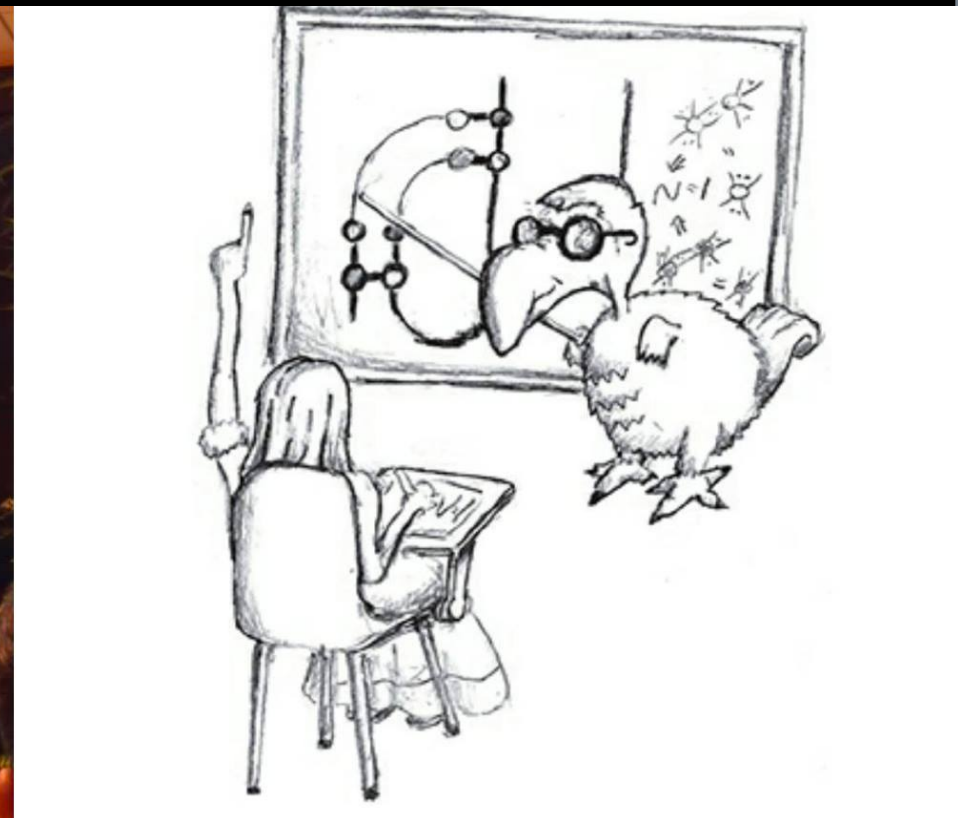
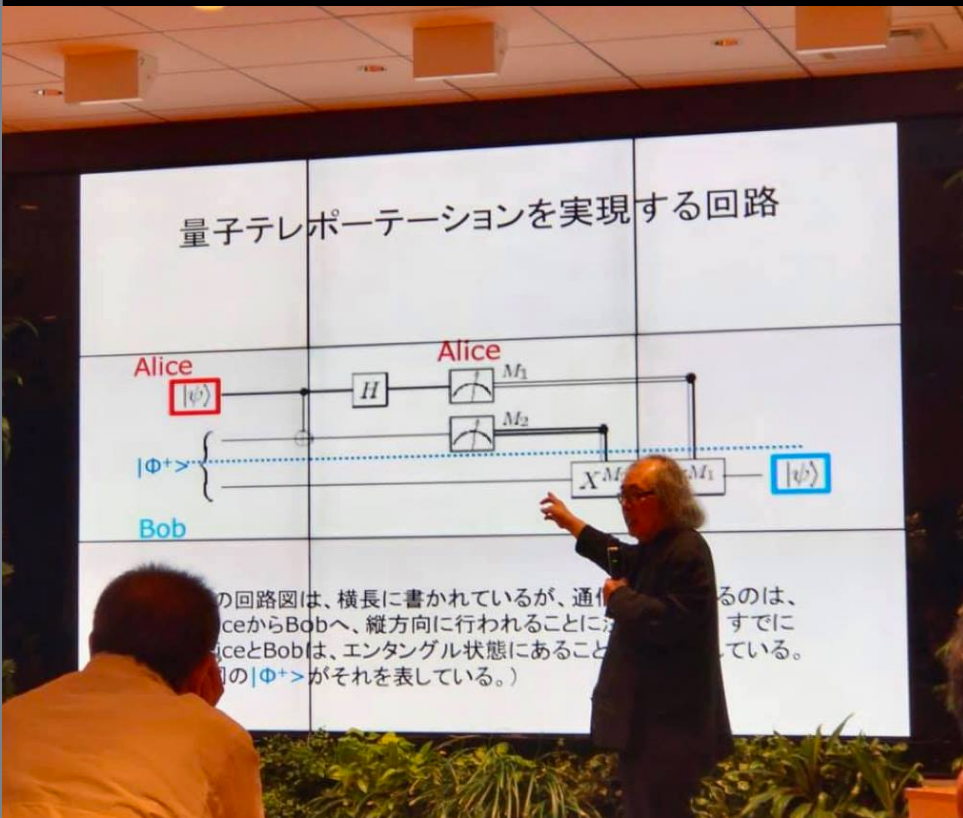


紙と鉛筆で学ぶ 量子アルゴリズム演習1



エンタングルメントと
量子テレポーテーションを学ぶ

Agenda

1. 量子論の基本的な三つの原理

■ 演習問題 1

2. テンソル積

■ 演習問題 2

3. エンタングルメントとは何か

■ 演習問題 3

4. Bell Stateゲート

5. Bell Measure ゲート

■ 演習問題 4

6. Bell StateゲートとBell Measureゲート

7. 量子テレポーテーション

■ 演習問題 5

19:00~20:00

20:00~21:00

21:00~22:00

量子論の基本的な三つの原理

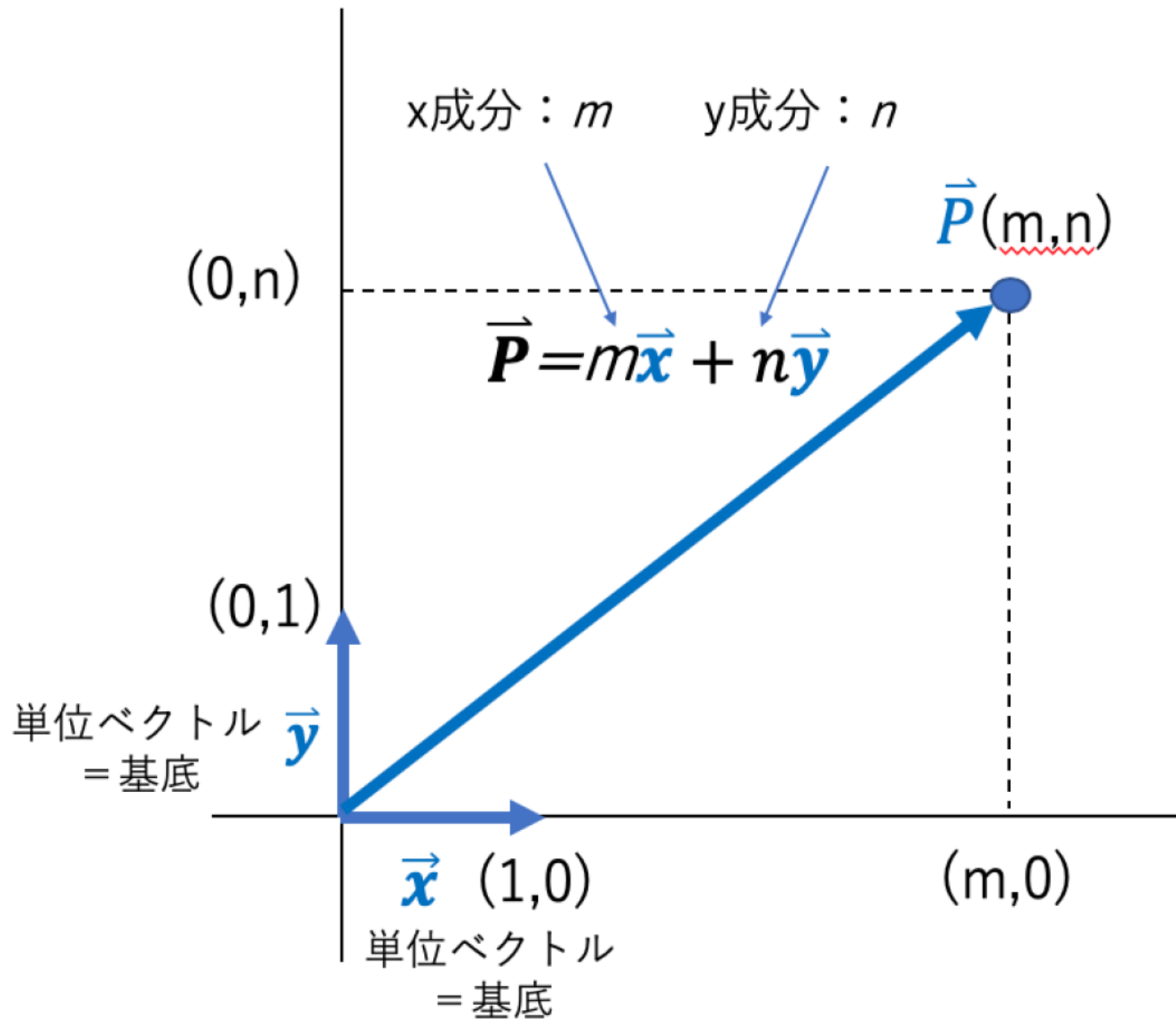
- 重ね合わせの原理
- 観測の原理
- ユニタリ発展の原理

重ね合わせの原理

qubitの状態は、互いに直交する二つのベクトルの和として、列ベクトルで表される。

x-y平面との類似で考える

- それは、x-y平面上の任意の点を表すベクトルが、x軸方向のベクトルとy軸方向のベクトルの和として表されるのと同じである。
 - x-y平面で、二つのx軸方向の長さ1のベクトル $(1,0)$ をx、y軸方向の長さ1のベクトル $(0,1)$ をyとすると、原点から点 $P(m,n)$ に向かうベクトルPは、 $P=mx+ny=m(1,0)+n(0,1)$ と表すことができる。
 - この時、mをPの「x成分」、nをPの「y成分」という。
 - また、二つの単位ベクトル $x(1,0)$, $y(0,1)$ を、「基底」ベクトルと呼ぶ。
-



重ね合わせ

qubitは、二つの状態の和として表される

$$\text{qubitの状態} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


ベクトル空間の「基底」

ここで、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $|0\rangle$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $|1\rangle$ で表すと

$$\text{qubitの状態} = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

$$\text{ただし、}|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$$

と表現できる。

もっと一般に、量子の状態は、
n次元の複素数ベクトルで表現される

$$\text{量子の状態} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

ただし、 $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ は複素数

こうした複素数ベクトル空間をヒルベルト空間という

もっと一般に、量子の状態は、
n個の状態の重ね合わせとして表現される

n次元複素ベクトル空間の基底を $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |n-1\rangle$
とすると、

$$\text{量子の状態} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \text{ は、}$$

$$c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + \dots + c_{n-1}|n-1\rangle$$

と表現される。ただし、 $|c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_{n-1}|^2 = 1$

量子の状態を、 Σ を使って表す

総和の記号 Σ を使うと、量子の状態を見やすく表現できる。

$$\text{量子の状態} = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + \dots + c_{n-1}|n-1\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k |k\rangle$$

$$\text{ただし、} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = 1$$

行ベクトルの bra 記法

□ 列ベクトル $|ID\rangle$ に対して、同じIDを持つ行ベクトル $\langle ID|$ を次のルールで対応させる。すなわち、行ベクトルを列ベクトルに変えて、各要素の複素共役をとる。

□ 例えば、

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \quad \text{なら、} \quad \langle A| = \left(\alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \alpha_3^* \quad \alpha_4^* \quad \alpha_5^* \right)$$

Ket と Bra の対応関係

$$\square |A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \langle A| = (1 \ 2)$$

$$\square |B\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \longleftrightarrow \langle B| = (3 \ 0 \ i)$$

$$\square |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{2} \\ 2i \end{pmatrix} \longleftrightarrow \langle \Psi| = (1 + i\sqrt{2} \ -2i)$$

$$\square |\text{maru}\rangle = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 1 - 2i \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \langle \text{maru}| = (2 - 3i \ 1 + 2i \ 1)$$

$$\square |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \langle 0| = (1 \ 0)$$

$$\square |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \langle 1| = (0 \ 1)$$

内積 $\langle \text{Bra} | \text{Ket} \rangle$

- 行ベクトル $\langle \text{Bra} |$ と列ベクトル $|\text{Ket}\rangle$ の次元が同じ時、
 $\langle \text{Bra} |$ と $|\text{Ket}\rangle$ の内積を $\langle \text{Bra} | |\text{Ket}\rangle$ で表す。二重の縦棒の一つを省略して、 $\langle \text{Bra} | \text{Ket} \rangle$ と書いても良い。例えば、

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \text{ で、 } |B\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} \text{ なら、}$$

$$\begin{aligned} \langle B|A \rangle &= \begin{pmatrix} \beta_1^* & \beta_2^* & \beta_3^* & \beta_4^* & \beta_5^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \\ &= \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2 + \beta_3^* \alpha_3 + \beta_4^* \alpha_4 + \beta_5^* \alpha_5. \end{aligned}$$

内積の計算例

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

$\langle 0| = (1 \ 0)$, $\langle 1| = (0 \ 1)$ だから、
次のような計算が成り立つ。

1. $\langle 0|0\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

2. $\langle 0|1\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

3. $\langle 1|0\rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

4. $\langle 1|1\rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

内積の性質

$$\square |A\rangle + |B\rangle \longleftrightarrow \langle A| + \langle B|$$

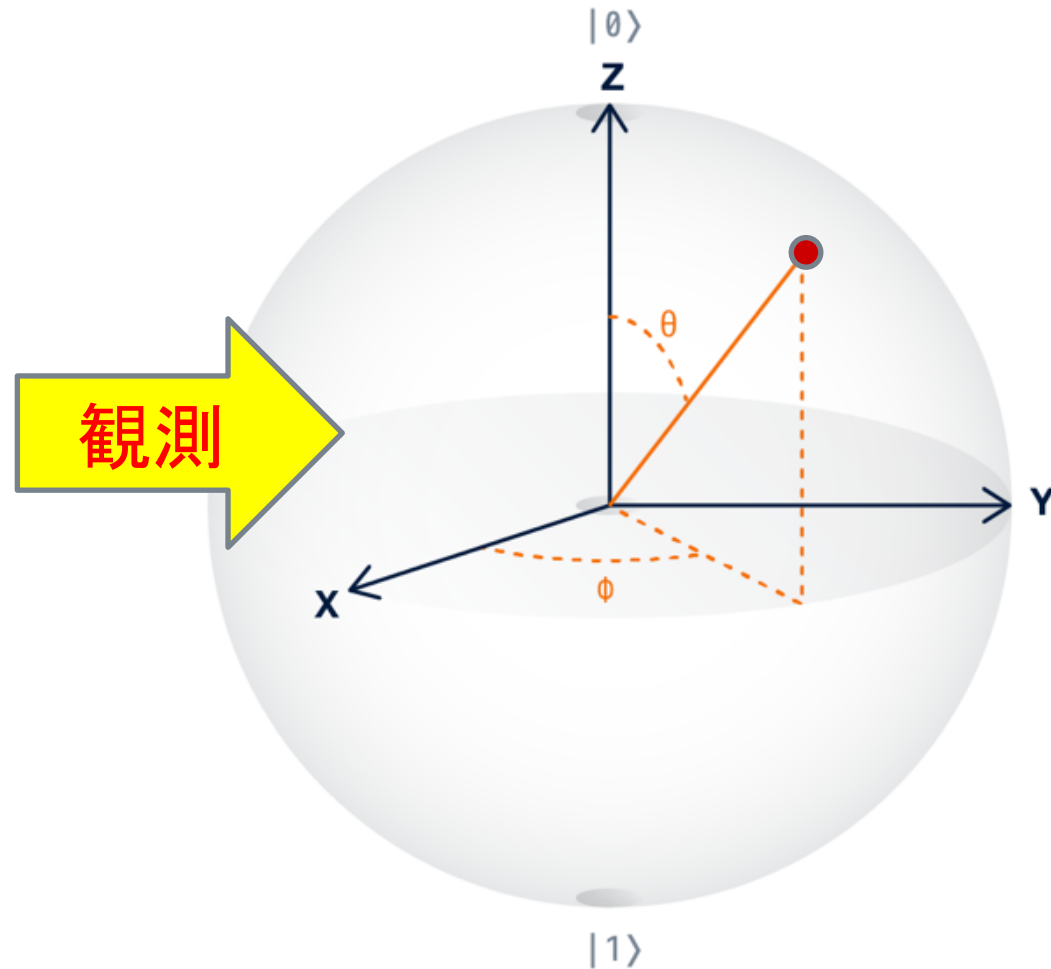
$$\square z|A\rangle \longleftrightarrow \langle A|z^*$$

$$\square \langle C| (|A\rangle + |B\rangle) = \langle C|A\rangle + \langle C|B\rangle$$

$$\square \langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^*$$

観測の原理

Qubit

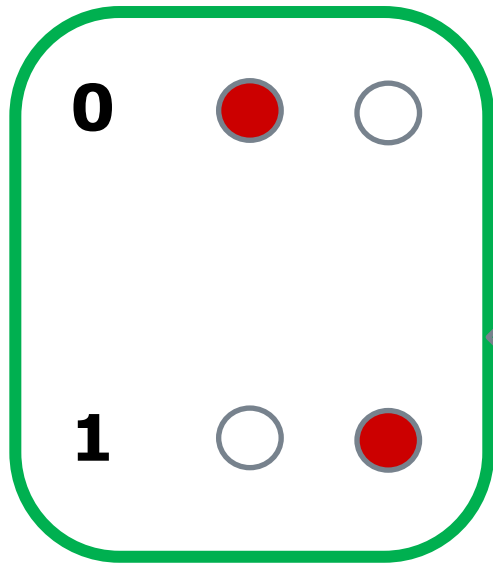


Qubitは、状態 $|0\rangle$ と
状態 $|1\rangle$ の重ね合わせ
の状態を取る

$$|\text{Qubit}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

観測を行うと、Qubitの
重ね合わせの状態は
失われ、0か1かの情報
が返る。



観測

観測値

Qubit

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
の重ね合わせの
状態は、失われる

この時
0を得る確率は、 $|\alpha|^2$ で、
1を得る確率は、 $|\beta|^2$ で、
与えられる。

$$\alpha^* \alpha + \beta^* \beta = 1 ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

観測と観測による状態の変化

- 量子の状態は、直接には、観測できない。
- また、観測によって、系の状態は、観測前とは異なる状態に変化する。(以前の重ね合わせは失われる。)
 - $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ の重ね合わせの状態は、観測によって $|0\rangle$ または $|1\rangle$ の新しい状態に変化する。「崩壊する」
- 新しい状態が観測される確率は、正確に計算することができる。
 - 0を得る確率は、 $|\alpha|^2$ で、
1を得る確率は、 $|\beta|^2$ で、与えられる。

qubitの観測

qubitの状態 $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ を観測したとする。この時、

状態 $|0\rangle$ が観測される確率は、 $|c_0|^2$ で与えられる。

観測前の状態 $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ は、新しい状態 $|0\rangle$ に変わる。

状態 $|1\rangle$ が観測される確率は、 $|c_1|^2$ で与えられる。

観測前の状態 $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ は、新しい状態 $|1\rangle$ に変わる。

これをBornのルールと呼ぶ、

観測によって、重ね合わせの状態は破られる。

一般の量子状態の観測

一般の量子状態 $|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} c_k |k\rangle$ が与えられた時、

状態 $|0\rangle$ が観測される確率は、 $|c_0|^2$ で与えられる。
観測前の状態 $|\psi\rangle$ は、新しい状態 $|0\rangle$ に変わる。

状態 $|1\rangle$ が観測される確率は、 $|c_1|^2$ で与えられる。
観測前の状態 $|\psi\rangle$ は、新しい状態 $|1\rangle$ に変わる。

...

