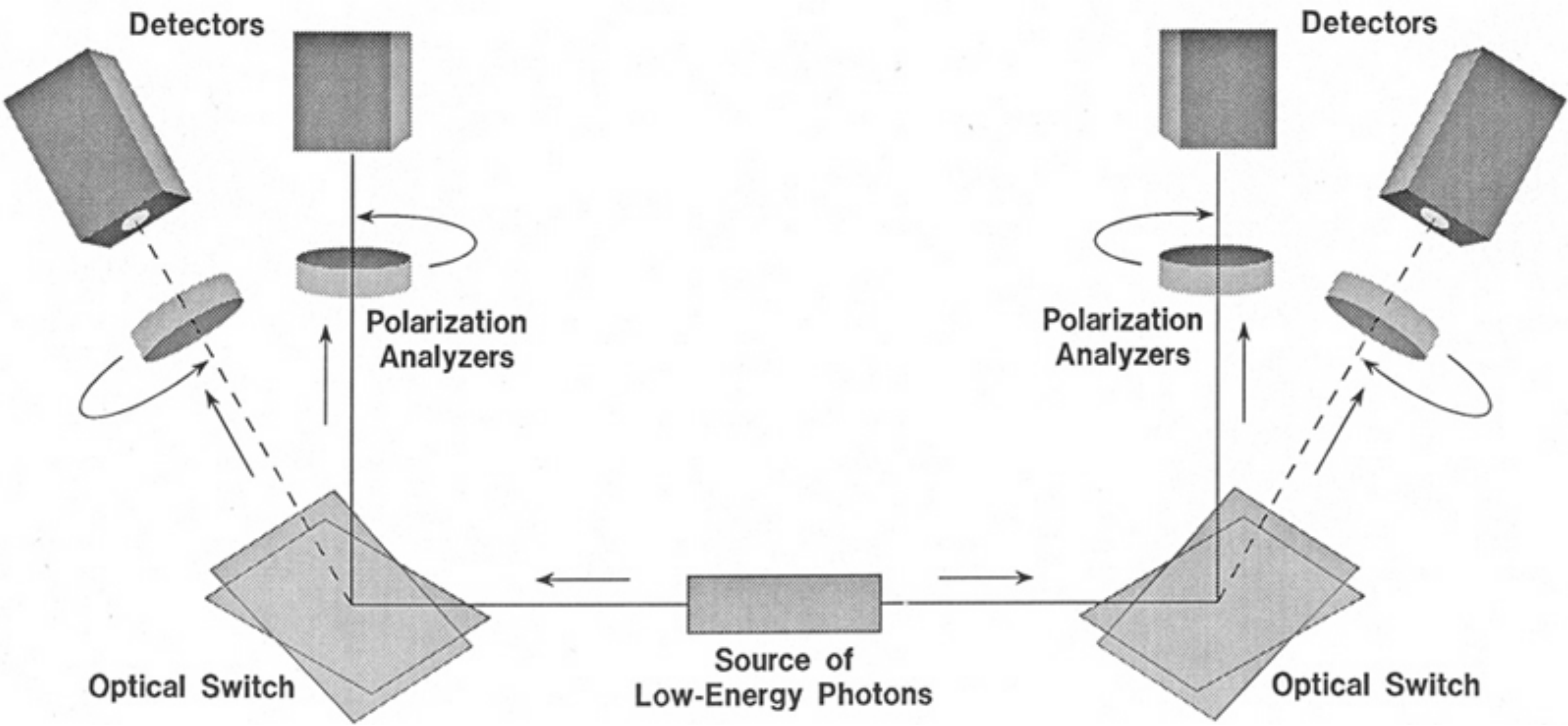
https://goo.gl/wyvd7B

On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox

- THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty.

- There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly nonlocal structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

1982年 Aspectの実験



Bellの定理が成り立っていることの実験での確認


24-22

第二話:

エンタングルメントという状態は どのようにして生まれるのか？

エンタングルメントという状態はどのように生まれるのか？

- 量子が一個だけではエンタングルメントは起きない。しかし、量子が二個集まった状態を考えると、エンタングルメントは簡単に起きる。
- ここでは、独立した二つの状態を一つの状態と考える「テンソル積」の説明を通じて、エンタングルメントの状態がどのように生まれるのかを解説する。

エンタングルメントという状態は
どのように生まれるのか？

- ある状態が、もっと単純な状態の「テンソル積」の形で表されるなら、その状態は「分離可能」と呼ぶ。
- ある状態が、もっと単純な状態の「テンソル積」の形では表現できないなら、その状態は「分離不可能」と呼ぶ。エンタングルメントは、「分離不可能」な状態である。
- それは、数 15 が、3 x 5 と素数の積の形に分解できるのに、数 17 は、こうした分解をもたないのと、少し似ている。
- 最も単純なエンタングルメントは、単純な二つの量子の状態の「テンソル積」としては表されない状態として自然に生まれてくる。

第二話: エンタングルメントという状態はどのようにして生まれるのか？

Agenda

1. 2-qubitsの状態
2. 全ての 2-qubitsの状態は、二つの1-qubitの状態のテンソル積で表現できるだろうか？
3. 「分離可能」な状態と「分離不可能」な状態
4. ベクトルのテンソル積とn-qubitsの状態の基底
5. 2-qubitsの状態の観測
6. EPRペア

2-qubitsの状態

1-qubitの状態

- 一つのqubitの状態|1-qubit>は、|0>と|1>の二つの状態の「重ね合わせ」として、次のように表現される。

  |1-qubit> = a|0> + b|1>

  ここで、a, b は、$|a|^2 + |b|^2 = 1$ という条件を満たす複素数である。

- 一つのqubitの状態|1-qubit>を観測して、状態 |0>あるいは状態|1>を観測する確率は、次のように与えられる。

  - |0> を観測する確率は、$|a|^2$
  - |1> を観測する確率は、$|b|^2$

2-qubitsの状態は、どう表現されるか？

- それでは、二つの量子からなる 2-qubitsの状態は、どのように表現されるのであろうか？
もっと一般に、多数の量子からなる n-qubitのシステムの状態は、どう表現されるのだろうか？

それには、状態の「テンソル積」という考え方を使う。

独立した二つの状態を
一つの状態と考える

テンソル積のたとえ話

独立した二つの状態を一つの状態と考える テンソル積のたとえ話

- qubitの状態のテンソル積の説明をする前に、たとえ話で「独立した二つの状態を一つの状態と考える」とは、どういうことかを説明しよう。
- 今、AliceとBobが、それぞれコインを持っているとしよう。
Aliceのコインは、きちんとした均一のもので、投げた時、
表が出る確率も、裏が出る確率も、1/2である。
Bobのコインは、いかさま用に細工がしてあって、投げた時、
表が出る確率は 3/5、裏が出る確率は 2/5 であるとする。
- これを次のように表すことにしよう。
|Alice> = 1/2|表> + 1/2|裏>
|Bob> = 3/5|表> + 2/5|裏>
- これは、Alice, Bobの持つコインの状態を表している。
その状態は、独立である。

独立した状態を、別々に観測する

- AliceとBobが、それぞれ単独でコインを投げて、表が出るか裏が出るか、別々に観測したとしよう。

- Alice単独の場合
  |Alice> = 1/2|表> + 1/2|裏> から
  表の出る確率　：1/2
  裏の出る確率　：1/2
- Bob単独の場合
  |Bob> = 3/5|表> + 2/5|裏> から
  表の出る確率　：3/5
  裏の出る確率　：2/5

AliceとBobが同時にコインを投げた、
状態を式で表す

- AliceとBobが同時にコインを投げた状態を
|Alice> ⊗ |Bob>という式で表わし、次のように計算する。
- |Alice> = 1/2|表> + 1/2|裏>,
|Bob> = 3/5|表> + 2/5|裏> のとき、
|Alice> ⊗ |Bob>
= (1/2|表> + 1/2|裏>) ⊗ (3/5|表> + 2/5|裏>)
= (1/2 x 3/5)|表> ⊗ |表> + (1/2 x 2/5)|表> ⊗ |裏>
+ (1/2 x 3/5)|裏> ⊗ |表> + (1/2 x 2/5)|裏> ⊗ |裏>
- ここで、次のように表すことにすると、
|表> ⊗ |表> = |表表>, |表> ⊗ |裏> = |表裏>
|裏> ⊗ |表> = |裏表>, |裏> ⊗ |裏> = |裏裏>
|Alice> ⊗ |Bob>
= 3/10|表表> + 2/10|表裏> + 3/10|裏表> + 2/10|裏裏>

AliceとBobが同時にコインを投げて、状態を観測する

|Alice> ⊗ |Bob>

= 3/10|表表> + 2/10|表裏> + 3/10|裏表> + 2/10|裏裏>

この式が表しているのは次のことだ。

Alice	**Bob**	**確率**	**表記**
表	表	1/2 x 3/5	|表表>
表	裏	1/2 x 2/5	|表裏>
裏	表	1/2 x 3/5	|裏表>
裏	裏	1/2 x 2/5	|裏裏>

ここで、|表表>は、
Aliceのコインが|表>、Bobのコインが|裏>の状態を表す。

AliceとBobが同時にコインを投げた、状態が与えられた時、ある確率を計算する。

- AliceとBobが同時にコインを投げた状態が次の式で与えられたとする。
  3/10|表表>+2/10|表裏>+3/10|裏表>+2/10|裏裏>

- この時、次の確率を求めよ。
- Aliceのコインが表となる確率。
  Aliceのコインが表となるのは、3/10|表表>か2/10|表裏>のいずれかの場合である。その確率は3/10+2/10 = 1/2
- Bobのコインが裏となる確率。
  Bobのコインが裏となるのは、2/10|表裏>か2/10|表裏>のいずれかの場合である。その確率は2/10+2/10 = 2/5
- 先の式は、次のように分解できる。
  (1/2|表> + 1/2|裏>) ⊗ (3/5|表> + 2/5|裏>)
  元の確率が回復されていることがわかる。

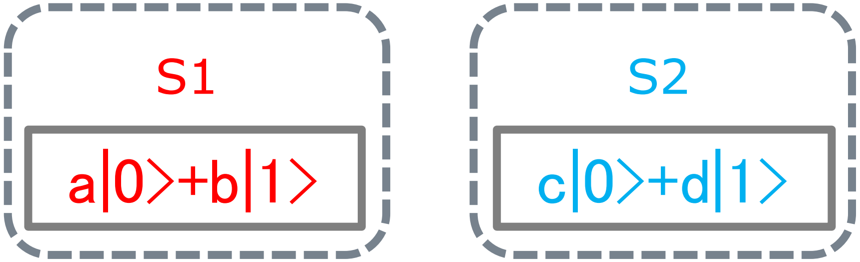
二つの量子の状態のテンソル積

独立した二つの量子の状態を
一つの量子の状態と考える

一つのqubitからなる状態S1,S2を考える

qubit $a|0\rangle+b|1\rangle$ のみを含む状態をS1、

qubit $c|0\rangle+d|1\rangle$ のみを含む状態をS2とする。



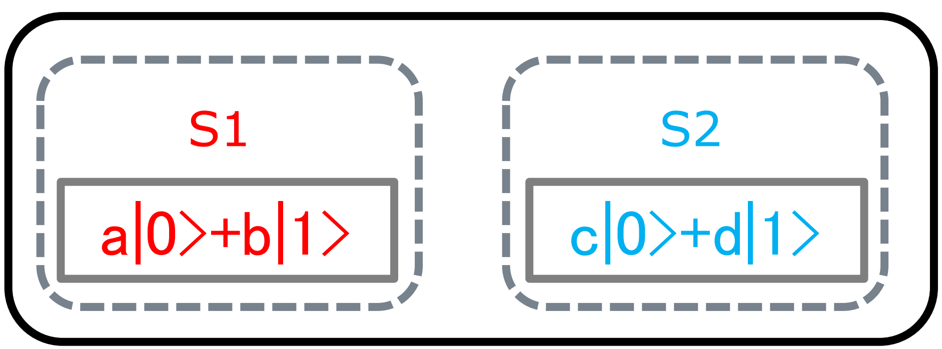
S1,S2を一緒にした状態を考え、
それを $S1 \otimes S2$ と表す

qubit a|0>+b|1> のみを含む状態をS1、

qubit c|0>+d|1> のみを含む状態をS2とした時、

この二つを一緒にした状態 S を テンソル積 S1 ⊗ S2で表す。

$$S = S1 \otimes S2$$



2-qubitの状態Sを計算をする

この時、次のようなたすきがけの計算で、Sの状態を計算する。

$ac(|0>\otimes|0>)$

$ad(|0>\otimes|1>)$

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$

$bd(|1>\otimes|1>)$

$bc(|1>\otimes|0>)$

$$= ac(|0>\otimes|0>) + ad(|0>\otimes|1>) + bc(|1>\otimes|0>) + bd(|1>\otimes|1>)$$

$|x>\otimes|y>$を$|xy>$と表す

この時、次のようなたすきがけの計算で、Sの状態を計算する。

$ac(|0>\otimes|0>)$

$ad(|0>\otimes|1>)$

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$

$bd(|1>\otimes|1>)$

$bc(|1>\otimes|0>)$

$$= ac(|0>\otimes|0>) + ad(|0>\otimes|1>) + bc(|1>\otimes|0>) + bd(|1>\otimes|1>)$$

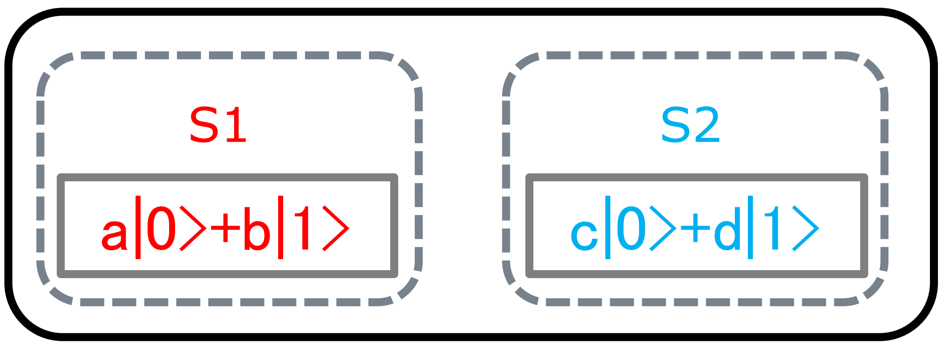
$$= ac(|00>) + ad(|01>) + bc(|10>) + bd(|11>)$$

$$= \boxed{ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>}$$

$S = S1 \otimes S2$ は
次のように表される

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$
$$= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

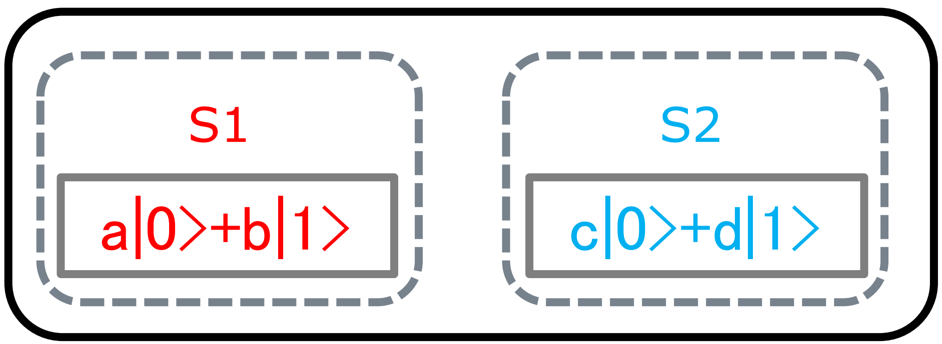
$S = S1 \otimes S2$



二つの1-qubitのテンソル積で表される状態Sは、次の形をしている

$$S = ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>$$

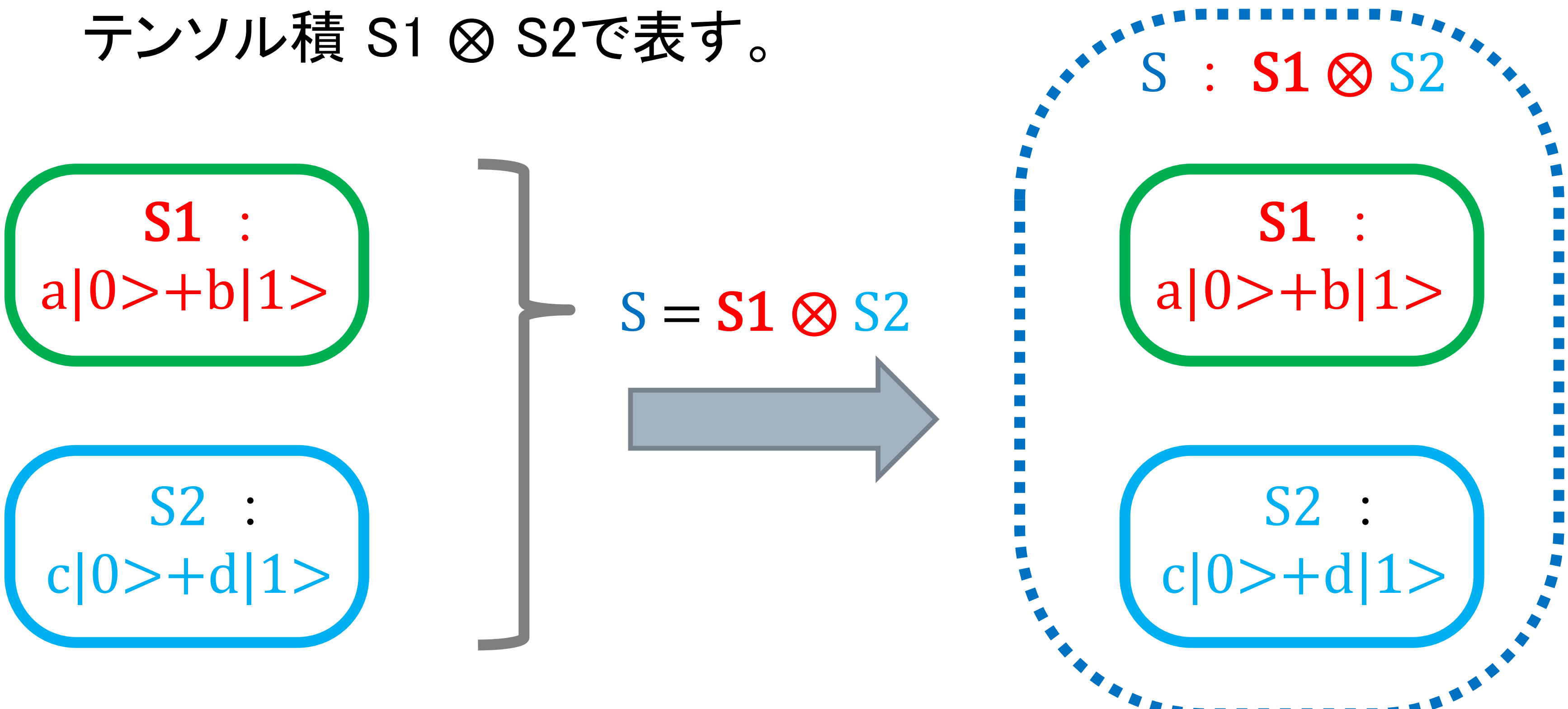
$$S = S1 \otimes S2$$



$$S = S1 \otimes S2 = (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$
$$= ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>$$

もう一度、テンソル積（縦バージョン）

- qubit a|0>+b|1> のみを含む状態S1、
  qubit c|0>+d|1> のみを含む状態S2　があるとしよう。
  この二つを一緒にした状態Sを
  テンソル積 S1 ⊗ S2で表す。

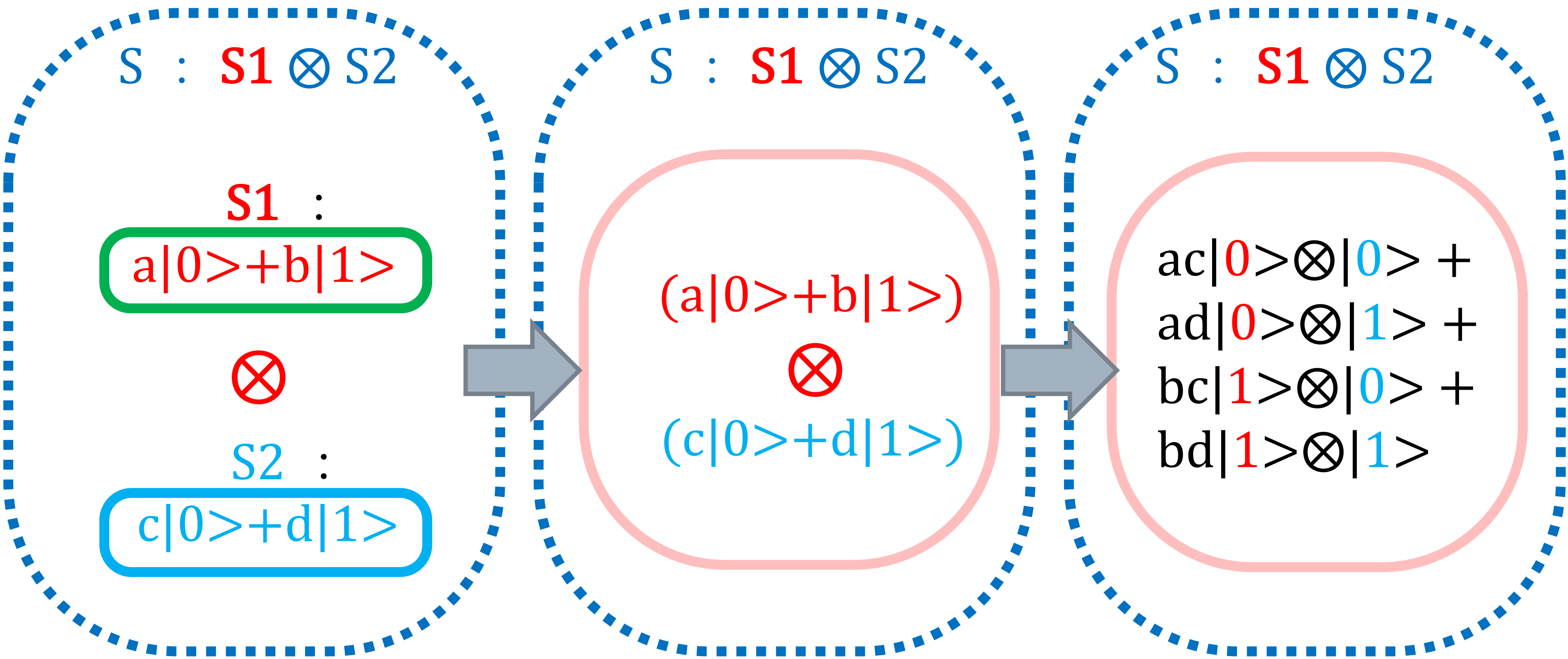


もう一度、テンソル積（縦バージョン）

- この時、次のような計算で、Sの状態を計算する。

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle$$



もう一度、テンソル積（縦バージョン）

- |a>⊗|b>を |ab>と表すことにする。

  |0>⊗|0> -> |00>, |0>⊗|1> -> |01>,
  |1>⊗|0> -> |10>, |1>⊗|1> -> |11>

S : **S1** ⊗ S2

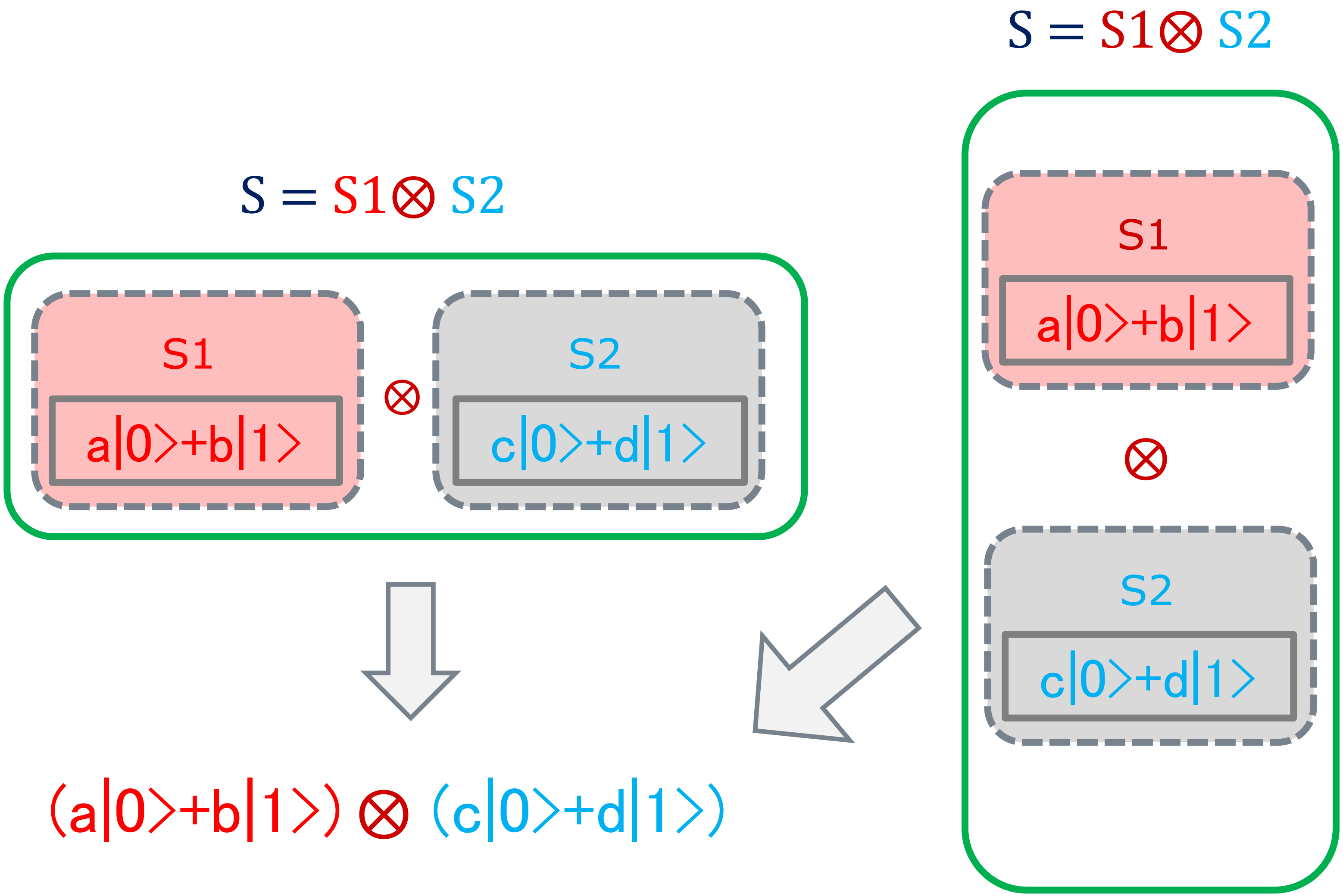
ac|0>⊗|0> +
ad|0>⊗|1> +
bc|1>⊗|0> +
bd|1>⊗|1>

S : **S1** ⊗ S2

ac|00> +
ad|01> +
bc|10> +
bd|11>

ただし、
$|ac|^2 + |ad|^2 + |bc|^2 + |bd|^2 = 1$

テンソル積　横と縦
この二つは、同じテンソル積 S1⊗ S2 を表す



2-qubitsの状態

二つの1-qubitのテンソル積で表される状態

$$S = ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>$$

一般に

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$$

3つのqubitからなる状態

- 先のSに、もう一つqubit e|0>+f|1> のみを含む状態S3を追加して、3つのqubitからなる状態を考えよう。改めて、これもSとすると

$$S = S1 \otimes S2 \otimes S3$$
$$= (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$
$$= \ldots$$
$$= A|000>+B|001>+C|010>+D|011>$$
$$+ E|100>+F|101>+G|110>+H|111>$$

という 8つの状態の重ね合わせの形になる。
ここで、|x>⊗|y>⊗|z> を |xyz> と表している。

テンソル積の基本ルール

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{\mathsf{T}} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$$

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$$

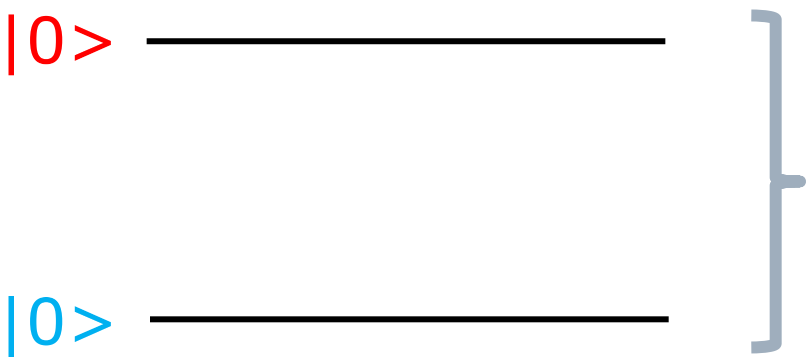
$$c(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = (c\mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} = \mathbf{v} \otimes (c\mathbf{u})$$

テンソル積での内積の定義

$$\left(\sum_i a_i|v_i\rangle \otimes |w_i\rangle, \sum_j b_j|v'_j\rangle \otimes |w'_j\rangle\right) \equiv \sum_{ij} a_i^* b_j \langle v_i|v'_j\rangle\langle w_i|w'_j\rangle.$$

量子の状態のテンソル積の計算例

2-qubitsのテンソル積の計算例　単純な例 1



こういう表記をする

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

順序を持つ

2-qubitsのテンソル積の計算例　単純な例 2

$|0>+|1>$

$|0>$

$(|0>+|1>)\otimes|0>$

$$(|0>+|1>)\otimes|0>$$
$$=|0>\otimes|0> + |1>\otimes|0>=|00>+|10>$$

$|0>+|1>$という形は本当はおかしい。$\alpha|0>+\beta|1>$の時、$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ という条件があるからだ。本当は、$\frac{1}{\sqrt{2}}|0>+\frac{1}{\sqrt{2}}|1>$なのだが、計算では無視している。

2-qubitsのテンソル積の計算例　単純な例 3

$|1>$

$|0>-|1>$

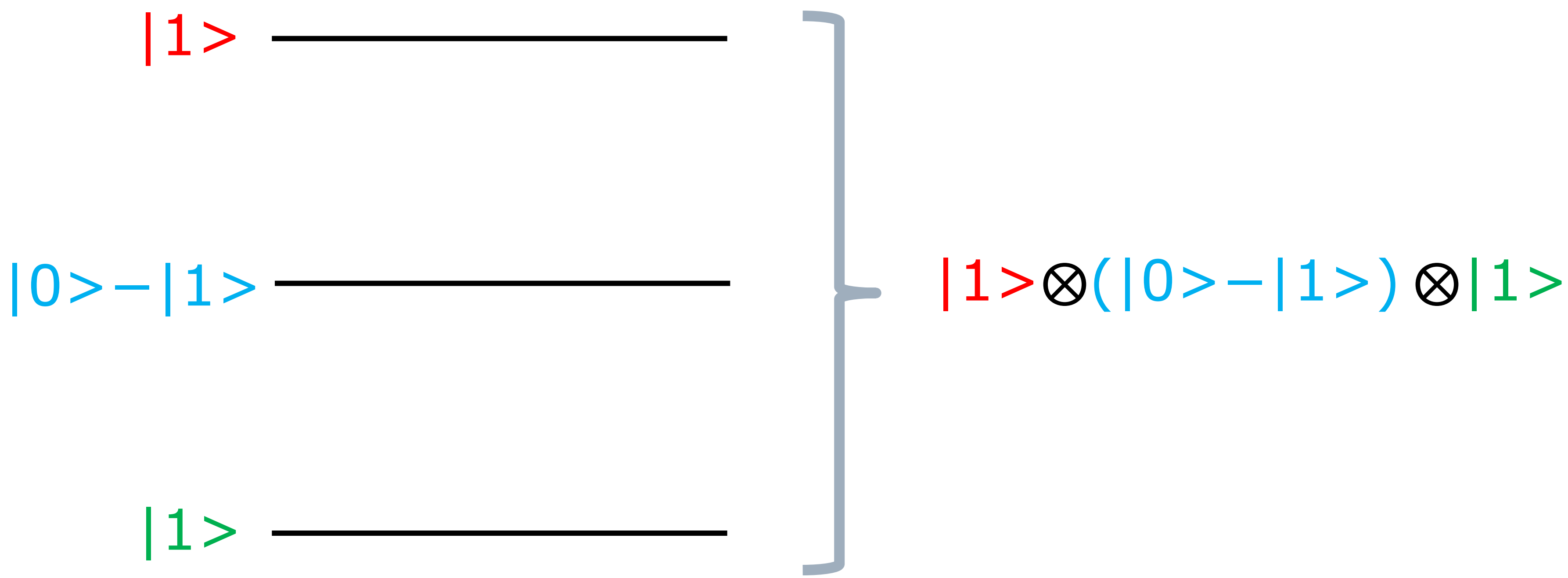
$|1>\otimes(|0>-|1>)$

$|1>\otimes(\ |0>-|1>) =$

$|1>\otimes\ |0>-|1>\otimes\ |1>=|10>-|11>$

$|0>-|1>$という形は本当はおかしい。$\alpha|0>+\beta|1>$の時、$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ という条件があるからだ。本当は、$\frac{1}{\sqrt{2}}|0>-\frac{1}{\sqrt{2}}|1>$なのだが、計算では無視している。

3-qubitsのテンソル積の計算例　単純な例 4



$$
\begin{aligned}
&|1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle \\
&= (|1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |1\rangle \\
&= (|10\rangle - |11\rangle) \otimes |1\rangle = |101\rangle - |111\rangle
\end{aligned}
$$

2-qubitsのテンソル積の計算例　5

- 第一のQubitが、$3/5|0>+4/5|1>$ で、
  第二のQubitが、$1/\sqrt{2}|0>-1/\sqrt{2}|0>$としよう。

- この二つのQubitが結合した状態の状態は、

  $(3/5|0>+4/5|1>) \otimes (1/\sqrt{2}|0>-1/\sqrt{2}|1>)$
  $= 3/5\sqrt{2}|00>-3/5\sqrt{2}|01>+4/5\sqrt{2}|10>-4/5\sqrt{2}|11>$

  のように計算される。

ところで、全ての 2-qubitsの状態は、
二つの1-qubitの状態のテンソル積で
表現できるだろうか？

2-qubitの状態が、二つの1-qubitの状態のテンソル積で表現できる例

(先の例題を参照のこと)

1. $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes |0\rangle$
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle-|11\rangle) = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$
4. $3/5\sqrt{2}|00\rangle-3/5\sqrt{2}|01\rangle+4/5\sqrt{2}|10\rangle-4/5\sqrt{2}|11\rangle$
   $= (3/5|0\rangle+4/5|1\rangle) \otimes (1/\sqrt{2}|0\rangle-1/\sqrt{2}|1\rangle)$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle-|111\rangle) = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle) \otimes |1\rangle$
   最後のこの例は、3-qubitの状態が、三つの1-qubitの状態のテンソル積で表現できる場合の例である。

二つの1-qubitのテンソル積に分解できない状態
エンタングルメント

- すべての2-qubitsの状態が、二つの1-qubitのテンソル積に分解できるとは限らない。二つの1-qubitのテンソル積に分解できない2-qubitの状態を、**エンタングルメント** という。そういう状態があることを、次に見ていこう。

- ある2-qubitの状態が二つの1-qubitのテンソル積に分解できるか否かは、二つの1-qubitのテンソル積で表現される2-qubitの状態が、次の係数を持つこと利用してチェックできる。

$$ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>$$

この係数を、2-qubitの状態の係数と比較すればいい。

$1/\sqrt{2}\,(|00>+|11>)$の場合

- □ $1/\sqrt{2}\,(|00>+|11>)$

  $=1/\sqrt{2}(\quad |00> \qquad\qquad\qquad + \quad |11>\ )$

  $=? \qquad ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>$

  $|01>$, $|10>$の項が含まれていないので、ad=bc=0。
  これから aとd、bとcのいずれかが0であることがわかる。
  この時、ac あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

- □ $1/\sqrt{2}\,(|00>+|11>)$ はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}$ (|00>−|11>)の場合

- $1/\sqrt{2}$ (|00>−|11>)
  =$1/\sqrt{2}$(|00> − |11>)
  =? ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

  |01>, |10>の項が含まれていないので、ad=bc=0。
  これから aとd、bとcのいずれかが0であることがわかる。
  この時、ac あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

- $1/\sqrt{2}$ (|00>−|11>) はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}\,(|01>+|10>)$の場合

□ $1/\sqrt{2}\,(|01>+|10>)$

$=1/\sqrt{2}(\quad |01>+ \quad |10> \quad)$

$=?\quad ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>$

$|00>, |11>$の項が含まれていないので、ac=bd=0。
これから aとc、bとdのいずれかが0であることがわかる。
この時、ad あるいは bc のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

□ $1/\sqrt{2}\,(|01>+|10>)$ はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}$ (|01>−|10>)の場合

- $1/\sqrt{2}$ (|01>−|10>)

  =$1/\sqrt{2}$(|01> − |10>)

  =? ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

  |00>, |11>の項が含まれていないので、ac=bd=0。
  これから aとc、bとdのいずれかが0であることがわかる。
  この時、ad あるいは bc のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

- $1/\sqrt{2}$ (|01>−|10>) はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}$ (|10>+|11>)の場合

- $1/\sqrt{2}$ (|10>+|11>)

  ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

  $=1/\sqrt{2}($ |10>+ |11>)

  |00>, |01>の項が含まれていないので、ac=ad=0。cが0だと|10>の係数が一致しない。dが0だと、|11>の係数と一致しない。ただ、a=0で bc=bd= $1/\sqrt{2}$とすれば、係数は一致する。

- $1/\sqrt{2}$ (|10>+|11>) = |1> ⊗ $1/\sqrt{2}$(|0>+|1>)

  $1/\sqrt{2}$ (|10>+|11>)は、二つの1-qubitのテンソル積で表され、エンタングルメント状態ではない。

$1/\sqrt{3}$ (|01>+|10>+|11>)の場合

□ $1/\sqrt{3}$ (|01>+|10>+|11>)
=$1/\sqrt{3}$(　　　|00　+　|01> +　|11>)
=?　　ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

|00>の項が含まれていないので、ac=0。
これから aとcのいずれかが0であることがわかる。
この時、ad あるいは bc のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

□ $1/\sqrt{3}$ (|01>+|10>+|11>)
はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{3}$ (|00>+|10>+|11>)の場合

- $1/\sqrt{3}$ (|00>+|10>+|11>)
  =$1/\sqrt{3}$(|00> + |01> + |11>)
  =? ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

  |01>の項が含まれていないので、ad=0。
  これから aとdのいずれかが0であることがわかる。
  この時、ac あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

- $1/\sqrt{3}$ (|00>+|10>+|11>)
  はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{3}$ (|00>+|01>+|11>)の場合

□ $1/\sqrt{3}$ (|00>+|01>+|11>)

=$1/\sqrt{3}$(|00>+ |01> + |11>)

=? ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

|10>の項が含まれていないので、bc=0。
これから bとcのいずれかが0であることがわかる。
この時、ac あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

□ $1/\sqrt{3}$ (|00>+|01>+|11>)
はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{3}$ (|00>+|01>+|10>)の場合

□ $1/\sqrt{3}$ (|00>+|01>+|10>)
=$1/\sqrt{3}$(|00>+ |01> + |10>)
=? ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

|11>の項が含まれていないので、bd=0。
これから bとdのいずれかが0であることがわかる。
この時、bc あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

□ $1/\sqrt{3}$ (|00>+|01>+|10>)
はエンタングルメント状態である。

「分離可能」な状態と
「分離不可能」な状態

2-qubitの状態で重要なこと「分離可能」な状態と「分離不可能」な状態

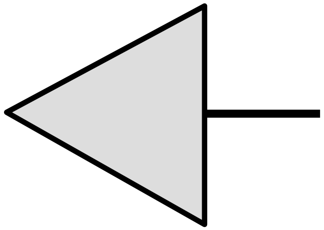
- 2-qubitの状態には、二つの1-qubitの状態のテンソル積で表すことができる状態と、そうした積では表せない状態の二種類がある。

- 前者を「分離可能」な状態、後者を「分離不可能」な状態という。

- エンタングルメント状態とは、二つの状態のテンソル積に「分離不可能」な状態のことをさす。

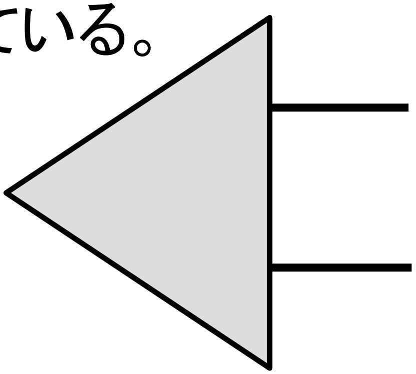
1-qubit, 2-qubitの状態を図形で表す

- 1-qubitの状態を、次のような図形で表すことにしよう。右側に腕が一本出ているのは、それが1つのqubitからなる状態であることを表している。



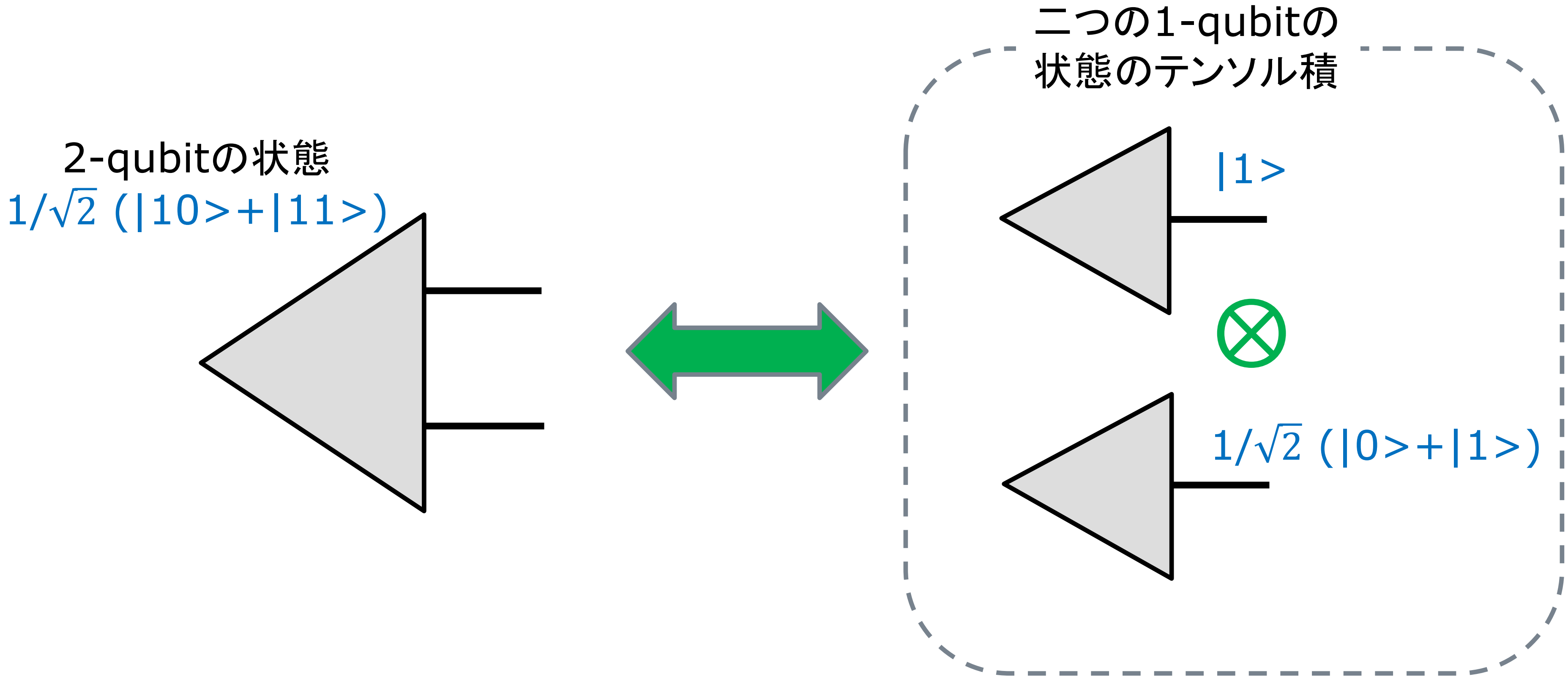
1-qubitの状態

- 2-qubitの状態を、次のような図形で表すことにしよう。右側に腕が二本出ているのは、それが2つのqubitからなる状態であることを表している。

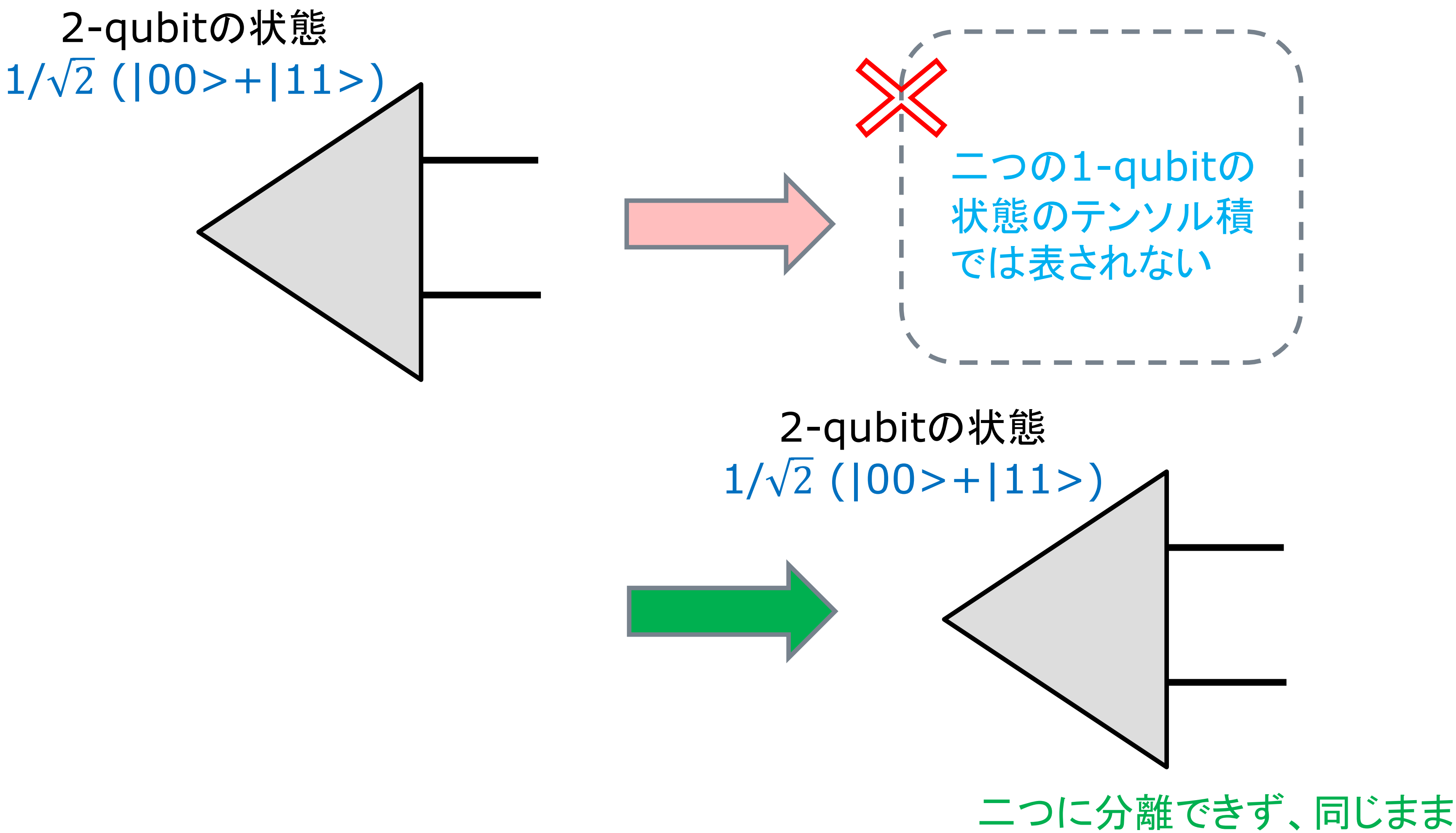


2-qubitの状態

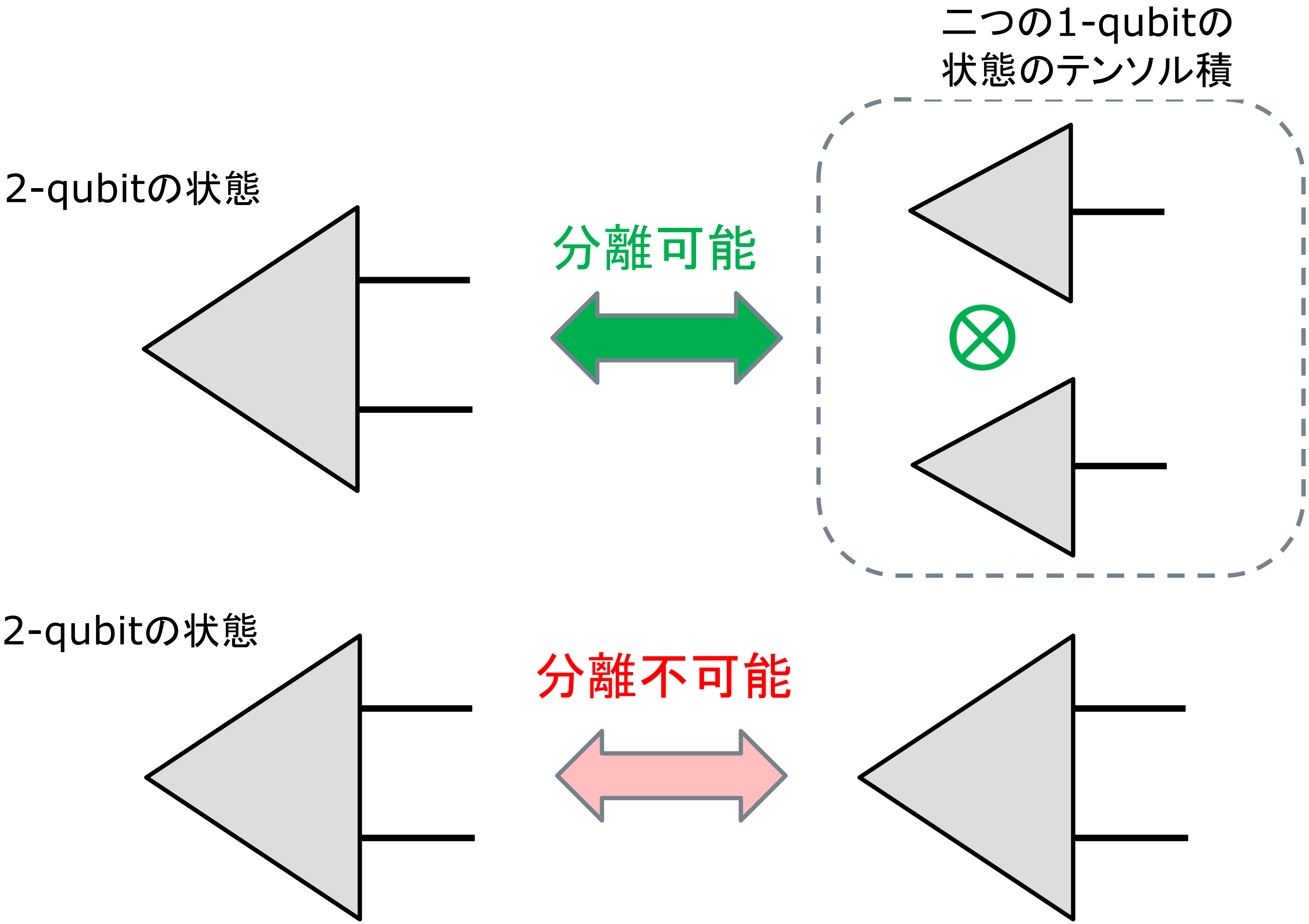
2-qubitの状態 $1/\sqrt{2}$ (|10>+|11>) は、
分離可能である



2-qubitの状態 $1/\sqrt{2}\ (|00\rangle+|11\rangle)$ は、分離不可能である



分離可能な 2-qubitの状態と
分離不可能な 2-qubitの状態



ベクトルのテンソル積と n-qubitsの状態の基底

ベクトルのテンソル積

ベクトルのテンソル積を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{a_2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

ベクトルのテンソル積の例 (1)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ベクトルのテンソル積の例 (2)

$|0\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ を使う

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

1-qubit状態の基底

$$|0> = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},\ |1> = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

2-qubits状態の基底

$$|00> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |01> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |10> = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |11> = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これらは、互いに直交し正規化されている(それぞれ内積を取ってみればわかる)ので、正規直交基底である。

3-qubits状態の基底

$$|000\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ |001\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ |010\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ |011\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

0 1 2 3

$$|100\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ |101\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ |110\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ |111\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

4 5 6 7

n-qubitsの状態の基底

- n個のqubitからなる状態の基底は、ket記法を利用すると次のように表現できる。

  n-qubitsの状態の基底　：　**$|b_0 b_1 \ldots b_{n-1}>$**

  ここに、 $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$ は、n個の0 または1の並びである。これから、n-qubitsの状態の基底は、2^n 個存在することがわかる。

- n個のqubitからなる状態の基底をベクトルで表すと、N番目の成分だけが 1 で、残りの成分は全て0であるベクトルになる。
  ただし、Nは、先の$b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$を二進数としてみた数である。また、このベクトルは 2^n 次元である。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

N番目の成分だけが 1 で、残りの成分は全て0である。

2-qubitsの状態の観測

2-qubitsの状態

- 2-qubitの状態は、|00>, |01>, |10>, |11>の四つの基底を持つので、次のように表現される。

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$$

ここで、 $\alpha_{ij} \leq \mathbb{C},\ \sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1.$ である。

- 2-qubitの状態 |ψ> は、$\begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}$ という、四次元のベクトルでも、表現できる。

2-qubitsの状態の例

- $1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle) = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $1/\sqrt{2}\ (|01\rangle - |10\rangle) = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $1/\sqrt{3}\ (|00\rangle + |01\rangle - |11\rangle) = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2-qubitsの状態の観測
Born のルールの2-qubits版

2-qubitの状態は、次のように表現される。

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$$

ここで、 $\alpha_{ij} \leq \mathbb{C},\ \sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1.$ である。この時、

- |00> が観測される確率は、$|\alpha_{00}|^2$で、観測後の状態は、|00>に変わる。
- |01> が観測される確率は、$|\alpha_{01}|^2$で、観測後の状態は、|01>に変わる。
- |10> が観測される確率は、$|\alpha_{10}|^2$で、観測後の状態は、|10>に変わる。
- |11> が観測される確率は、$|\alpha_{11}|^2$で、観測後の状態は、|11>に変わる。

Born のルールの2-qubits版である。

3つのqubitからなる状態の表現と観測確率

- 先のSに、もう一つqubit $e|0>+f|1>$ のみを含む状態S3を追加して、3つのqubitからなる状態を考えよう。改めて、これもSとすると

$$
\begin{aligned}
S &= S1 \otimes S2 \otimes S3 \\
&= (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>) \otimes (e|0>+f|1>) \\
&= \ \ldots \text{ 展開して整理する} \\
&= \ A|000>+B|001>+C|010>+D|011> \\
&\quad + E|100>+F|101>+G|110>+H|111>
\end{aligned}
$$

例えば、A=ace になるのだが、省略している

という 8つの状態の重ね合わせの形になる。

- この時、例えば、|101>という状態が観測される確率は、$|F|^2$ になる。

部分的な観測
2-qubitsの状態の観測

2-qubits　部分的な観測
観測の確率

- $|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ で、最初の1ビットのみを観測して、それが0である確率は、どうなるであろうか？

- 次のように考える。
最初の 1 ビットが 0である状態は、|00>と|01>である。
最初の1ビットのみを観測して、それが0である確率は、|00>を観測した場合か、|01>を観測した場合のいずれかである。
よってその確率は、それらを加えたものになる。

$$\boxed{\begin{aligned}&\Pr\{\text{1st bit } = 0\}\\ &\quad = \Pr\{00\} + \Pr\{01\} = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2.\end{aligned}}$$

2-qubits　部分的な観測
観測後の状態

- 最初の1ビットのみを観測して、それが0であったとする。このとき、2-Qubitsの状態は、観測後どういう状態になるのだろうか？

- それは、この観測に矛盾する全ての項（最初のビットが1の項）を消して、残った項の重ね合わせの状態になる。
- 最初の1ビットが0である項 |00>, |01>を残し、それに矛盾する最初の1ビットが1である項 |10>, |11>を消すと、次のようになる。

観測前の状態: $|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$

観測後の状態: $|\psi\rangle' = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \cancel{\alpha_{10}\,|10\rangle} + \cancel{\alpha_{11}\,|11\rangle}$

2-qubits　部分的な観測
観測後の状態

- ただ、それが、単位ベクトルになるように、正規化されねばならない。新しい状態は、次のようになる。

$$|\phi_{\mathrm{new}}\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

- これは、ちょっと複雑に思えるが、本質的には、この状態は、$\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle$ で、それに正規化の係数

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

がかかったものと考えればいい。

2-qubits　部分的な観測
観測後の状態

元の状態を $|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$
として、正規化因子を無視すると、観測後の状態は、次のようになる。

1. 第1ビットのみが0と観測された場合

観測後の状態: $|\psi\rangle' = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \cancel{\alpha_{10}|10\rangle} + \cancel{\alpha_{11}|11\rangle}$

2. 第1ビットのみが1と観測された場合

観測後の状態: $|\psi\rangle' = \cancel{\alpha_{00}|00\rangle} + \cancel{\alpha_{01}|01\rangle} + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$

3. 第2ビットのみが0と観測された場合

観測後の状態: $|\psi\rangle' = \alpha_{00}|00\rangle + \cancel{\alpha_{01}|01\rangle} + \alpha_{10}|10\rangle + \cancel{\alpha_{11}|11\rangle}$

4. 第2ビットのみが1と観測された場合

観測後の状態: $|\psi\rangle' = \cancel{\alpha_{00}|00\rangle} + \alpha_{01}|01\rangle + \cancel{\alpha_{10}|10\rangle} + \alpha_{11}|11\rangle$

$|GHZ\rangle = 1/\sqrt{2}\ (|000\rangle + |111\rangle)$の場合

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. この時、第三qubitが1と観測される確率を求めよ。
4. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
5. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
6. この時、第三qubitが1と観測される確率を求めよ。

EPRペア

EPRペア

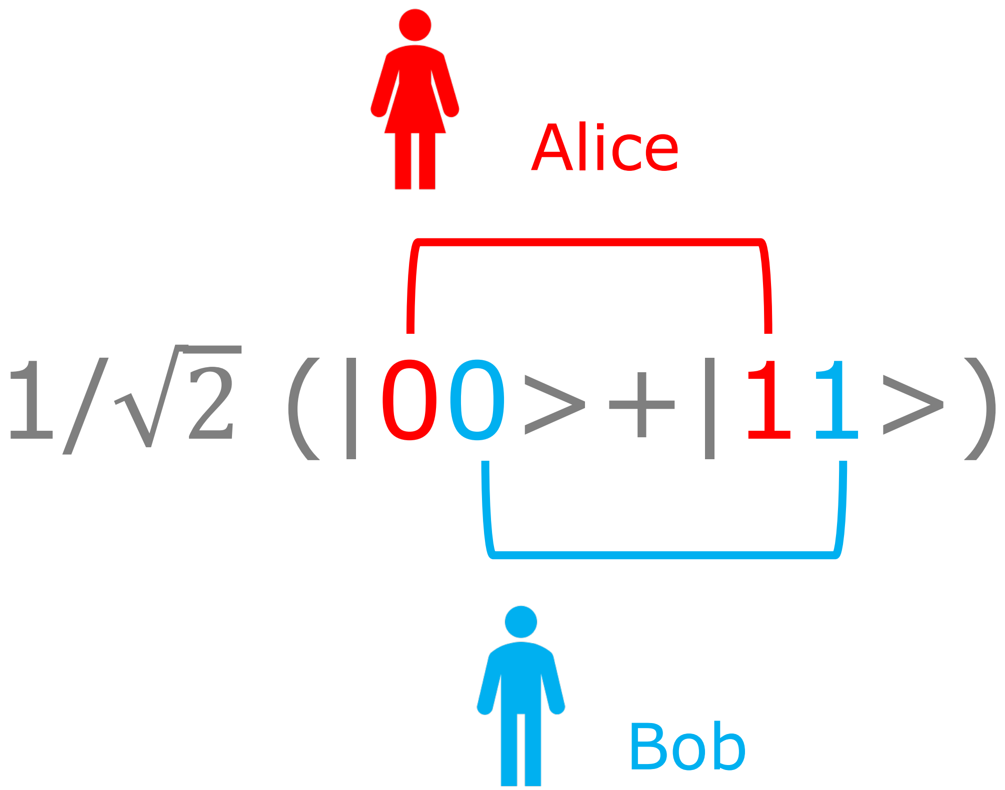
二つのqubitの状態が一つの式で表される

- アインシュタインらが発見した、もつれあった二つの量子の状態を、発見者の頭文字をとって「EPRペア」という。それは、次の4種類ある。これを、 Φ^+, Φ^-, Ψ^+, Ψ^- と呼ぶことがある。

  - Φ^+ :　1/√2 (|00>+|11>)
  - Φ^- :　1/√2 (|00>−|11>)
  - Ψ^+ :　1/√2 (|01>+|10>)
  - Ψ^- :　1/√2 (|01>−|10>)

- 通常は、二つのqubitの状態は、それぞれのqubitの状態を表す二つの式で表されるのだが、EPRペアの場合、二つのqubitの状態が一つの式で表されている。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

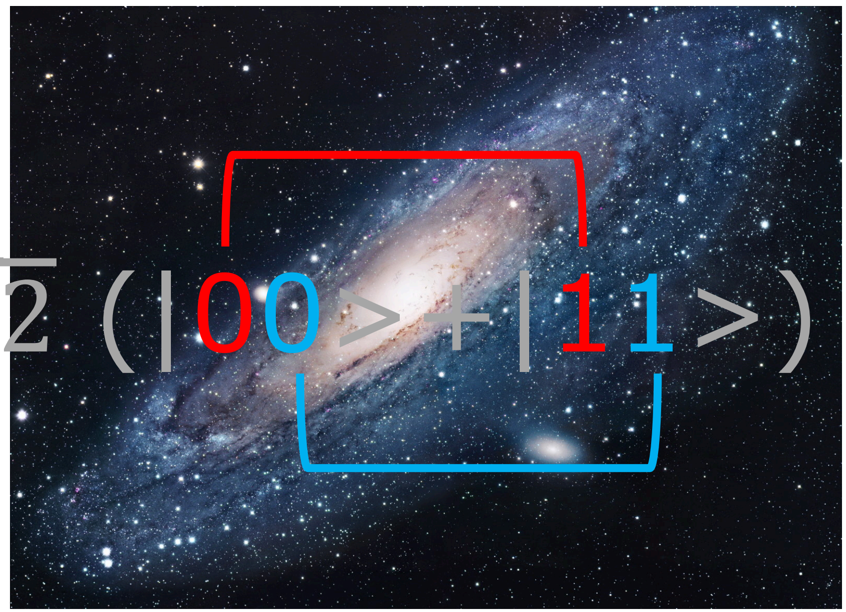


1/√2 (|00>+|11>) で表される状態は、二つのqubitの状態である。
一方のqubitをAliceが、他方のqubitをBobが持つことができる。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$



$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$

Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$

Aliceが観察できるのは、 $|00\rangle + |11\rangle$ の第一bitで、
Bobが観察できるのは、 $|00\rangle + |11\rangle$ の第二bitである。
この関係は、両者がどんなに離れていても変わりない。

EPRペア
$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle+|11\rangle)$ の観測

EPRペア 1/√2 (|00>+|11>) を観測する

AliceとBobがEPRペア 1/√2 (|00>+|11>) で表される状態のqubitを持っているとしよう。Aliceが持っているqubitは、EPRペアの片割れで、その状態は、次の赤字で示す状態に対応している。　1/√2 (|00>+|11>)

AliceがEPRペア 1/√2 (|00>+|11>)を観測したとしよう。Aliceが観測できるのは、自分が持つqubitの状態だけである。

それが|0>である確率は、1/√2(|00>+|11>)から、|01>の係数 1/√2 の絶対値の二乗で1/2となる。同様に、

それが|1>である確率は、1/√2(|00>+|11>)から、|11>の係数 1/√2 の絶対値の二乗で1/2となる。

EPRペア 1/√2 (|00>+|11>) を観測する
観測後の状態

Aliceが、EPRペア 1/√2 (|00>+|11>) を観測して、その結果が|0>であったとしよう。

1/√2 (|00>+~~|11>~~)

この観測の結果、新しい状態は、|00>に変わる。

それは、第二ビットの観測が、|0>である確率が 1 であることを意味する。100% の確率で、Bobの持つ第二ビットの状態が0であることがわかる。

すなわち、Aliceが自分のqubitで状態|0>を観測するとすぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|0>であることがわかることになる。

EPRペア 1/√2 (|00>+|11>) を観測する
観測後の状態

Aliceが、EPRペア 1/√2 (|00>+|11>) を観測して、その結果が|1>であったとしよう。

1/√2 (~~|00~~>+|11>)

この観測の結果、新しい状態は、|11>に変わる。

それは、第二ビットの観測が、|1>である確率が 1 であることを意味する。100% の確率で、Bobの持つ第二ビットの状態が|1>であることがわかる。

すなわち、Aliceが自分のqubitで状態|1>を観測するとすぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|1>であることがわかることになる。

「馬鹿げた遠隔作用」？

Aliceの観測結果をまとめると、次のようになる。

Aliceが自分のqubitで状態|0>を観測すると、すぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|0>であることがわかる。

Aliceが自分のqubitで状態|1>を観測すると、すぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|1>であることがわかることになる。

Aliceの観測結果が、瞬時に、遠く離れたBobの観測結果に影響を与える？ これは、光のスピード以上で情報が伝わらないとする物理法則に矛盾しないか？

実際、アインシュタインは、こうした現象は「馬鹿げた遠隔作用」だと言った。

EPRペア
$1/\sqrt{2}\ (|01>+|10>)$ の観測

念のため、もう一つのEPRペア
$1/\sqrt{2}\ (|01>+|10>)$ の観測を見ておこう

EPRペア $1/\sqrt{2}\ (|01\rangle+|10\rangle)$ を観測する

AliceとBobがEPRペア $1/\sqrt{2}\ (|01\rangle+|10\rangle)$ で表される状態のqubitを持っているとしよう。Aliceが持っているqubitは、EPRペアの片割れで、その状態は、次の赤字で示す状態に対応している。　$1/\sqrt{2}\ (|01\rangle+|10\rangle)$

AliceがEPRペア $1/\sqrt{2}\ (|01\rangle+|10\rangle)$を観測したとしよう。Aliceが観測できるのは、自分が持つqubitの状態だけである。

それが$|0\rangle$である確率は、$1/\sqrt{2}(|01\rangle+|10\rangle)$から、$|01\rangle$の係数 $1/\sqrt{2}$ の絶対値の二乗で1/2となる。同様に、

それが$|1\rangle$である確率は、$1/\sqrt{2}(|01\rangle+|10\rangle)$から、$|10\rangle$の係数 $1/\sqrt{2}$ の絶対値の二乗で1/2となる。

EPRペア 1/√2 (|01>+|10>) を観測する
観測後の状態

Aliceが、EPRペア 1/√2 (|01>+|10>) を観測して、その結果が|0>であったとしよう。

1/√2 (|01>+~~|10>~~)

この観測の結果、新しい状態は、|01>に変わる。

それは、第二ビットの観測が、|1>である確率が 1 であることを意味する。100% の確率で、Bobの持つ第二ビットの状態が|1>であることがわかる。

すなわち、Aliceが自分のqubitで状態|0>を観測するとすぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|1>であることがわかることになる。

EPRペア 1/√2 (|01>+|10>) を観測する
観測後の状態

Aliceが、EPRペア 1/√2 (|01>+|10>) を観測して、その結果が|1>であったとしよう。

1/√2 (~~|01>~~+|10>)

この観測の結果、新しい状態は、|10>に変わる。

それは、第二ビットの観測が、|0>である確率が 1 であることを意味する。100% の確率で、Bobの持つ第二ビットの状態が|0>であることがわかる。

すなわち、Aliceが自分のqubitで状態|1>を観測するとすぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|0>であることがわかることになる。

「馬鹿げた遠隔作用」?