状態 $|k\rangle$ が観測される確率は、 $|c_k|^2$ で与えられる。
観測前の状態 $|\psi\rangle$ は、新しい状態 $|k\rangle$ に変わる。

ユニタリ発展の原理

ユニタリ変換の原理

ある量子の状態は、他の状態に変化することができる。
その変化は、「ユニタリ変換」という、ルールに従う。

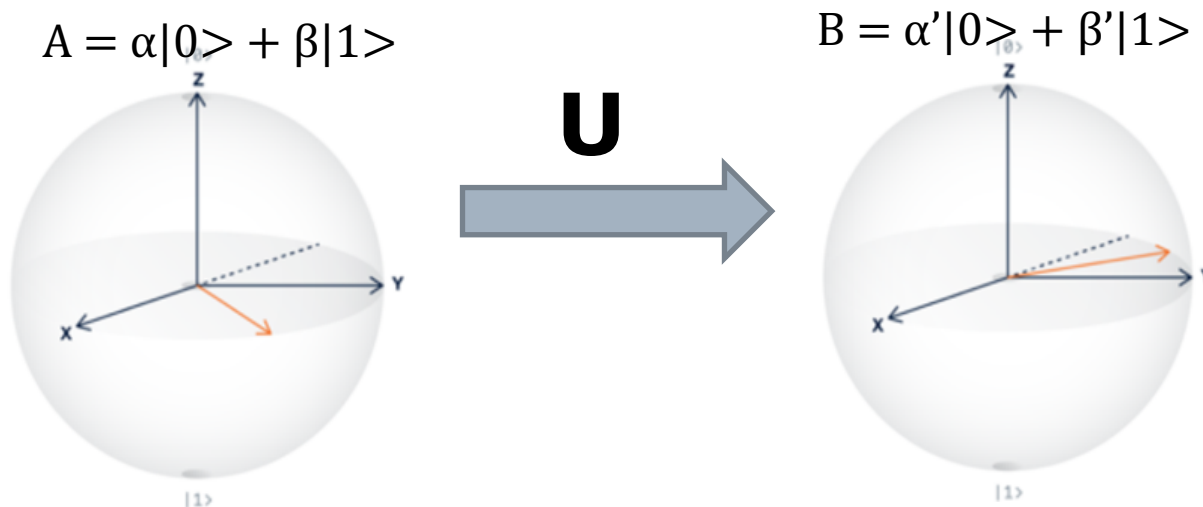
量子の状態ベクトル $|A\rangle$ は、このユニタリ変換 U によって、他の状態 $|B\rangle$ に変換される。

$$U |A\rangle = |B\rangle$$

ユニタリ行列

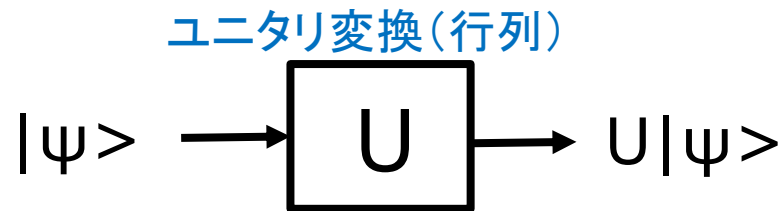
- $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ (単位行列)を満たす行列を、ユニタリ行列と呼ぶ。
- ユニタリ変換 U は、幾何的には、ベクトルの長さを変えないベクトルの回転である。
- 量子の状態ベクトル $|A\rangle$ は、このユニタリ演算子によって、他の状態 $|B\rangle$ に変換される。

$$U |A\rangle = |B\rangle$$

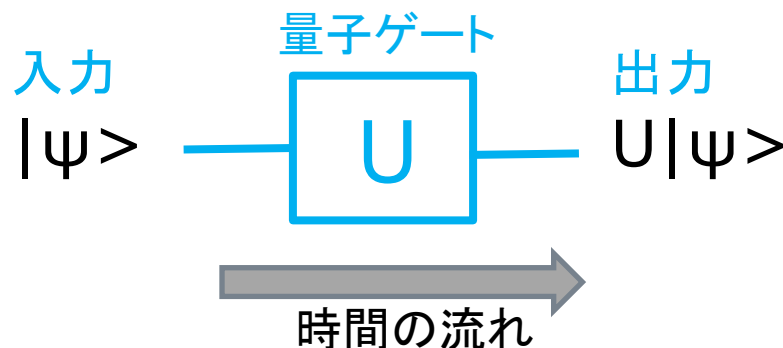


量子ゲートとユニタリ行列

- 量子の状態 $|\psi\rangle$ は、ユニタリ変換 U (ユニタリ行列) の作用を受けて、状態 $U|\psi\rangle$ に変化する。
- この変化 $|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$ を、次のように表そう。



- この時、 U を、 $|\psi\rangle$ を入力、 $U|\psi\rangle$ を出力とする回路と考えることができる。これを、「量子ゲート」と呼ぶ。



量子ゲートは
ユニタリ行列と
一対一に対応する

代表的な1-qubitのゲート X, Z, H

入力  出力



Bit Flipper

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle + a|1\rangle$$



Phase Flipper

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle - b|1\rangle$$



Hadamard

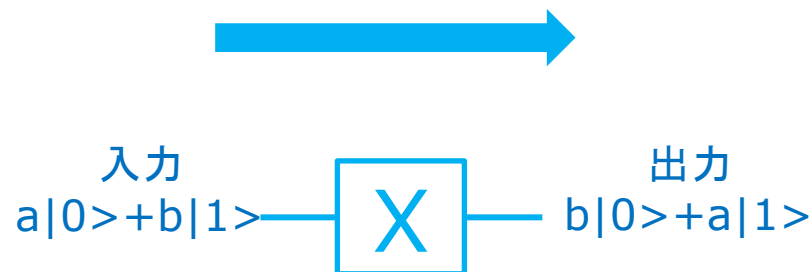
$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|1\rangle$$

$|0\rangle, |1\rangle$ 基底から
 $|+\rangle, |-\rangle$ 基底への変換

X, Z, H の行列と対応する量子ゲートの働き

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので、

$$X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$



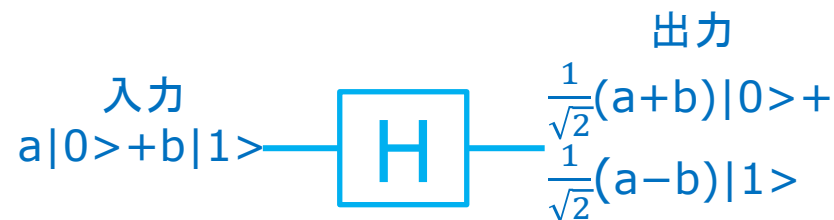
$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なので、

$$Z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$



$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ なので、

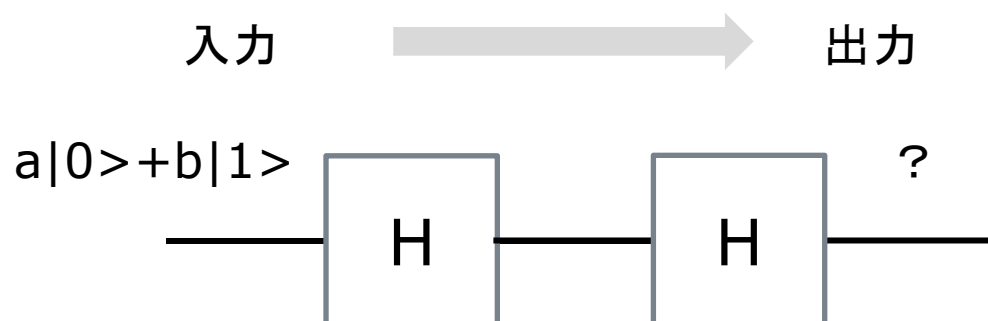
$$H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}$$



ゲートを直列に組み合わせる

ゲートを直列に組み合わせた回路の働きは、直列の回路を構成するゲートの**行列の積**を計算することで、求めることができる。

二つのHゲートを直列につないだ、次のような回路を考えてみよう。

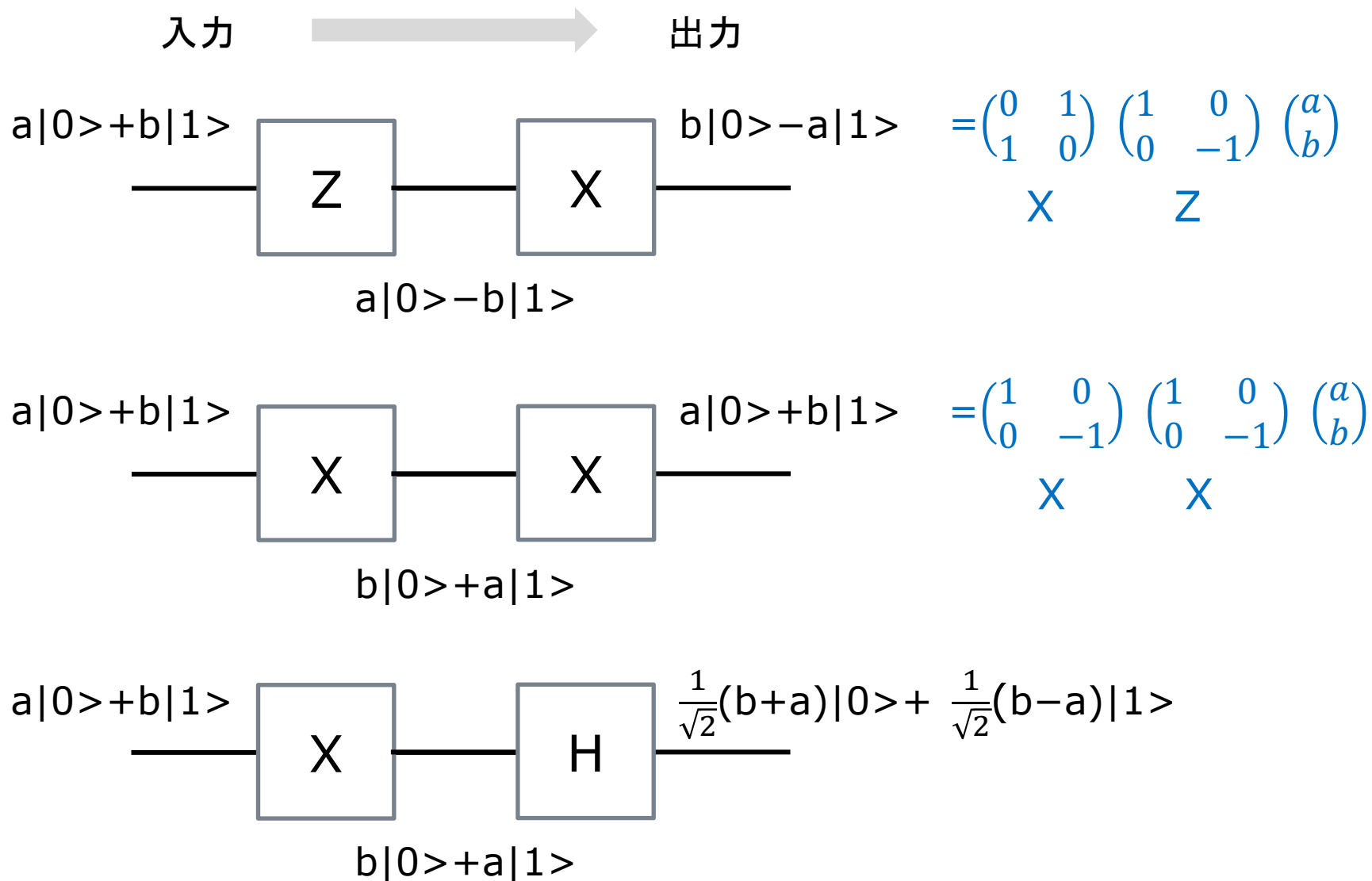


$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ なので、行列の積 HH を計算する。

$$HH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

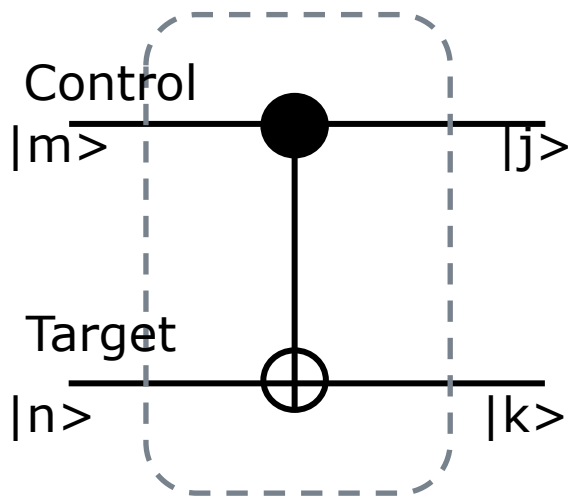
これは単位行列なので、先の回路の出力は、 $a|0\rangle + b|1\rangle$

1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる



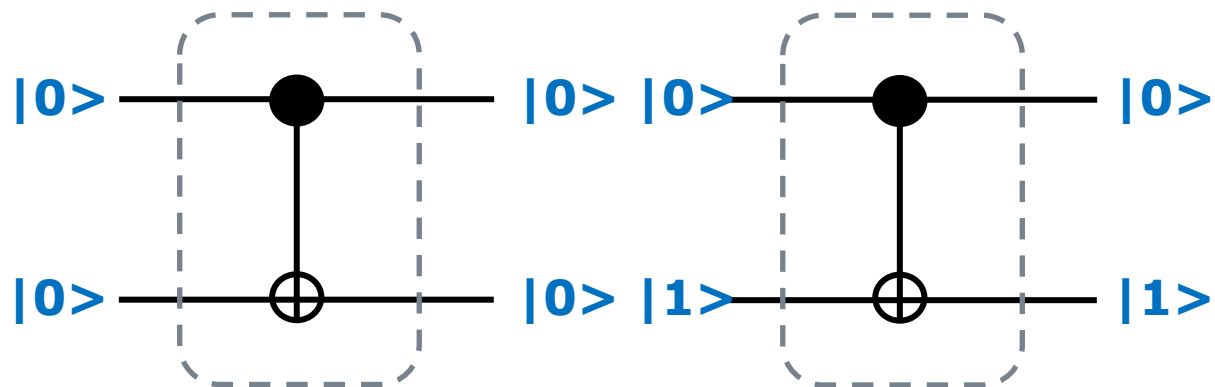
2-qubitのゲート CNOT (Control-NOT)

Control が $|1\rangle$ の時
Target のNOTをとる

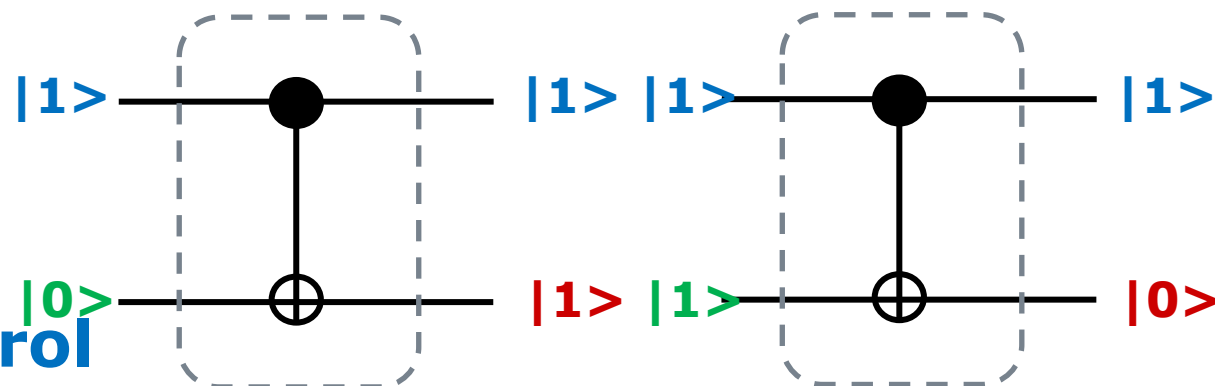


$|mn\rangle$ の
第一bit $|m\rangle$ がControl
第二bit $|n\rangle$ がTarget

Controlが $|0\rangle$ なら何もしない

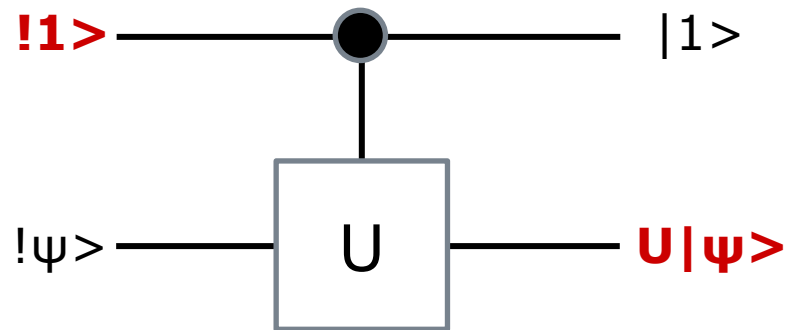
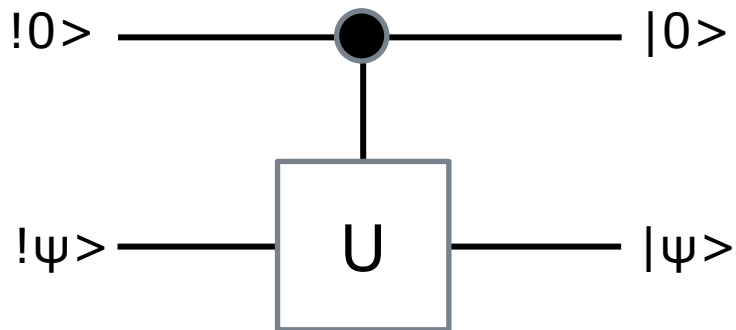


Controlが $|1\rangle$ ならNOT操作



2-qubitのゲート **Control-U**

コントロール qubit が、 $|0\rangle$ の時には、何もせず、(左図)
コントロール qubit が、 $|1\rangle$ の時には、ターゲットのqubit
 $|\psi\rangle$ にユニタリ演算子 U を適用した $U|\psi\rangle$ を出力する(右図)
ゲートを、**Control-U** ゲートという。



演習問題 1-1

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. 列ベクトル $|Z\rangle = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ を $|0\rangle$, $|1\rangle$ を用いて表せ。
2. 行ベクトル $\langle 0|$, $\langle 1|$ を求めよ。
3. 行ベクトル $\langle Z|$ を $\langle 0|$, $\langle 1|$ を用いて表せ。
4. $\langle Z|Z\rangle$ を計算せよ。
ただし、 $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ であるとする。
(この条件は、 $z_0^* z_0 + z_1^* z_1 = 1$ に等しいことに注意)

演習問題 1-2

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$\text{列ベクトル } |Z\rangle = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{ は、} |Z\rangle = z_0|0\rangle + z_1|1\rangle + z_2|2\rangle + z_3|3\rangle$$