Aliceの観測結果をまとめると、次のようになる。

Aliceが自分のqubitで状態|0>を観測すると、すぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|1>であることがわかる。

Aliceが自分のqubitで状態|1>を観測すると、すぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が|0>であることがわかることになる。

Aliceの観測結果が、瞬時に、遠く離れたBobの観測結果に影響を与える? これは、光のスピード以上で情報が伝わらないとする物理法則に矛盾しないか?

実際、アインシュタインは、こうした現象は「馬鹿げた遠隔作用」だと言った。

EPRペア まとめ

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Φ^+

Alice

$$1/\sqrt{2}\ (|00> + |11>)$$

Bob

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$ だけではない。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Φ^-

Alice

$$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle - |11\rangle)$$

Bob

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$ だけではない。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Ψ^+

Alice

$$1/\sqrt{2}\ (|01> + |10>)$$

Bob

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\ (|00> + |11>)$ だけではない。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Ψ^-

Alice

$$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle - |10\rangle)$$

Bob

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle + |11\rangle)$ だけではない。


24-22

第三話:

量子の状態の変化を
量子ゲートで追跡・理解する

量子の状態の変化を
量子ゲートで追跡・理解する

- 量子の状態は、時間と共に、絶え間なく変化している。
  その変化は、数学的には（物理学的にも）、量子の状態はユニタリ変換に従って変化すると特徴づけられる。
- そこでの変換、状態ベクトルに行列をかけるという計算は数学的なものだ。極論すると、そこには時間は必要ない。もちろん、数学では時間を扱えないというつもりはない。ニュートンやシュレディンガーの方程式も、状態の時間的変化を扱うものだ。
- ただ、量子の状態の変化を、もう少し具体的に知るために、次のような思考実験をする。
  ある物理的なデバイスがあって、そのデバイスに量子の状態を「入力」として与えると、一定の物理的時間ののちに、変化した量子の状態がそのデバイスの「出力」に現れるとする。
- こうした仮想的（でも物理的な）デバイスを「量子ゲート」という。

量子の状態の変化を
量子ゲートで追跡・理解する

- 現代の量子コンピュータではたくさんの量子ゲートが実際に稼働している。もちろん、そうなったのは、この10年くらいの間なのだが。ただ、実際の量子ゲートを持っていなくても、「量子ゲートからなる量子回路の図」を書くことができる。
- 状態の変化を、数学的計算だけではなく、図形で考えるというこうしたやり方には、システムの中で、量子の状態の変化を、ステップごとに具体的に追いかけることができるというメリットがある。
- ここでは、一個あるいは二個のqubitの状態を扱う「量子ゲート」を考える。「なんだ、少ないな」と思うかもしれないが、60個程度のqubitの状態の「計算」でも、地上のどんなスーパー・コンピュータでも追いつかなくなるというのが、昨年のGoogleの実験が示したことだ。

第三話:　量子の状態の変化を量子ゲートで追跡・理解する

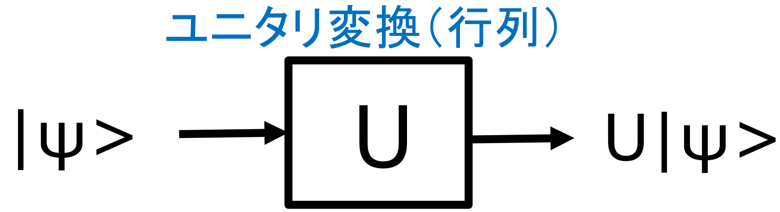
Agenda

1. 量子ゲートとユニタリ行列
2. 1-qubit ゲート
3. 2-qubits ゲート
4. 1-qubitのゲートを、並列に組み合わせて 2-qubitsゲートを作る
5. 2-qubitsゲートの行列表示

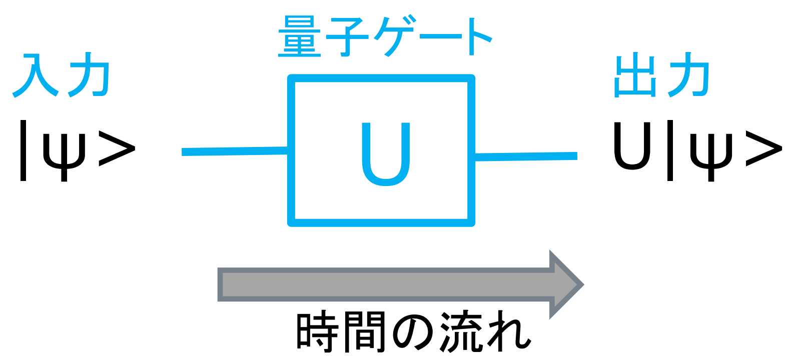
量子ゲートとユニタリ行列

量子ゲートとユニタリ変換

- 量子の状態 $|\psi>$は、ユニタリ変換U(ユニタリ行列)の作用を受けて、状態 $U|\psi>$ に変化する。
- この変化 $|\psi> \rightarrow U|\psi>$を、次のように表そう。



- この時、 Uを、$|\psi>$ を入力、$U|\psi>$ を出力とする回路と考えることができる。これを、「量子ゲート」と呼ぶ。

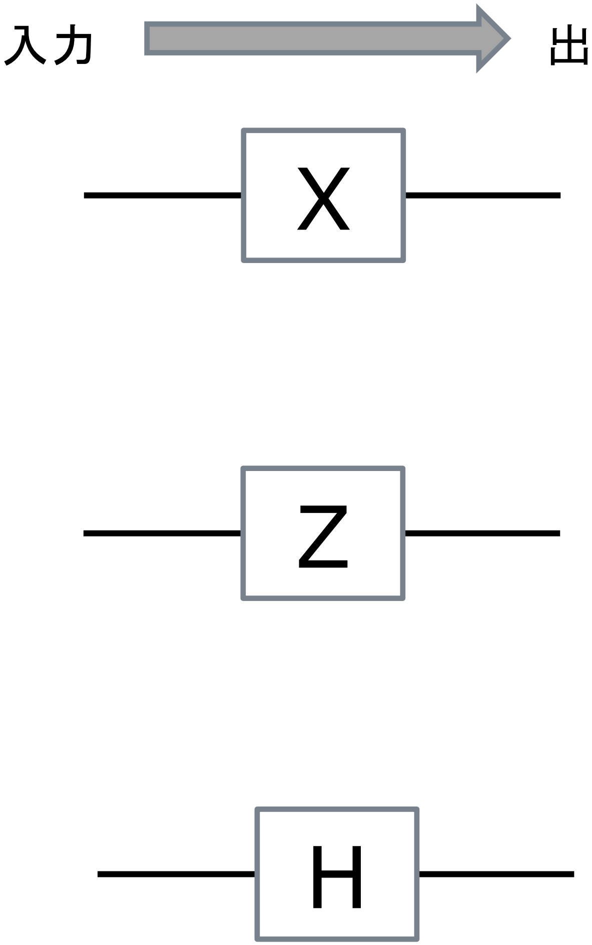


量子ゲートは
ユニタリ行列と
一対一に対応する

1-qubit ゲート

一つのqubitを入力として受け取り、
一つのqubitを出力として返す量子回路を
1-qubitゲートという

代表的な1-qubitのゲート X, Z, H



Bit Flipper

$$a|0\rangle+b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle+a|1\rangle$$

Phase Flipper

$$a|0\rangle+b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle-b|1\rangle$$

Hadamard

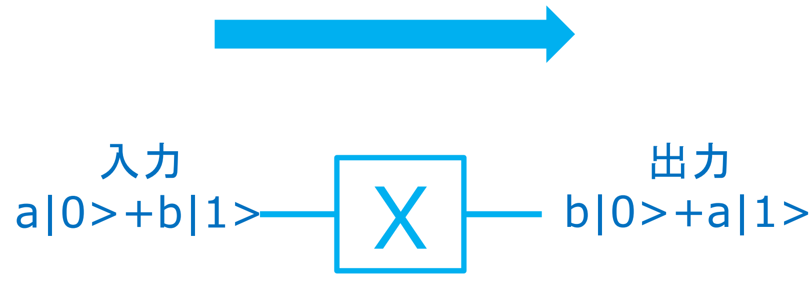
$$a|0\rangle+b|1\rangle \rightarrow a|+\rangle+b|-\rangle$$

|0>,|1>基底から
|+>,|->基底への変換

X, Z, H の行列と対応する量子ゲートの働き

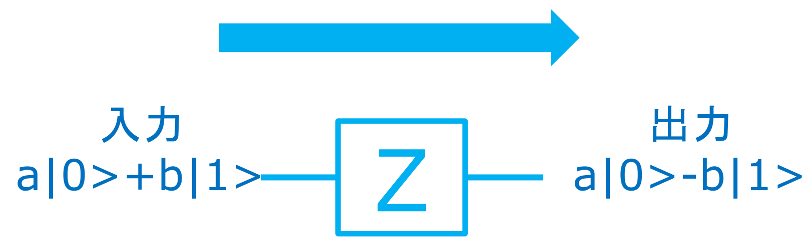
$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので、

$$X\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$



$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なので、

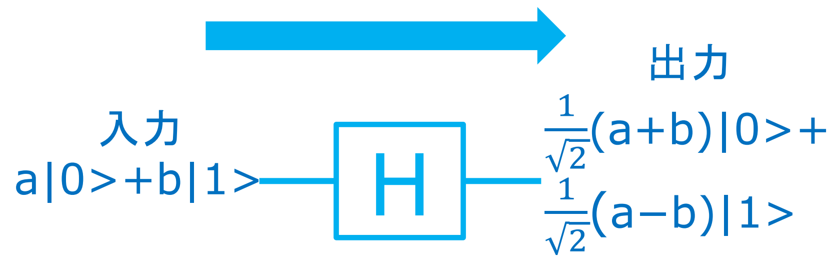
$$Z\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$



X, Z, H の行列と対応する量子ゲートの働き

$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ なので、

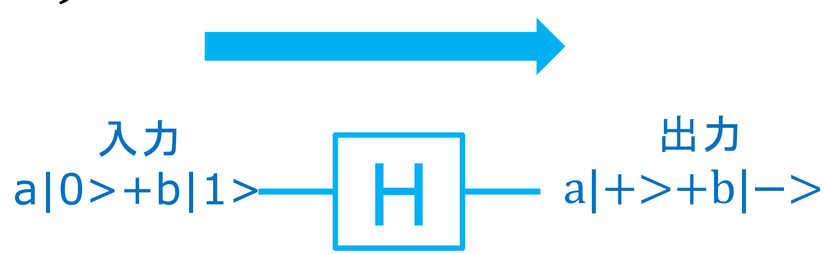
$$H\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$$



$$\mathrm{a}|0\rangle+\mathrm{b}|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{a}+\mathrm{b})|0\rangle+\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{a}-\mathrm{b})|1\rangle$$

$$= \mathrm{a}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)+\ \mathrm{b}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$$

$$= \mathrm{a}|+\rangle+\mathrm{b}|-\rangle$$



1-qubitの量子ゲートの例とそれに対応する行列

Hadamard	H	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Pauli-X	X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y	Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z	Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Phase	S	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$	T	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

1-qubitの量子ゲートの例とそれに対応する行列

Hadamard	$-\boxed{H}-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Pauli-X	$-\boxed{X}-$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y	$-\boxed{Y}-$	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z	$-\boxed{Z}-$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Phase	$-\boxed{S}-$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$	$-\boxed{T}-$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

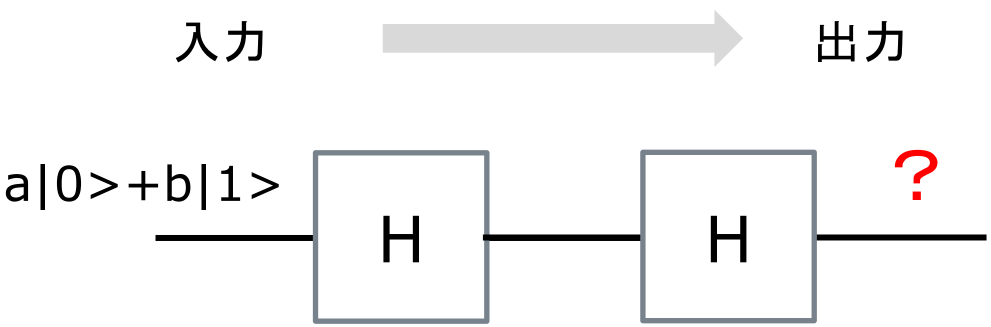
これらは、みな
ユニタリ行列
である

1-qubitゲートを
直列に組み合わせる

1-qubitゲートを直列に組み合わせる

ゲートを直列に組み合わせた回路の働きは、直列の回路を構成するゲートの**行列の積**を計算することで、求めることができる。

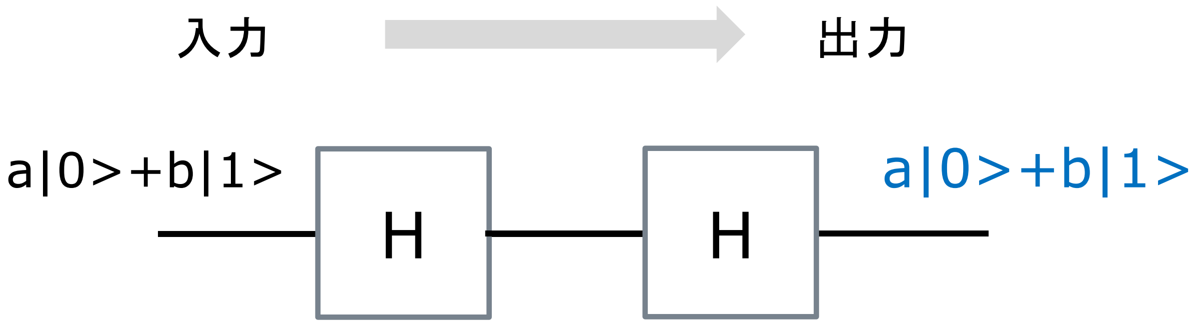
二つのHゲートを直列につないだ、次のような回路を考えてみよう。



1-qubitゲートを直列に組み合わせる

ゲートを直列に組み合わせた回路の働きは、直列の回路を構成するゲートの**行列の積**を計算することで、求めることができる。

二つのHゲートを直列につないだ、次のような回路を考えてみよう。



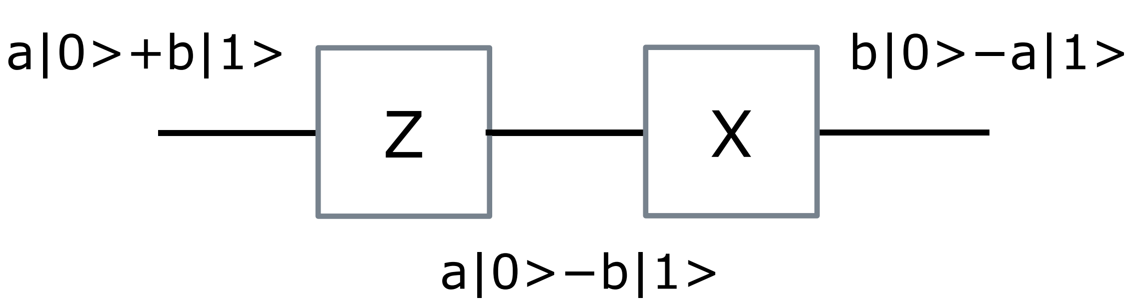
$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ なので、行列の積 HH を計算する。

$$HH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

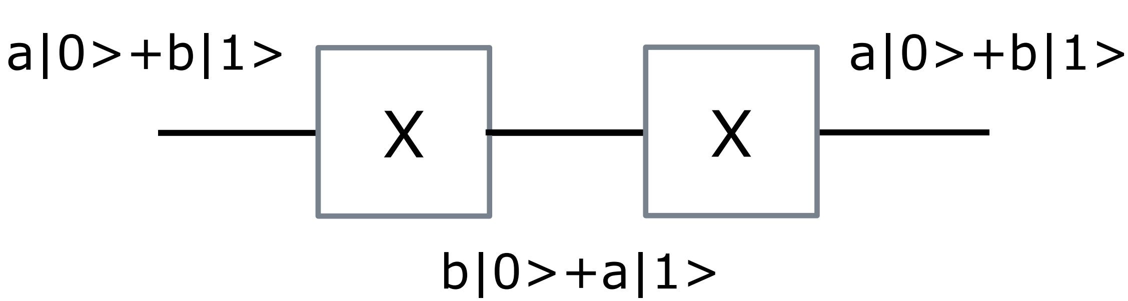
これは単位行列なので、先の回路の出力は、 a|0>+b|1>

1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる (1)

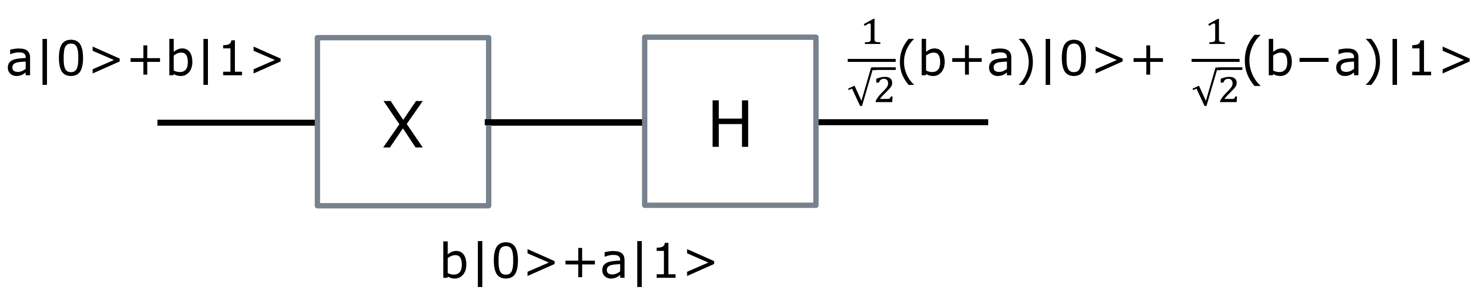
入力 出力



$$= \underset{X}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} \underset{Z}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$



$$= \underset{X}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$



1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる (2)

$$R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{pmatrix}$$ とする。

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

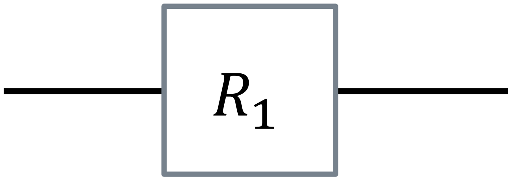
$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \end{pmatrix}$$

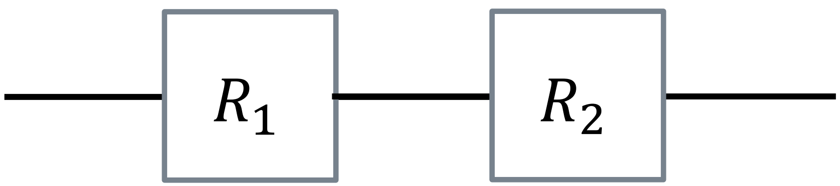
$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^4} \end{pmatrix} = \cdots$$

1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる (2)

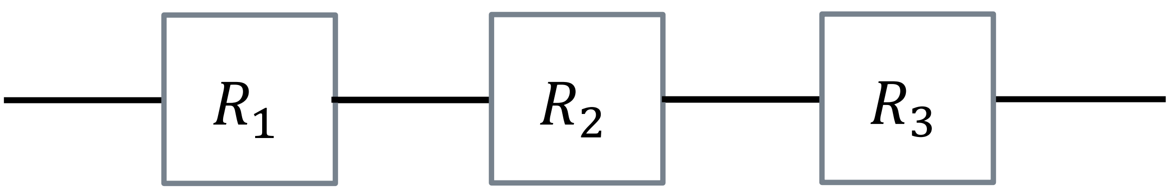
入力 出力



$$\underset{R_1}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/2^1}\end{pmatrix}}|\psi>$$



$$\underset{R_2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/2^2}\end{pmatrix}}\underset{R_1}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/2^1}\end{pmatrix}}|\psi>$$



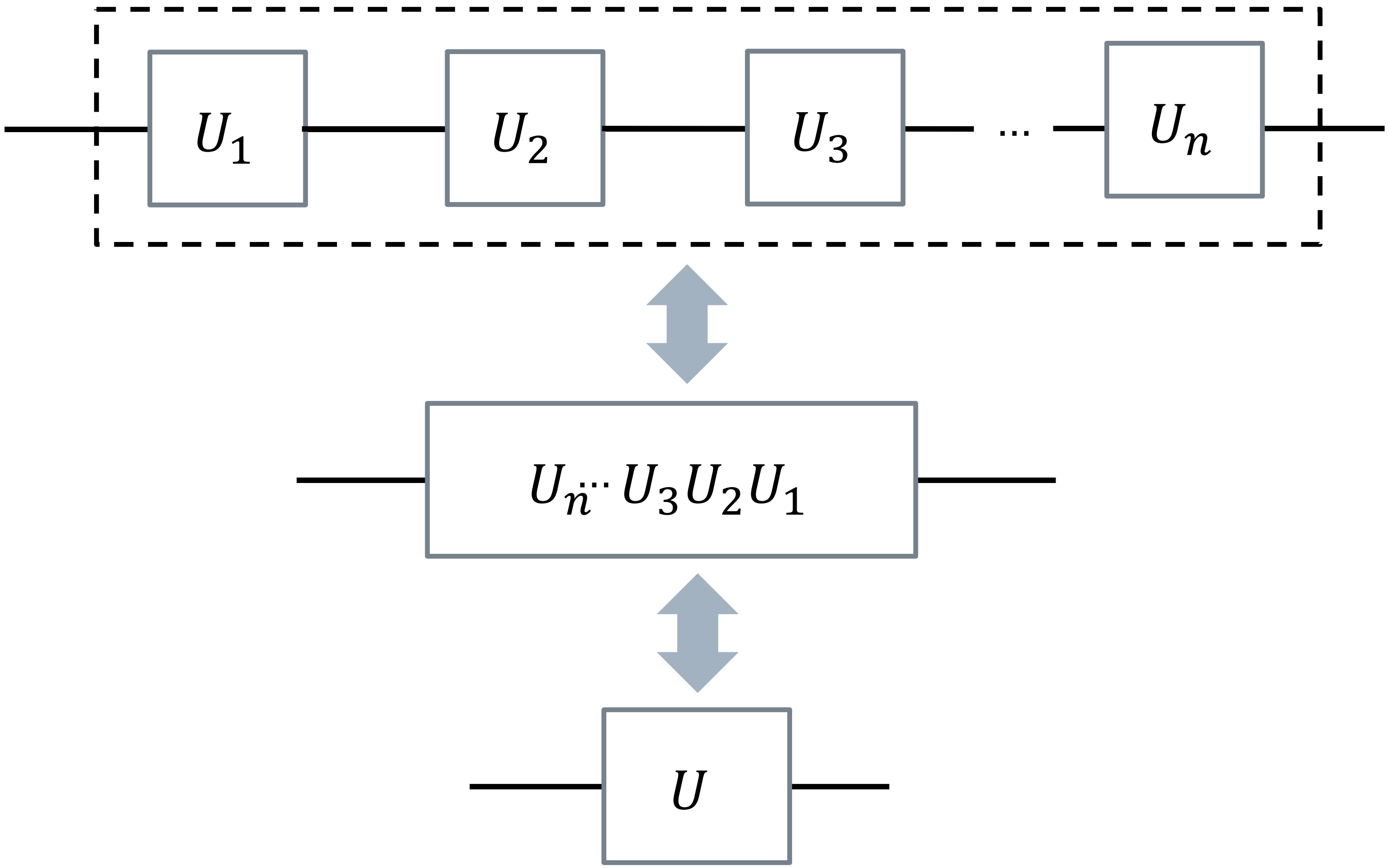
$$\underset{R_3}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/2^3}\end{pmatrix}}\underset{R_2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/2^2}\end{pmatrix}}\underset{R_1}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/2^1}\end{pmatrix}}|\psi>$$

ユニタリ行列の積はユニタリである

- U,Vをユニタリ行列としよう。
  $U^\dagger U = UU^\dagger = I$, $V^\dagger V = VV^\dagger = I$ である。
- このとき、二つのユニタリ行列U,Vの積 UVもユニタリであることが、次のようにしてわかる。
  $$(UV)^\dagger(UV) = (V^\dagger U^\dagger)(UV)$$
  $$= V^\dagger U^\dagger UV = V^\dagger IV = V^\dagger V = I$$
- 同様に、三つのユニタリ行列の積 UVWの積もユニタリである。
  $$(UVW)^\dagger(UVW) = (W^\dagger V^\dagger U^\dagger)(UVW)$$
  $$= W^\dagger V^\dagger U^\dagger UVW = W^\dagger V^\dagger VW = W^\dagger W = I$$

- ユニタリ行列の積はユニタリである

n個の1-qubitゲートを直列につなげた回路は、
一つのユニタリ行列で表現できる

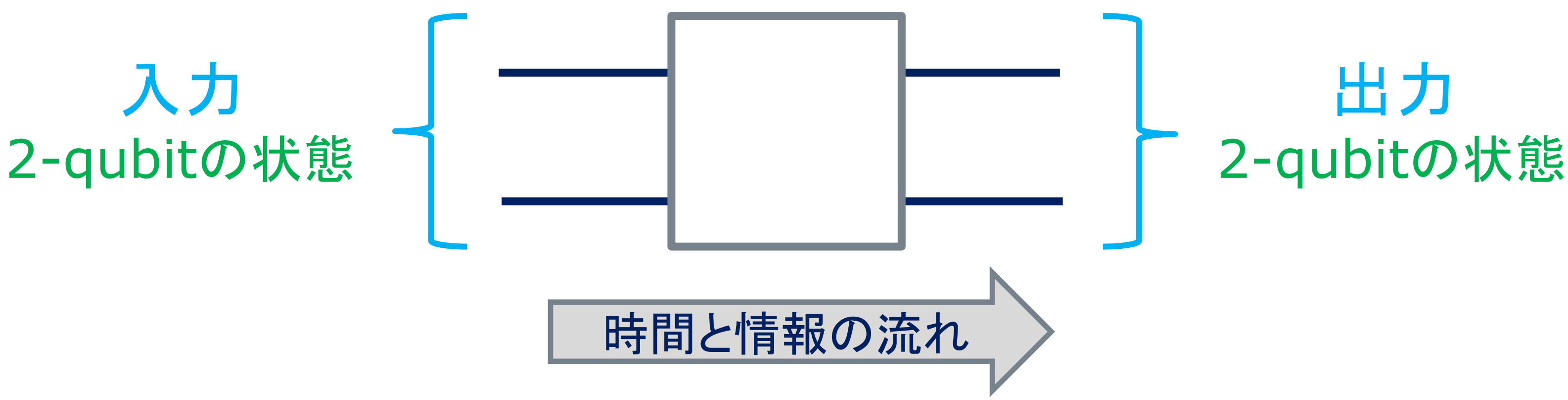


2-qubits ゲート

2-qubits ゲート
物理的なゲートを図形で表す

- 1-qubitのゲートは、1-qubitの状態を入力として受け取り、1-qubitの状態を出力として返す。
- 同様に、2-qubitsのゲートは、2-qubitsの状態を入力として受け取り、2-qubitsの状態を出力として返す。

2-qubitゲートを次のような図形で表そう。



- 一般に、n-qubitsのゲートは、n-qubitsの状態を入力として受け取り、n-qubitsの状態を出力として返す。

2-qubits ゲート
数学的な変換

- 2-qubitsの状態は、|00>, |01>, |10>, |11> の4つの状態の重ね合わせなので、この状態|a>を同様に|00>, |01>, |10>, |11> の4つの状態の重ね合わせである他の2-qubitの状態|b>に変換するのは、4 x 4のユニタリ行列Uである。

U|a> = |b>

変換前|a>
2-qubitの
状態ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathrm{U}_{4x4}} \qquad \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \\ b_{10} \\ b_{11} \end{pmatrix}$$

変換後|b>
2-qubitの
状態ベクトル

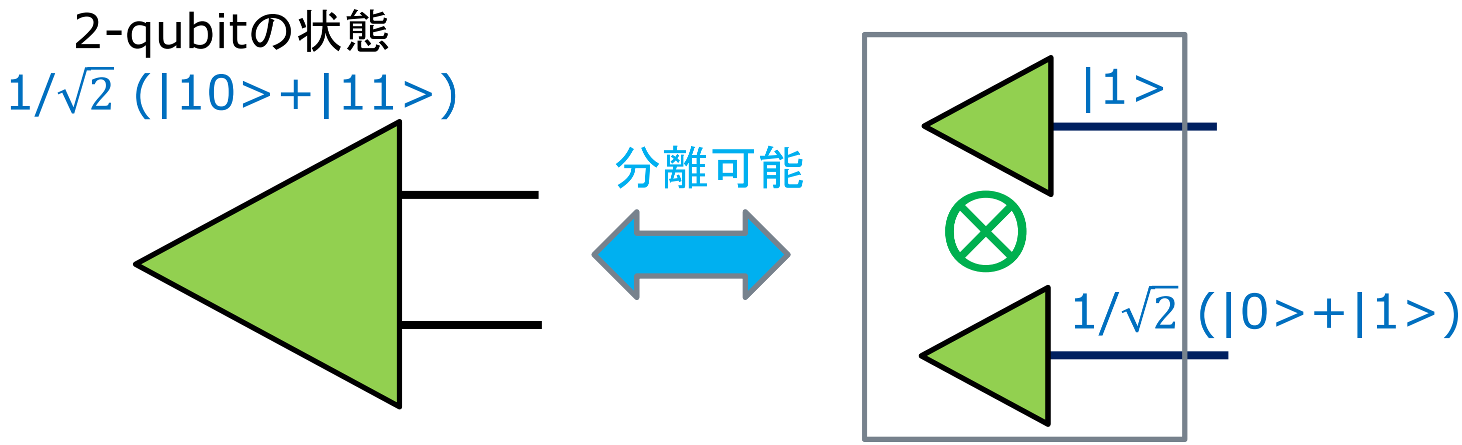
- 2-qubits ゲートは、4 x 4のユニタリ行列で表現される。n-qubitsゲートは、2^n x 2^nのユニタリ行列で表現される。n=10でも、この行列は 1024x1024の要素を持つ巨大なものになる。

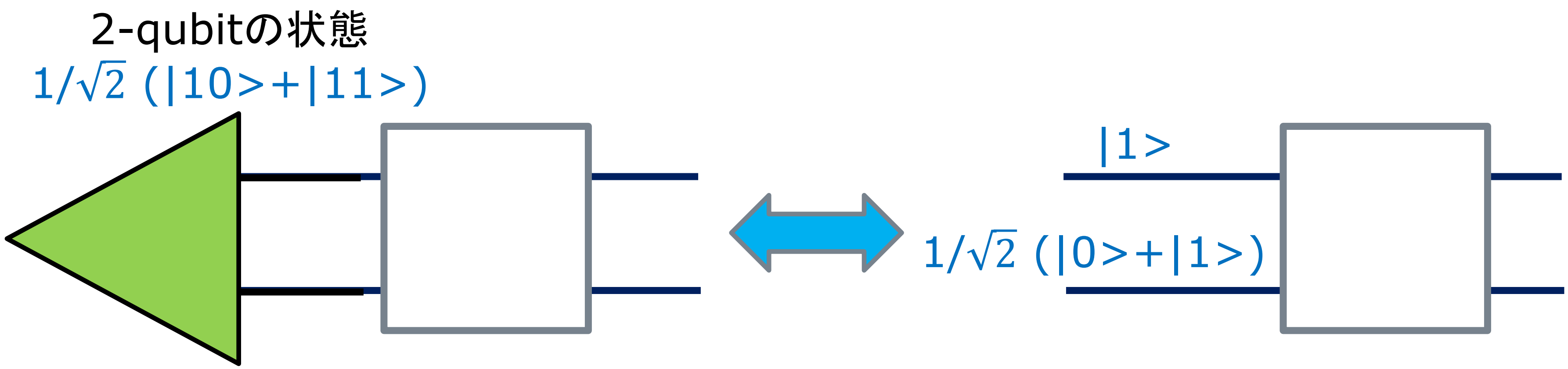
2-qubits ゲートへの
分離可能な入力と分離不可能な入力

- 2-qubitsゲートが入力として受け取るのは、2-qubitsの状態である。
- 2-qubitsの状態には、先に見たように、1-qubitの状態のテンソル積に分解される分離可能な状態と、そういう分解ができないエンタングルメント状態の分離不可能な状態がある。
- だから、2-qubitsゲートの入力には、分離可能な入力と分離不可能な入力の二つのタイプがあることになる。

2-qubits ゲートへの
分離可能な入力と分離不可能な入力の例

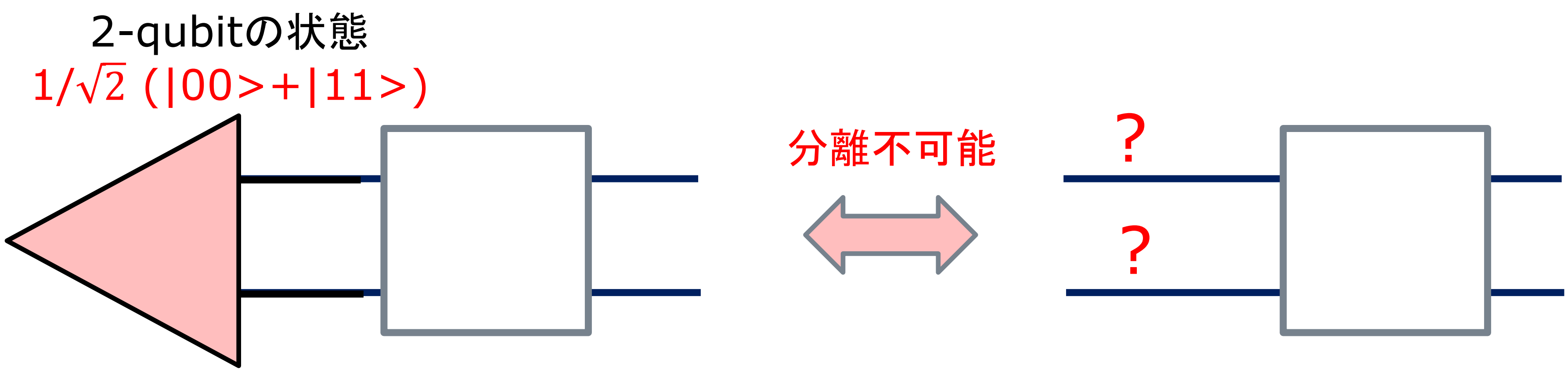
□ 分離可能な入力の例





2-qubits ゲートへの
分離可能な入力と分離不可能な入力の例

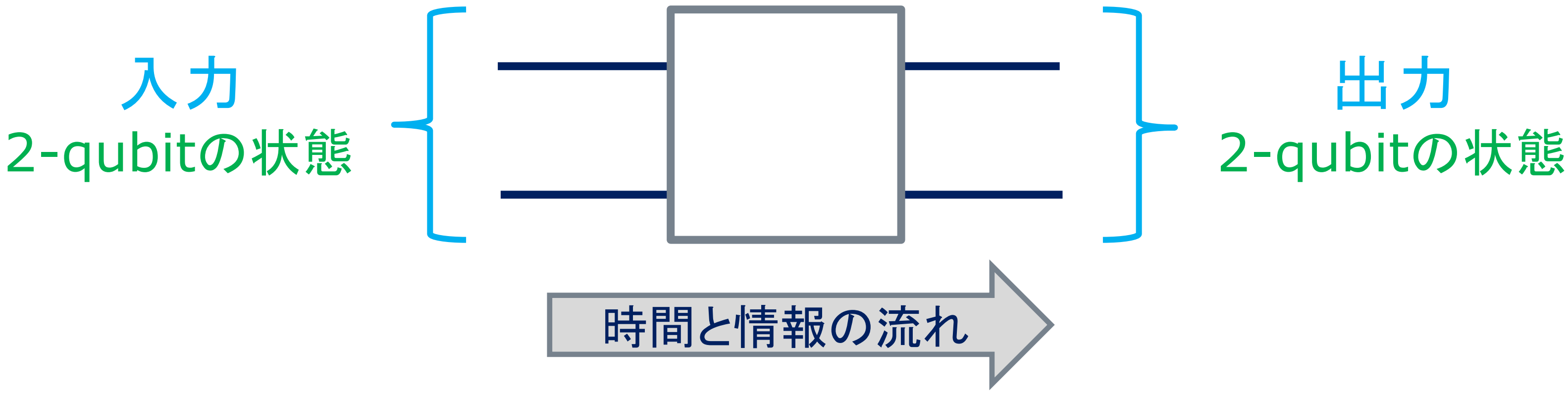
- 分離不可能な入力の例



- 分離不可能なエンタングルした2-qubitsの状態を受け取った場合、2-qubitsゲートの二つの入力ラインの状態は、それぞれが 1-qubitの状態を取るという形では表現できない。

2-qubits ゲートの2本のライン

- 2-qubitsゲートの図示では、左（入力）と右（出力）に2本の腕が出ているが、それは入力・出力ともに 2-qubitsの状態であることを示しているだけである。量子コンピュータの世界では、このラインをレジスターと呼ぶことがある。



- 2-qubitsゲートが、エンタングルした2-qubitsの状態を受け取った場合、それぞれの入力ラインが、 1-qubitの状態を取ることはない。それが、分離不可能の意味である。

二つの1-qubitのゲートを、並列に組み合わせて2-qubitsゲートを作る

二つの1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

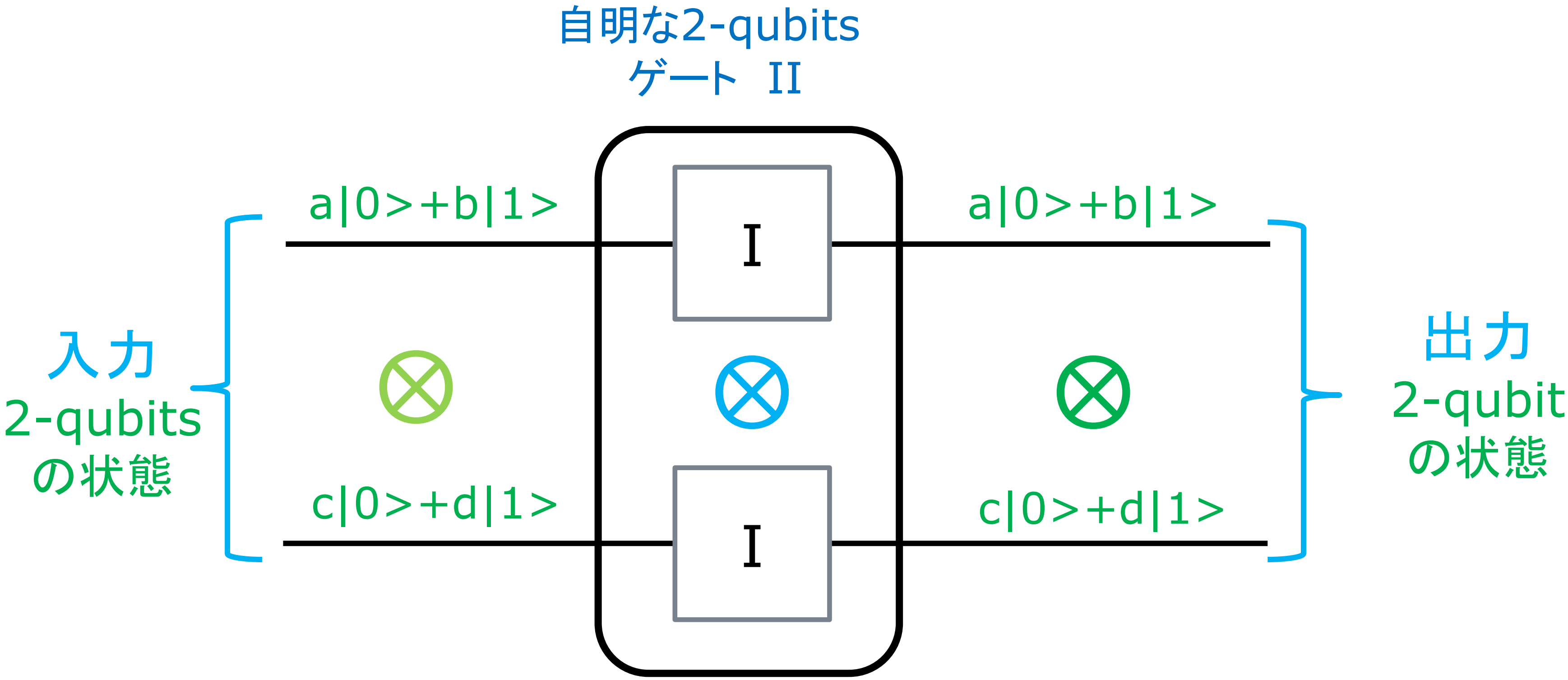
- 二つの 1-qubit ゲートがある時、それらを並列に組み合わせて、2-qubitsのゲートを構成することができる。二つのものを一つに考えるにはテンソル積を使えばいい。
- それは、いままで見てきたような状態のテンソル積ではなく、ゲートのテンソル積、ゲートを表現する行列のテンソル積である。
- ここでは、そうしたいくつかのサンプルを見ておこう。
- ただし、2-qubitsのゲートに対応する行列が、すべて、1-qubit ゲートの行列のテンソル積で表されるわけではない。

2-qubitsゲート サンプル 1

自明な2-qubitゲート

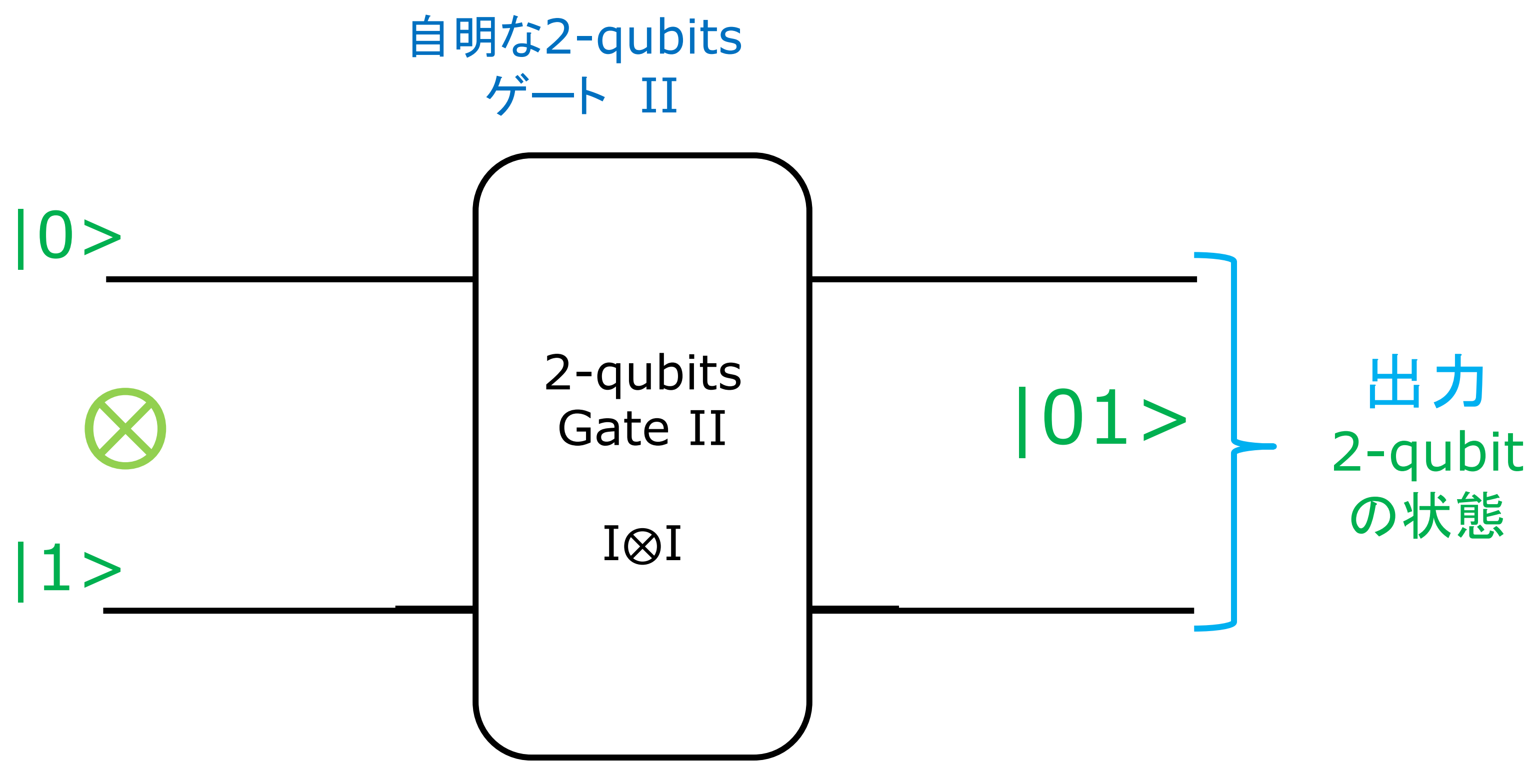
自明な2-qubits ゲート
入力が分離可能な場合

- 次のような、単位行列 I からなる 1-qubit ゲートを二つ並列に並べた 2-qubitsゲートを考えよう。入力が分離可能な場合、このゲートは、入力をそのまま出力に渡す。



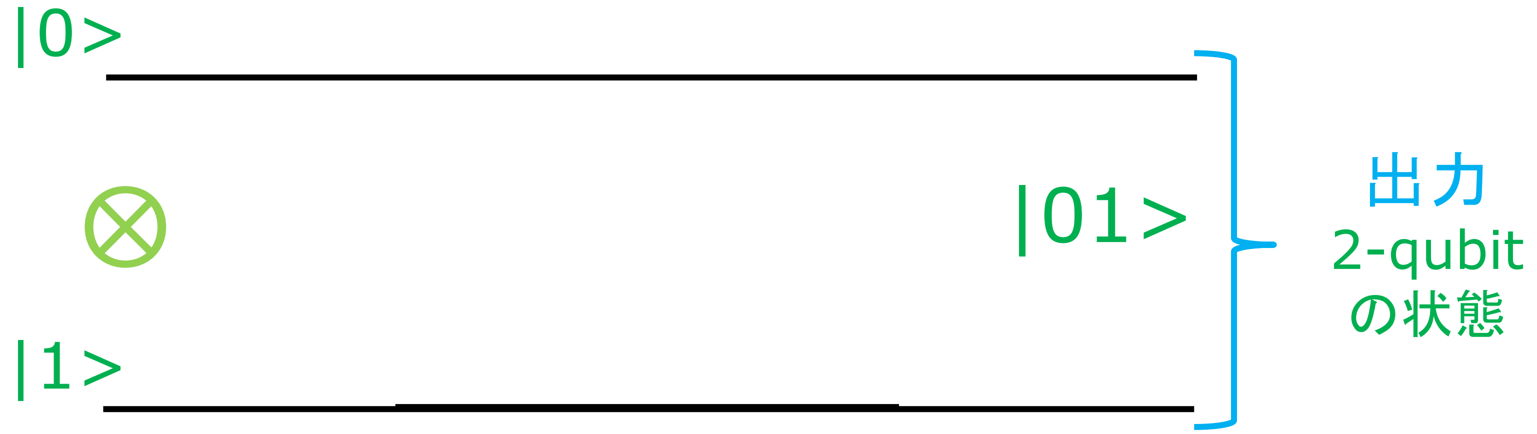
自明な2-qubits ゲート
入出力サンプル 1

この自明な2-qubitsゲートの働きの例を示す。
ただ、このゲートの働きは、このゲートをなくしたものと等しい。



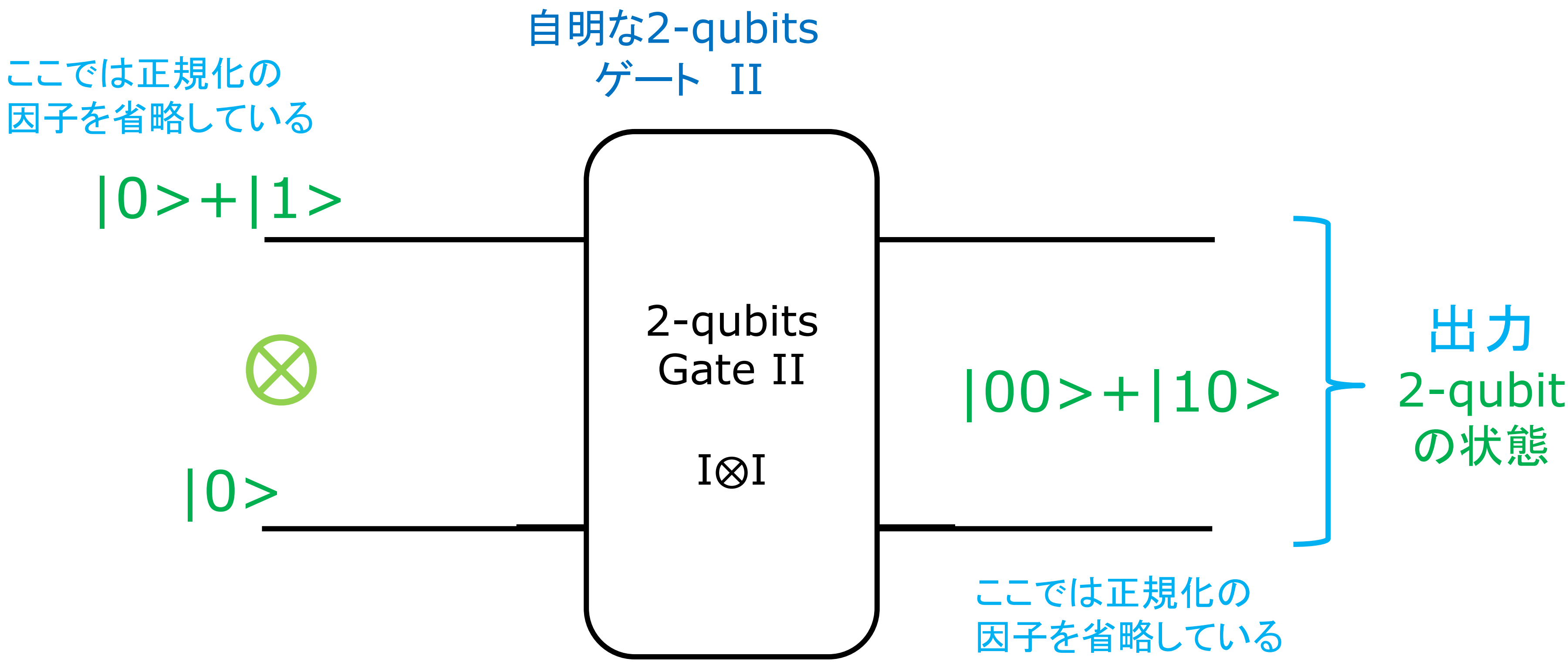
自明な2-qubits ゲート
入出力サンプル 1

この自明な2-qubitsゲートの働きは、このゲートをなくしたものと等しい。



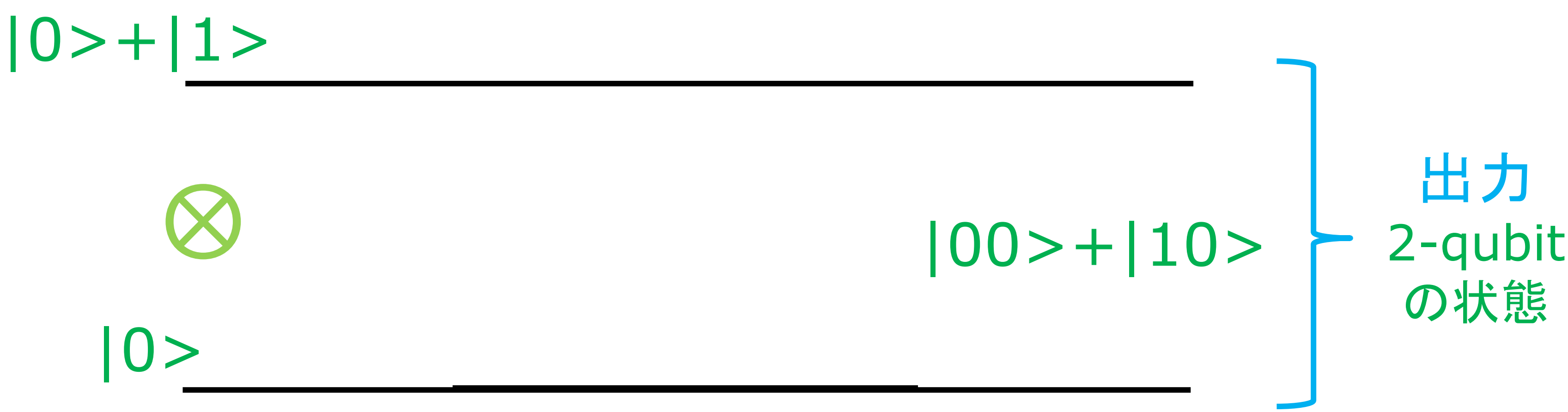
自明な2-qubits ゲート
入出力サンプル 2

この自明な2-qubitsゲートの働きのもう一つの例を次に示す。
ただ、このゲートの働きは、このゲートをなくしたものと等しい。

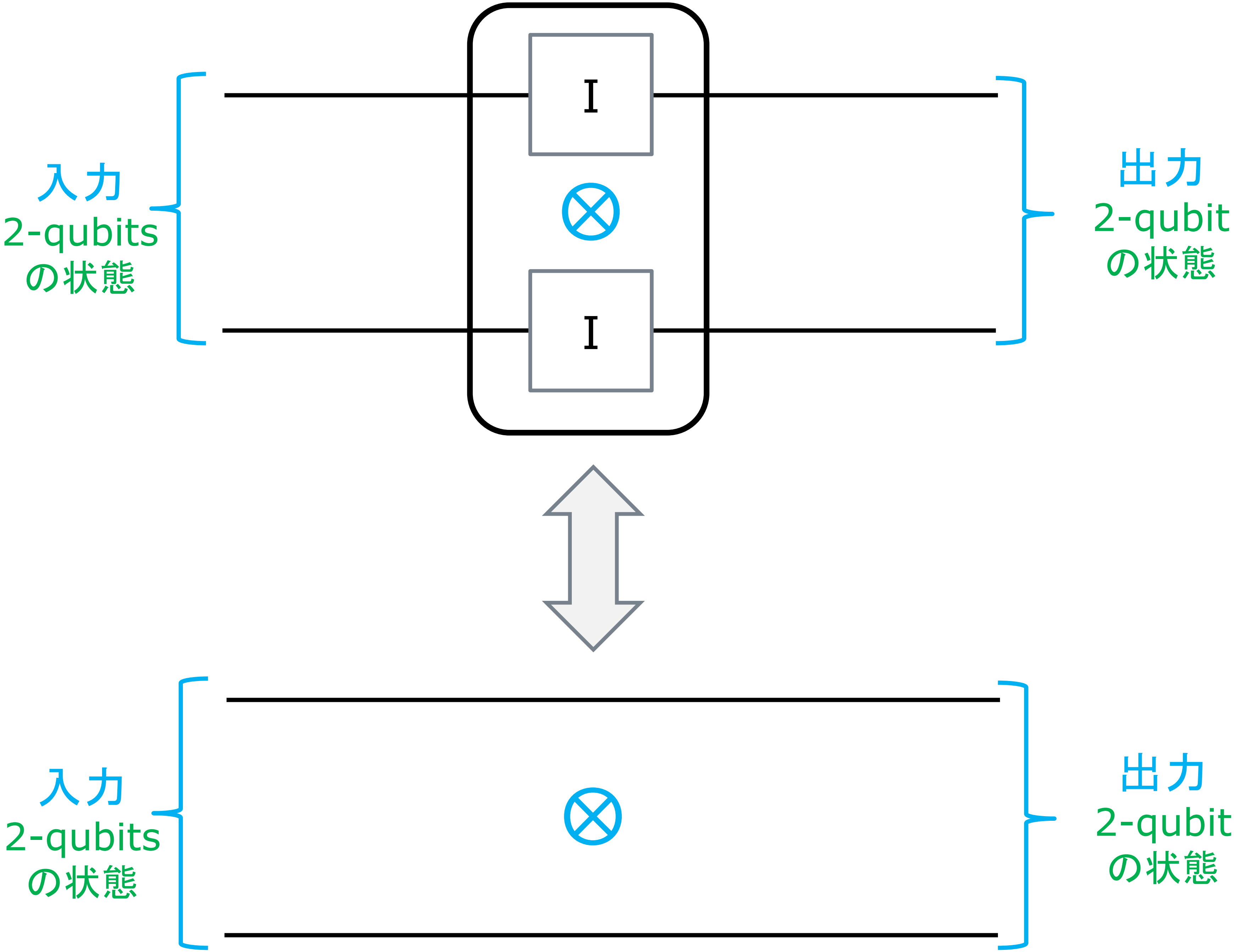


自明な2-qubits ゲート
入出力サンプル 2

ただ、このゲートの働きは、このゲートをなくしたものと等しい。



ここでは正規化の
因子を省略している


入力
2-qubits
の状態
I
I
出力
2-qubit
の状態
入力
2-qubits
の状態
出力
2-qubit
の状態

この2-qubitsゲート II は、2-qubitsの状態の基底にどう作用するか？

- 2-qubitsゲート IIが、2-qubitの基底にどう作用するかを見てみよう。

|0> ―――――― |0>

|0> ―――――― |0>

|00> → |00>

|0> ―――――― |0>

|1> ―――――― |1>

|01> → |01>

|1> ―――――― |1>

|0> ―――――― |0>

|10> → |10>

|1> ―――――― |1>

|1> ―――――― |1>

|11> → |11>

この2-qubitsゲート II は、エンタングルした入力をどう変換するか？

- この2-qubitsゲート II に対応する行列を、同じく **II**で表そう。この時、行列 **II** は、2-qubitsの状態の基底を次のように変換する。

  II|00>=|00>,　　**II**|01>=|01>,
  II|10>=|10>,　　**II**|11>=|11>

- この2-qubitsゲート II に、エンタングルした分離不可能な入力、例えば、1/√2 (|00>+|11>) が与えられた時、その出力は次のように計算できる。「線形性」を利用する。
- **II**(1/√2 (|00>+|11>)) = 1/√2(**II** (|00>+|11>))
  = 1/√2(**II** |00>+**II**|11>) = 1/√2 (|00>+|11>)
- 入力の状態と同じものが出力の状態に現れる。
  この結果は、予想通りで自明のものだが、こうした考えは、エンタングルした状態の変換を考える時、基本的なものである。