と表される。この時、次の値を求めよ。

1. $\langle 0|Z\rangle$

2. $\langle 1|Z\rangle$

3. $\langle 2|Z\rangle$

4. $\langle 3|Z\rangle$

演習問題 1-3

Hを、アダマール行列 $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $|+\rangle$ を $H|0\rangle$, $|-\rangle$ を $H|1\rangle$ とした時、 $|+\rangle$, $|-\rangle$ を計算せよ。
2. $|+\rangle$ で、 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ が観測される確率をそれぞれ求めよ。
3. $|-\rangle$ で、 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ が観測される確率をそれぞれ求めよ。
4. $H|+\rangle$, $H|-\rangle$ を計算せよ。
5. $H^2=I$ (単位行列) となることを確かめよ。

演習問題 1-4

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で、
 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ とする。この時、次の計算を行い、結果を $a, b, |0\rangle, |1\rangle$ で表せ。

1. $X|\psi\rangle$
2. $Z|\psi\rangle$
3. $H|\psi\rangle$
4. $X^2|\psi\rangle$
5. $Z^2|\psi\rangle$
6. $XZ|\psi\rangle$
7. $ZX|\psi\rangle$

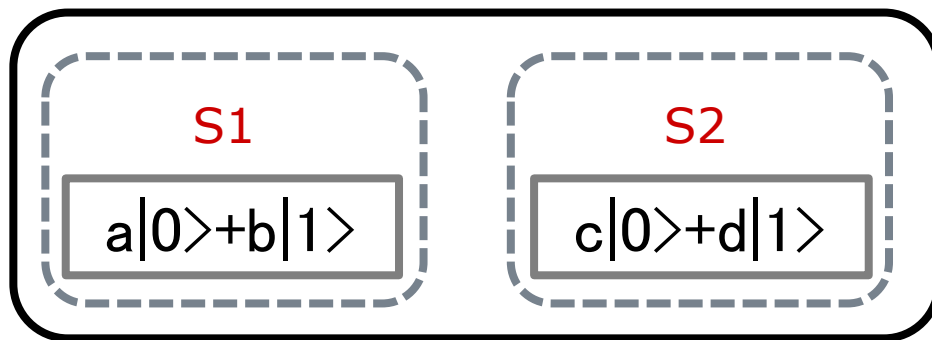
テンソル積

独立した二つのシステムを
一つのシステムと考える

2つのqubitからなるシステム（テンソル積）

qubit $a|0\rangle + b|1\rangle$ のみを含むシステムをS1、
qubit $c|0\rangle + d|1\rangle$ のみを含むシステムをS2とした時、
この二つを一緒にしたシステムSを テンソル積 $S1 \otimes S2$ で表す。

$$S = S1 \otimes S2$$

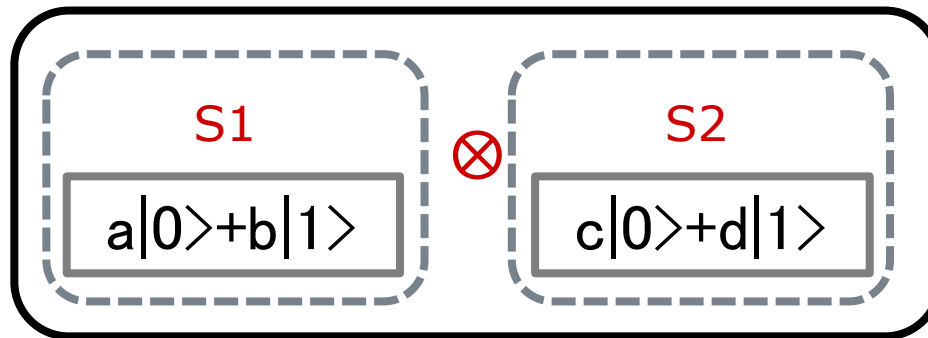


2つのqubitからなるシステム（テンソル積）

この時、次のような計算で、 S の状態を計算する。

$$\begin{aligned} S &= S1 \otimes S2 = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \\ &= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

$$S = S1 \otimes S2$$



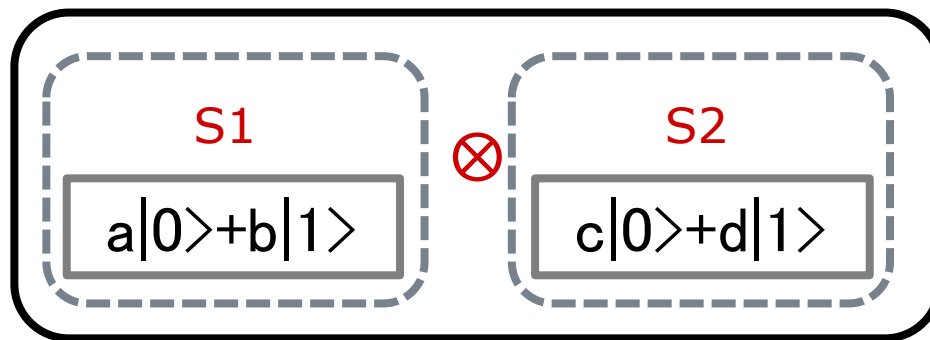
$$= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle$$

2つのqubitからなるシステム（テンソル積）

$|x\rangle \otimes |y\rangle$ を $|xy\rangle$ と表すことにすると、

$$\begin{aligned} S &= S1 \otimes S2 = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \\ &= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle \end{aligned}$$

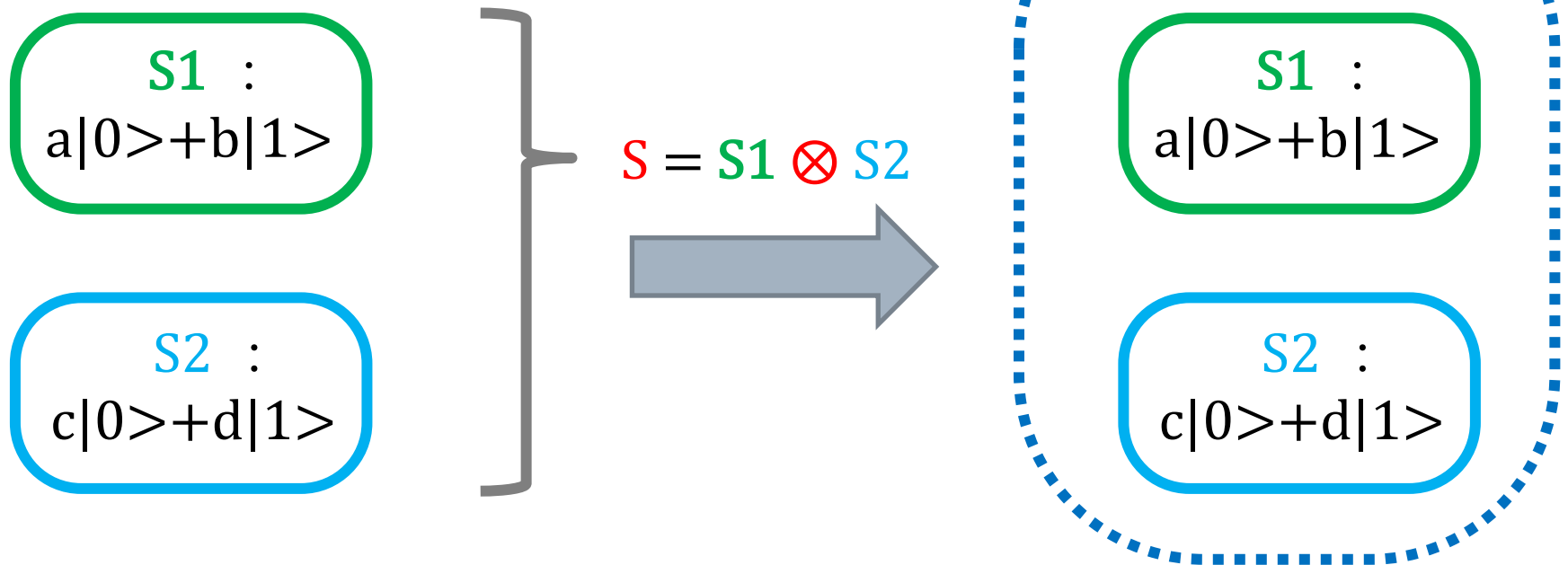
$S = S1 \otimes S2$



$$\begin{aligned} &= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle \end{aligned}$$

もう一度、テンソル積(縦バージョン)

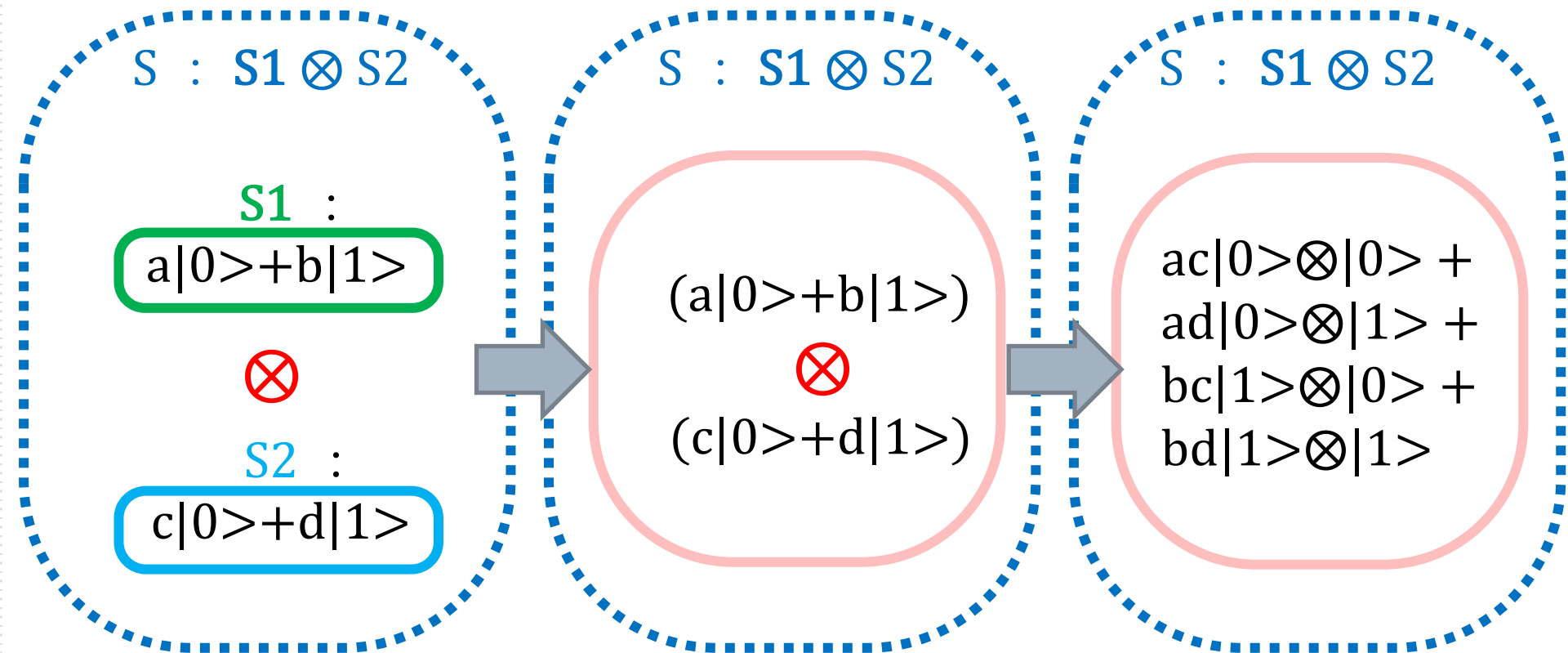
- qubit $a|0\rangle+b|1\rangle$ のみを含むシステム $S1$ 、
qubit $c|0\rangle+d|1\rangle$ のみを含むシステム $S2$
があるとして。
この二つを一緒にしたシステム S を
テンソル積 $S1 \otimes S2$ で表す。



もう一度、テンソル積(縦バージョン)

□ この時、次のような計算で、 S の状態を計算する。

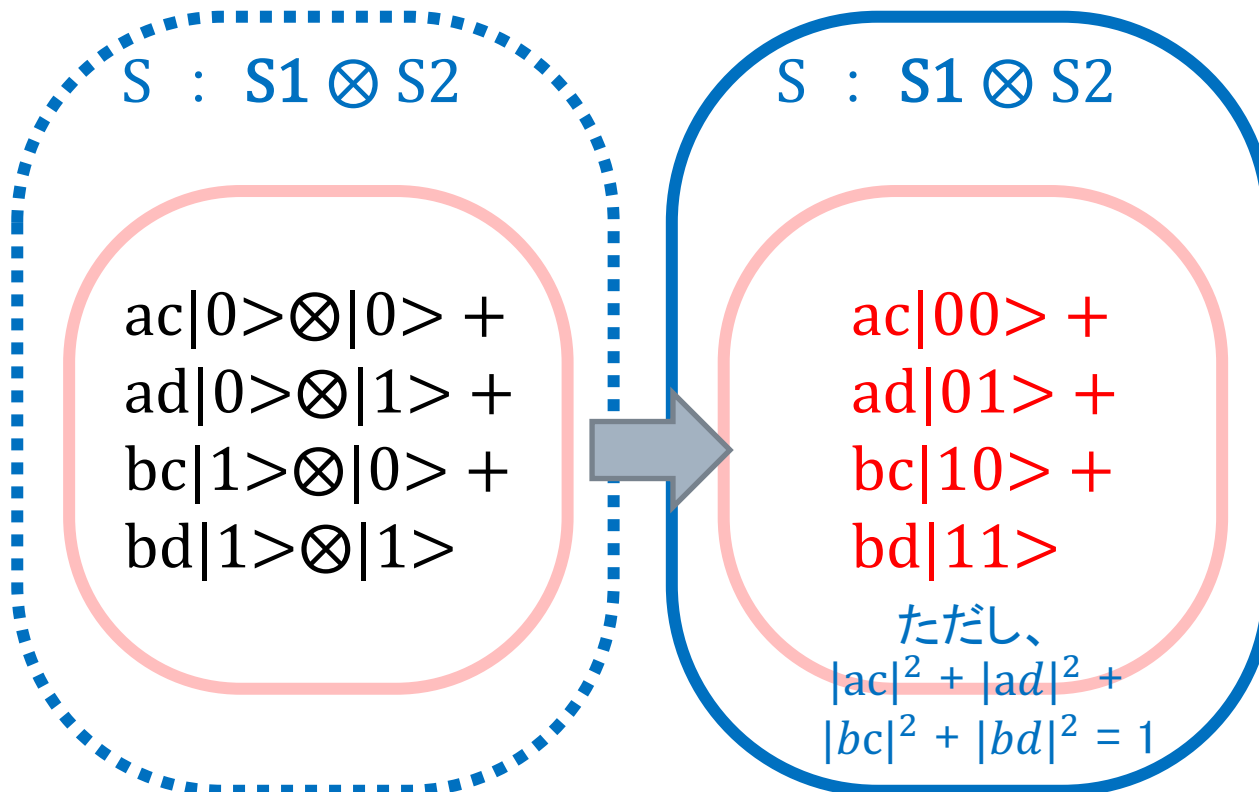
$$\begin{aligned} S &= S1 \otimes S2 = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \\ &= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$



もう一度、テンソル積(縦バージョン)

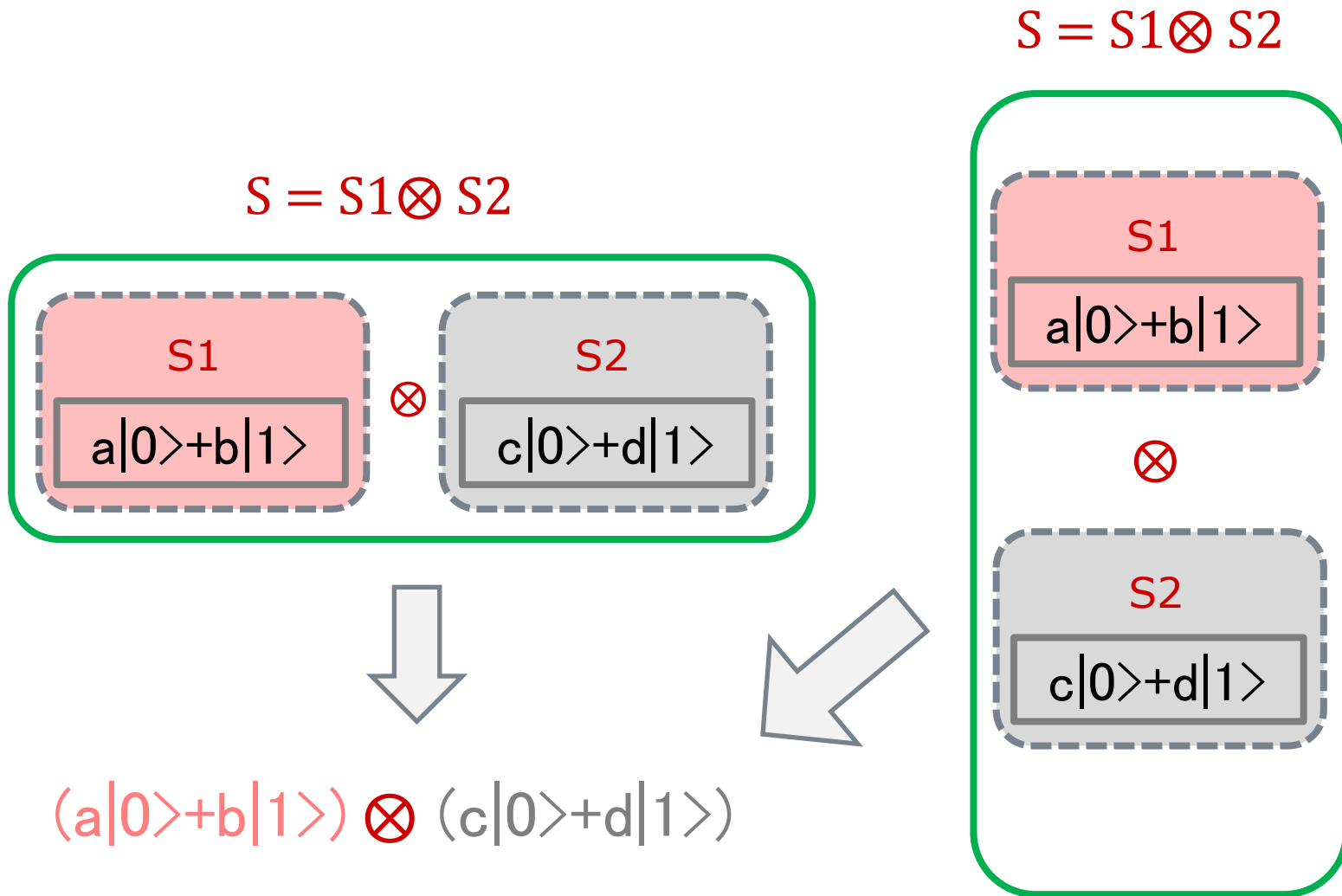
□ $|a\rangle \otimes |b\rangle$ を $|ab\rangle$ と表すことにする。

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle &\rightarrow |00\rangle, & |0\rangle \otimes |1\rangle &\rightarrow |01\rangle, \\ |1\rangle \otimes |0\rangle &\rightarrow |10\rangle, & |1\rangle \otimes |1\rangle &\rightarrow |11\rangle \end{aligned}$$