この2-qubitsゲート II は、エンタングルした入力をどう変換するか？

入力

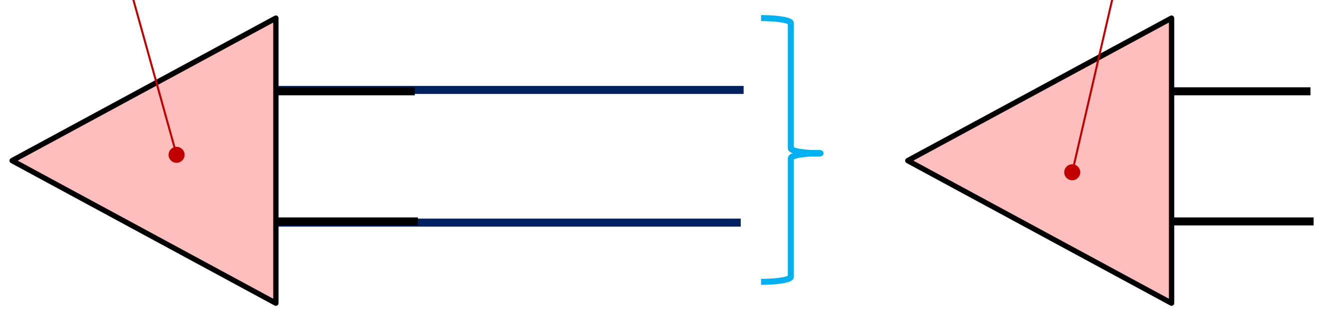
分離不可能な
2-qubitの状態

$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$

出力

分離不可能な
2-qubitの状態

$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$

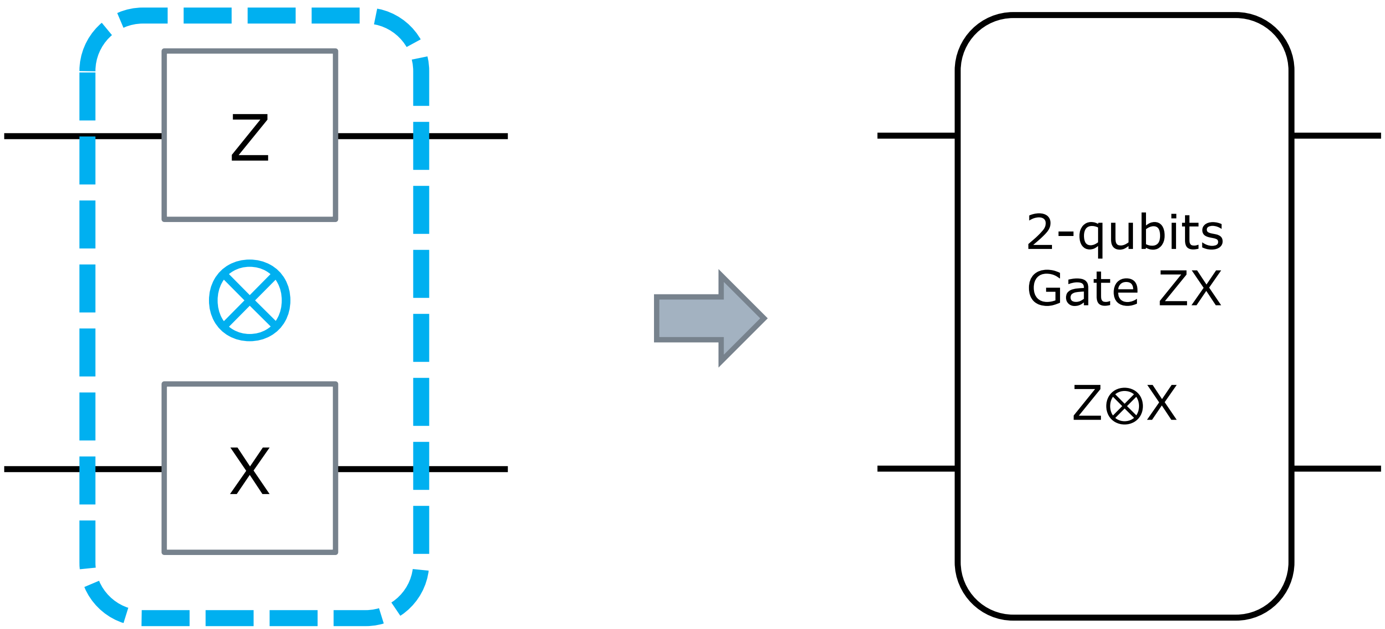


2-qubitsゲート サンプル 2

ゲートZとゲートXを、
並列に組み合わせてる

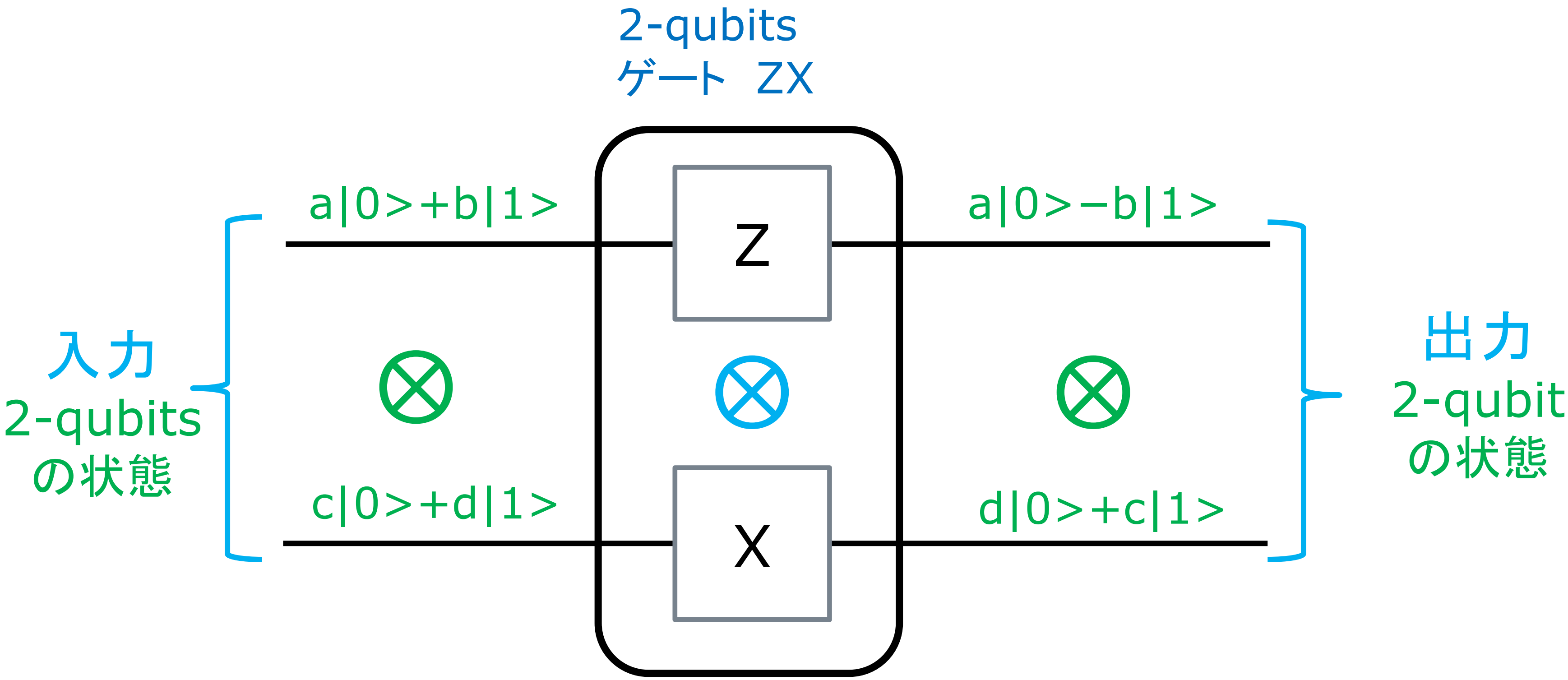
二つの1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

二つの 1-qubit ゲートがある時、それらを並列に組み合わせて、2-qubitsのゲートを構成することができる。二つのものを一つに考えるにはテンソル積を使えばいい。ただし、状態のテンソル積ではなく、ゲートのテンソル積である。例えば、次の2-qubitsゲートは、ZゲートとXゲートをパラレルに組み合わせたものだ。この2-qubitゲート ZX の働きを見てみよう。



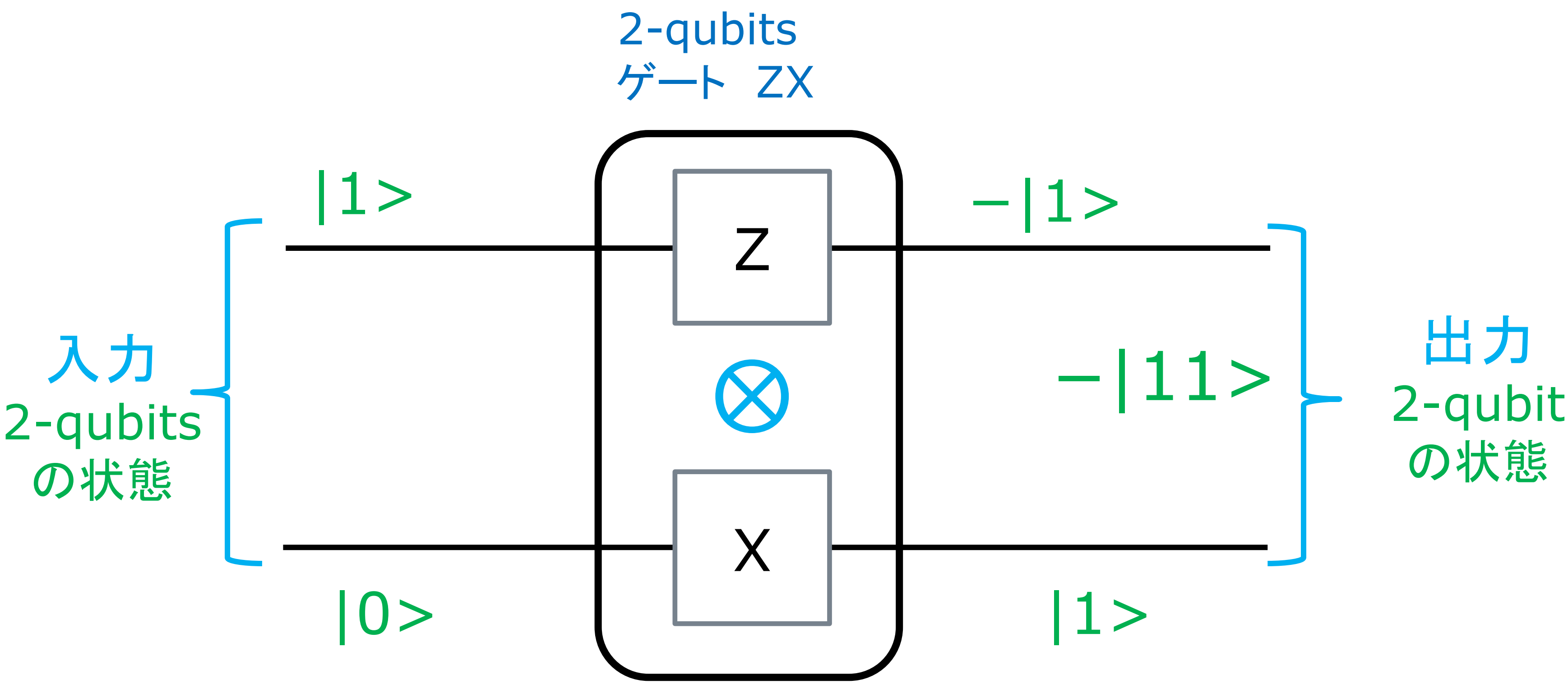
ゲートZXへの入力が分離可能な場合

- ゲートZXへの入力が分離可能な場合、このゲートの働きは、簡単にわかる。各ラインごとに、1-qubitゲートの働きを見ていけばいい。



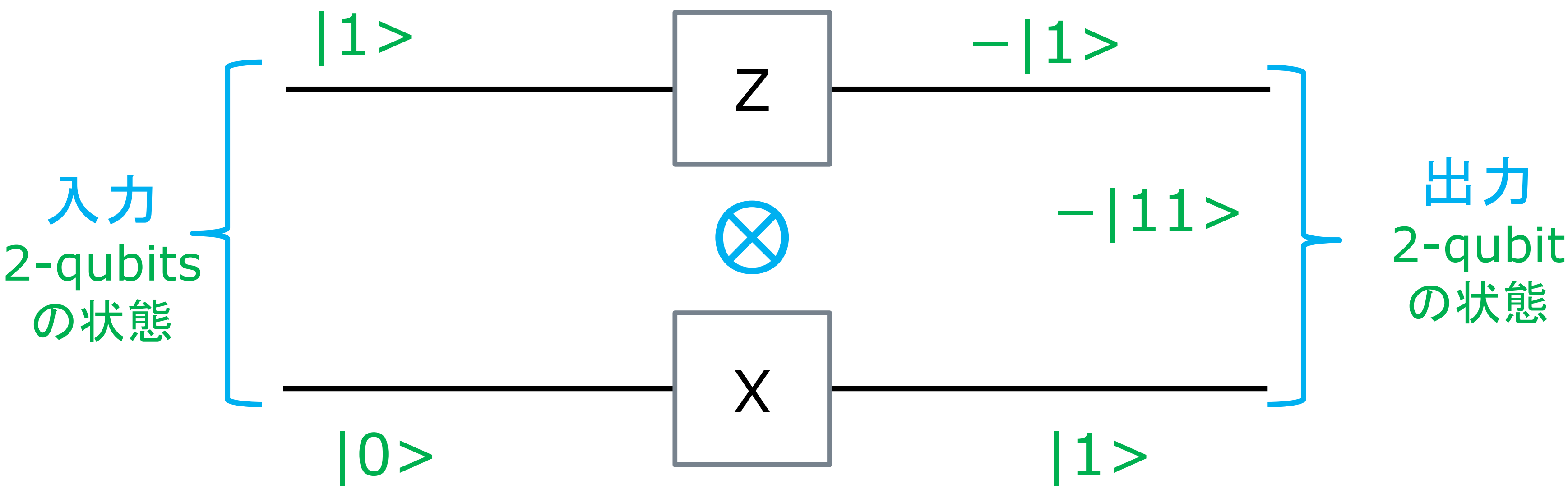
2-qubits ゲート ZX
入出力サンプル 1

- ゲートZXの働きを、いくつかの入出力の例で見ておこう。
  この結果は、2-qubitsゲートZXがなくて、二つの1-qubitゲートのパラレルに置かれたものの働きに等しい。



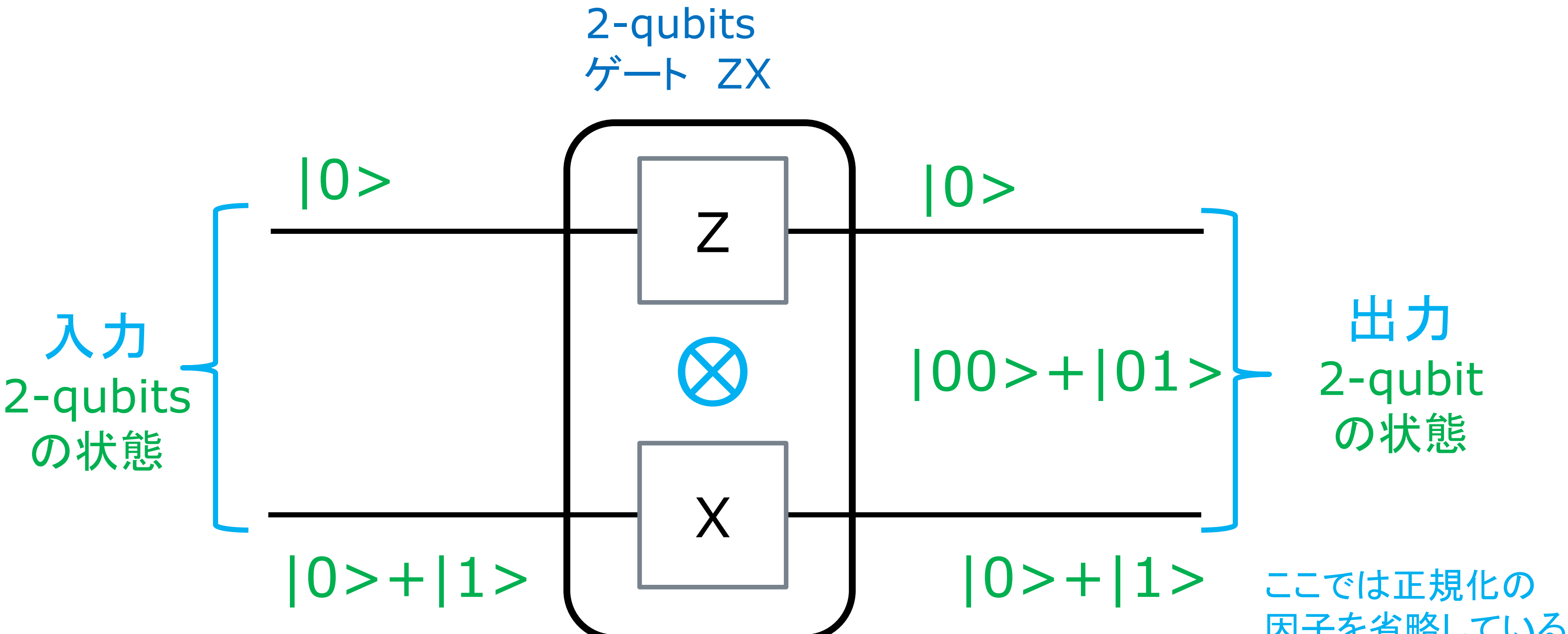
2-qubits ゲート ZX
入出力サンプル 1

- この結果は、2-qubitsゲートZXがなくて、二つの1-qubitゲート ZとXがパラレルに置かれたものの働きに等しい。



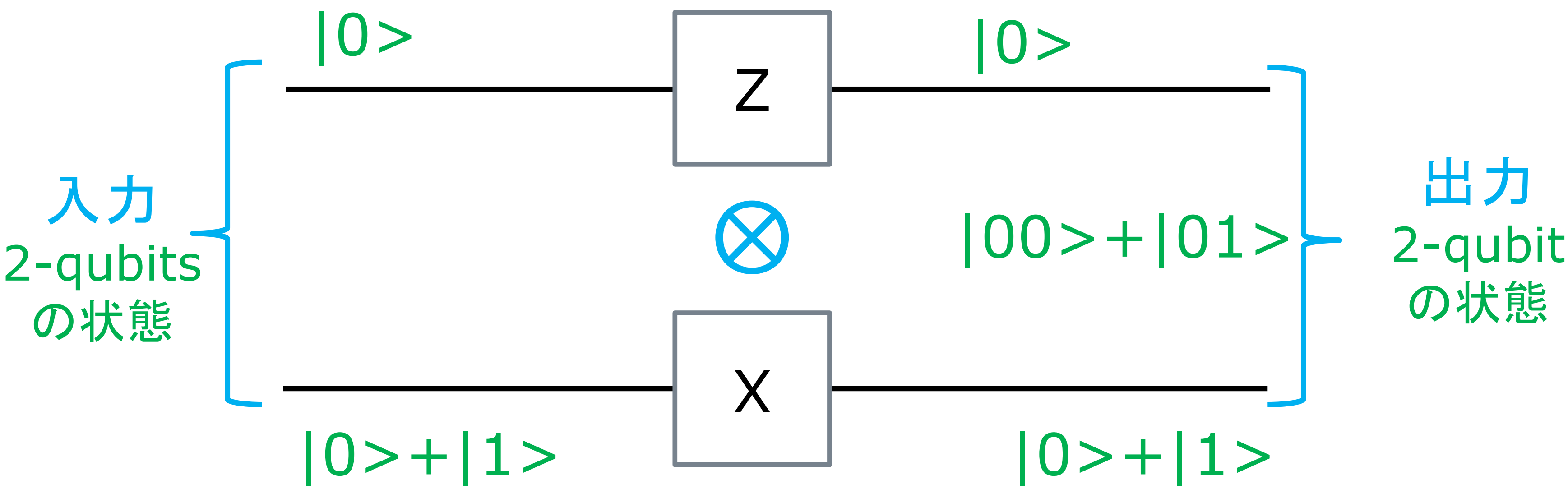
2-qubits ゲート ZX 入出力サンプル 2

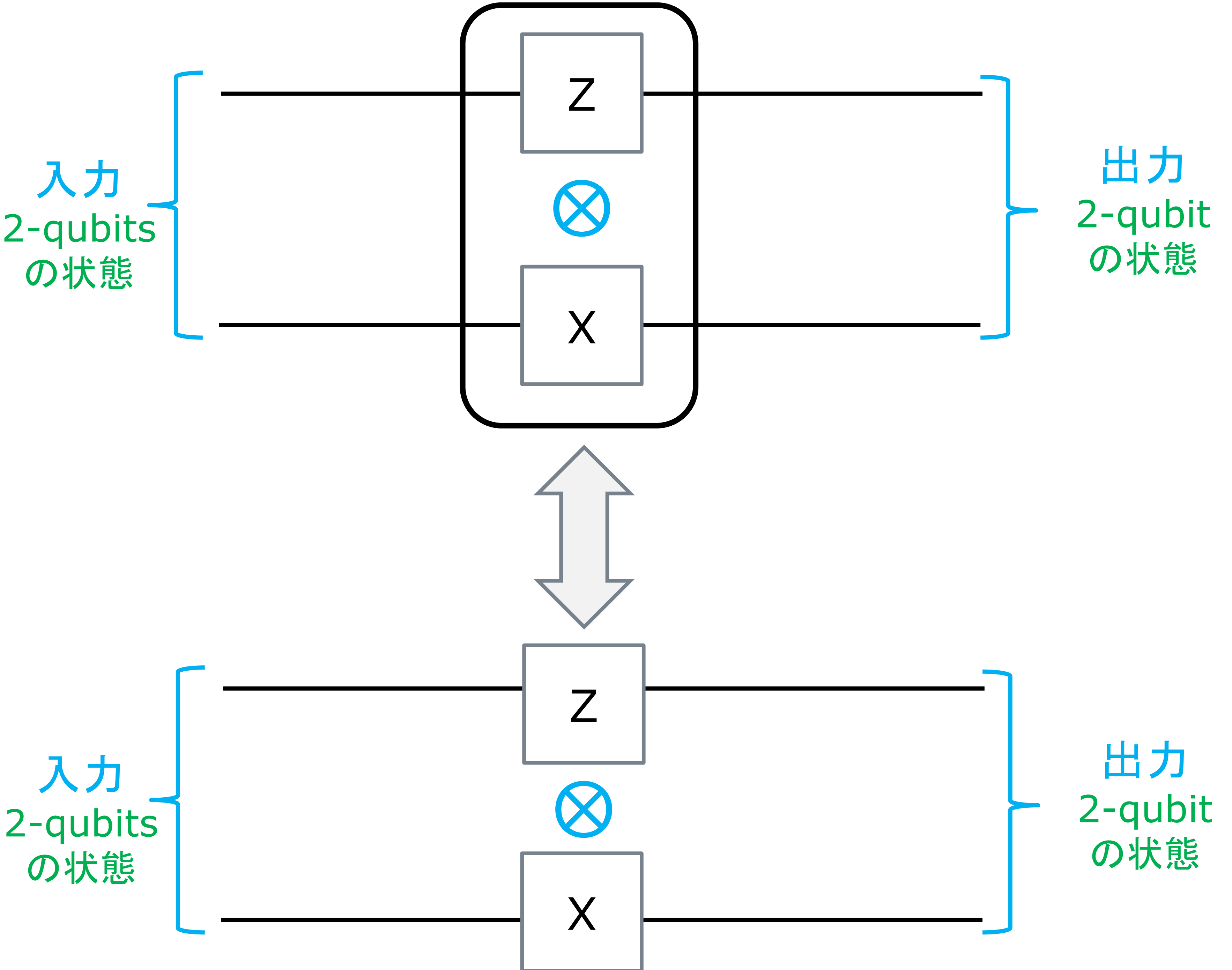
- ゲートZXの働きを、いくつかの入出力の例で見ておこう。
この結果は、2-qubitsゲートZXがなくて、二つの1-qubitゲートのパラレルに置かれたものの働きに等しい。



2-qubits ゲート ZX
入出力サンプル 2

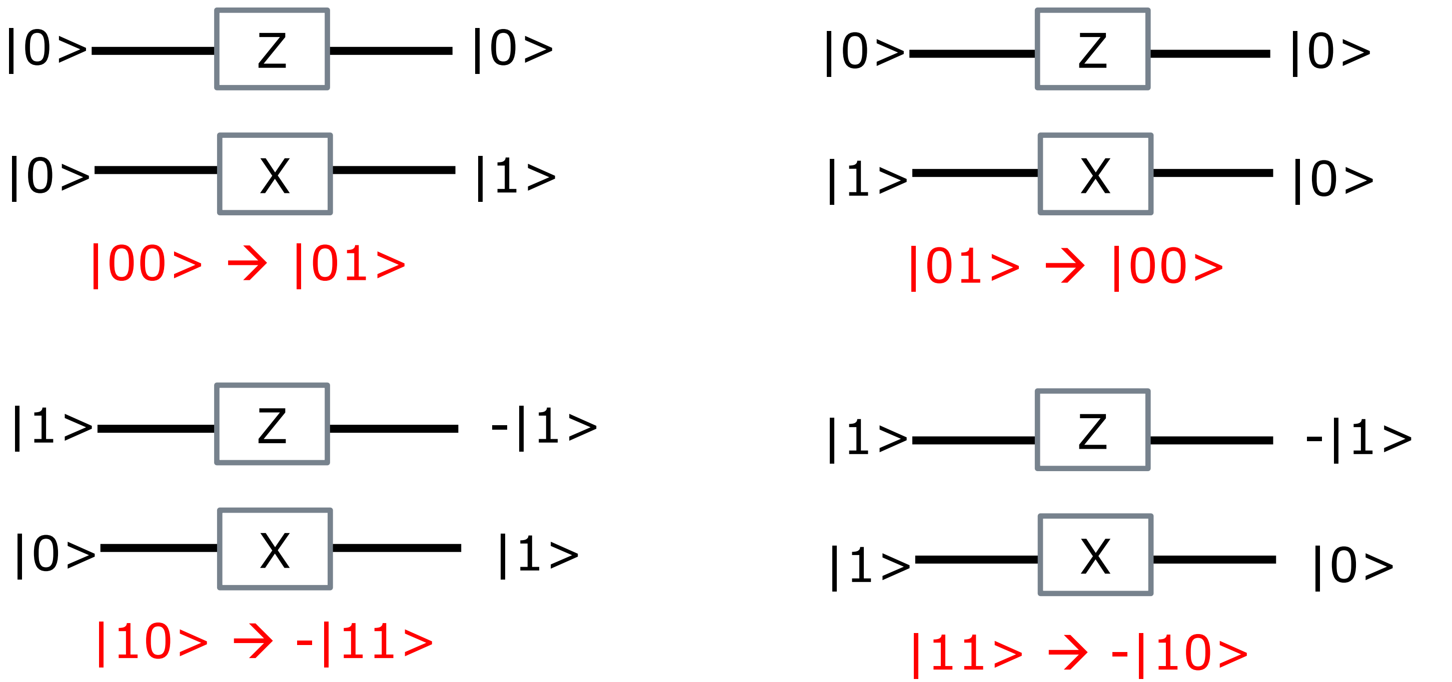
- この結果は、2-qubitsゲートZXがなくて、二つの1-qubitゲートのパラレルに置かれたものの働きに等しい。




入力
2-qubits
の状態
Z
⊗
X
出力
2-qubit
の状態
入力
2-qubits
の状態
Z
⊗
X
出力
2-qubit
の状態

この2-qubitsゲート ZX は、2-qubitsの状態の基底にどう作用するか？

- 2-qubitsゲート ZXが、2-qubitの基底にどう作用するかを見てみよう。



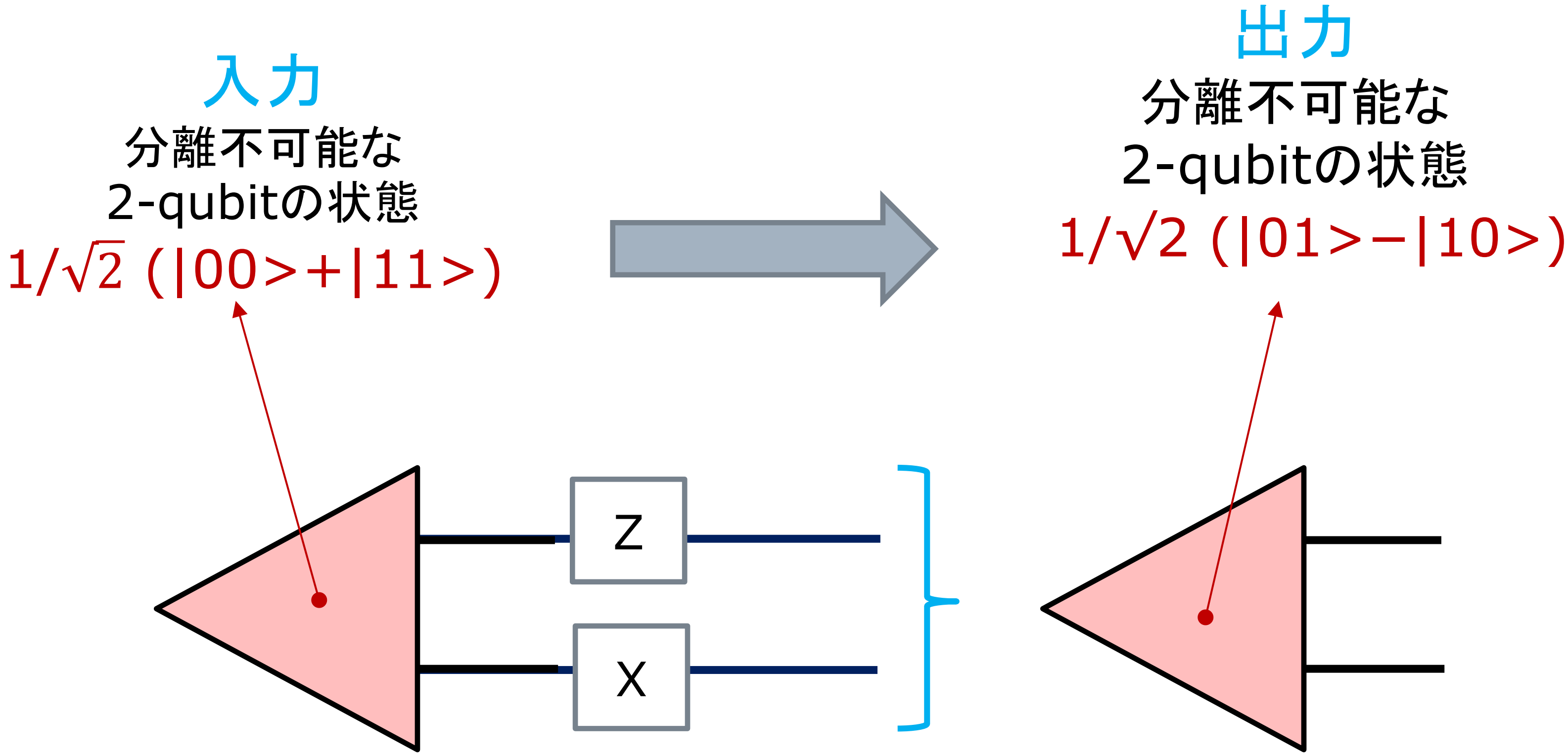
この2-qubitsゲート ZX は、エンタングルした入力をどう変換するか？

- この2-qubitsゲート ZX に対応する行列を、同じく **ZX**で表そう。この時、行列 **ZX** は、2-qubitsの状態の基底を次のように変換する。

  ZX|00>=|01>,　　**ZX**|01>=|00>,
  ZX|10>= −|11>, **ZX**|11>= −|10>

- この2-qubitsゲート ZX に、エンタングルした分離不可能な入力、例えば、1/√2 (|00>+|11>) が与えられた時、その出力は次のように計算できる。「線形性」を利用する。
- **ZX**(1/√2 (|00>+|11>)) = 1/√2(**ZX** (|00>+|11>))
  = 1/√2(**ZX**|00>+**ZX**|11>) = 1/√2 (|01>−|10>)
- この出力状態も、エンタングルしているので、二つのラインに分離できない。

この2-qubitsゲート ZX は、
エンタングルした入力をどう変換するか？

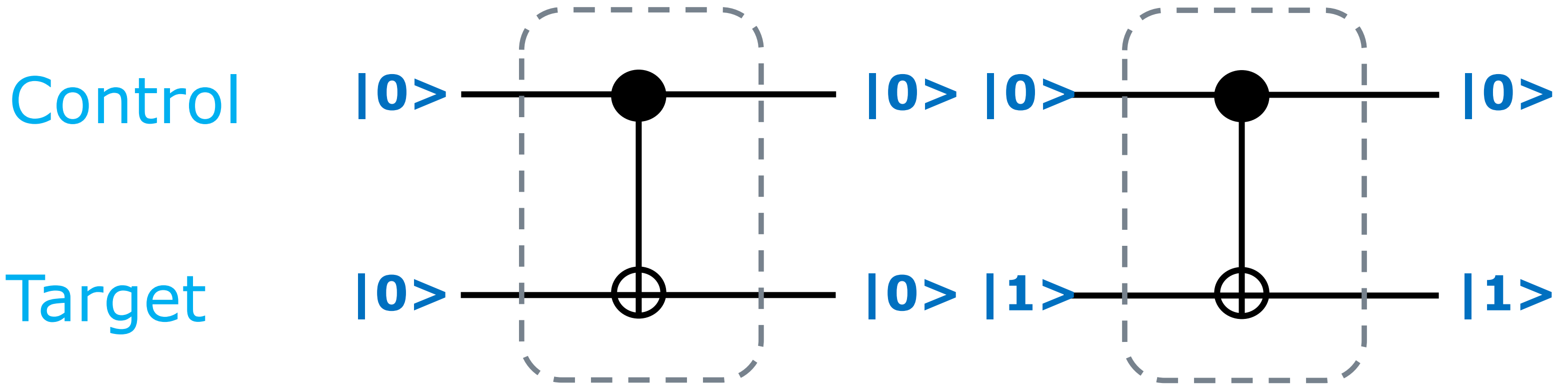


2-qubitsゲート サンプル 3

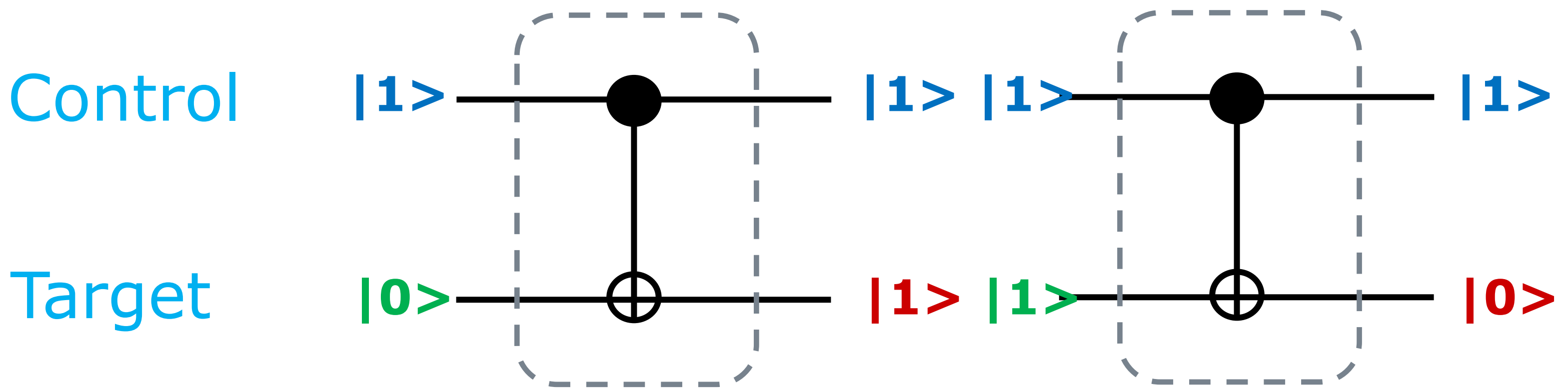
CNOTゲートとControl-Uゲート

CNOT (Control-NOT) は、
次のような働きをする2-qubits ゲートである

Controlが |0>なら何もしない

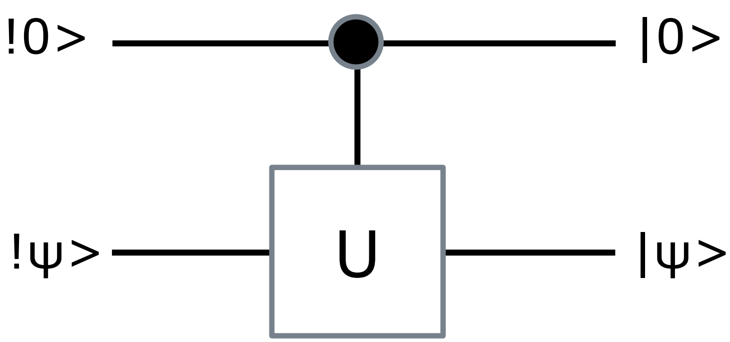


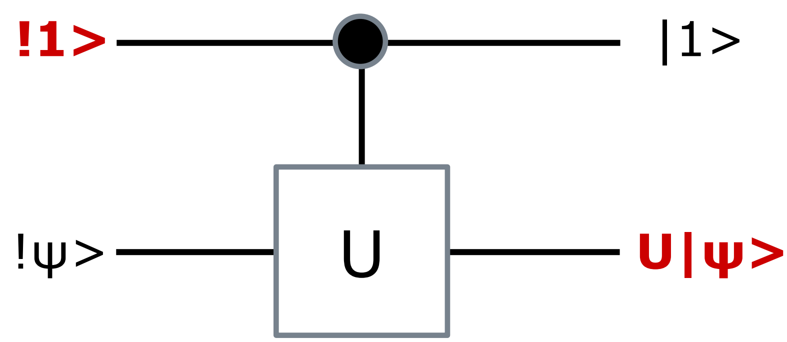
Controlが |1>ならTargetにNOT操作



2-qubitsのゲート **Control-U**

コントロール qubit が、|0> の時には、何もせず、（左図）
コントロール qubit が、|1> の時には、ターゲットのqubit
|ψ> にユニタリ演算子 U を適用した U|ψ>を出力する（右図）
ゲートを、**Control-U** ゲートという。

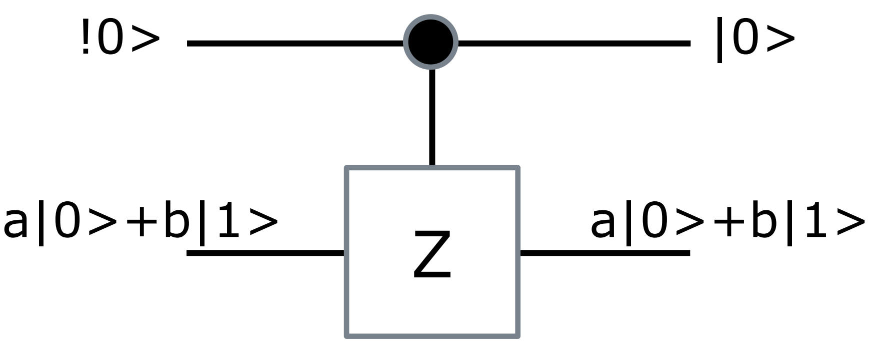


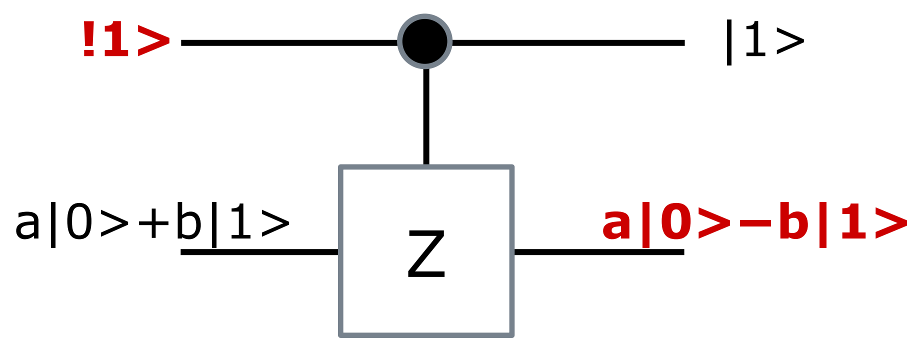


2-qubitsのゲート Control-U の例 (1)

Control-Z

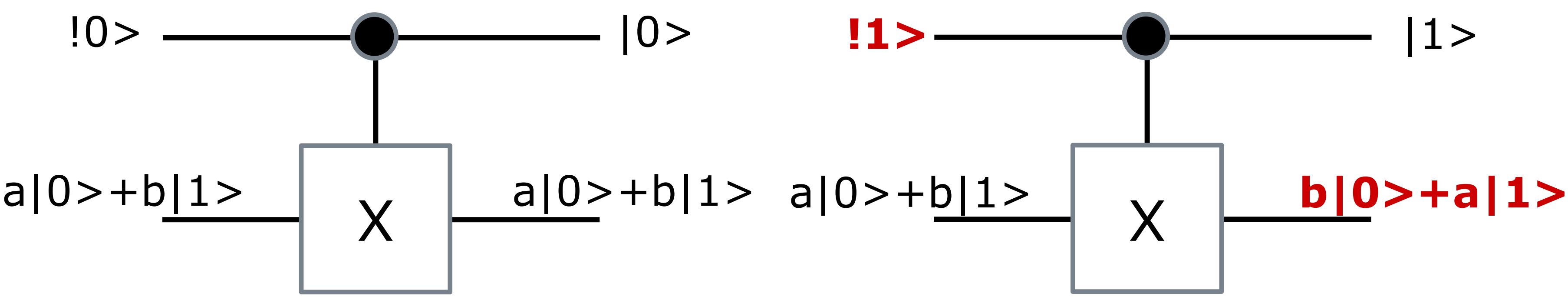
コントロール qubit が、|0> の時には、何もせず、（左図）
コントロール qubit が、|1> の時には、ターゲットのqubit
|ψ> にユニタリ演算子 Z を適用した Z|ψ>を出力する（右図）





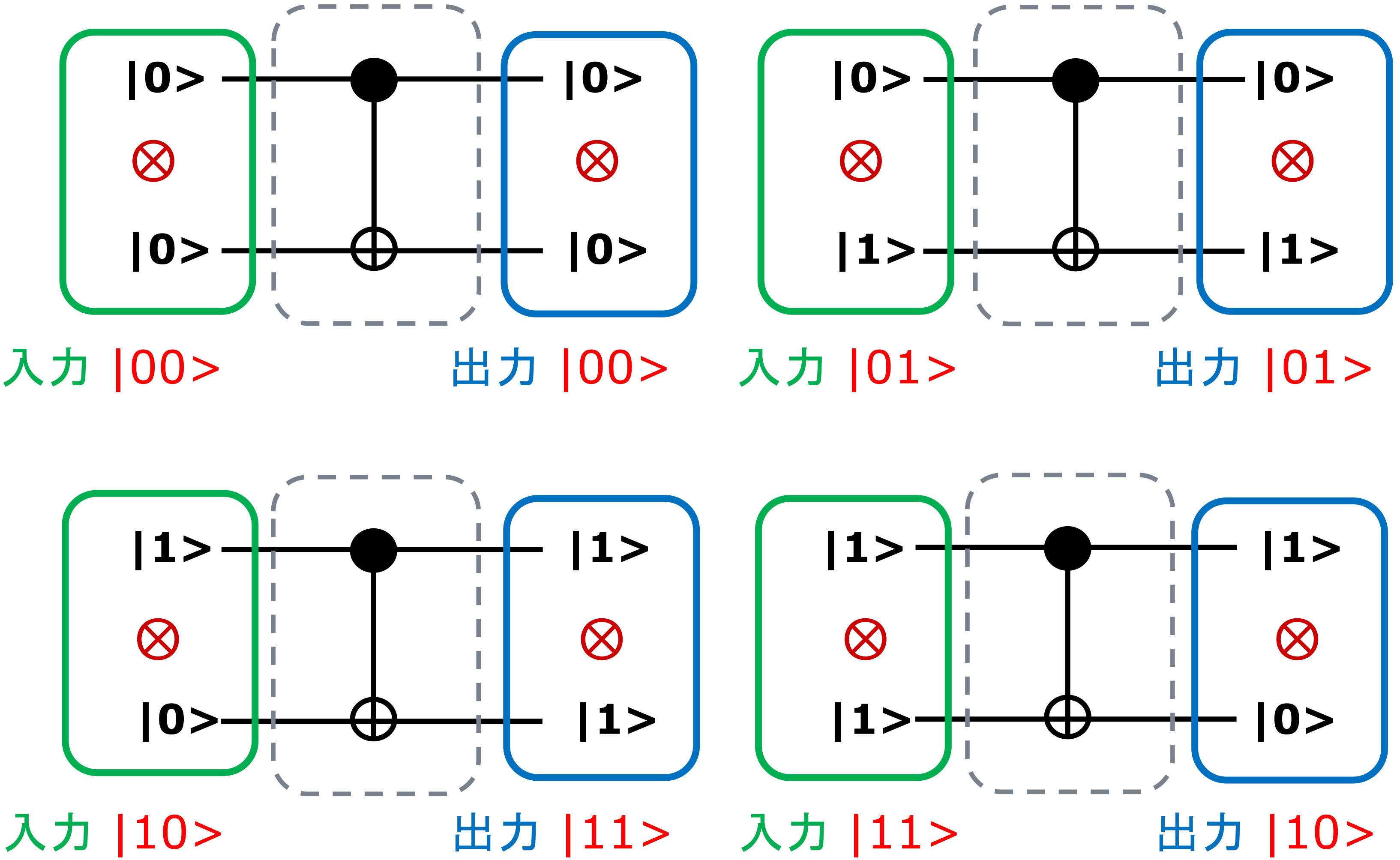
2-qubitsのゲート Control-U の例 (2)
Control-X

コントロール qubit が、|0> の時には、何もせず、（左図）
コントロール qubit が、|1> の時には、ターゲットのqubit
|ψ> にユニタリ演算子 X を適用した X|ψ>を出力する（右図）



Control-Xは、CNOTと等しいことを確かめよ

CNOTは、2-qubitsの基底をどのように変換するか？



CNOTは、
エンタングルした入力をどう変換するか？

- この2-qubitsゲート CNOT に対応する行列を、同じく **CNOT**で表そう。この時、行列 **CNOT** は、2-qubitsの状態の基底を次のように変換する。

  CNOT|00>=|00>,　　**CNOT**|01>=|01>,
  CNOT|10>=|11>,　　**CNOT**|11>=|10>

- CNOTに、エンタングルした分離不可能な入力、例えば、1/√2 (|10>+|01>) が与えられた時、その出力は次のように計算できる。「線形性」を利用する。

- **CNOT**(1/√2 (|10>+|01>))
  = 1/√2(**CNOT** (|10>+|01>))
  = 1/√2(**CNOT**|10>+**CNOT**|01>)
  = 1/√2 (|11>+|01>)

- 1/√2 (|11>+|01>) = 1/√2 (|1>+|0>)⊗|1> だから分離可能である。

CNOTは、
エンタングルした入力をどう変換するか？

入力

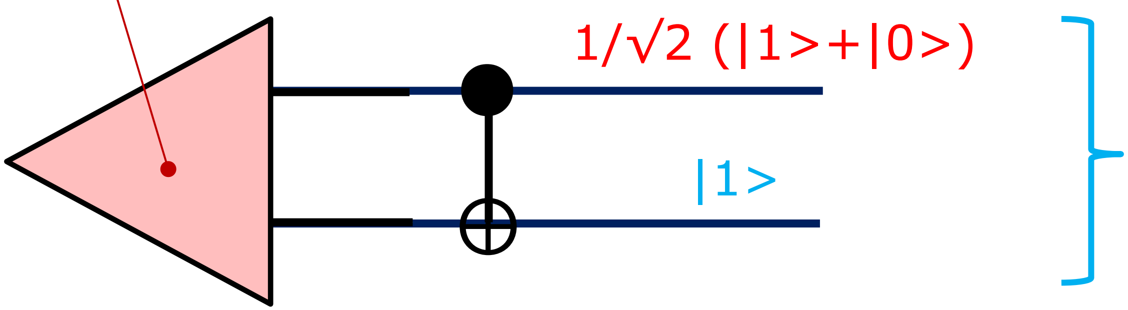
分離不可能な
2-qubitの状態

$1/\sqrt{2}\ (|10\rangle + |01\rangle)$

出力

分離可能な
2-qubitの状態

$1/\sqrt{2}\ (|11\rangle + |01\rangle)$
$= 1/\sqrt{2}\ (|1\rangle + |0\rangle) \otimes |1\rangle$



CNOTの簡単な計算法

- **CNOT** は、2-qubitsの状態の基底を次のように変換する。

  CNOT|00>=|00>,　**CNOT**|01>=|01>,
  CNOT|10>=|11>,　**CNOT**|11>=|10>

- これは、CNOTの定義からも明らかなのだが、
  第一qubit(Control-bit)が|1>の場合にのみ、
  第二qubit（Target-bit）を反転させればいいということである。

- CNOTに、エンタングルした分離不可能な入力、例えば、1/√2 (|10>+|01>) が与えられた時、その出力は次のように計算できる。

- **CNOT**(1/√2(|**1**0>+|01>))
  = 1/√2 (|1**1**>+|01>)

2-qubitsゲートの行列表示

CNOTの行列表示

CNOT の基底に対する作用

|00>→|00>　　|01>→|01>　　|10>→|11>　　|11>→|10>

$$\mathrm{CNOT}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathrm{CNOT}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathrm{CNOT}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathrm{CNOT}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

だから、CNOTを次のように表すことができる。

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc}\text{入力 }|00\rangle\text{ の出力} & \cdots & & \text{入力 }|11\rangle\text{ の出力}\end{array} \\
\mathrm{CNOT} = & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}
\end{array}$$

先に見た2-qubitsゲート II の行列表示

II の基底に対する作用

|00>→|00>　|01>→|01>　|10>→|10>　|11>→|11>

$$\mathbf{II}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{II}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{II}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{II}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

だから、**II** を次のように表すことができる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\text{入力 }|00\rangle\text{ の出力} & & \cdots & \text{入力 }|11\rangle\text{ の出力}\end{array}\\ \mathbf{II} = & \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}}\end{pmatrix}\end{array}$$

予想通り、４ x ４ の
単位行列である

先に見た2-qubitsゲート ZX の行列表示

ZX の基底に対する作用

|00>→|01>　**|01>→|00>**　**|10>→ -|11>**　**|11>→ -|10>**

$$\mathbf{ZX}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{ZX}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{ZX}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{ZX}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

だから、**II** を次のように表すことができる。

入力 |00> の 出力　...　入力 |11> の 出力

$$\mathbf{ZX}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

行列のテンソル積

行列のテンソル積

行列のテンソル積を次のように定義する。（2x2行列で例示）

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}$$

Bの成分も書くと、

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

行列のテンソル積の例 (1)

$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ としよう。

$$\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} & \mathbf{0}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\\mathbf{0}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} & \mathbf{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

行列のテンソル積の例 (2)

$Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ としよう。

$$Z\otimes X=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \mathbf{0}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ \mathbf{0}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \mathbf{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

行列のテンソル積の例 (3)

$Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ としよう。

$$X\otimes Z=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \mathbf{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ \mathbf{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \mathbf{0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

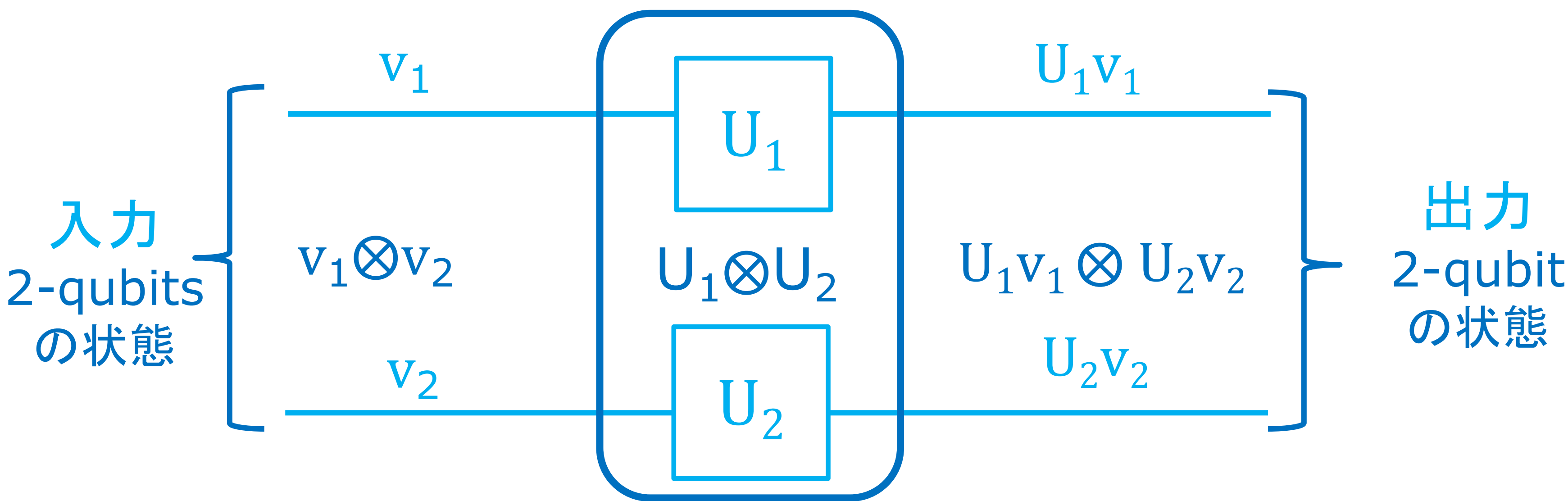
テンソル積では、
$A\otimes B \neq B\otimes A$
である

行列のテンソル積 $U_1 \otimes U_2$の ベクトルのテンソル積 $v_1 \otimes v_2$への作用

- 行列のテンソル積 $U_1 \otimes U_2$とベクトルのテンソル積 $v_1 \otimes v_2$ について$(U_1 \otimes U_2)(v_1 \otimes v_2)$は、状態ベクトル$v_1 \otimes v_2$に対する行列$U_1 \otimes U_2$の作用を表す。
- この時、次の式が成り立つ。

$$(U_1 \otimes U_2)(v_1 \otimes v_2) = U_1 v_1 \otimes U_2 v_2$$

次の図から明らか。




24-22

第四話:

エンタングルメントを生み出す量子回路

エンタングルメントを生み出す量子回路

- ここでは、エンタングルメントを生み出す量子回路を、具体的に構成する。それはたった二つの量子回路で構成できる。
- このことは、エンタングルメントという状態が、特別に奇妙な状態ではなく、ごくありふれたものであることを示している。

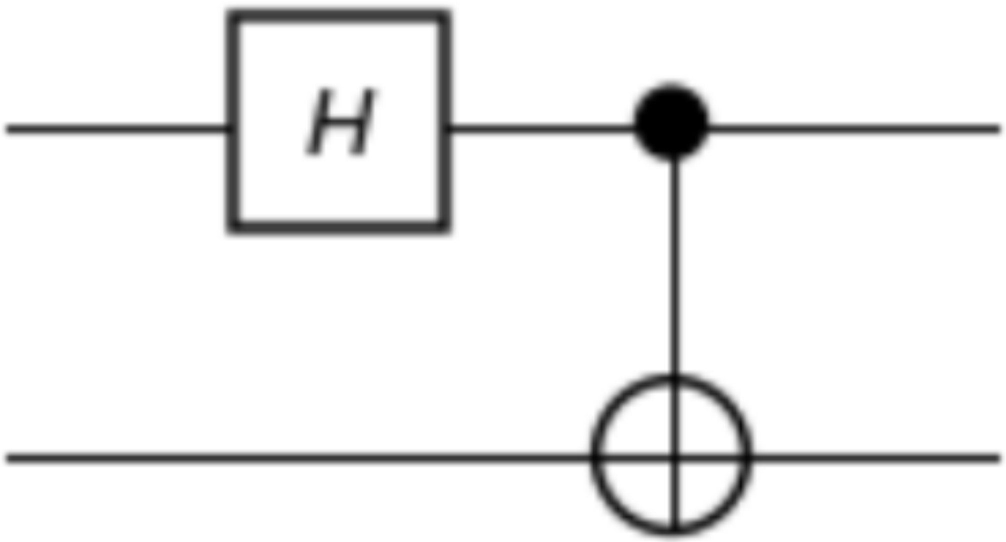
第四話:　エンタングルメントを生み出す量子回路

Agenda

1. Bell State ゲート
2. Bell State を計測するBell Measure Gate
3. Bell State GateとBell Measure Gate
4. 積 $\otimes$ と積 $\circ$ で量子回路のdiagramを記述する

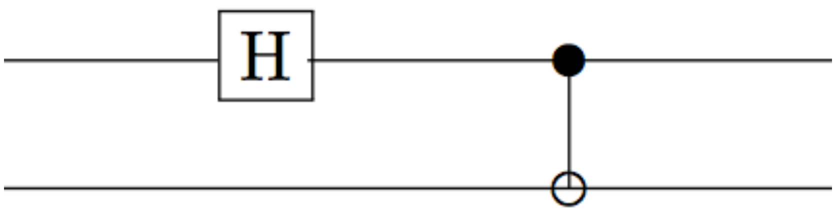
Bell State ゲート

Bell State ゲート



Bell States ゲート

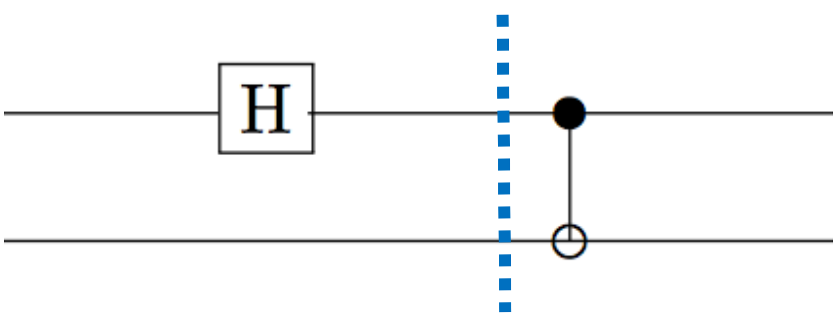
- 次のような回路を考える。



- この回路に |00>を入力として与える。点線のところまで考える

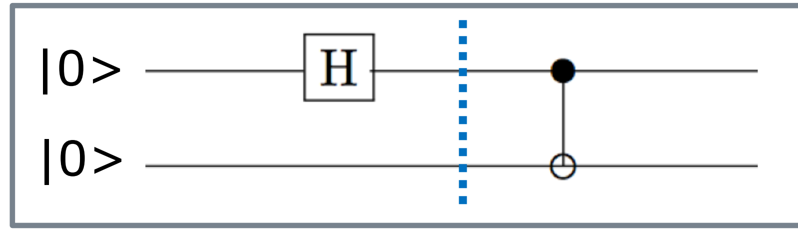
第一qubit |0>

第二qubit |0>



$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$

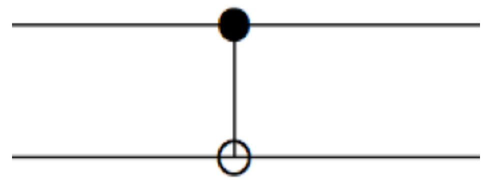
Bell States ゲート 入力が|00>の場合



□ Hは、第一qubitの $|0\rangle$ を $1/\sqrt{2}\,(|0\rangle+|1\rangle)$に変える。

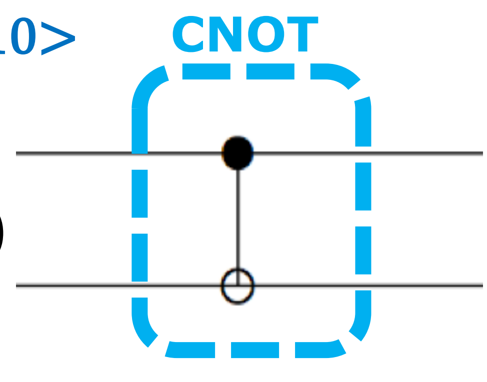
第一qubit $1/\sqrt{2}\,(|0\rangle+|1\rangle)$

第二qubit $|0\rangle$



$(|0\rangle+|1\rangle) \otimes |0\rangle = |00\rangle+|10\rangle$

$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle+|10\rangle)$

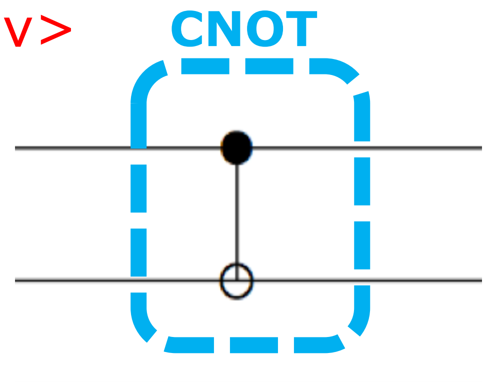


?

次のように考える

Op(|u>+|v>)=Op|u>+Op|v>

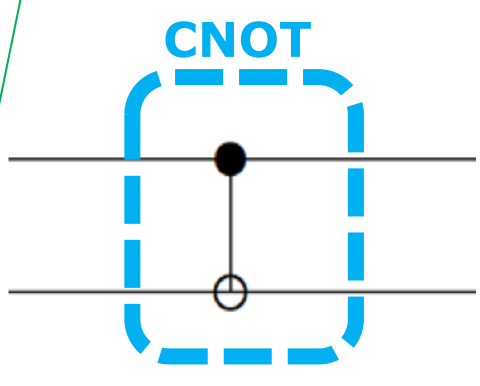
$1/\sqrt{2}\,(|00>+|10>)$



?

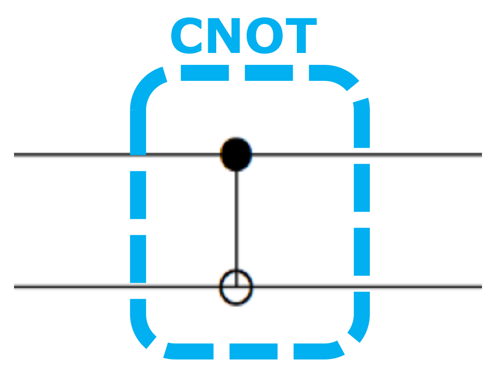
この状態は、次の
二つの状態の重ね合わせである。

|0>
|0>

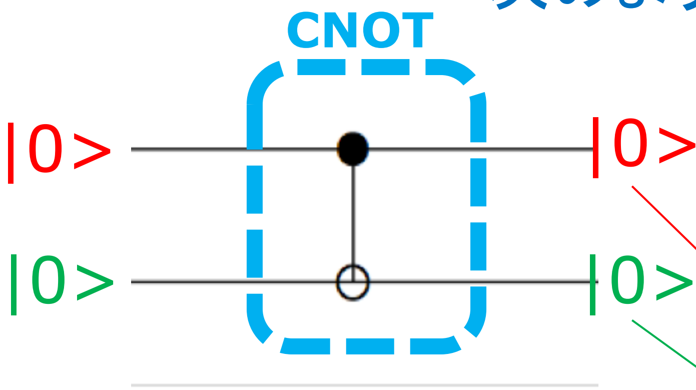


+

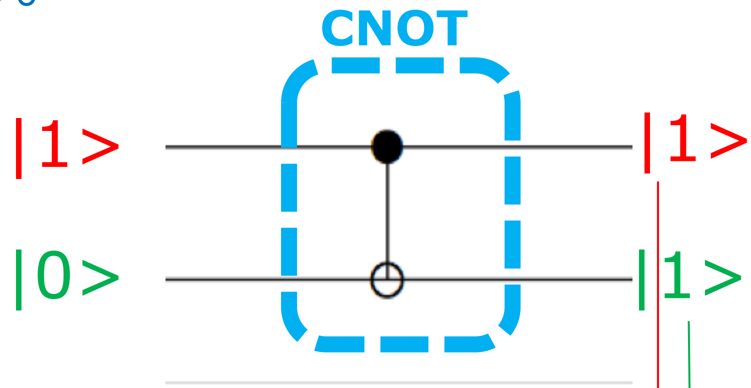
|1>
|0>



それぞれのCNOTの出力は、
次のようになる。

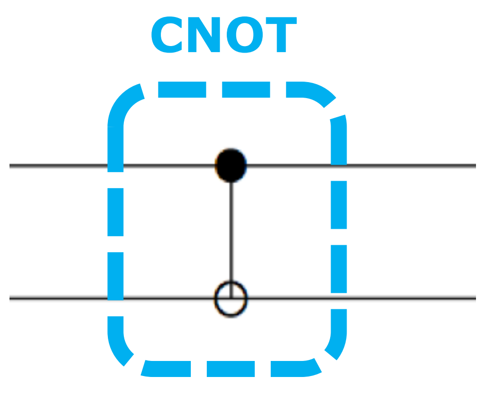


+



二つの出力を重ね合わせれば、
次の出力が得られる。

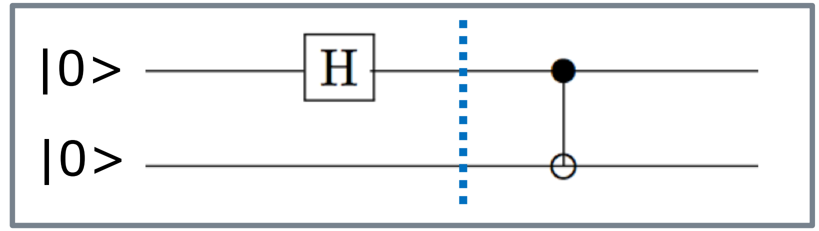
$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle+|10\rangle)$



$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle+|11\rangle)$

結局、第一qubitが |1>の項だけ、第二qubitを反転させればいい。

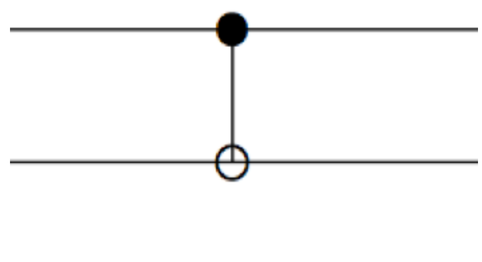
Bell States ゲート
入力が|00>の場合



□ Hは、第一qubitの |0> を $1/\sqrt{2}$ (|0>+|1>)に変える。

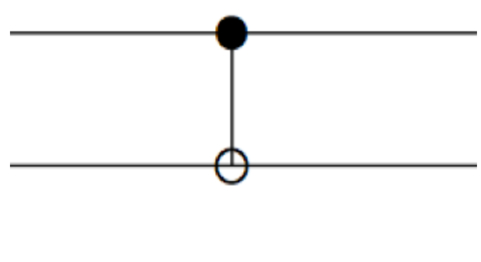
第一qubit $1/\sqrt{2}$ (|0>+|1>)

第二qubit |0>



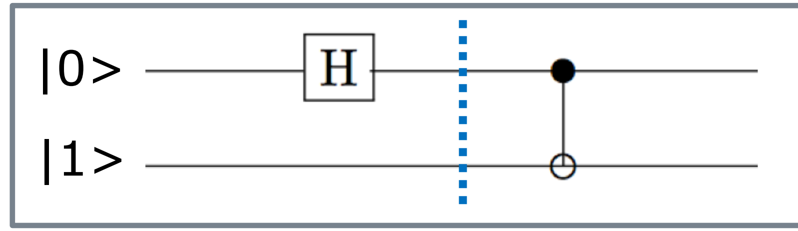
(|0>+|1>) ⊗|0> =|00>+|10>

$1/\sqrt{2}$ (|00>+|10>)



$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>)

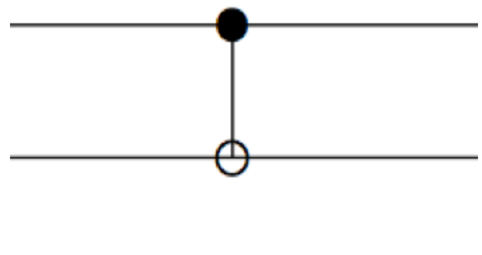
Bell States ゲート 入力が|01>の場合



□ Hは、第一qubitの |0> を $1/\sqrt{2}$ (|0>+|1>)に変える。

第一qubit $1/\sqrt{2}$ (|0>+|1>)

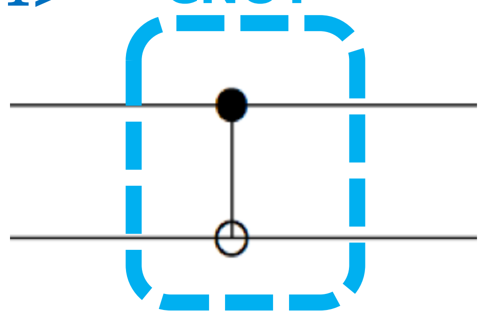
第二qubit |1>



(|0>+|1>) ⊗|1> =|01>+|11>

CNOT

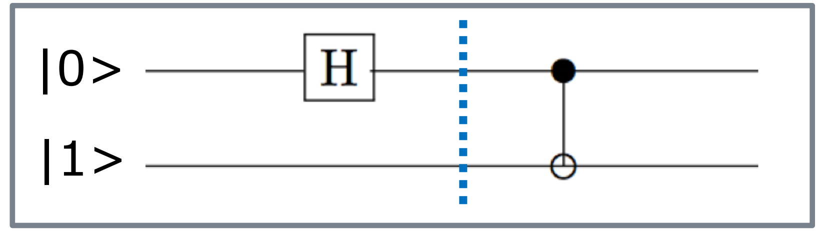
$1/\sqrt{2}$ (|01>+|11>)



?