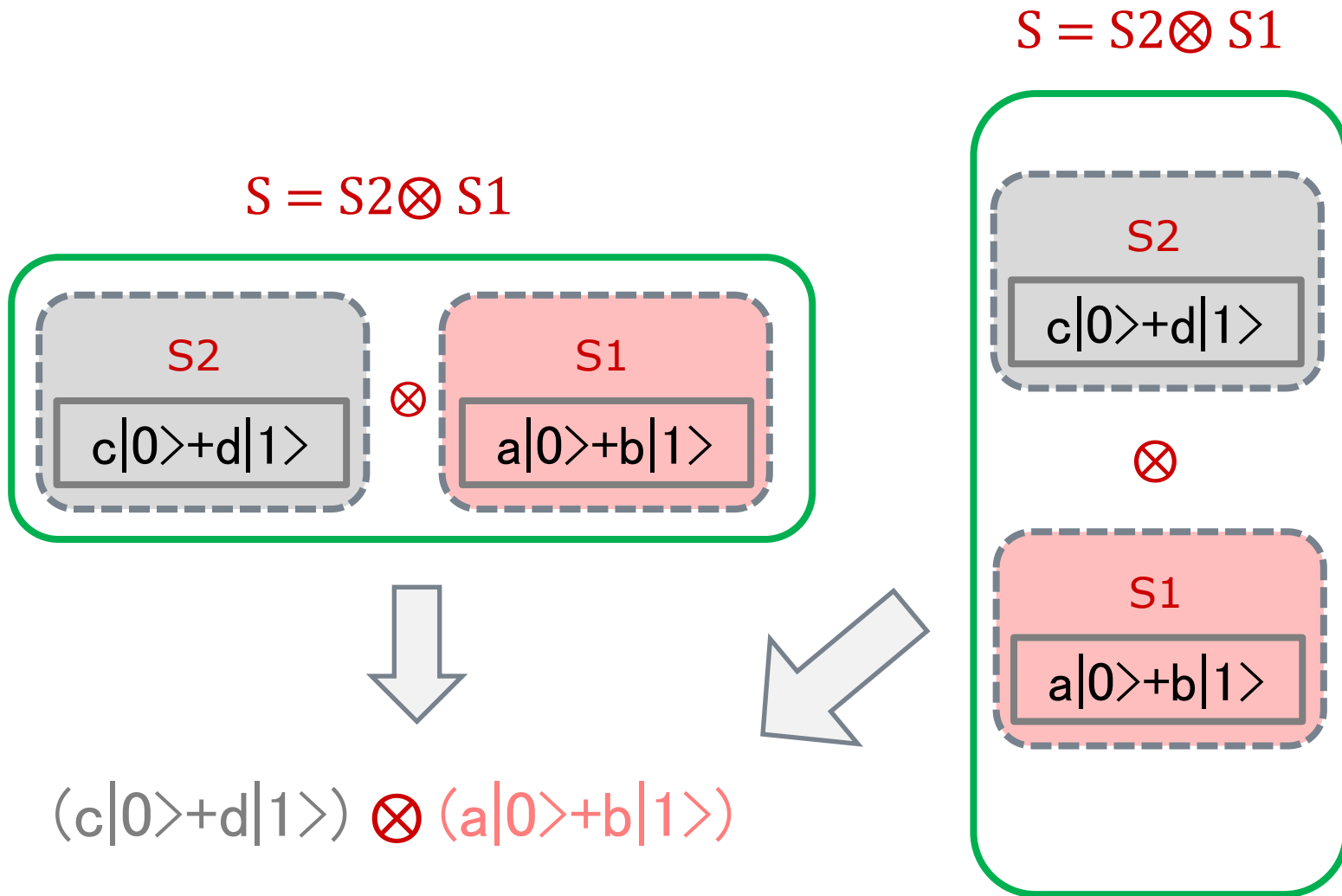
テンソル積 横と縦

この二つは、同じテンソル積 $S1 \otimes S2$ を表す



テンソル積 横と縦

この二つは、同じテンソル積 $S2 \otimes S1$ を表す



Two Qubitの計算例 単純な例 1

$|0\rangle$ ————— } こういう表記をする
 $|0\rangle$ ————— } $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$
順序を持つ

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Two Qubitの計算例 単純な例 2

$$\left. \begin{array}{l} |0\rangle + |1\rangle \\ |0\rangle \end{array} \right\} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$$

$$\begin{aligned} & (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ = & |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle + |10\rangle \end{aligned}$$

$|0\rangle + |1\rangle$ という形は本当はおかしい。 $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ の時、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ という条件があるからだ。本当は、 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ なのだが、計算では無視している。

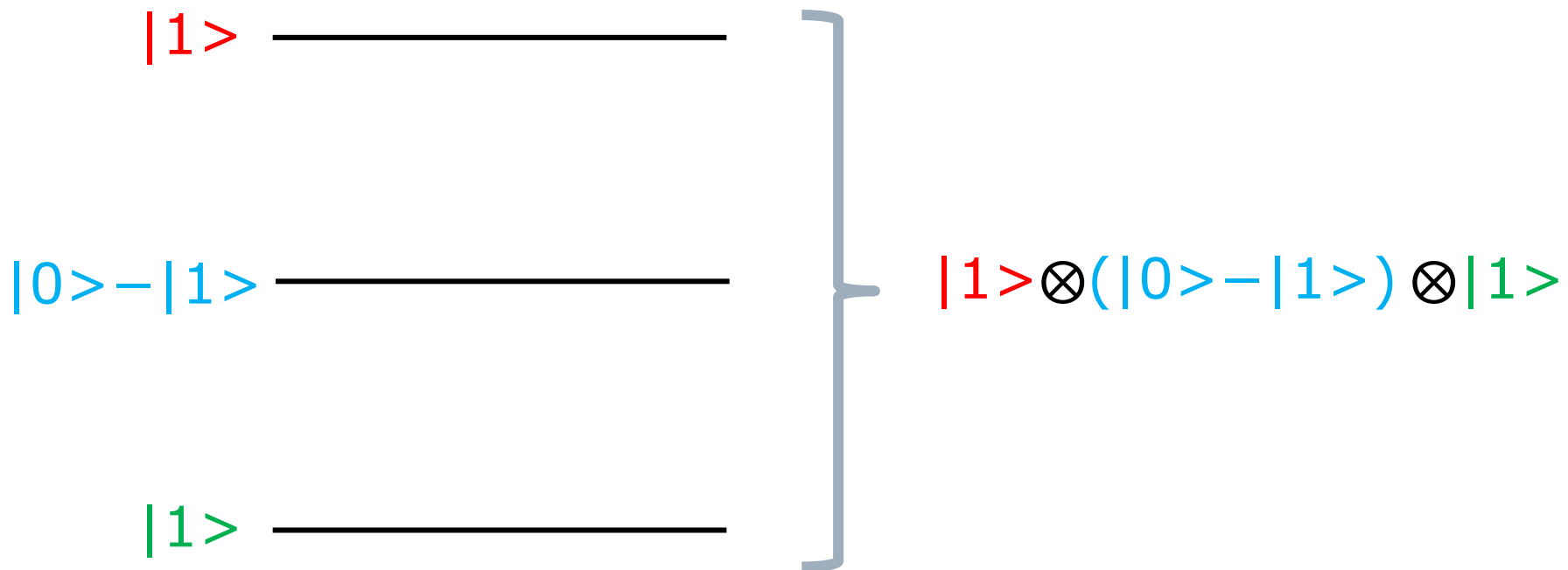
Two Qubitの計算例 単純な例 3

$$\left. \begin{array}{l} |1\rangle \\ |0\rangle - |1\rangle \end{array} \right\} |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\begin{aligned} |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) &= \\ |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle &= |10\rangle - |11\rangle \end{aligned}$$

$|0\rangle - |1\rangle$ という形は本当はおかしい。 $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ の時、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ という条件があるからだ。本当は、 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ なのだが、計算では無視している。

Three Qubitの計算例 単純な例 4



$$\begin{aligned}
 & |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle \\
 = & (|1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |1\rangle \\
 = & (|10\rangle - |11\rangle) \otimes |1\rangle = |101\rangle - |111\rangle
 \end{aligned}$$

Two Qubitの計算例 5

- 第一のQubitが、 $3/5|0\rangle + 4/5|1\rangle$ で、
第二のQubitが、 $1/\sqrt{2}|0\rangle - 1/\sqrt{2}|1\rangle$ としよう。
- この二つのQubitが結合したシステムの状態は、
 $(3/5|0\rangle + 4/5|1\rangle) \otimes (1/\sqrt{2}|0\rangle - 1/\sqrt{2}|1\rangle)$
 $= 3/5\sqrt{2}|00\rangle - 3/5\sqrt{2}|01\rangle + 4/5\sqrt{2}|10\rangle - 4/5\sqrt{2}|11\rangle$
のように計算される。(⊗ を、普通の掛け算のように計算した。)
- ところで、全ての Two Qubitsの状態は、二つのQubitの状態の組み合わせに、分解できるだろうか？

Two Qubitsのシステムの表現と観測確率

- 二つのQubitのシステムは、 $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ の四つの状態を持つので、次のように表現される。

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle$$

ここで、 $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $\sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1$. である。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} \text{ である。}$$

- この時、 $|00\rangle$ が観測される確率は、 $|\alpha_{00}|^2$ で、観測後の状態は、 $|00\rangle$ に変わる。

3つのqubitからなるシステムの表現と観測確率

- 先のSに、もう一つqubit $e|0\rangle + f|1\rangle$ のみを含むシステム S_3 を追加して、3つのqubitからなるシステムを考えよう。改めて、これもSとすると

$$\begin{aligned} S &= S_1 \otimes S_2 \otimes S_3 \\ &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \otimes (e|0\rangle + f|1\rangle) \\ &= \dots \text{展開して整理する} \\ &= A|000\rangle + B|001\rangle + C|010\rangle + D|011\rangle \\ &\quad + E|100\rangle + F|101\rangle + G|110\rangle + H|111\rangle \end{aligned}$$

例えば、 $A=ace$ になるのだが、省略している

という8つの状態の重ね合わせの形になる。

- この時、例えば、 $|101\rangle$ という状態が観測される確率は、 $|F|^2$ になる。

Two Qubits 部分的な観測

- $|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ で、最初の1ビットのみを観測して、それが0である確率は、どうなるだろうか？
- 次のように考える。
 $\Pr\{\text{1st bit} = 0\} = \Pr\{00\} + \Pr\{01\} = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2.$
- それでは、このとき、2-Qubitsのシステムの状態は、どういう状態になるのだろうか？ それは、この観測に矛盾する全ての項(最初のビットが1の項)を消して、残った項の重ね合わせの状態になる。
- 最初の1ビットが0である項を残し、それに矛盾する最初の1ビットが1である項を消すと、次のようになる。

観測後の状態: $|\psi'\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \cancel{\alpha_{10}|10\rangle} + \cancel{\alpha_{11}|11\rangle}$

Two Qubits 部分的な観測

- ただ、それが、単位ベクトルになるように、正規化されねばならない。新しい状態は、次のようになる。

$$|\phi_{\text{new}}\rangle = \frac{\alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

- これは、ちょっと複雑に思えるが、本質的には、この状態は、 $\alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle$ で、それに正規化の係数

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

がかかったものと考えればいい。

Two Qubits 部分的な観測

元の状態を $|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ として、正規化因子を無視すると、観測後の状態は、次のようになる。

1. 第1ビットのみが0と観測された場合

観測後の状態: $|\psi'\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$

2. 第1ビットのみが1と観測された場合

観測後の状態: $|\psi'\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$

3. 第2ビットのみが0と観測された場合

観測後の状態: $|\psi'\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$

4. 第2ビットのみが1と観測された場合

観測後の状態: $|\psi'\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$

行列のテンソル積

行列のテンソル積

行列のテンソル積を次のように定義する。(2×2行列で例示)

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}$$

Bの成分も書くと、

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

行列のテンソル積の例 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ としよう。}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \mathbf{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \mathbf{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

行列のテンソル積の例 (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ としよう。}$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

テンソル積では、
 $A \otimes B \neq B \otimes A$
である

ベクトルのテンソル積

ベクトルは、 $n \times 1$ の行列であるから、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

ベクトルのテンソル積の例 (1)

$$\begin{pmatrix} \textcolor{blue}{1} \\ \textcolor{blue}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \textcolor{blue}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} \\ \textcolor{blue}{4} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \textcolor{blue}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ベクトルのテンソル積の例 (2)

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

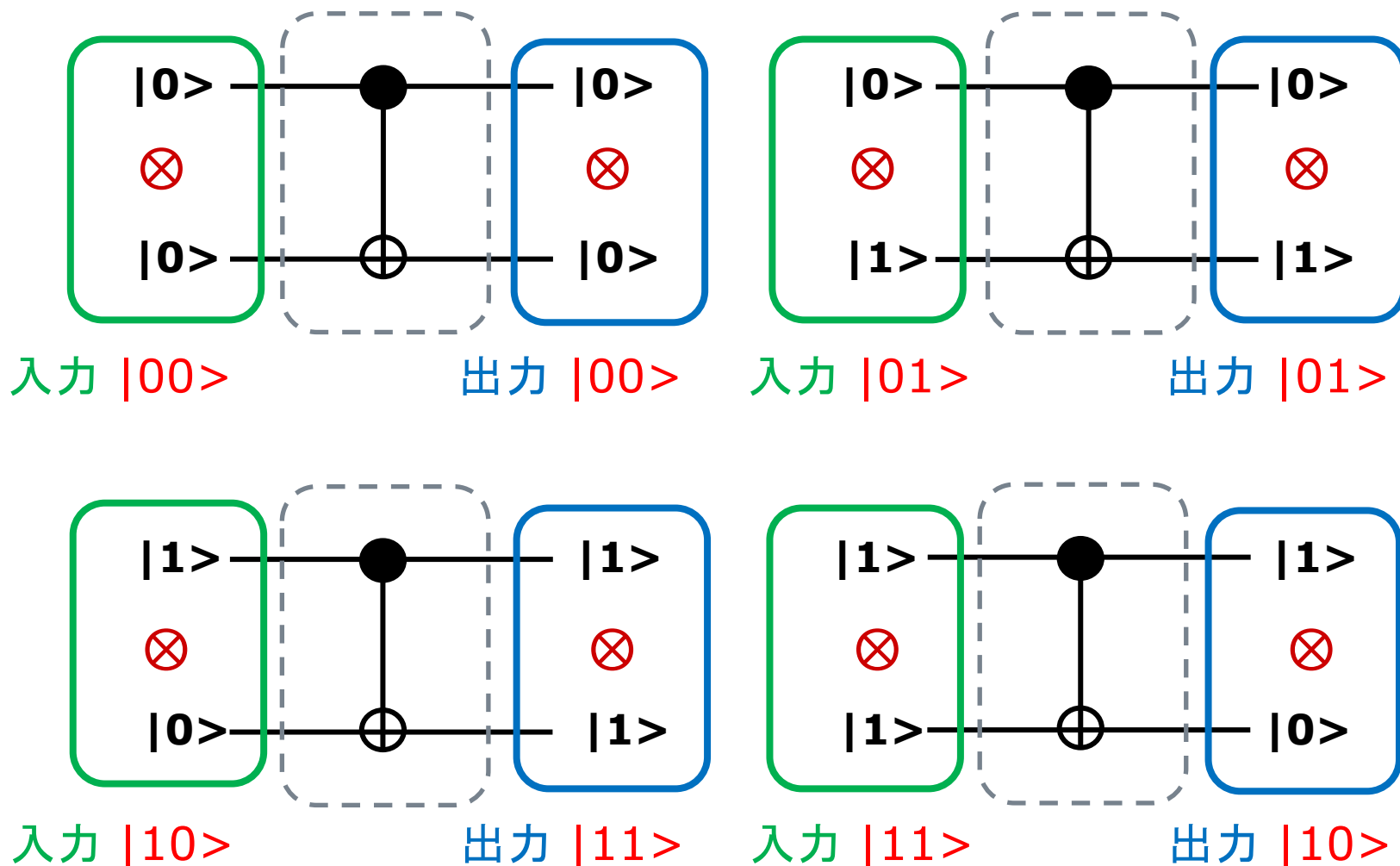
$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CNOTの入力と出力を
テンソル積で表示する

CNOT の入力と出力をテンソル積で表示する



CNOTの行列表示

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle \quad |10\rangle \rightarrow |11\rangle \quad |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

$$\text{CNOT} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{CNOT} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{CNOT} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{CNOT} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから、CNOTを次のように表すことができる。

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \text{入力} \\ |00\rangle \\ \text{の} \\ \text{出力} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \text{入力} \\ |11\rangle \\ \text{の} \\ \text{出力} \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

実際に、次が成り立つことを確かめよ。

$$\text{CNOT}|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle$$

$$\text{CNOT}|01\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01\rangle$$

$$\text{CNOT}|10\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle$$

$$\text{CNOT}|11\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle$$

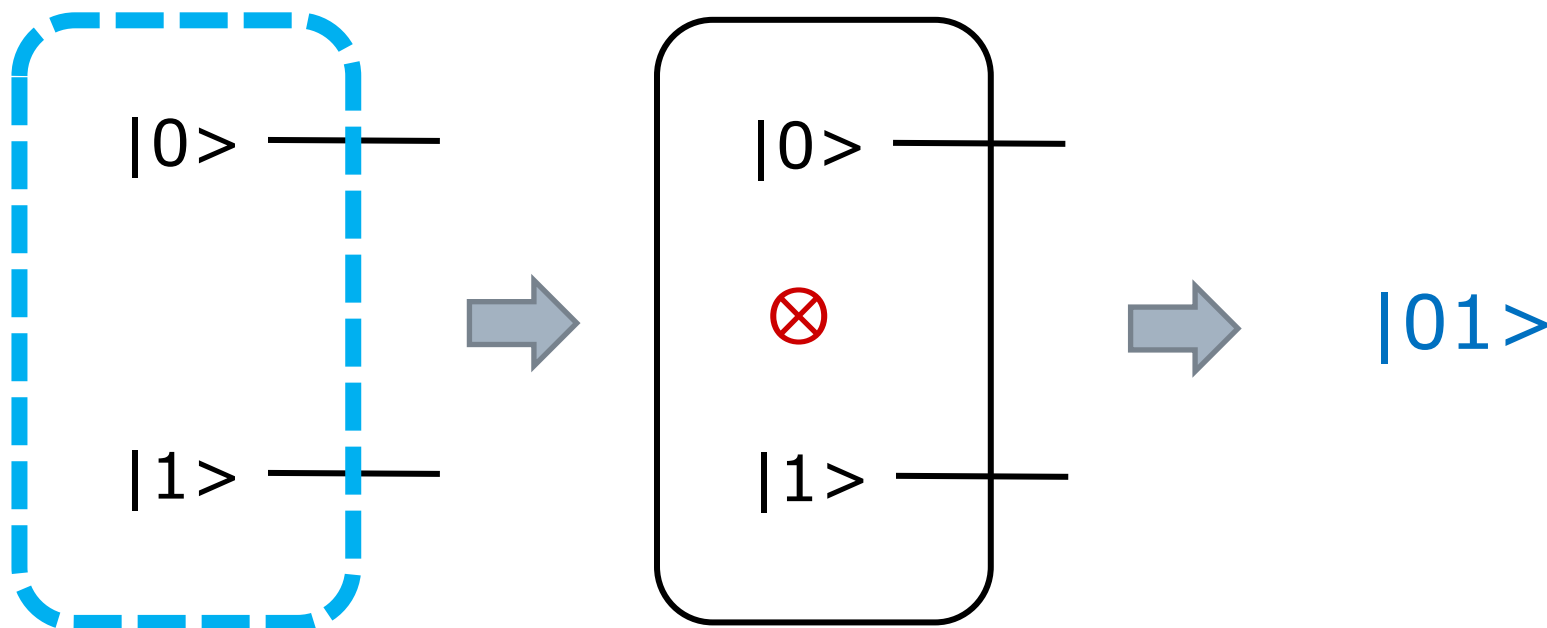
テンソル積での内積の定義

$$\left(\sum_i a_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle, \sum_j b_j |v'_j\rangle \otimes |w'_j\rangle \right) \equiv \sum_{ij} a_i^* b_j \langle v_i | v'_j \rangle \langle w_i | w'_j \rangle.$$

ゲートを並列に組み合わせる

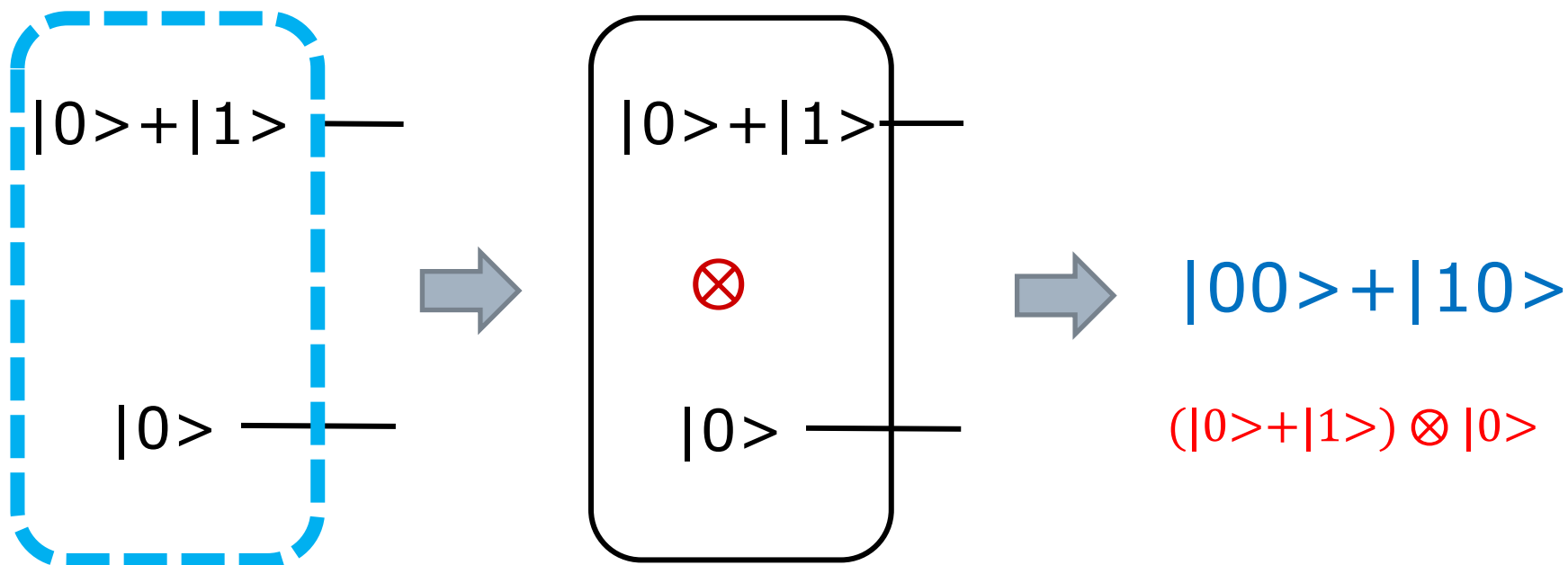
二つのqubitの状態を、並列に組み合わせる

二つの qubit がある時、それらを並列に組み合わせて、一つの状態とみなすことができる。この状態は、それぞれの状態の**テンソル積**である。



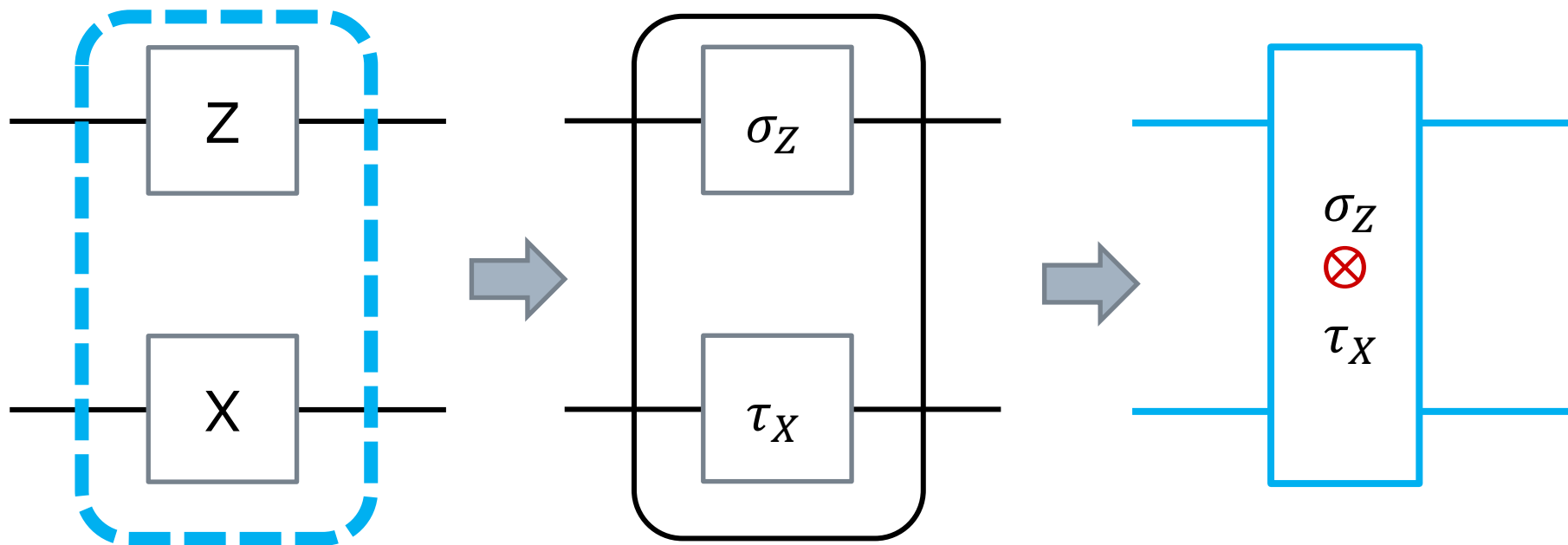
二つのqubitの状態を、並列に組み合わせる

二つの qubit がある時、それらを並列に組み合わせて、一つの状態とみなすことができる。この状態は、それぞれの状態の**テンソル積**である。



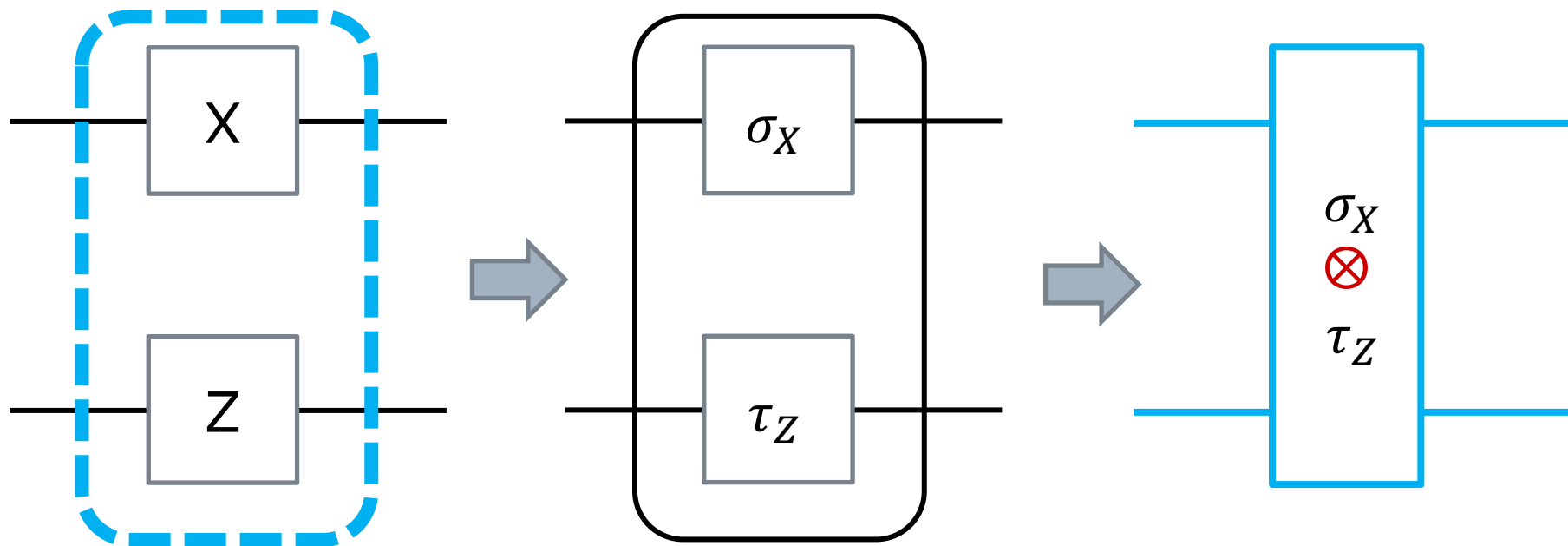
1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

二つの 1-qubit ゲートがある時、それらを並列に組み合わせて、2-qubitの量子ゲートを構成することができる。この量子ゲートは、それぞれの量子ゲートのユニタリ行列の**テンソル積**として作用する。



1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

二つの 1-qubit ゲートがある時、それらを並列に組み合わせて、2-qubitの量子ゲートを構成することができる。この量子ゲートは、それぞれの量子ゲートのユニタリ行列の**テンソル積**として作用する。



1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

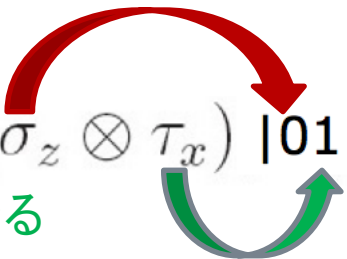
2-qubitのシステムで、最初のqubitに、演算子 X, Y, Z を適用する演算子を、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ とし、二つ目のqubitに、演算子 X, Y, Z を適用する演算子を、 τ_x, τ_y, τ_z とする。

$$\sigma_z \otimes \tau_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x \otimes \tau_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

最初のqubitにZを作用させる


$$(\sigma_z \otimes \tau_x) |01\rangle = |00\rangle$$

二つ目のqubitにZを作用させる

$$Z|0\rangle = |0\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$$

$$\text{結果は } |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

$$(\sigma_z \otimes \tau_x) |01\rangle = \begin{matrix} \sigma_z \otimes \tau_x & |01\rangle & |00\rangle \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

演習問題 2-1

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. この時、 $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ を計算して、列ベクトルとして表せ。
2. 同様に、 $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ を計算せよ。
3. $|000\rangle$, $|001\rangle$, $|010\rangle$, $|011\rangle$ を計算せよ。
この時、 $A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ を使えば、前問の結果が利用できる。
4. $|100\rangle$, $|101\rangle$, $|110\rangle$, $|111\rangle$ を計算せよ。

演習問題 2-2

1. $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$ を計算して、結果をketで表せ
2. $(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle$ を計算して、結果をketで表せ。
3. $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle$ を計算して、結果をketで表せ
4. $(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle$ を計算して、結果をketで表せ。
5. $|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。
6. $|1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。
7. $|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。
8. $|1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。
9. $|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。

演習問題 2-3

1. $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。
2. $(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|10\rangle + |01\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。
3. $\alpha(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|10\rangle + |01\rangle)$ を計算して、結果をketで表せ。

演習問題 2-4

CNOTのコントロール・ビットを第一qubit、ターゲット・ビットを第二qubitとする。この時、次の計算をして、答えをketで表せ。

1. $\text{CNOT}|00\rangle$ を求めよ。
2. $\text{CNOT}|01\rangle$, $\text{CNOT}|10\rangle$, $\text{CNOT}|11\rangle$ を求めよ。

$\text{CNOT}(|00\rangle + |11\rangle) = \text{CNOT}|00\rangle + \text{CNOT}|11\rangle$ である。これを利用して、次の値を求めよ。

3. $\text{CNOT}(|00\rangle + |10\rangle)$
4. $\text{CNOT}(|00\rangle - |10\rangle)$
5. $\text{CNOT}(|01\rangle + |11\rangle)$
6. $\text{CNOT}(|01\rangle - |11\rangle)$

エンタングルメントとは何か Bell Stateについて

EPRペア -- もつれあった二つの量子

- エンタングルメントを最初に発見したのはアインシュタインである。1935年のことである。もつれあった二つの量子を、この現象の発見者(Einstein, Podolsky, Rosen)の頭文字をとってEPRペア と呼ぶことがある。
- EPRペアの状態は一つの式で表される。それにもかかわらず、それは二つの量子の状態、すなわち、からみあった二つの量子の状態を表しているのである。
- 興味ふかいのは、こうしたからみあった二つの量子の関係は、二つの量子の間の距離には関係のない性質だということである。この関係は、二つの量子が、たとえ銀河を隔てて何万光年離れたとしても、からみあいはそのまま維持されるのである。

Alice

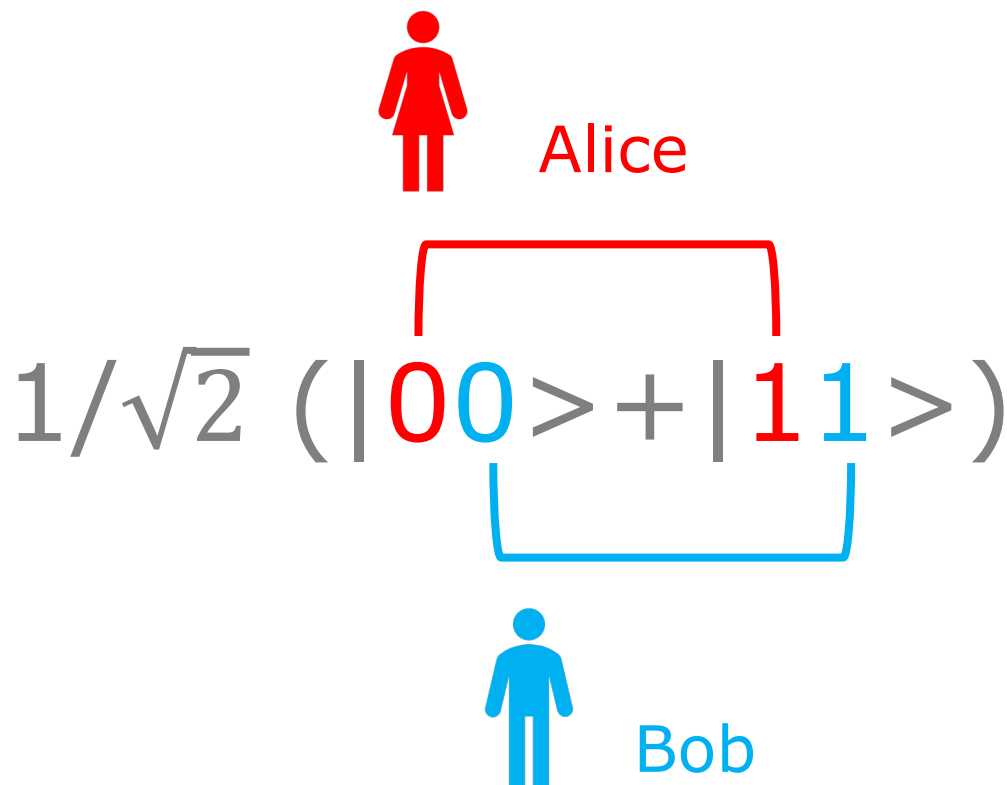


Maximally
entangled pair



Bob

EPRペア: もつれ合った二つのqubit



$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ で表される状態は、二つのqubitの状態である。一方のqubitをAliceが、他方のqubitをBobが持つことができる。こうした、もつれ合った二つのqubitを、EPRペアと呼ぶ。

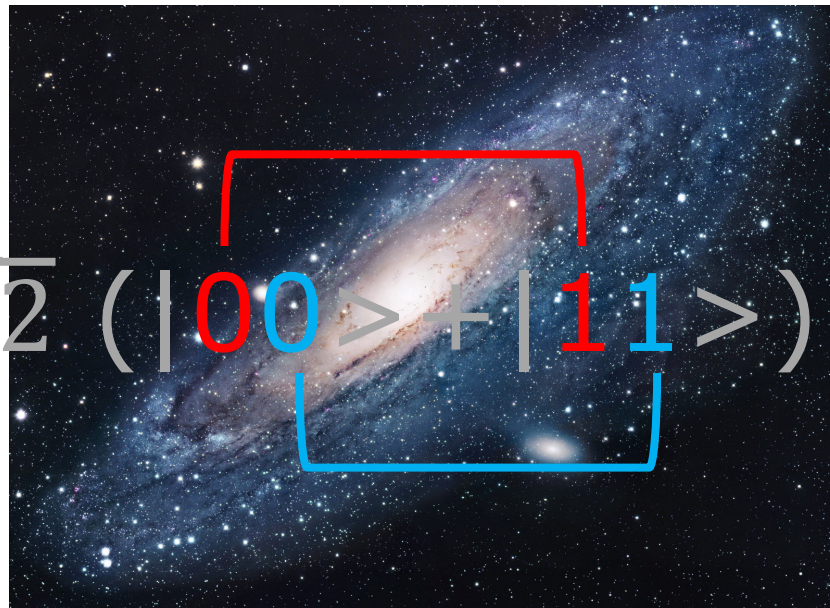
EPRペア: もつれ合った二つのqubit



Alice

$$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$



Bob

Aliceが観察できるのは、 $|00\rangle + |11\rangle$ の第一bitで、
Bobが観察できるのは、 $|00\rangle + |11\rangle$ の第二bitである。
この関係は、両者がどんなに離れていても変わらない。

$$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$

ERPペアの不思議な性質

- Aliceが自分の持つEPRペア、 $1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ の最初のビットを観測したとしよう。それが1である確率は $1/2$ で、0である確率は $1/2$ である。
- 今、その結果が0であったとしよう。この観測の結果、新しい状態は、 $|00\rangle$ に変わる。それは、第二ビットの観測が、0である確率が1であることを意味する。100%の確率で、Bobの持つ第二ビットの状態が0であることがわかる。
- すなわち、**Alice**が自分のqubitで状態**0**を観測するとすぐに、遠く離れた**Bob**の持つqubitの状態が**0**であることがわかることになる。
- AliceとBobが、どんなに離れていても、Aliceが自分の量子を観測した瞬間に、エンタングル状態は解けて、遠く離れたBobの観測結果が、瞬時に確実にわかるのである。これは、遠く離れたBobの持つ情報が、瞬時にAliceに伝わるように見える。これは、「情報は、光の速さ以上のスピードでが伝わらない」という相対論の要請と矛盾しないか？

EPRパラドックス

「馬鹿げた遠隔作用」

- 実際、エンタングルメントを最初に発見したアインシュタインは、これを「馬鹿げた遠隔作用」と呼んで、量子論が不完全な理論であることの根拠にした。
- アインシュタインは、量子論は、実在について「隠れた変数」を見落としているので、こうした奇妙な矛盾した状態が生まれることになるかと主張した。エンタングルメントは、当初は、「EPRパラドックス」と呼ばれていた。

EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

Scientist and Two Colleagues
Find It Is Not 'Complete'
Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

Believe a Whole Description of
'the Physical Reality' Can Be
Provided Eventually.