CNOTは、第一ビットが1の時に、第二ビットを反転する。
それ以外は変化なし。

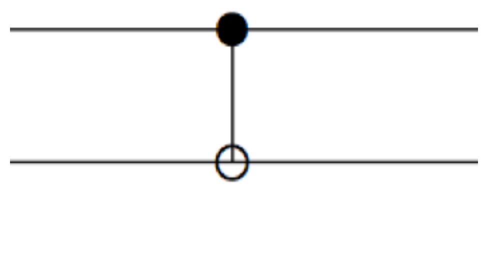
Bell States ゲート
入力が$|01\rangle$の場合



- Hは、第一qubitの $|0\rangle$ を $1/\sqrt{2}\,(|0\rangle+|1\rangle)$に変える。

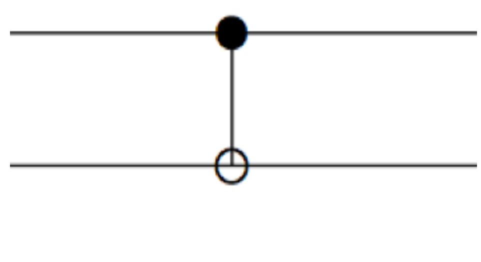
第一qubit $1/\sqrt{2}\,(|0\rangle+|1\rangle)$

第二qubit $|1\rangle$



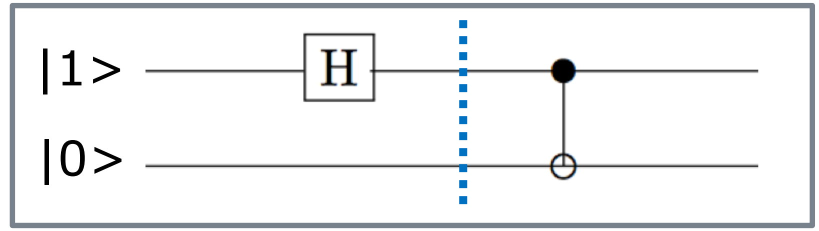
$$(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|1\rangle=|01\rangle+|11\rangle$$

$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle+|11\rangle)$



$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle+|10\rangle)$

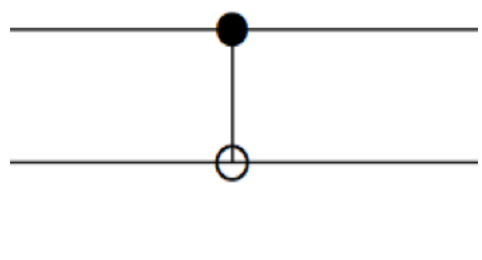
Bell States ゲート
入力が|10>の場合



□ Hは、第一qubitの |1> を $1/\sqrt{2}\,(|0>-|1>)$に変える。

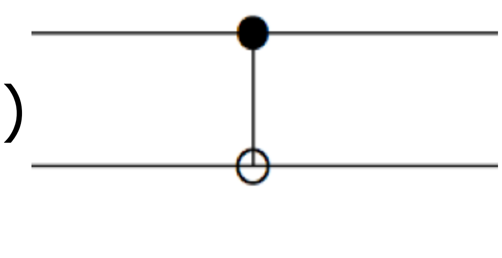
第一qubit $1/\sqrt{2}\,(|0>-|1>)$

第二qubit |0>



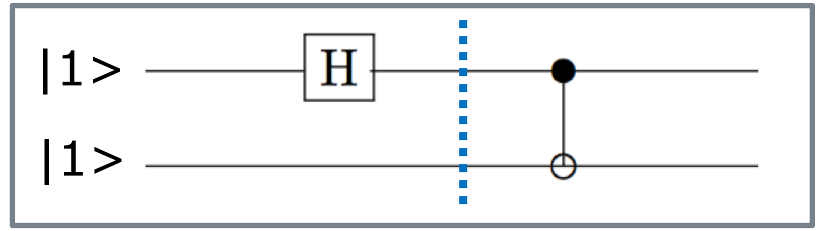
$(|0>-|1>) \otimes |0> = |00>-|10>$

$1/\sqrt{2}\,(|00>-|10>)$



$1/\sqrt{2}\,(|00>-|11>)$

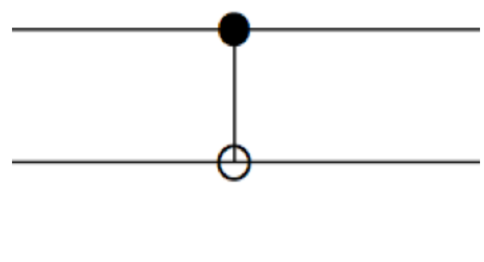
Bell States ゲート 入力が|11>の場合



- Hは、第一qubitの |1> を $1/\sqrt{2}$ (|0>−|1>)に変える。

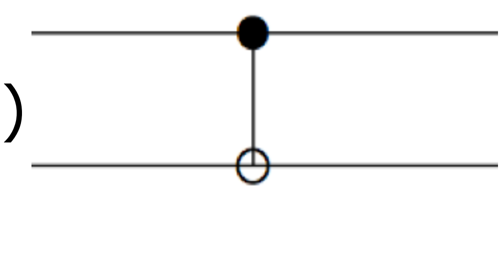
第一qubit $1/\sqrt{2}$ (|0>−|1>)

第二qubit |1>



(|0>−|1>) ⊗|1> =|01>−|11>

$1/\sqrt{2}$ (|01>−|11>)



$1/\sqrt{2}$ (|01>−|10>)

Bell State ゲートの働き

- Bell Stateゲートの働きをまとめると、次のようになる。

  - BellState|00> = $1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>)
  - BellState|01> = $1/\sqrt{2}$ (|01>+|10>)
  - BellState|10> = $1/\sqrt{2}$ (|00>−|11>)
  - BellState|11> = $1/\sqrt{2}$ (|01>−|10>)

- Bell Stateゲートは、エンタングルしたEPRペアを生み出す。

Bell State Gateの行列表示

|00>　　|01>　　|10>　　|11>

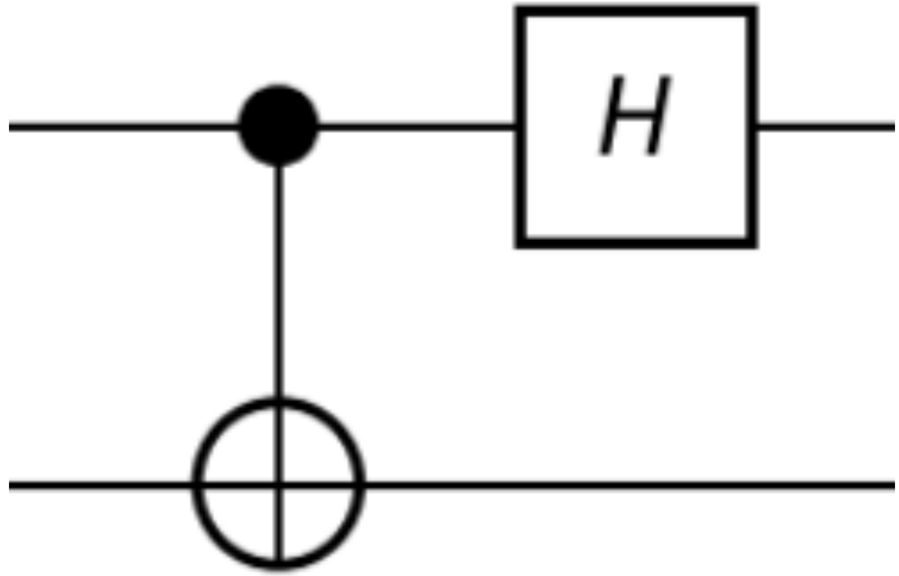
$$\textsc{Bell}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \textsc{Bell}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \textsc{Bell}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \textsc{Bell}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

だから、Bell State Gateを次のように表すことができる。

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc}\text{入力 }|00\rangle\text{ の出力} & & \cdots & \text{入力 }|11\rangle\text{ の出力}\end{array} \\
\text{Bell State Gate} = & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\-1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Bell State を計測する
Bell Measure Gate

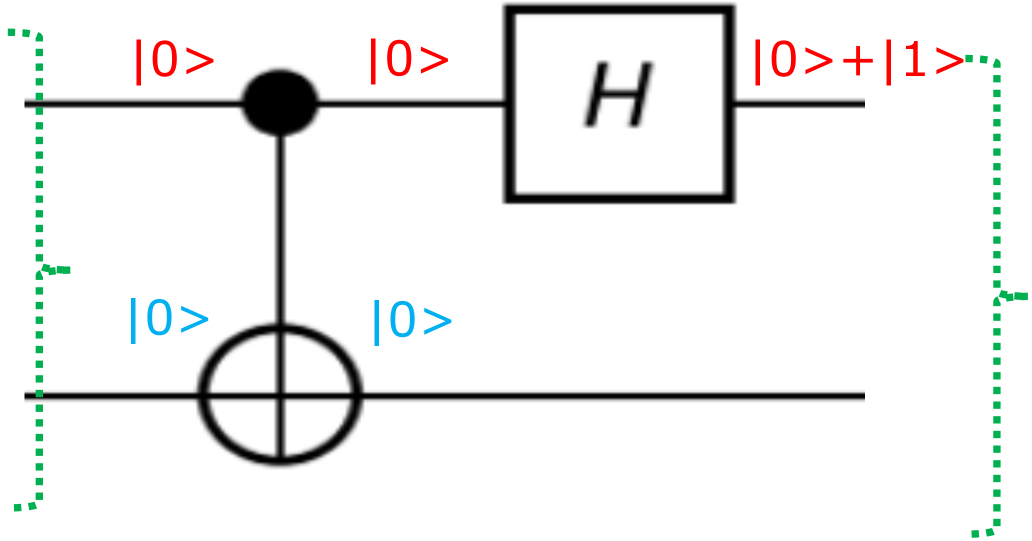
Bell Measure ゲート



Bell Measure ゲートの働き

入力|00>の場合

|00>



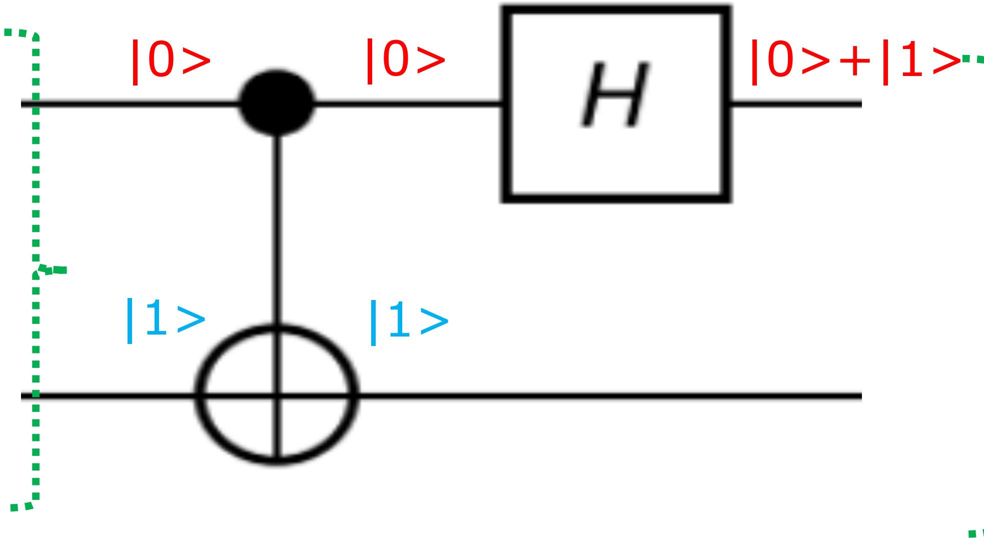
|00>+|10>

BMG|00> = (|00>+|10>)/$\sqrt{2}$

Bell Measure ゲートの働き

入力|01>の場合

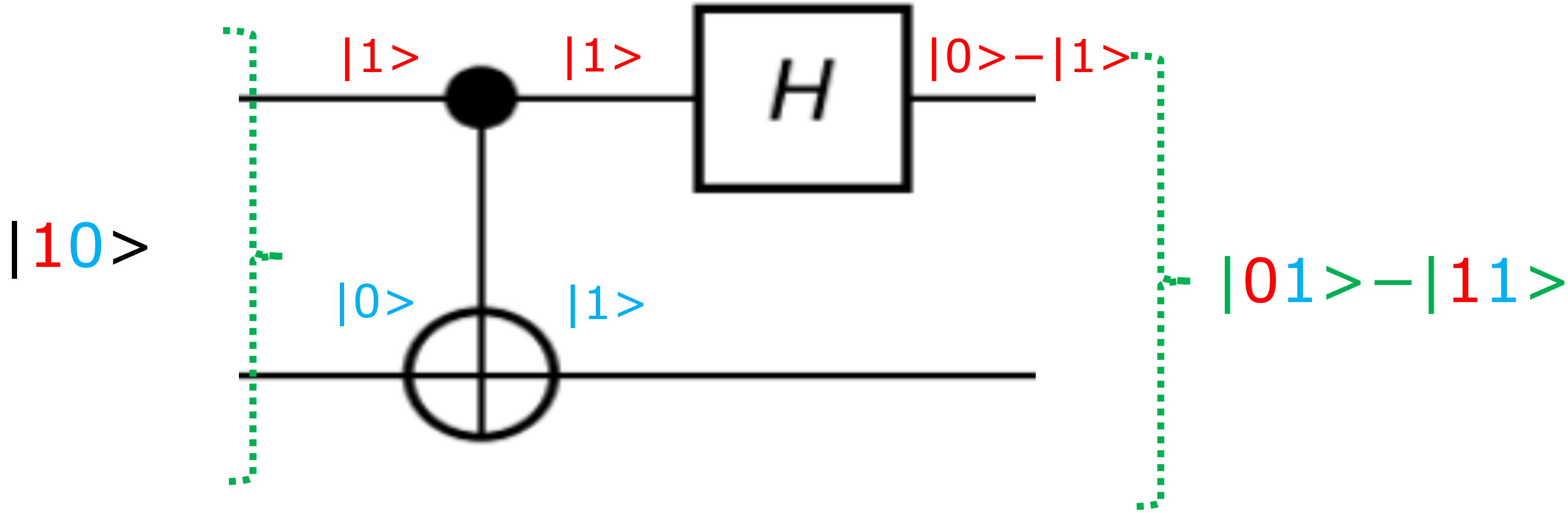
|01>



|01>+|11>

$$BMG|01> = (|01>+|11>)/\sqrt{2}$$

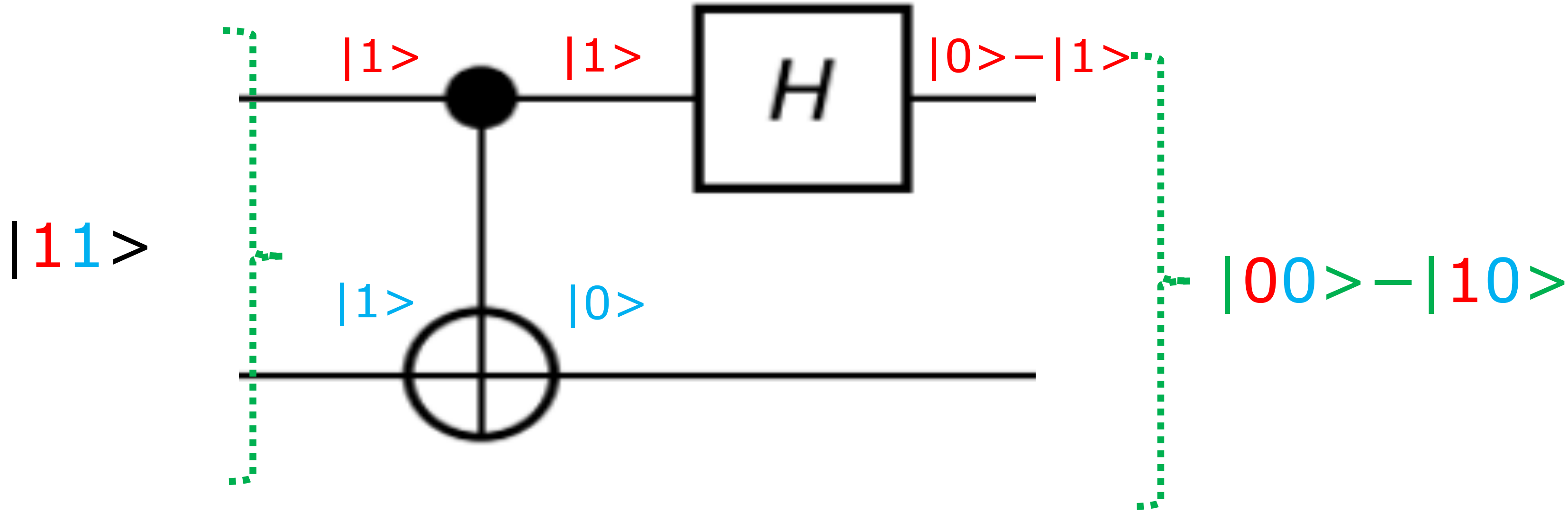
Bell Measure ゲートの働き
入力|10>の場合



BMG|10> = (|01>−|11>)/$\sqrt{2}$

Bell Measure ゲートの働き

入力|11>の場合



$$\mathrm{BMG}|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き まとめ

$$BMG|00\rangle = (|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$$

$$BMG|01\rangle = (|01\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$$

$$BMG|10\rangle = (|01\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$$

$$BMG|11\rangle = (|00\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き
入力$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$の場合

$\mathrm{BMG}((|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2})$

$= (\mathrm{BMG}|00\rangle+\mathrm{BMG}|11\rangle)/\sqrt{2}$

$= (|00\rangle+|10\rangle)/2 + (|00\rangle-|10\rangle)/2$

$= |00\rangle$

Bell Measure ゲートの働き
入力(|01>+|10>)/$\sqrt{2}$の場合

BMG((|01>+|10>) /$\sqrt{2}$)

= (BMG|01>+BMG|10>) /$\sqrt{2}$

= (|01>+|11>) /2 + (|01>−|11>) /2

= |01>

Bell Measure ゲートの働き
入力$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$の場合

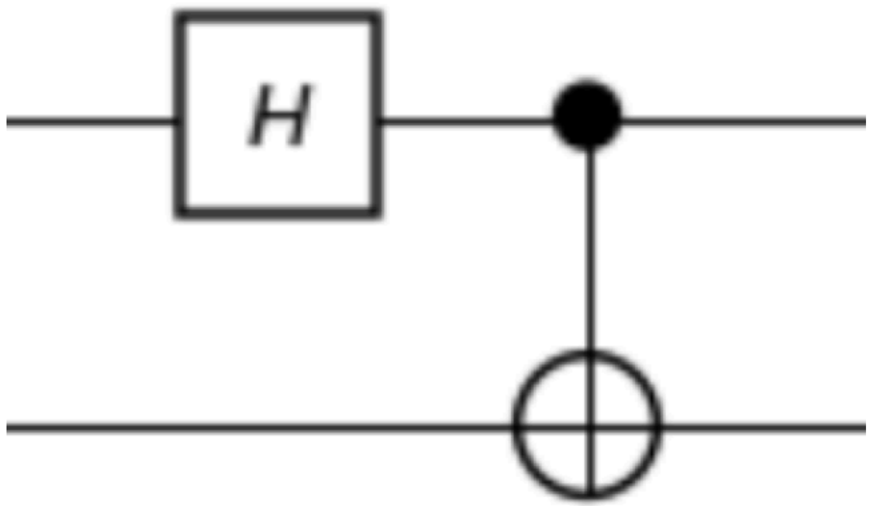
$$BMG((|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2})$$
$$= (BMG|00\rangle-BMG|11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|00\rangle+|10\rangle)/2 \;-\; (|00\rangle-|10\rangle)/2$$
$$= |10\rangle$$

Bell Measure ゲートの働き
入力$(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$の場合

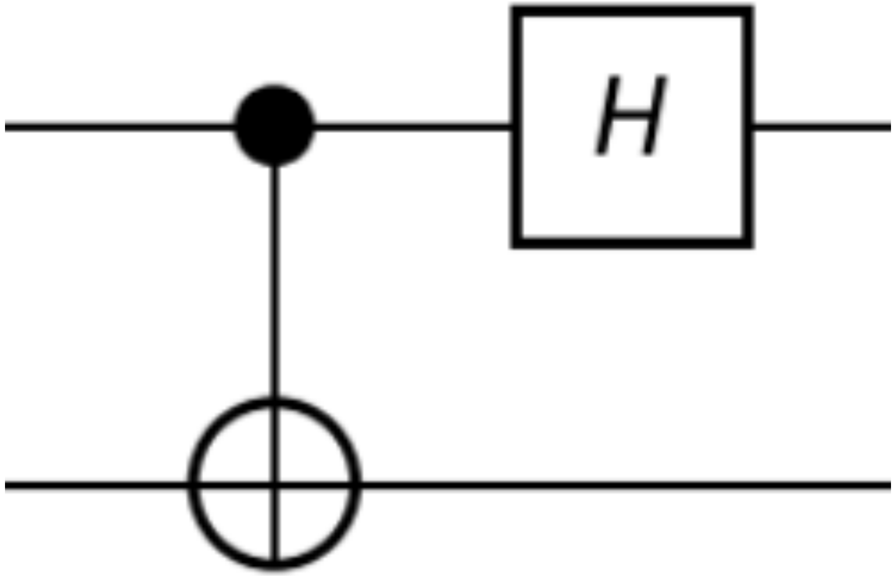
$$\mathrm{BMG}((|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2})$$
$$= (\mathrm{BMG}|01\rangle - \mathrm{BMG}|10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|01\rangle + |11\rangle)/2 - (|01\rangle - |11\rangle)/2$$
$$= |11\rangle$$

Bell State Gateと
Bell Measure Gate

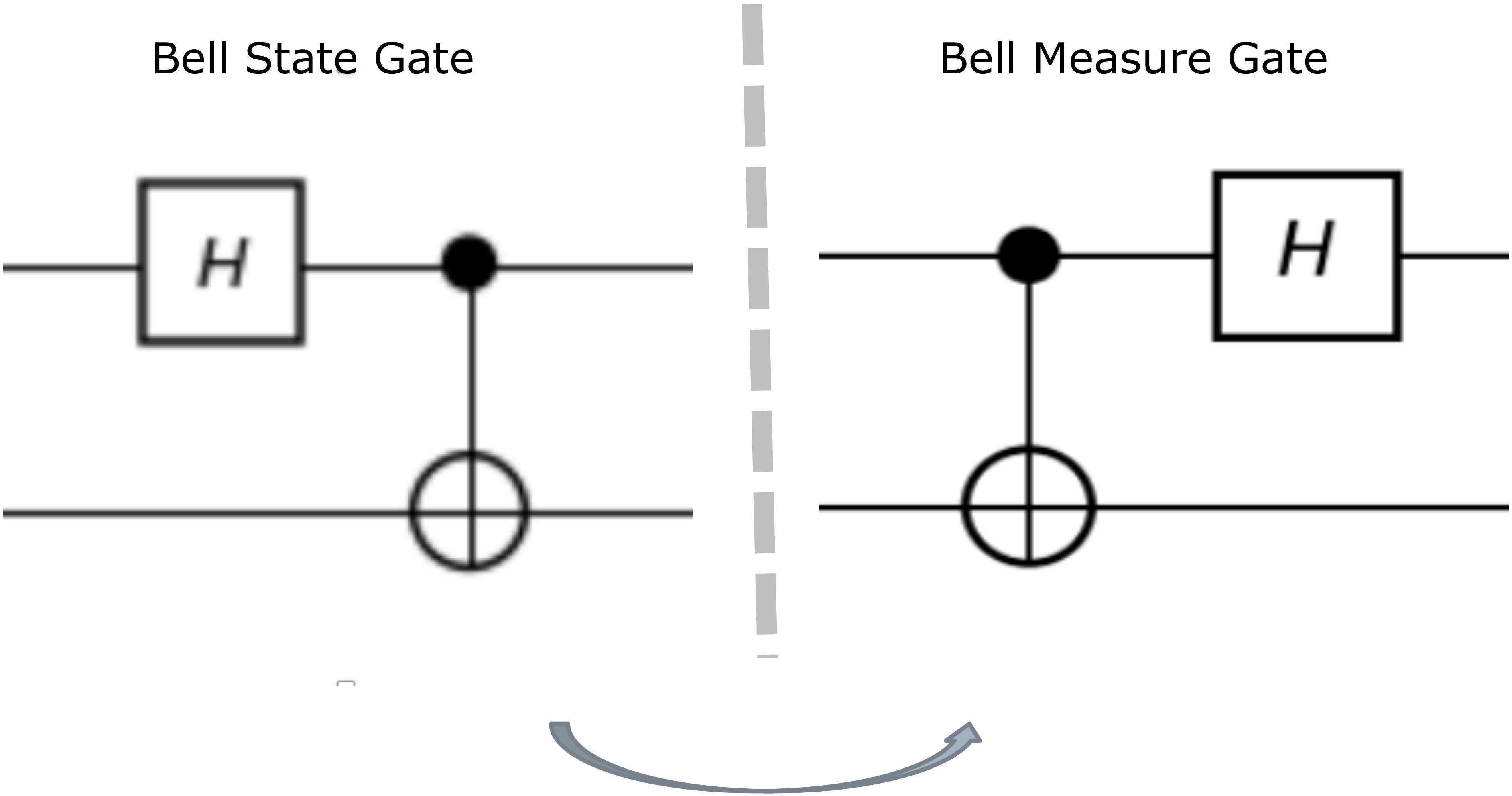
Bell State ゲート



Bell Measure ゲート



Bell State Gateと Bell Measure Gate



Bell State ゲート

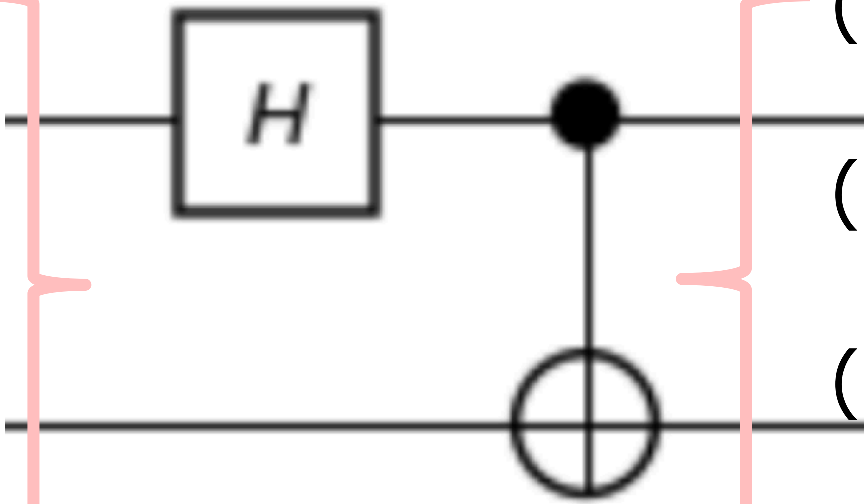
入力

$|00>$

$|01>$

$|10>$

$|11>$



出力

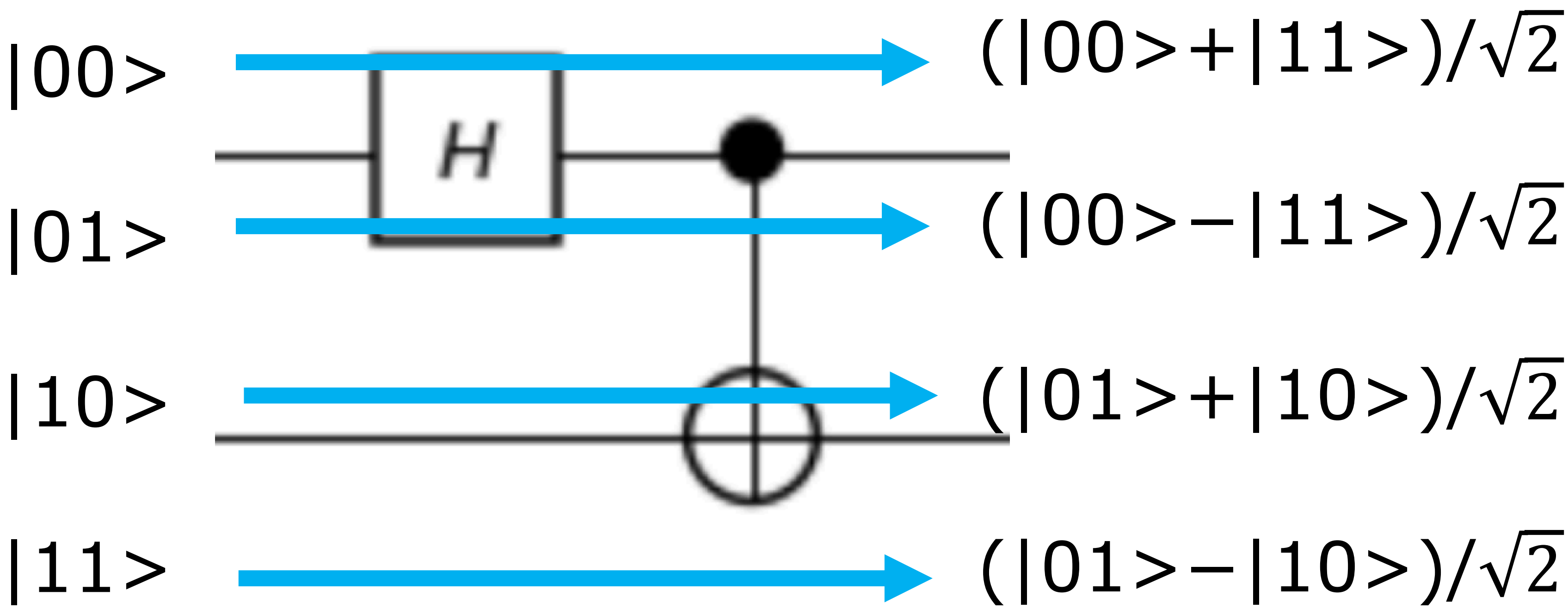
$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

$(|00>-|11>)/\sqrt{2}$

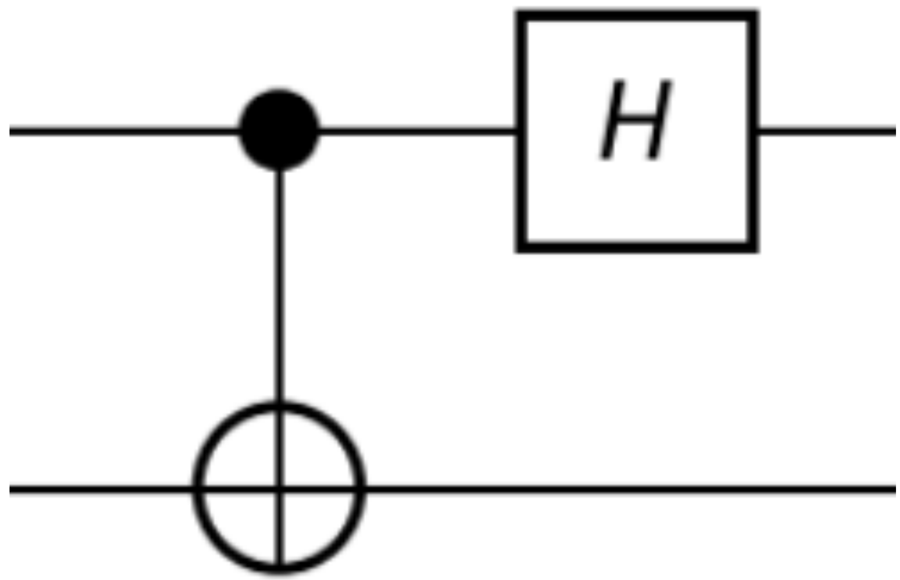
$(|01>+|10>)/\sqrt{2}$

$(|01>-|10>)/\sqrt{2}$

Bell State ゲート



Bell Measure ゲート



Bell Measure ゲート

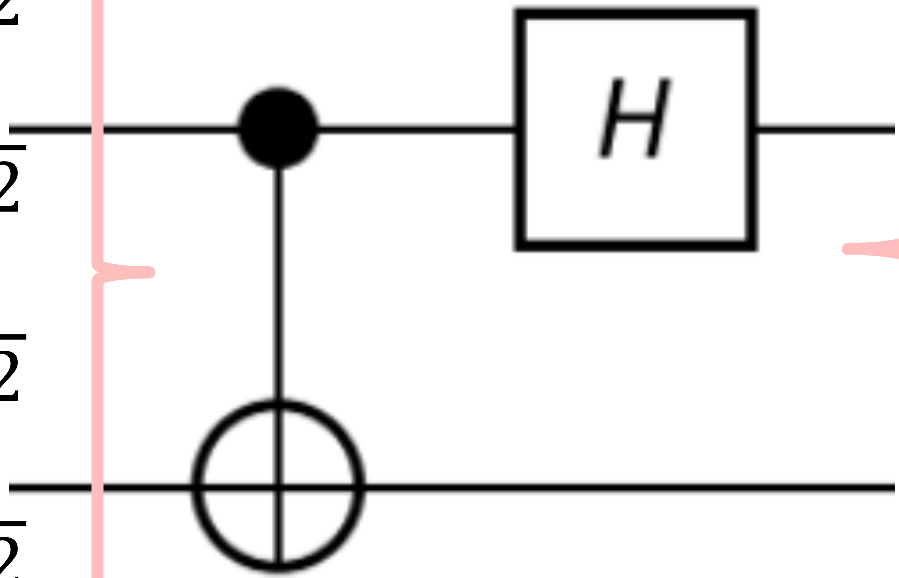
入力

$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

$(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2}$



出力

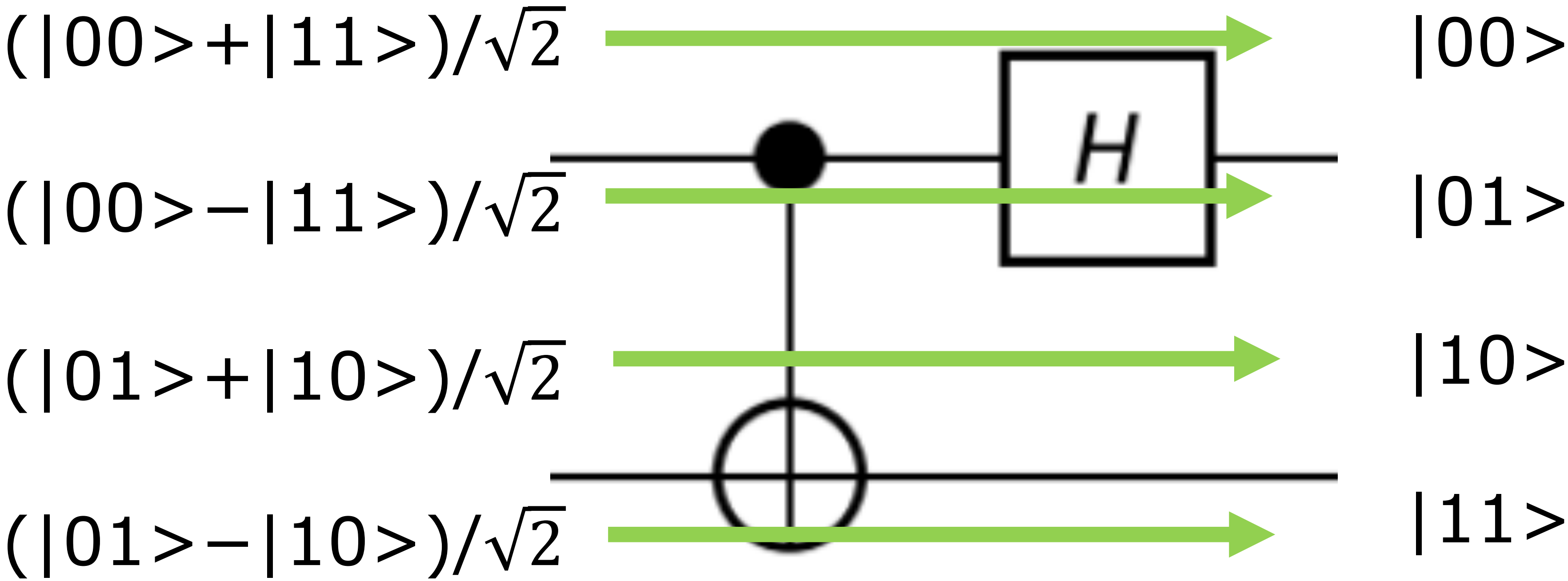
$|00\rangle$

$|01\rangle$

$|10\rangle$

$|11\rangle$

Bell Measure ゲート



Bell 基底

$$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^+\rangle$$

$$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^-\rangle$$

$$(|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^+\rangle$$

$$(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^-\rangle$$

として、$|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, $|\Psi^-\rangle$
を、Bell 基底と呼ぶ。

Bell 基底と計算基底

この時、次の式が成り立つ。

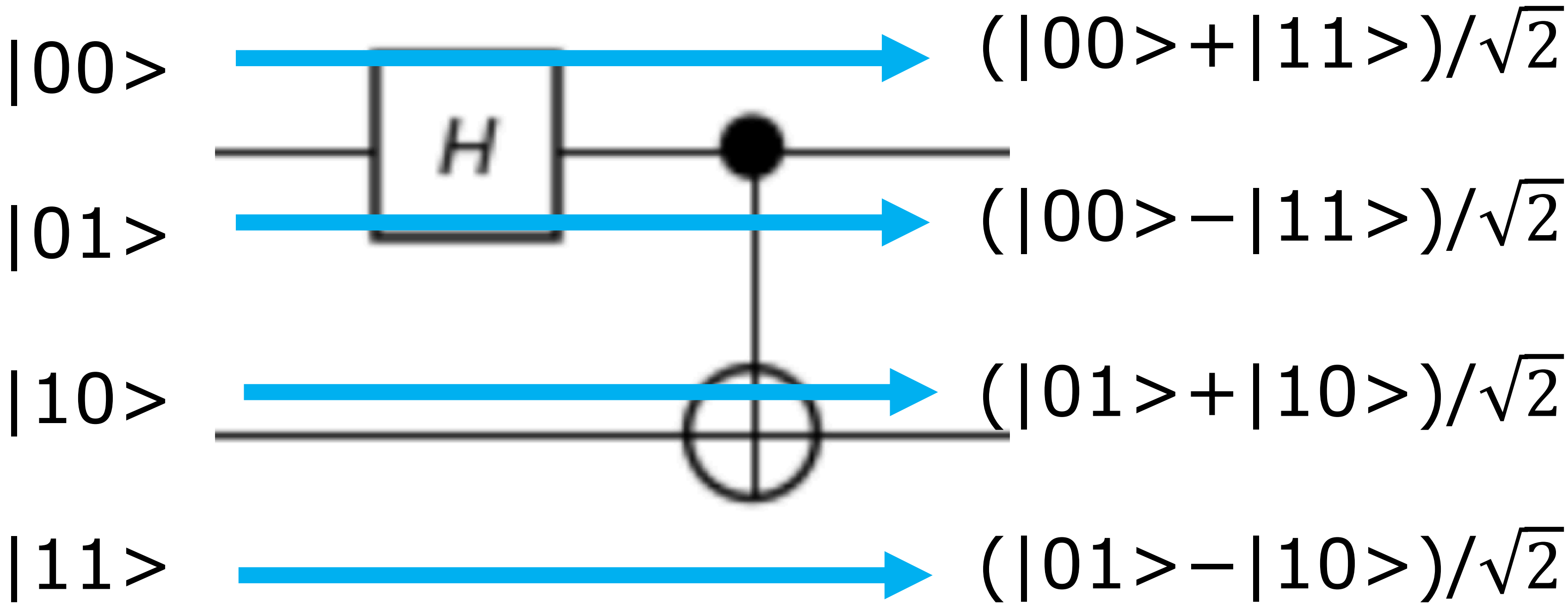
$$|00> = (|\Phi^{+}> + |\Phi^{-}>)\sqrt{2}/2$$

$$|11> = (|\Phi^{+}> - |\Phi^{-}>)\sqrt{2}/2$$

$$|01> = (|\Psi^{+}> + |\Psi^{-}>)\sqrt{2}/2$$

$$|10> = (|\Psi^{+}> - |\Psi^{-}>)\sqrt{2}/2$$

Bell State ゲート



Bell State ゲート

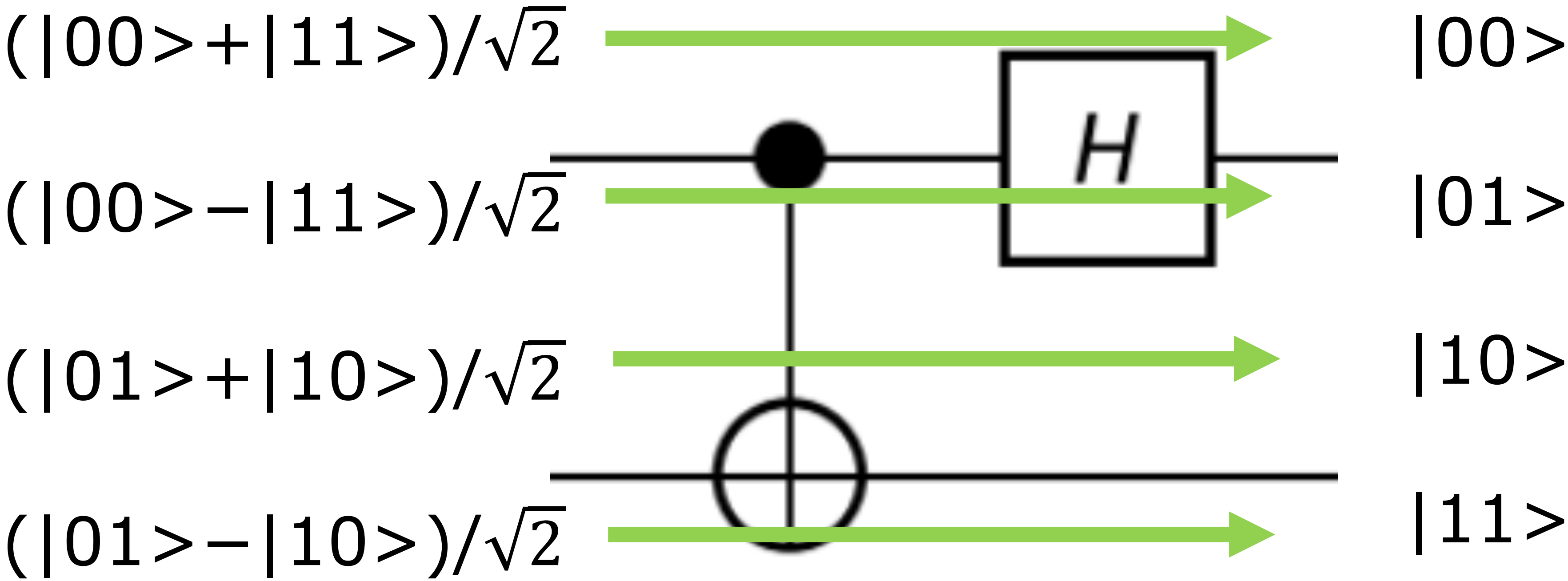
$|00\rangle \rightarrow |\Phi^{+}\rangle$

$|01\rangle \rightarrow |\Phi^{-}\rangle$

$|10\rangle \rightarrow |\Psi^{+}\rangle$

$|11\rangle \rightarrow |\Psi^{-}\rangle$

Bell Measure ゲート



Bell Measure ゲート

$|\Phi^{+}> \longrightarrow |00>$

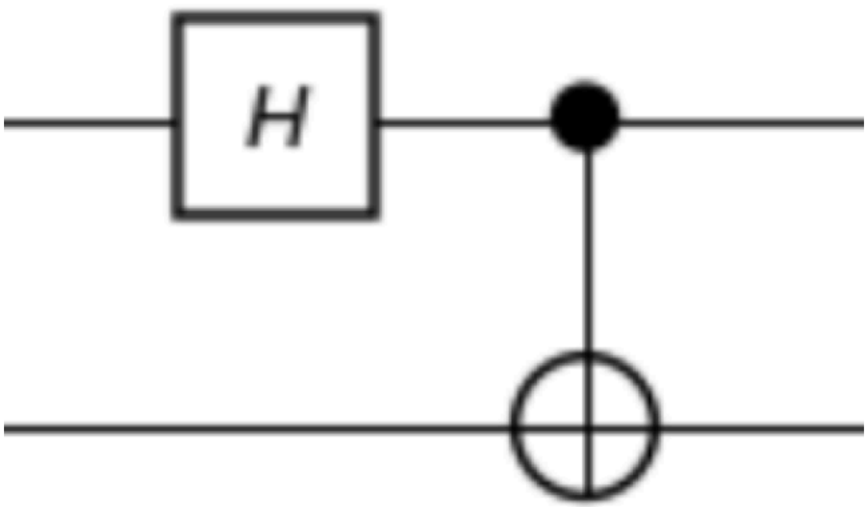
$|\Phi^{-}> \longrightarrow |01>$

$|\Psi^{+}> \longrightarrow |10>$

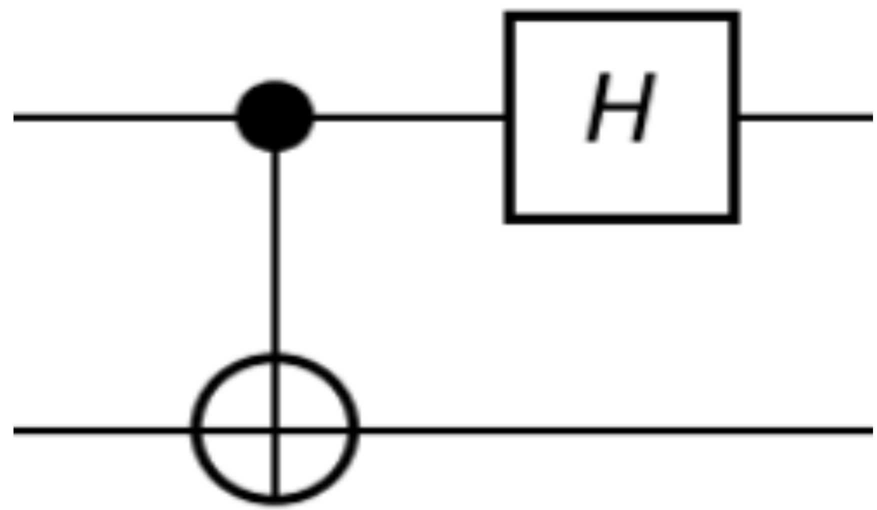
$|\Psi^{-}> \longrightarrow |11>$

Bell State Gateと Bell Measure Gate

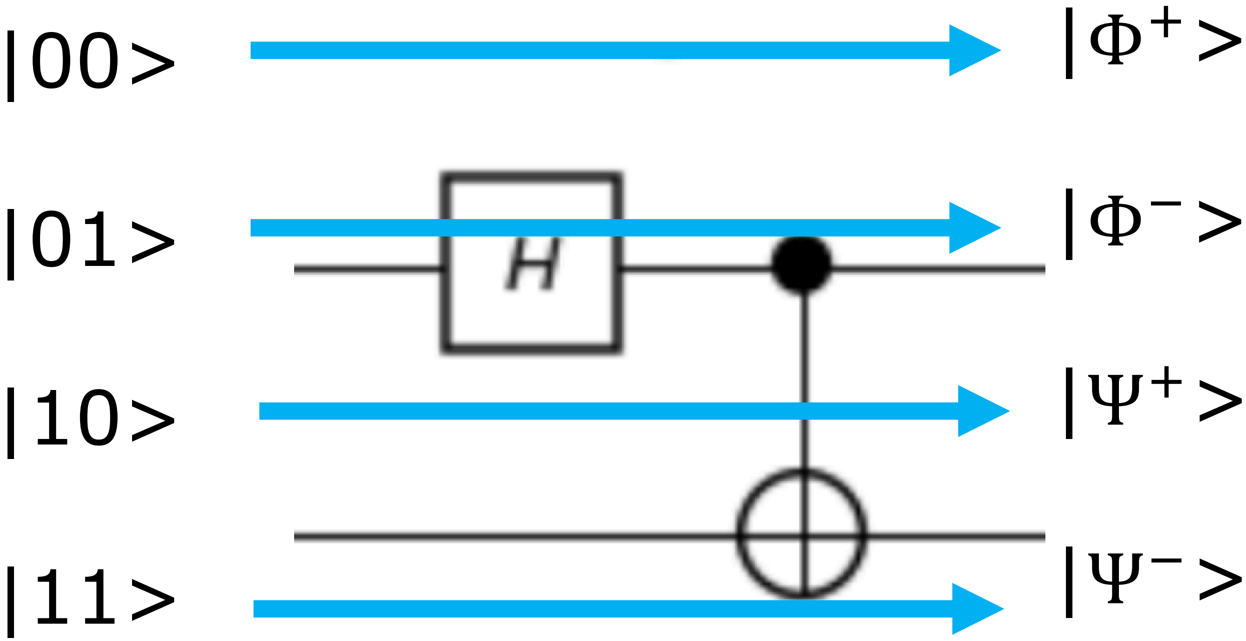
Bell State Gate



Bell Measure Gate

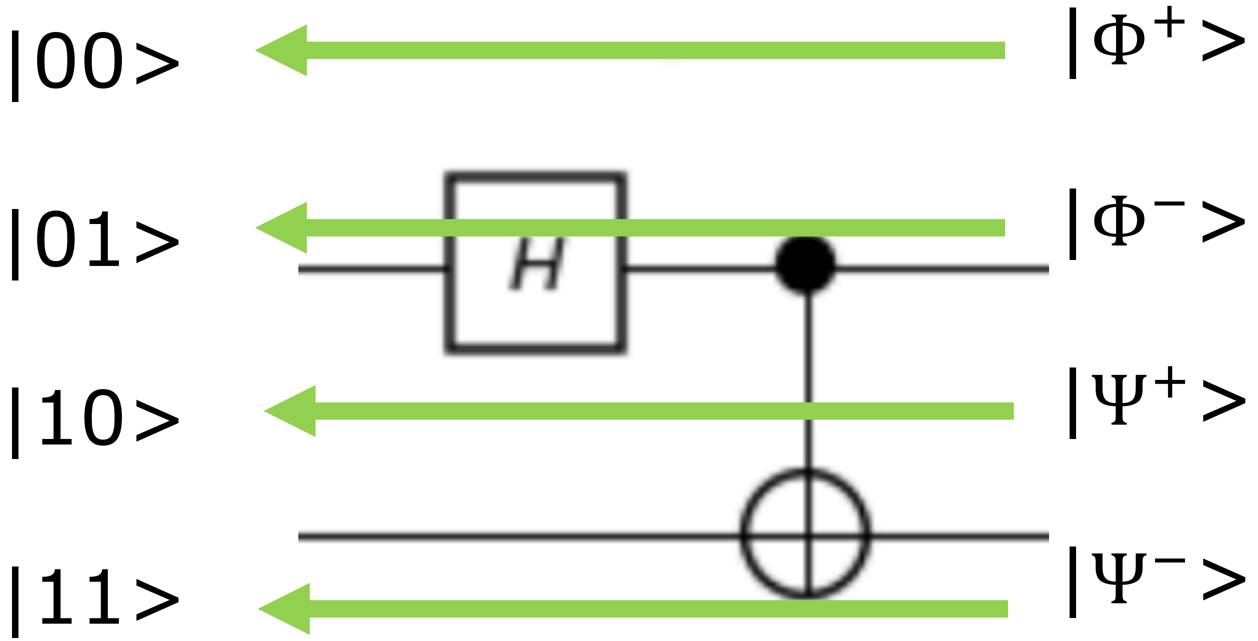


Bell State Gate



Bell Measure Gate

=(Bell State Gate)$^{-1}$ =(Bell State Gate)†



Bell状態は、正規直交基底をなす

- 証明していなかったが、4つのBell状態が正規直交基底をなすことは、次のようにしてわかる。（もちろん、計算基底で直接計算してもいいのだが）
- Bell Measure Gate = BMG は、ユニタリであるので、ユニタリ変換が内積を保存することを利用すると見やすい。
  BMG|00> = |Φ⁺> だから <00|BMG† = <Φ⁺|
  BMG|01> = |Φ⁻> だから <01|BMG† = <Φ⁻|

- $\langle \Phi^+ | \Phi^+ \rangle = \langle 00 | BMG^\dagger BMG | 00 \rangle = \langle 00 | 00 \rangle = 1$
- $\langle \Phi^- | \Phi^+ \rangle = \langle 01 | BMG^\dagger BMG | 00 \rangle = \langle 01 | 00 \rangle = 0$

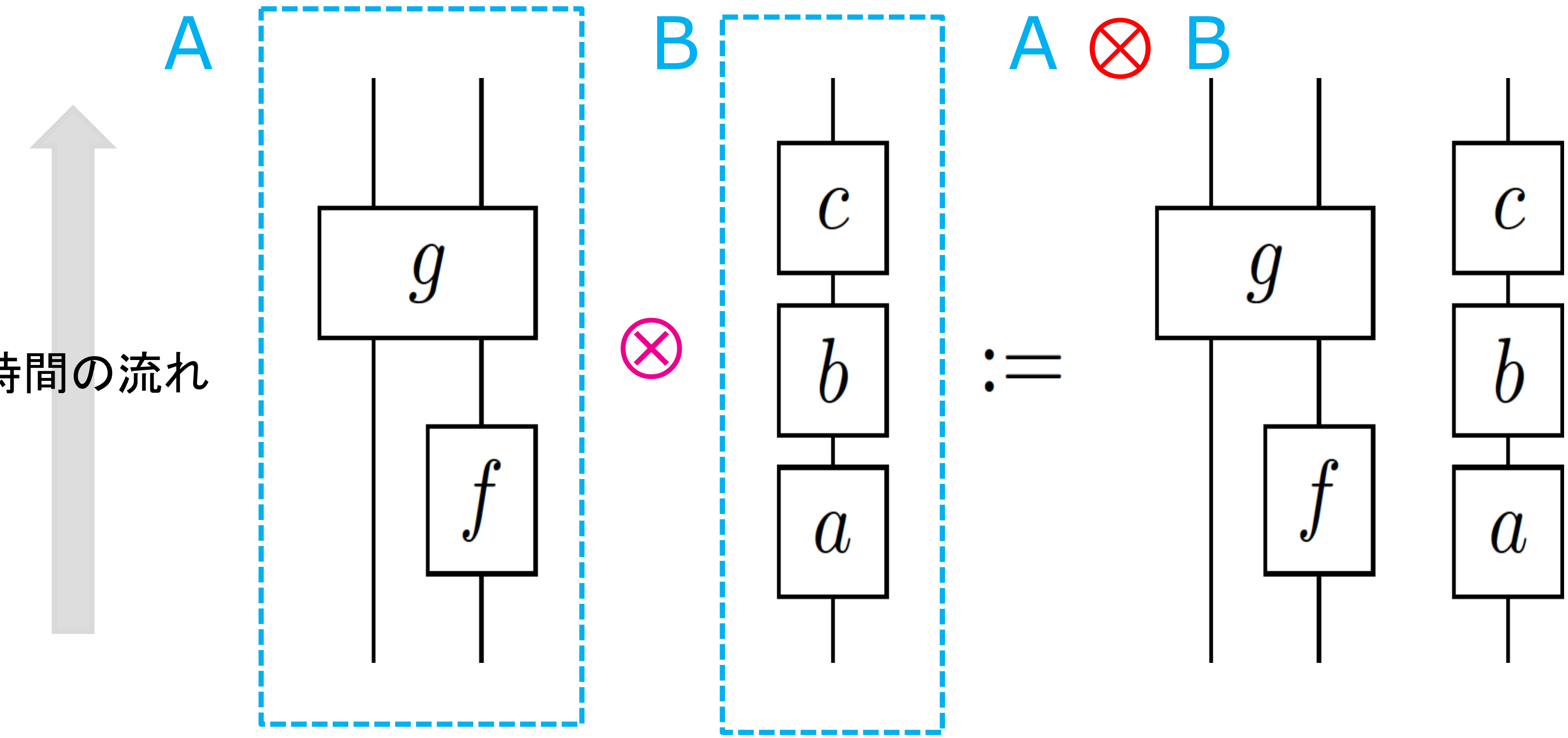
以下、同様である。

積 $\otimes$ と積 $\circ$ で
量子回路のdiagramを記述する

Diagramを構成する二つの積
1. 積 ⊗

$$A \otimes B := \text{“}A \textbf{ while } B\text{”}$$

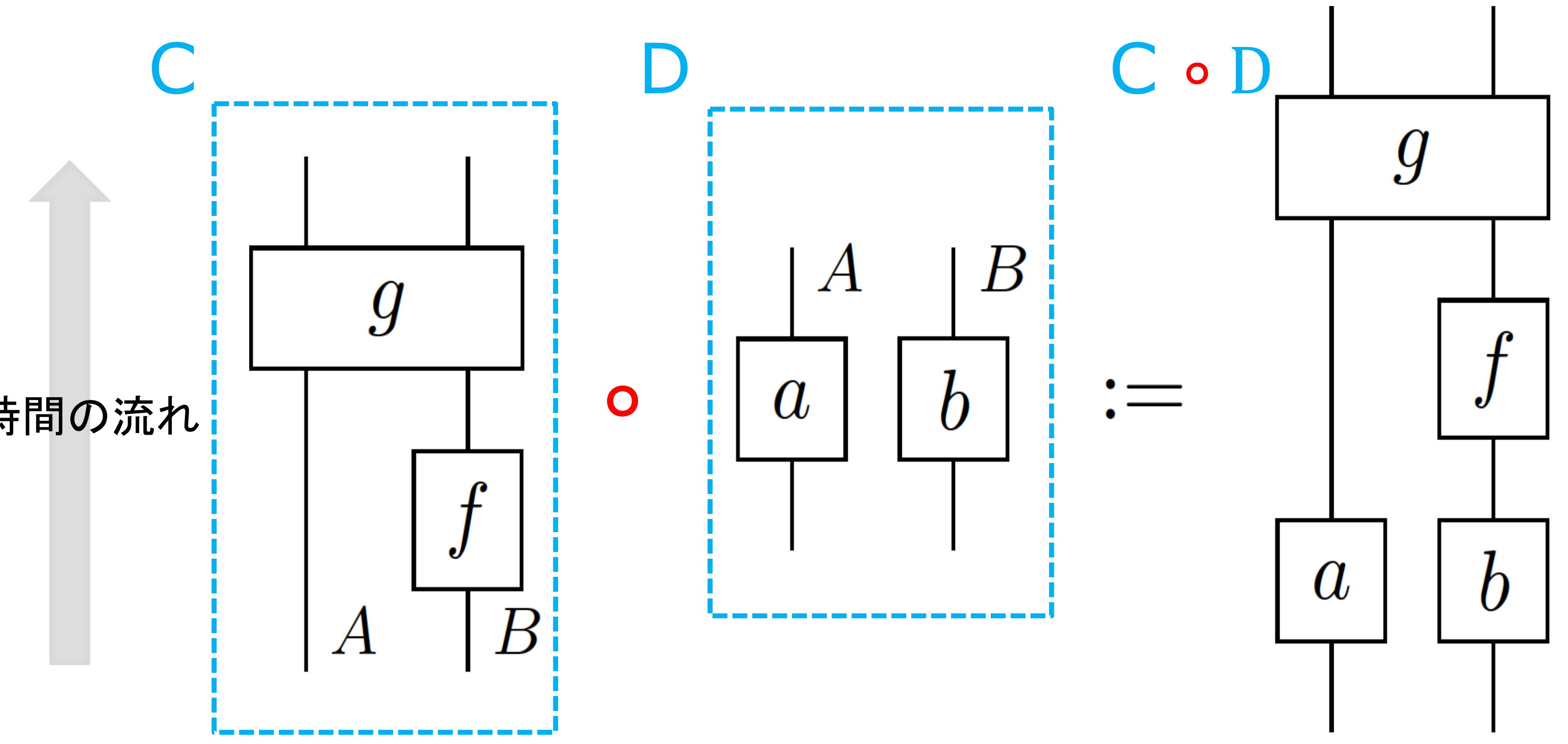
積 A⊗Bは、AとBを並行に結合する



Diagramを構成する二つの積
2. 積 ∘

"$C \circ D$" := "C **after** D"

積 $C \circ D$は、Dの後にCを直列に結合する



Diagramを構成する二つの積

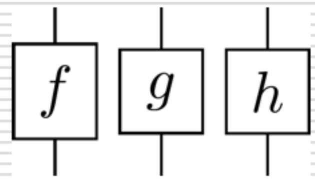
"$f \otimes g$" := "f **while** g"

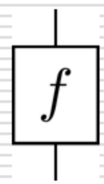
"$f \circ g$" := "f **after** g"

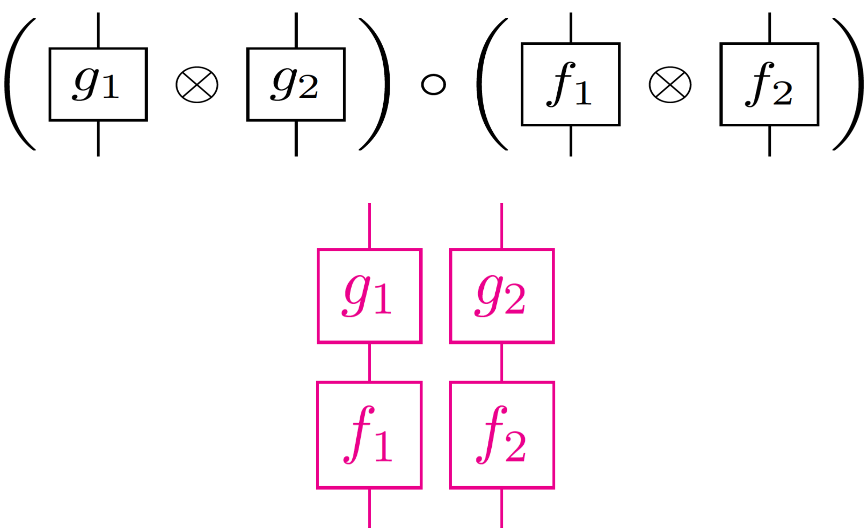
These are:

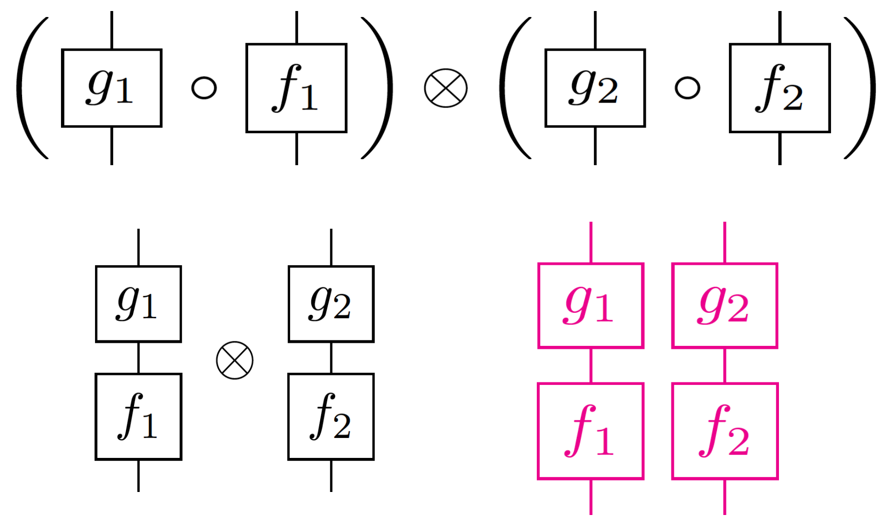
- associative
- have as respective units:
  - 'empty'-diagram
  - 'wire'-diagram

なぜDiagramか？
次のような式が簡単に得られる

$(f \otimes g) \otimes h =$  $= f \otimes (g \otimes h)$

$f \otimes 1_I =$  $= f$






24-22