- 1964年、ベルは、アインシュタインの「隠れた変数」理論が、成り立たないことを理論的に証明し、1982年には、アスペが、ベルの理論が正しいことを大規模な実験で証明した。

1964年 Bellの定理 アインシュタインの「隠れた変数」の否定

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL[†]

Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(Received 4 November 1964)

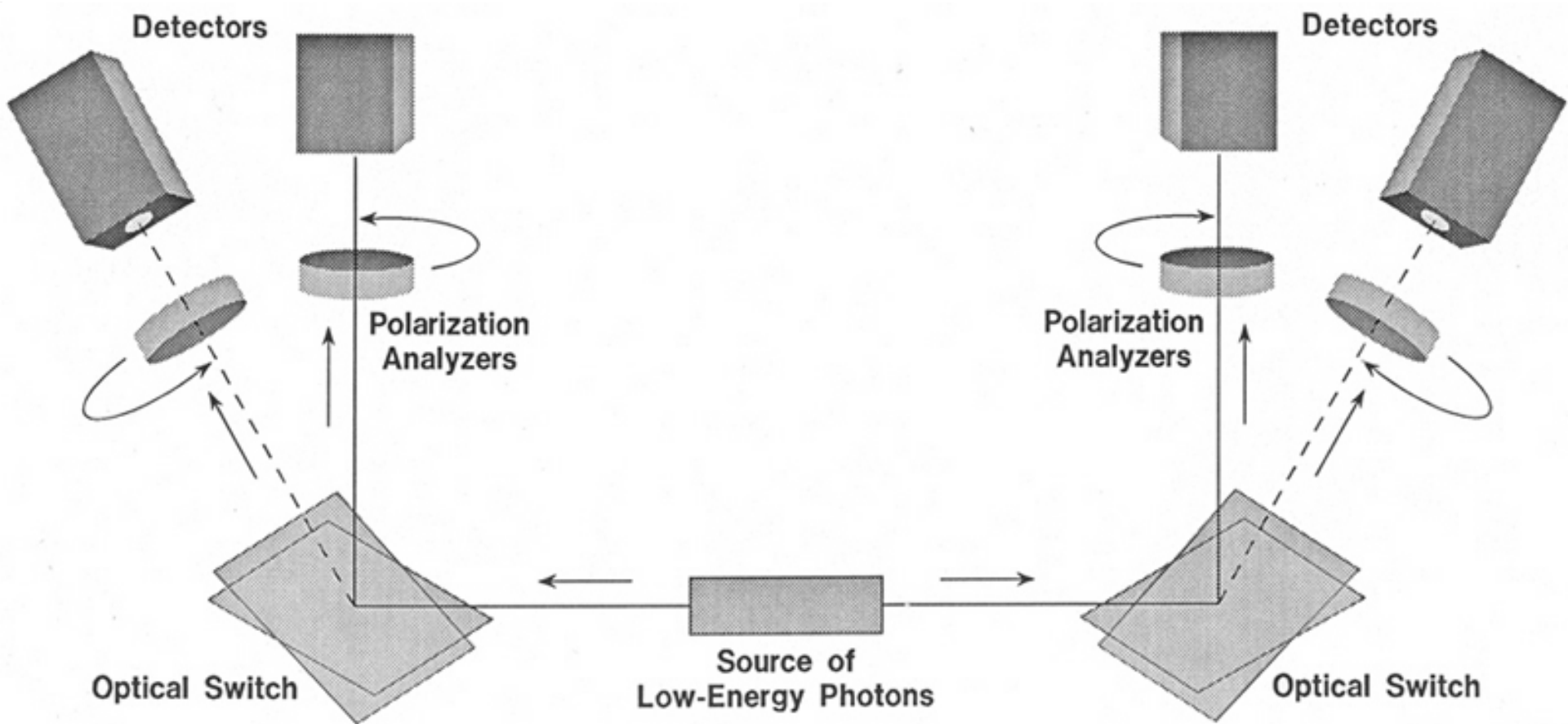
I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as a theory which could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this paper it is mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on a system by operations on a distant system with which it has interacted in the past is independent of the choice of operations on the distant system. There have been attempts [3] to show that even without such assumptions no “hidden variable” interpretation of quantum mechanics is possible. This has been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation is non-local in structure. This is characteristic, according to the result to be proved, of any theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.



<https://goo.gl/wyvd7B>

1982年 Aspectの実験



Bellの定理が成り立っていることの実験での確認

Bell State ゲートが生み出す EPRペア: もつれ合った二つのqubit

Φ^+



Alice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

The equation is annotated with a red bracket above the first two qubits (00) and a blue bracket below the last two qubits (11), indicating the distribution of the entangled pairs to Alice and Bob respectively.



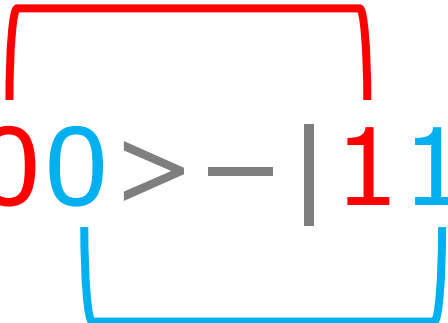
Bob

Bell State ゲートが生み出す EPRペア: もつれ合った二つのqubit

Φ^-



Alice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle)$$
A red bracket connects the first '0' in the first term to Alice's icon. A blue bracket connects the second '0' in the first term to Bob's icon. Similarly, a red bracket connects the '1' in the second term to Alice's icon, and a blue bracket connects the second '1' to Bob's icon.



Bob

Bell State ゲートが生み出す EPRペア: もつれ合った二つのqubit

Ψ^+



Alice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

The diagram illustrates the distribution of the Bell state Ψ^+ between Alice and Bob. A red bracket connects the '0' in the first term $|01\rangle$ to Alice, and a blue bracket connects the '1' in the second term $|10\rangle$ to Bob.



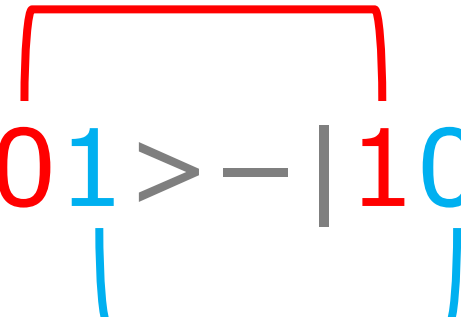
Bob

Bell State ゲートが生み出す EPRペア: もつれ合った二つのqubit

Ψ^-



Alice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$




Bob

演習問題 3-1

$|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
4. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。

演習問題 3-2

$|\Phi^-\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle - |11\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
4. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。

演習問題 3-3

$|\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2} (|01\rangle + |10\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
4. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。

演習問題 3-4

$|\psi^-\rangle = 1/\sqrt{2} (|01\rangle - |10\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
4. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。

演習問題 3-5

$|P\rangle = 1/\sqrt{3} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. この時、第二qubitが0と観測される確率を求めよ。
4. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
5. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
6. この時、第二qubitが0と観測される確率を求めよ。

演習問題 3-6

$|\text{GHZ}\rangle = 1/\sqrt{2} (|000\rangle + |111\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. この時、第三qubitが1と観測される確率を求めよ。
4. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
5. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
6. この時、第三qubitが1と観測される確率を求めよ。

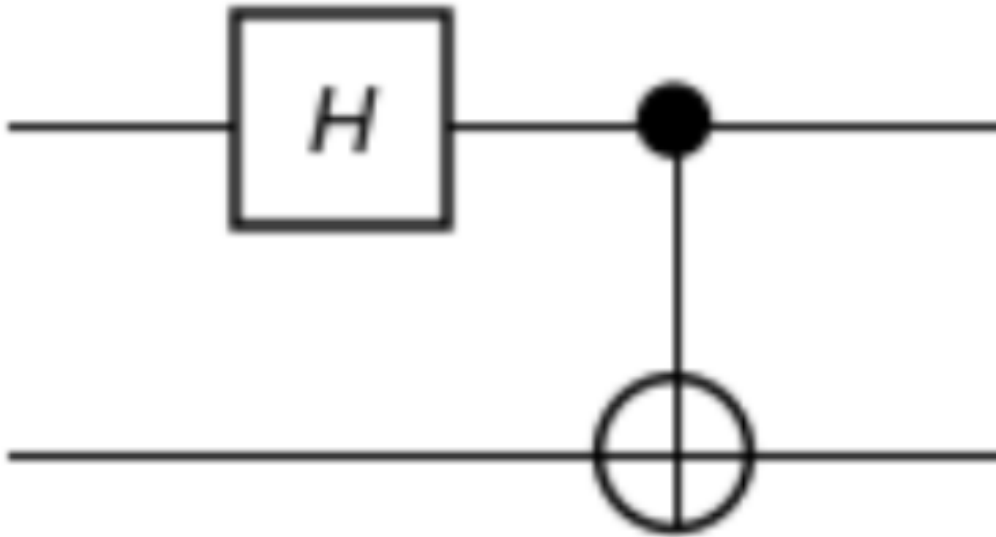
演習問題 3-7

$|W\rangle = 1/\sqrt{3} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ とする。

1. 第一qubitが、0と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
2. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
3. この時、第三qubitが1と観測される確率を求めよ。
4. 第一qubitが、1と観測された時、観測後に状態はどのように変わるか？
5. この時、第二qubitが1と観測される確率を求めよ。
6. この時、第三qubitが1と観測される確率を求めよ。

Bell State ゲート Bell State を生成する

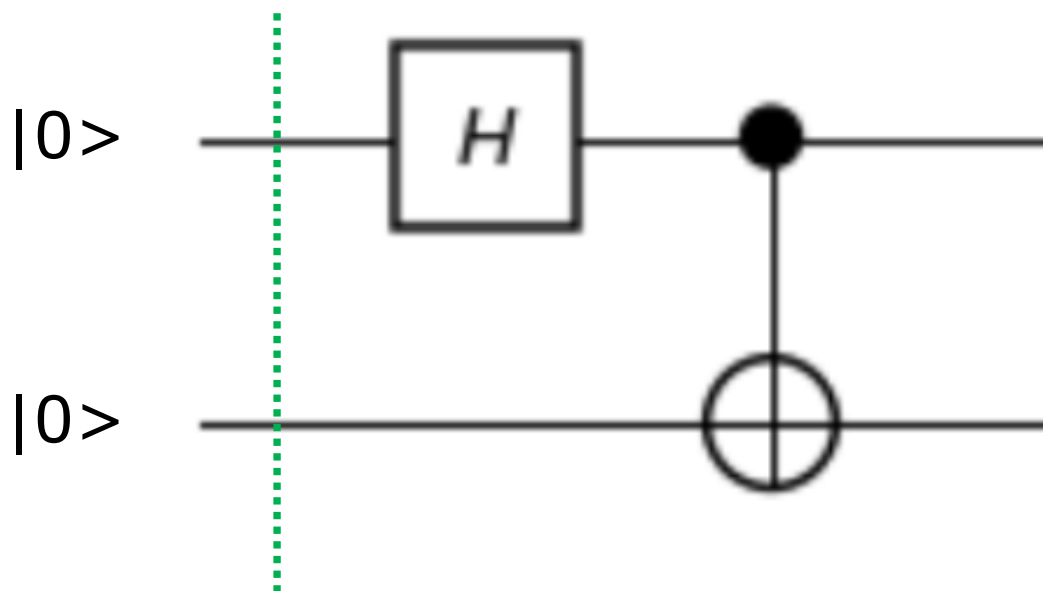
Bell State ゲート



Bell State ゲートの働き 入力 $|00\rangle$ の場合

Bell State ゲートの働き

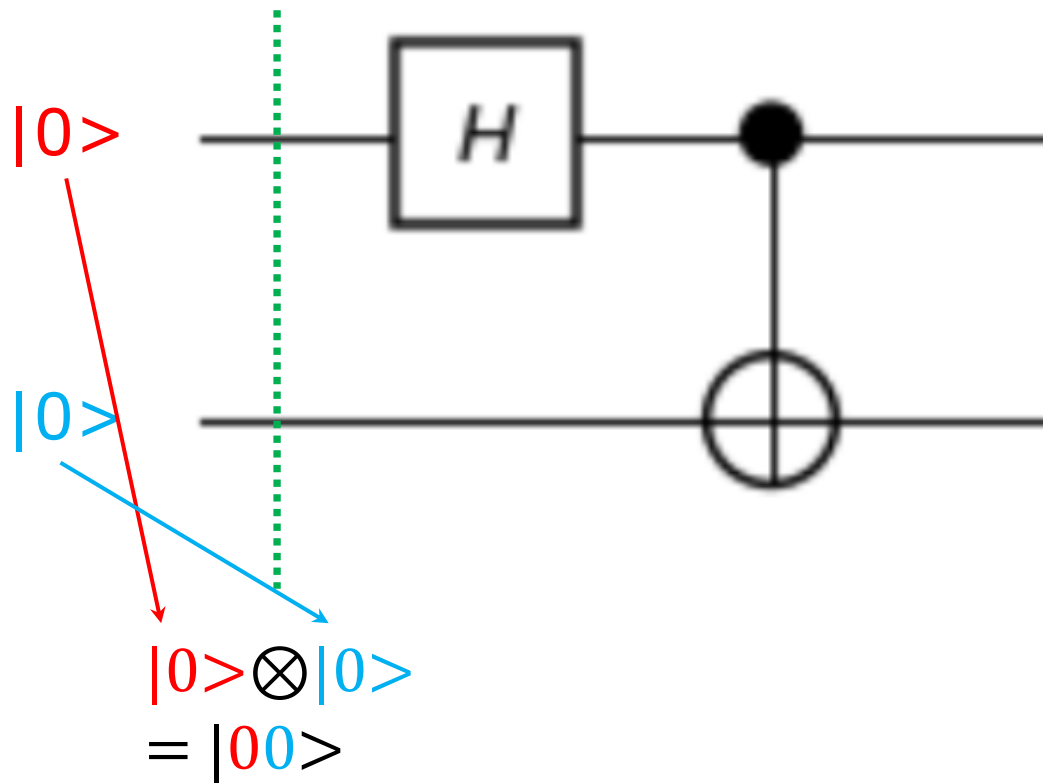
入力 $|00\rangle$ の場合



$$\begin{aligned} &|0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= |00\rangle \end{aligned}$$

Bell State ゲートの働き

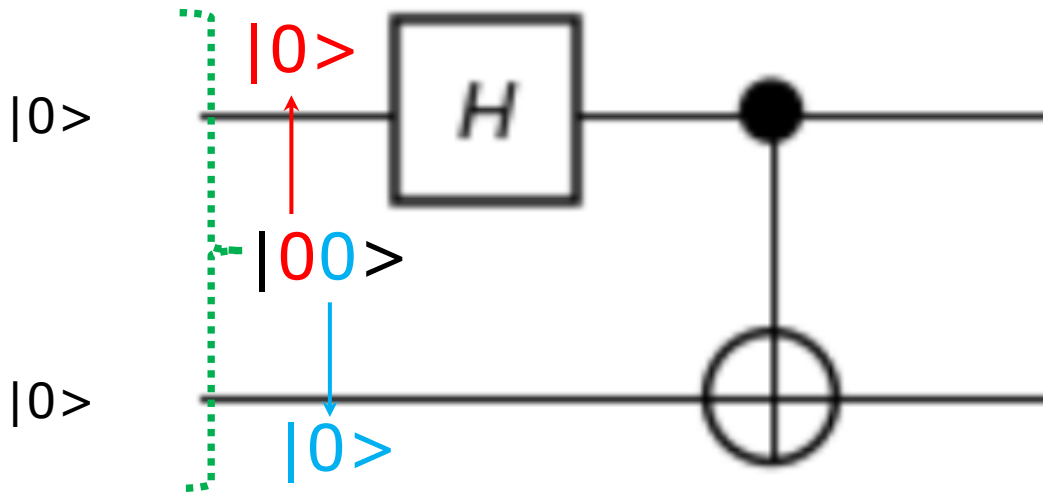
入力 $|00\rangle$ の場合



システム全体の状態は、部分システムの状態のテンソル積で与えられる

Bell State ゲートの働き

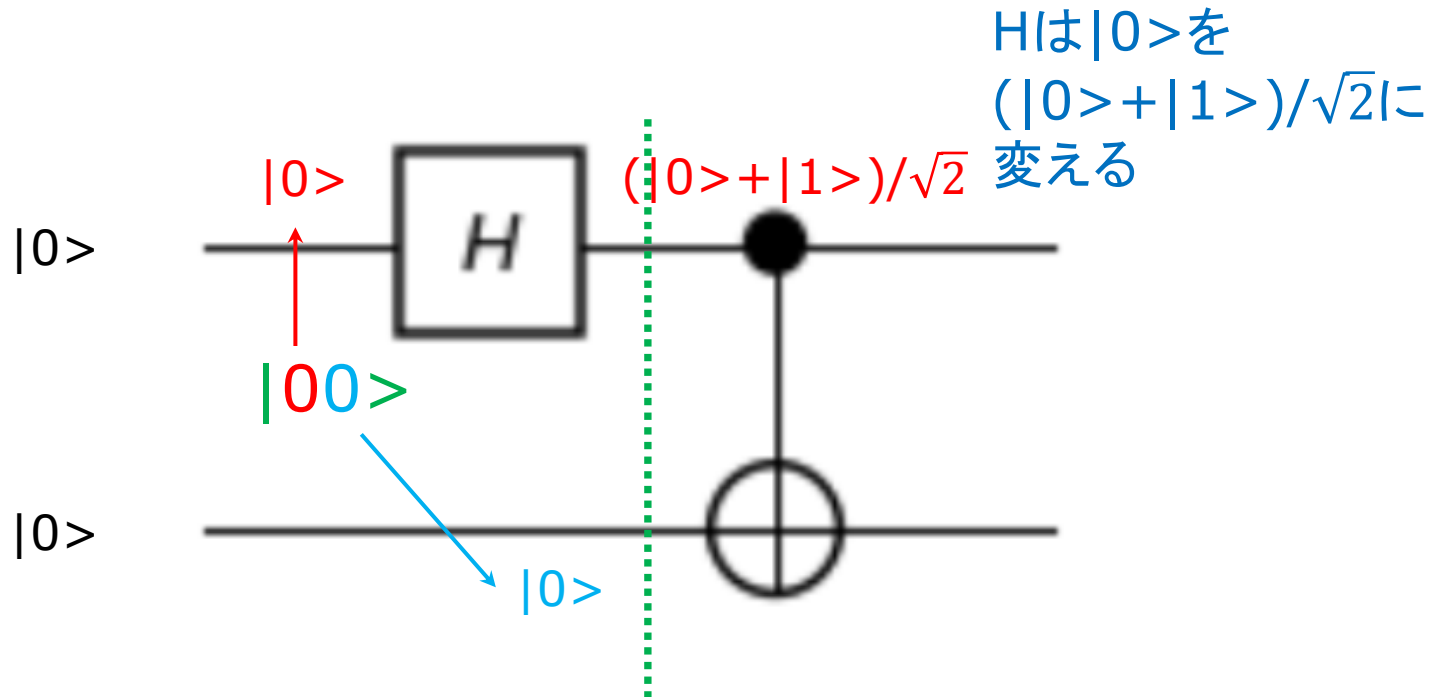
入力 $|00\rangle$ の場合



$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle \\ = |00\rangle \end{aligned}$$

Bell State ゲートの働き

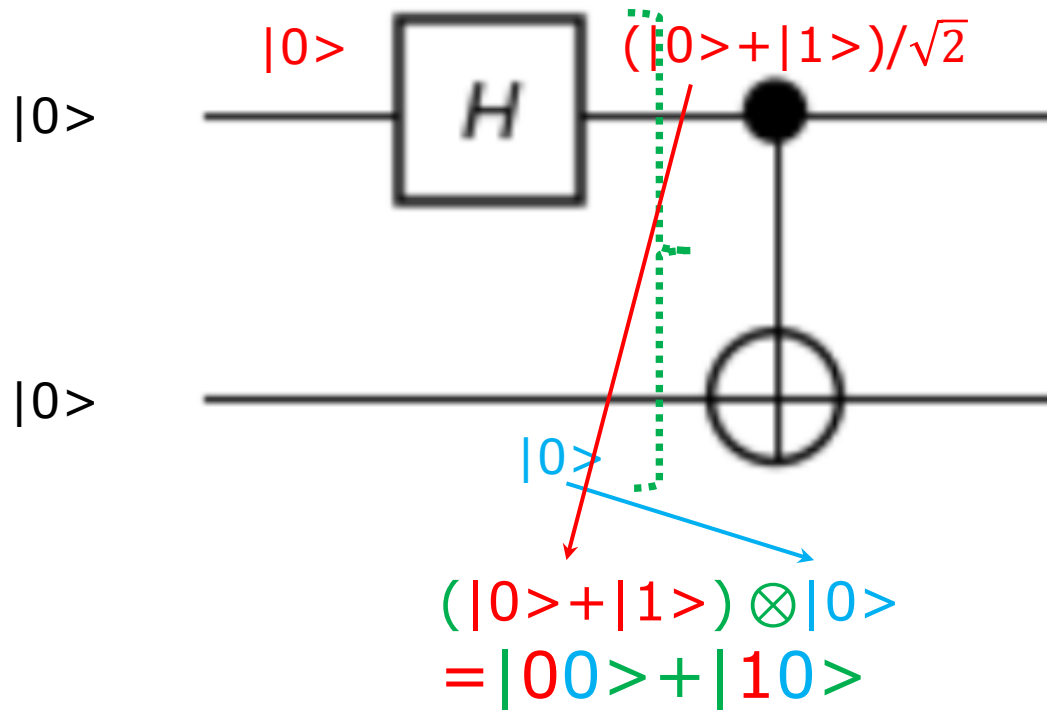
入力 $|00\rangle$ の場合



$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

Bell State ゲートの働き

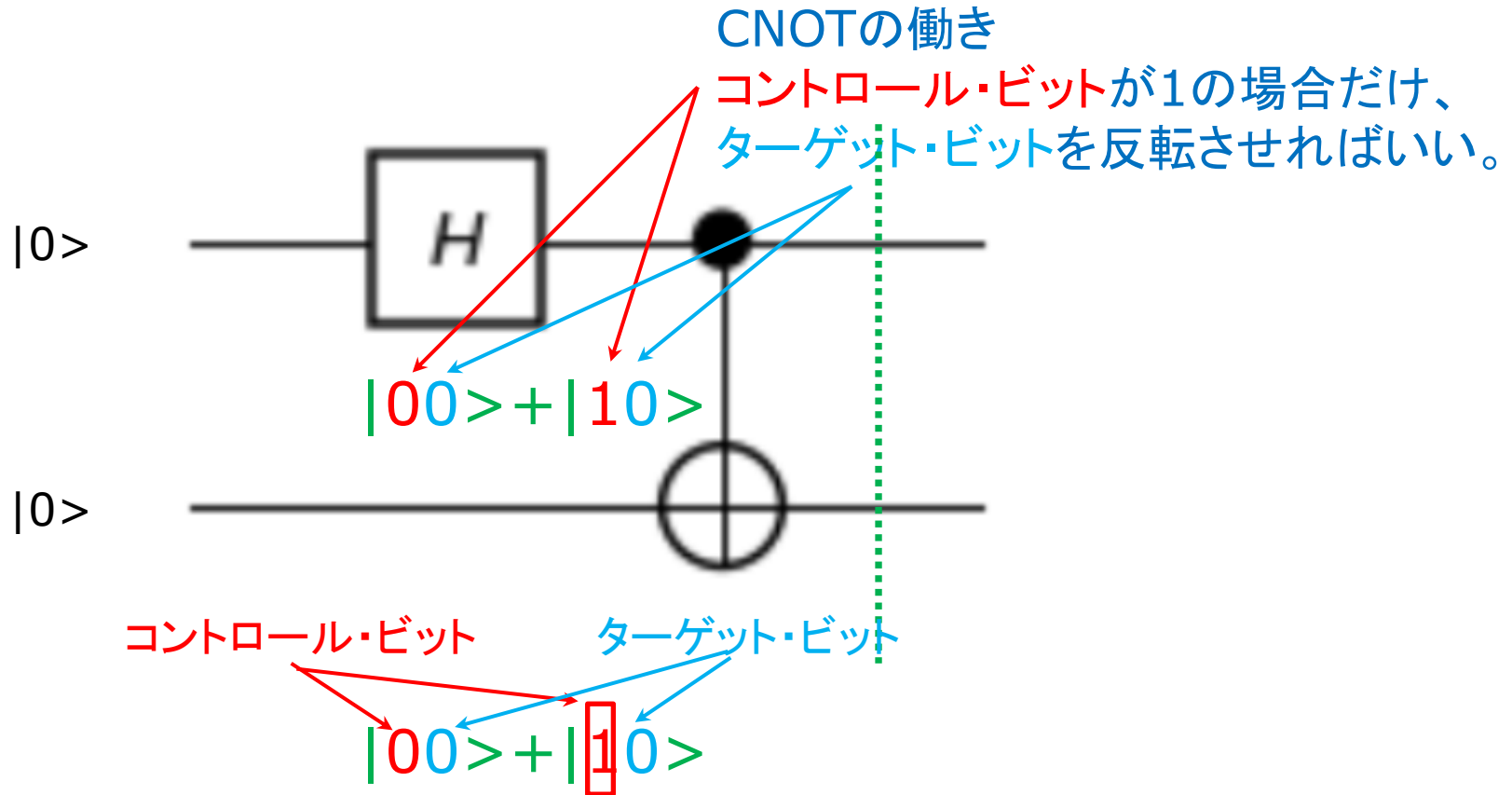
入力 $|00\rangle$ の場合



システム全体の状態は、部分システムの状態のテンソル積で与えられる

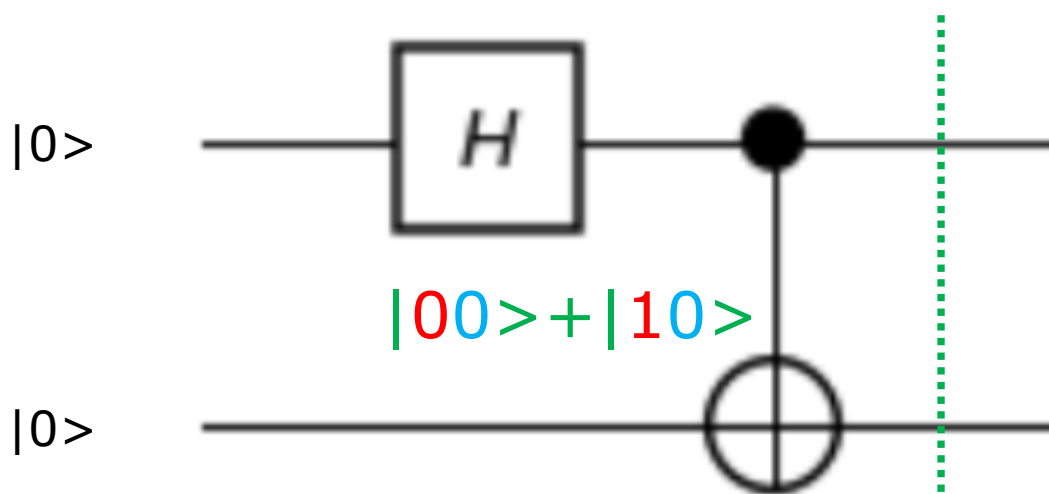
Bell State ゲートの働き

入力 $|00\rangle$ の場合



Bell State ゲートの働き

入力 $|00\rangle$ の場合



コントロール・ビット

ターゲット・ビット

$$|00\rangle + |10\rangle$$



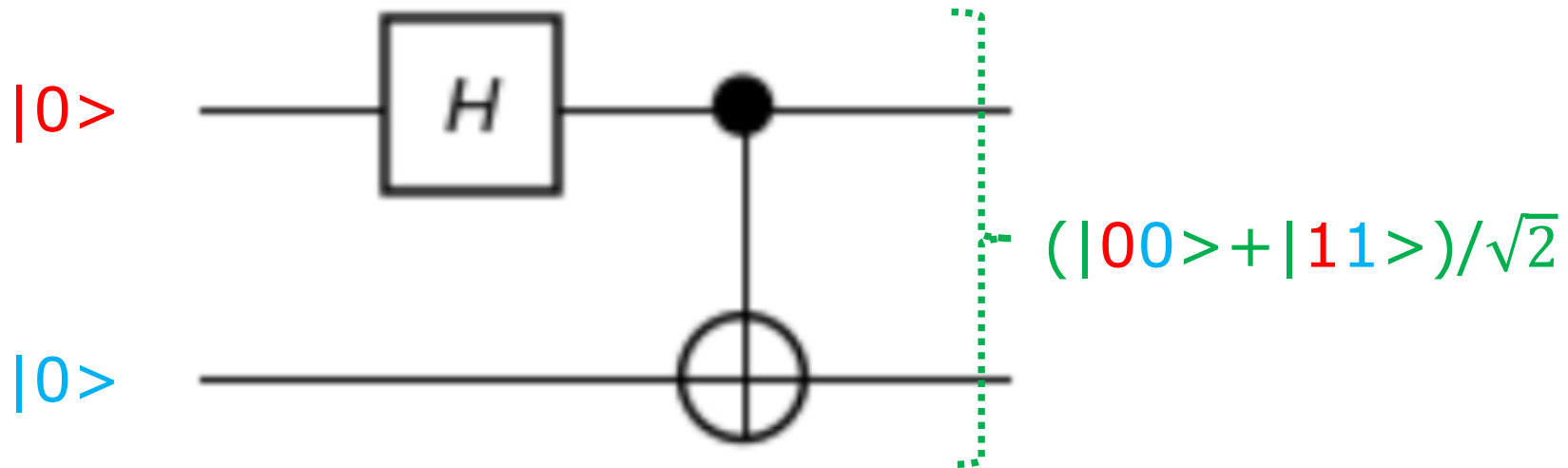
$$|00\rangle + |11\rangle$$

CNOTの働き

コントロール・ビットが1なので、
ターゲット・ビットが反転する。

Bell State ゲートの働き

入力 $|00\rangle$ の場合

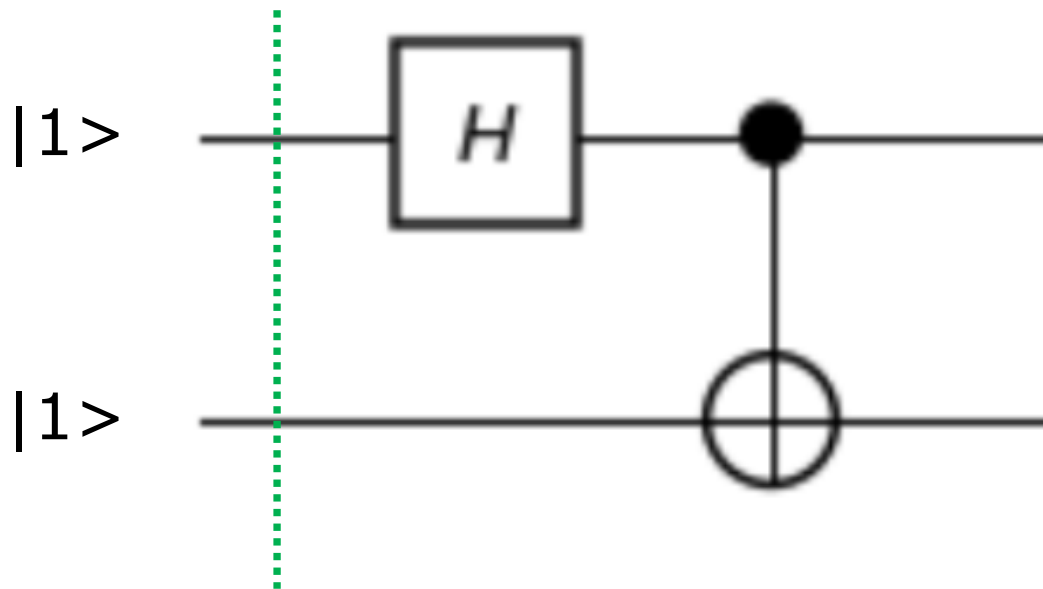


$$\begin{aligned} &|00\rangle + |\boxed{1}0\rangle \\ &\quad \rightarrow \\ &|00\rangle + |\boxed{1}\boxed{1}\rangle \end{aligned}$$

Bell State ゲートの働き 入力 $|11\rangle$ の場合

Bell State ゲートの働き

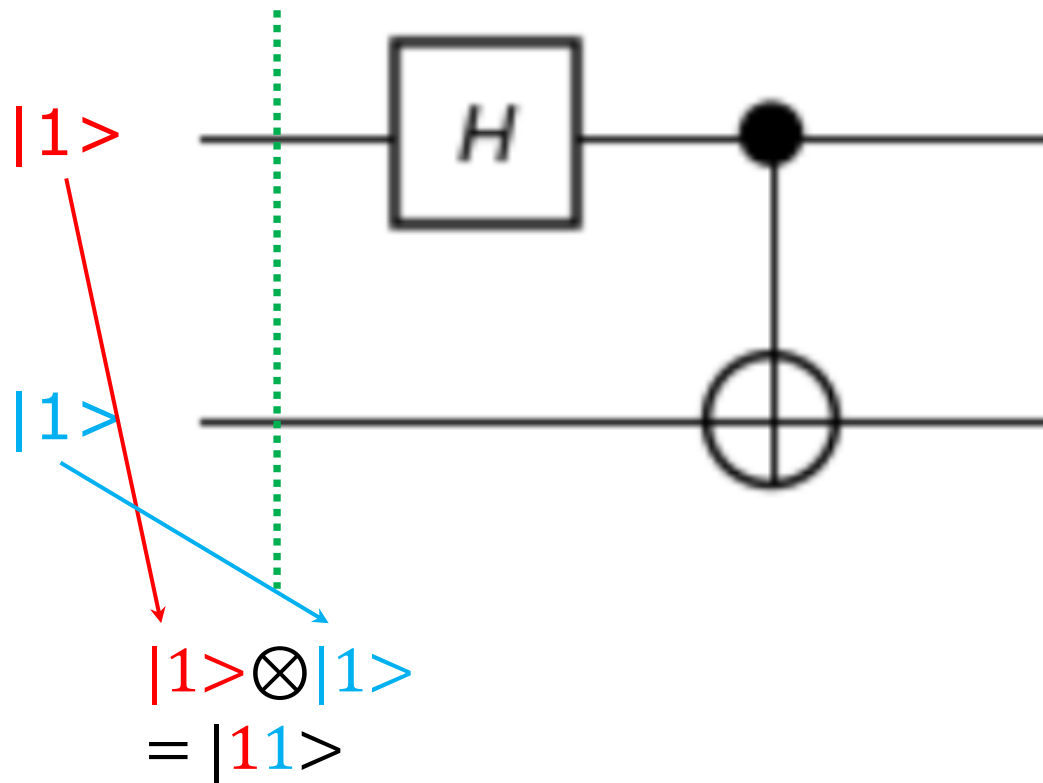
入力 $|11\rangle$ の場合



$$\begin{aligned} &|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |11\rangle \end{aligned}$$

Bell State ゲートの働き

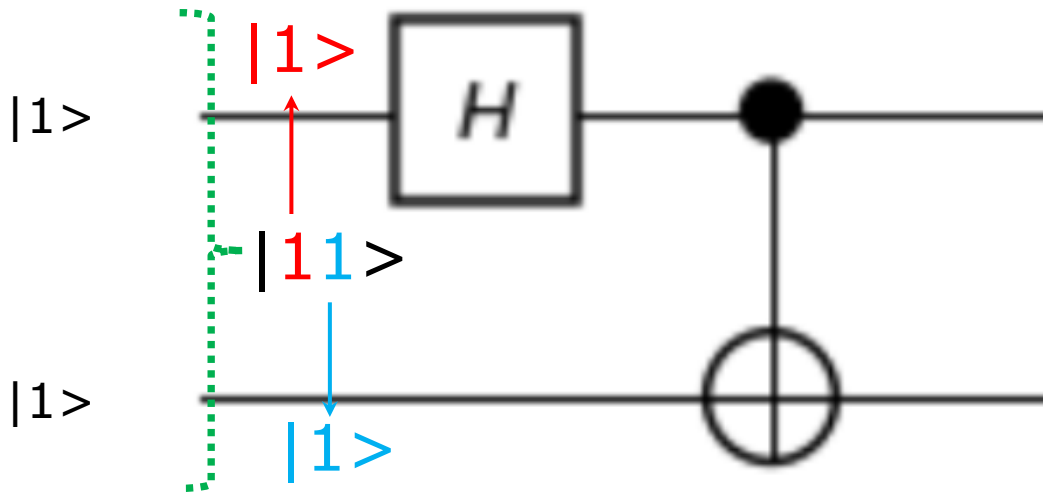
入力 $|11\rangle$ の場合



システム全体の状態は、部分システムの状態のテンソル積で与えられる

Bell State ゲートの働き

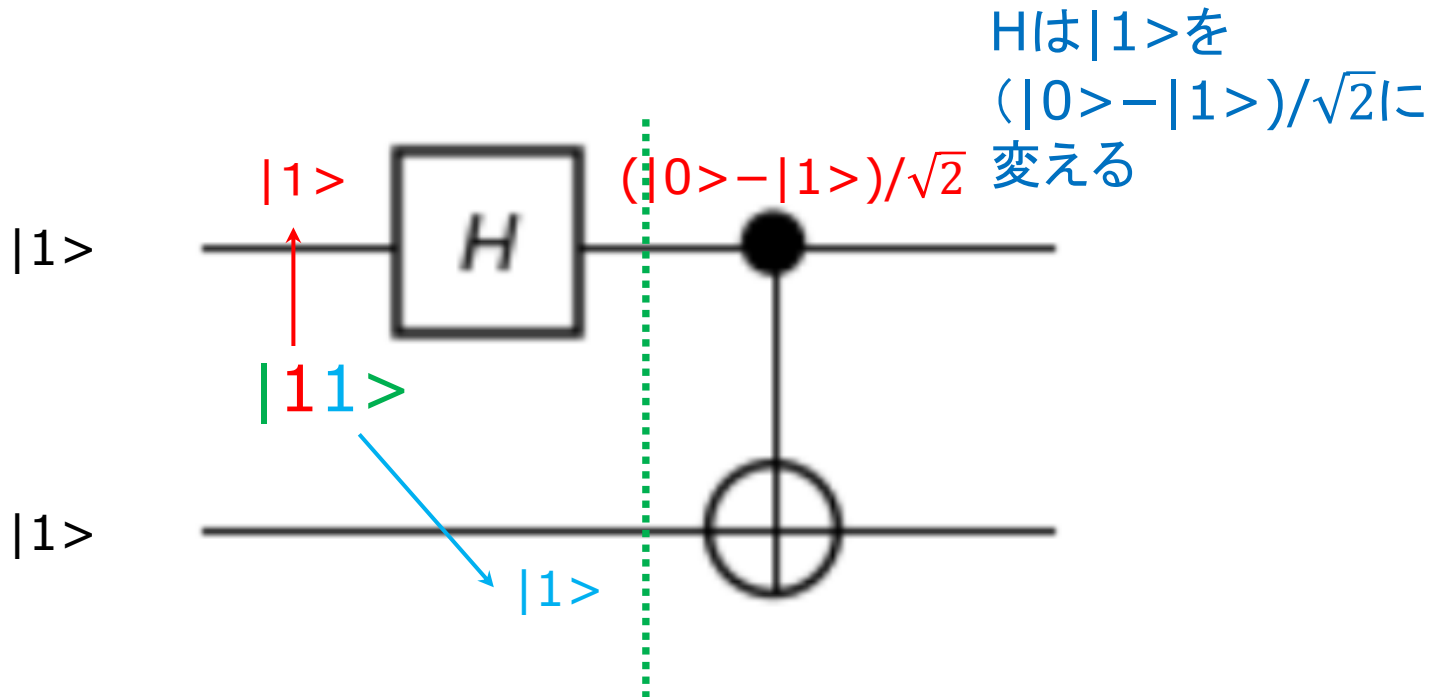
入力 $|11\rangle$ の場合



$$\begin{aligned} |1\rangle \otimes |1\rangle \\ = |11\rangle \end{aligned}$$

Bell State ゲートの働き

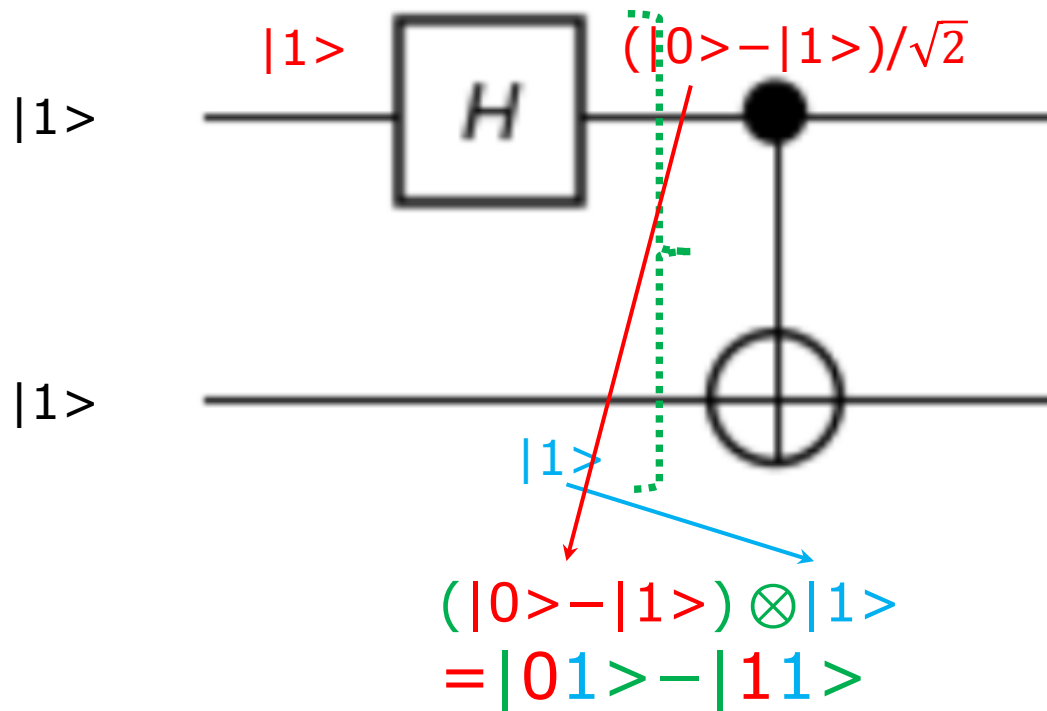
入力 $|11\rangle$ の場合



$$|1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Bell State ゲートの働き

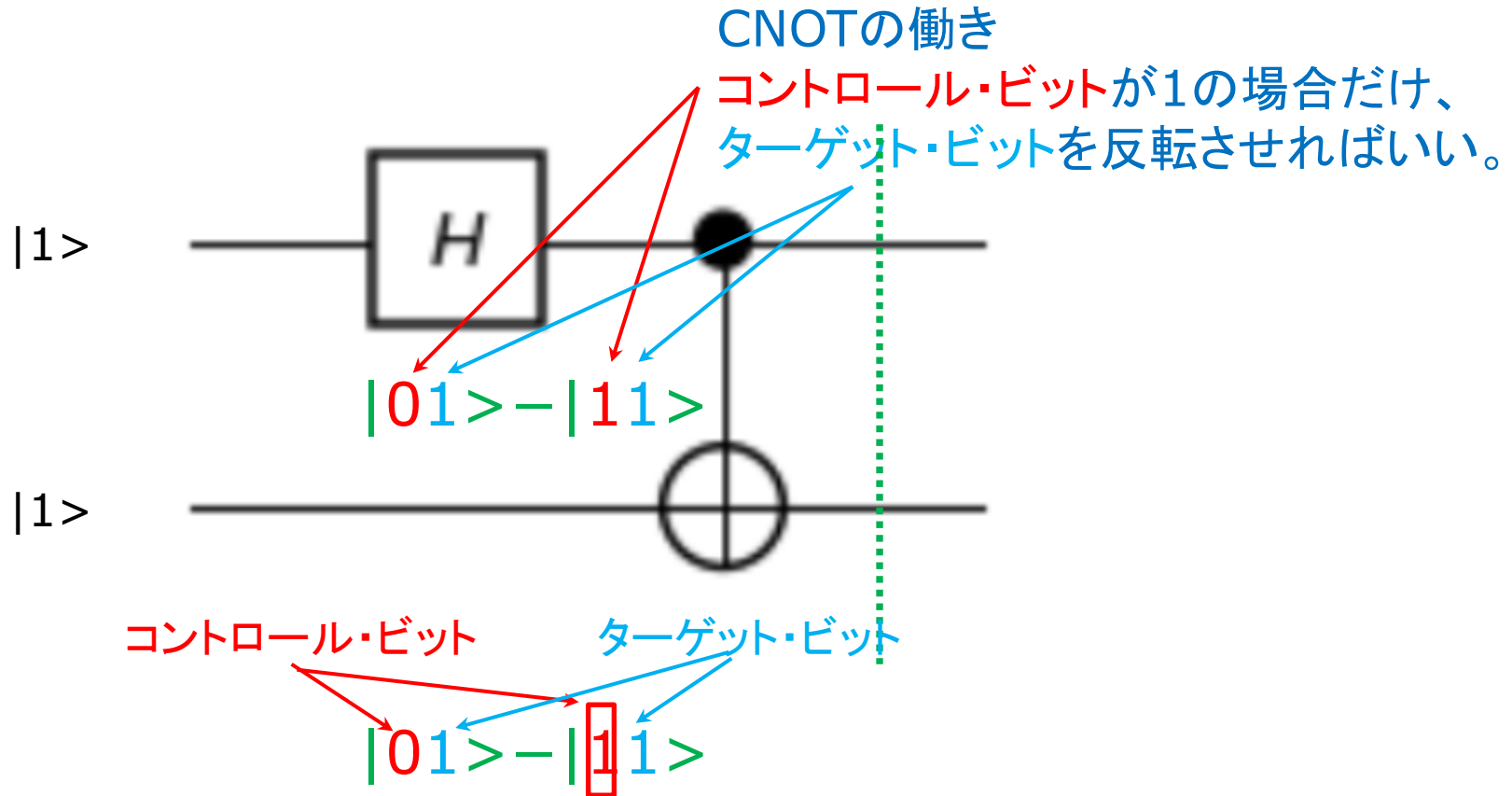
入力 $|11\rangle$ の場合



システム全体の状態は、部分システムの状態のテンソル積で与えられる

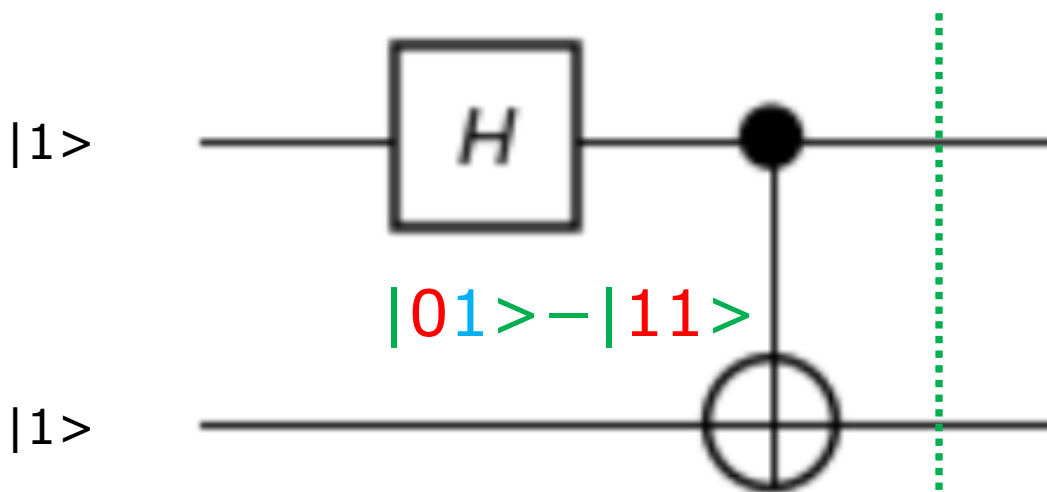
Bell State ゲートの働き

入力 $|11\rangle$ の場合



Bell State ゲートの働き

入力 $|11\rangle$ の場合



コントロール・ビット

ターゲット・ビット

$|01\rangle - |11\rangle$



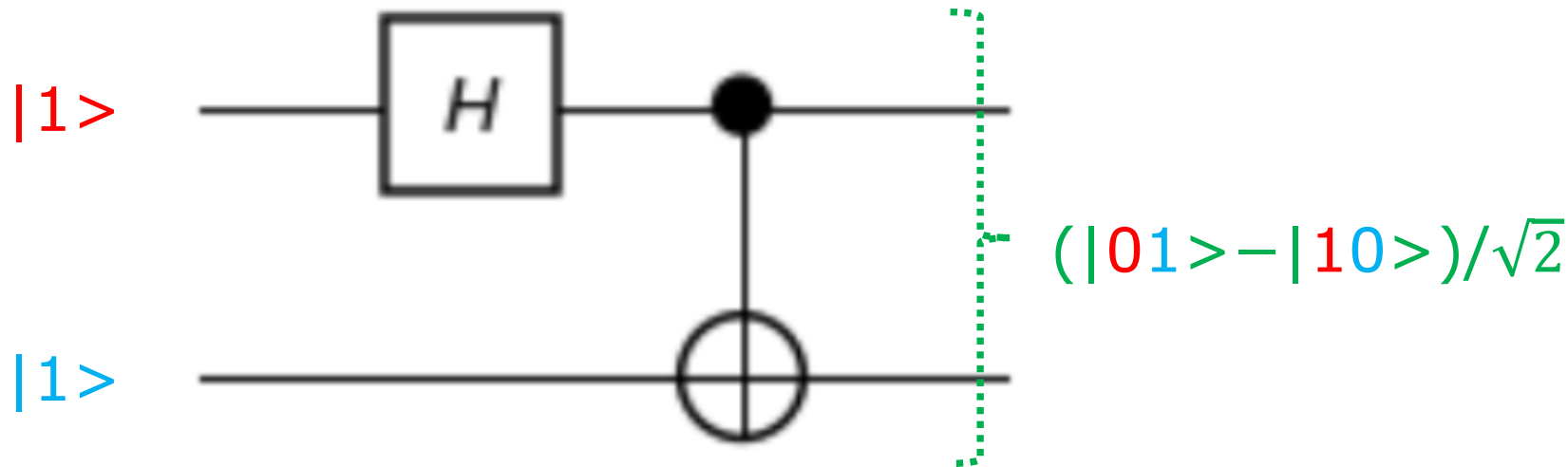
$|01\rangle - |10\rangle$

CNOTの働き

コントロール・ビットが1なので、
ターゲット・ビットが反転する。

Bell State ゲートの働き

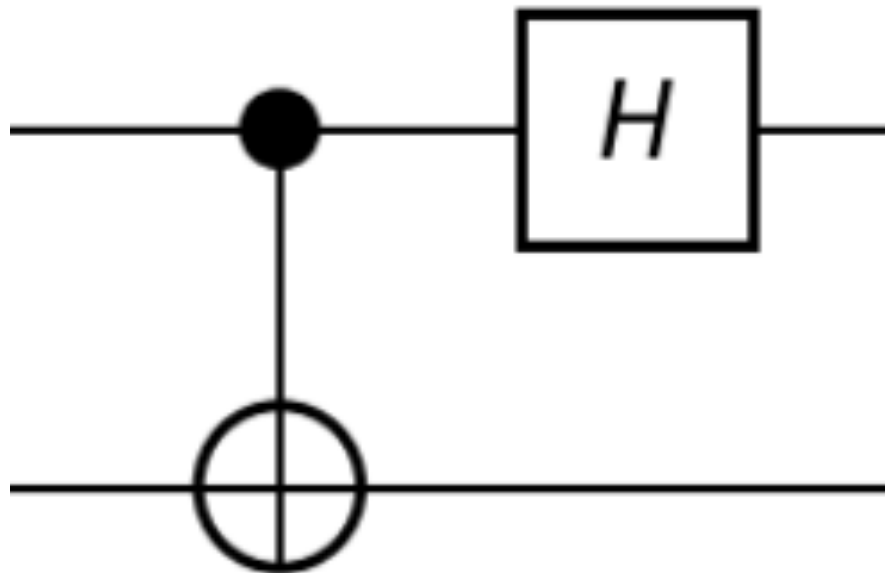
入力 $|11\rangle$ の場合



$$\begin{aligned}
 &|01\rangle - |11\rangle \\
 &\quad \rightarrow \\
 &|01\rangle - |10\rangle
 \end{aligned}$$

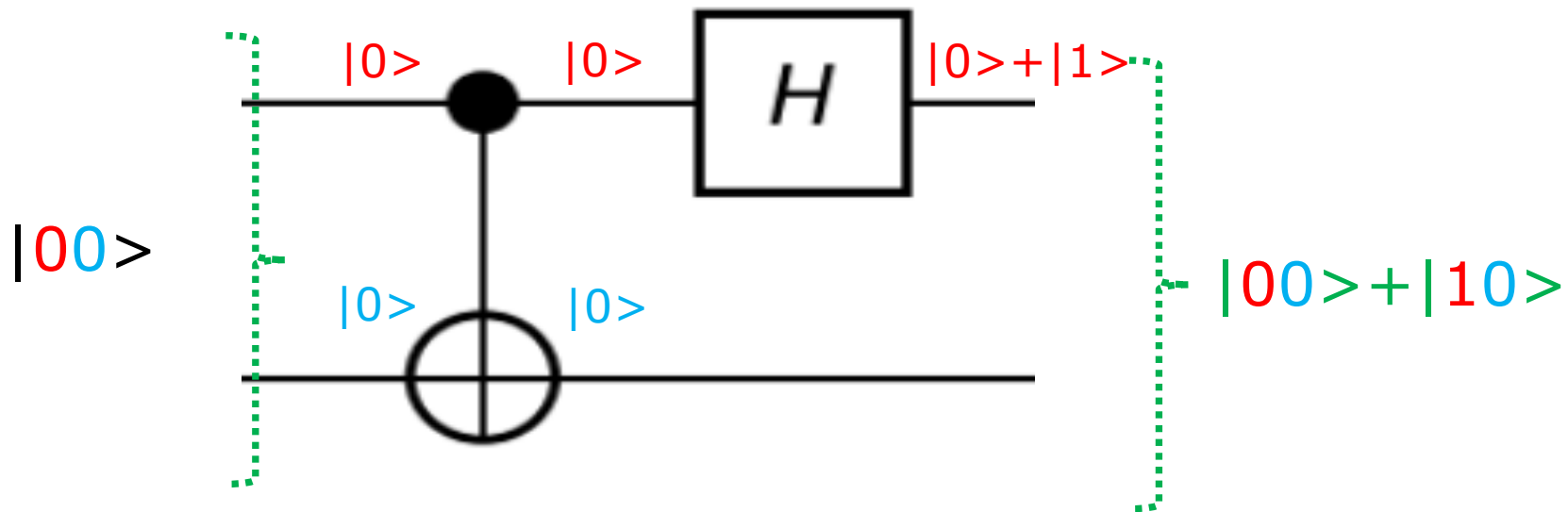
Bell State を計測する Bell Measure Gate

Bell Measure ゲート



Bell Measure ゲートの働き

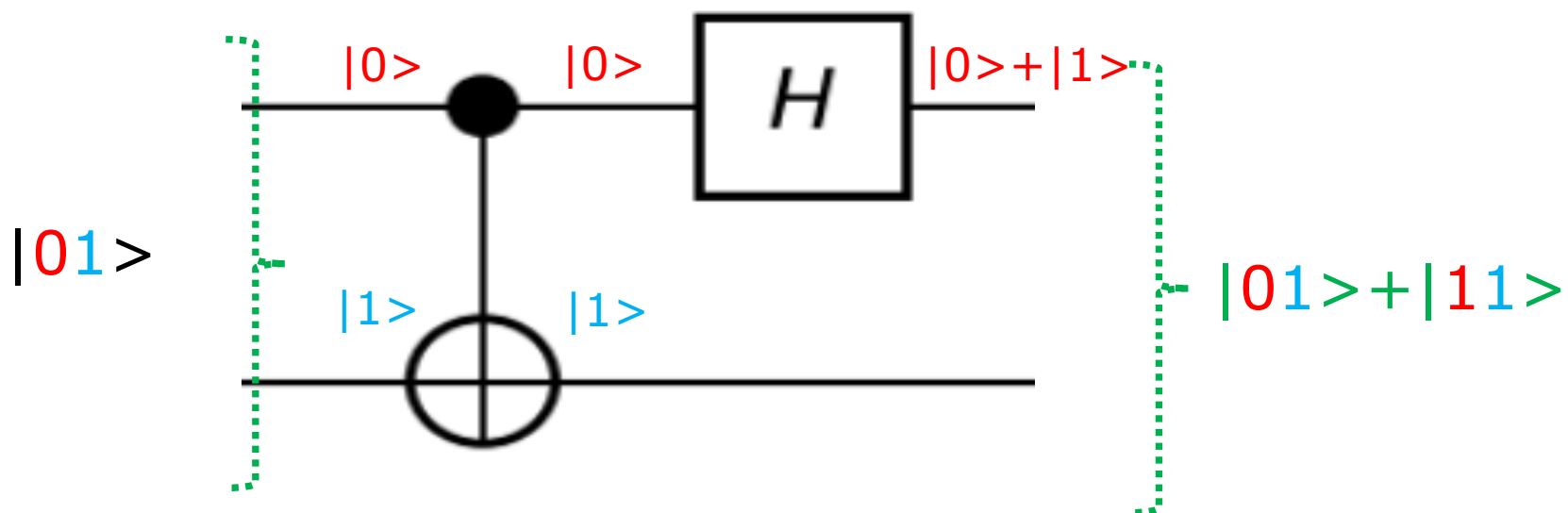
入力 $|00\rangle$ の場合



$$\text{BMG}|00\rangle = (|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き

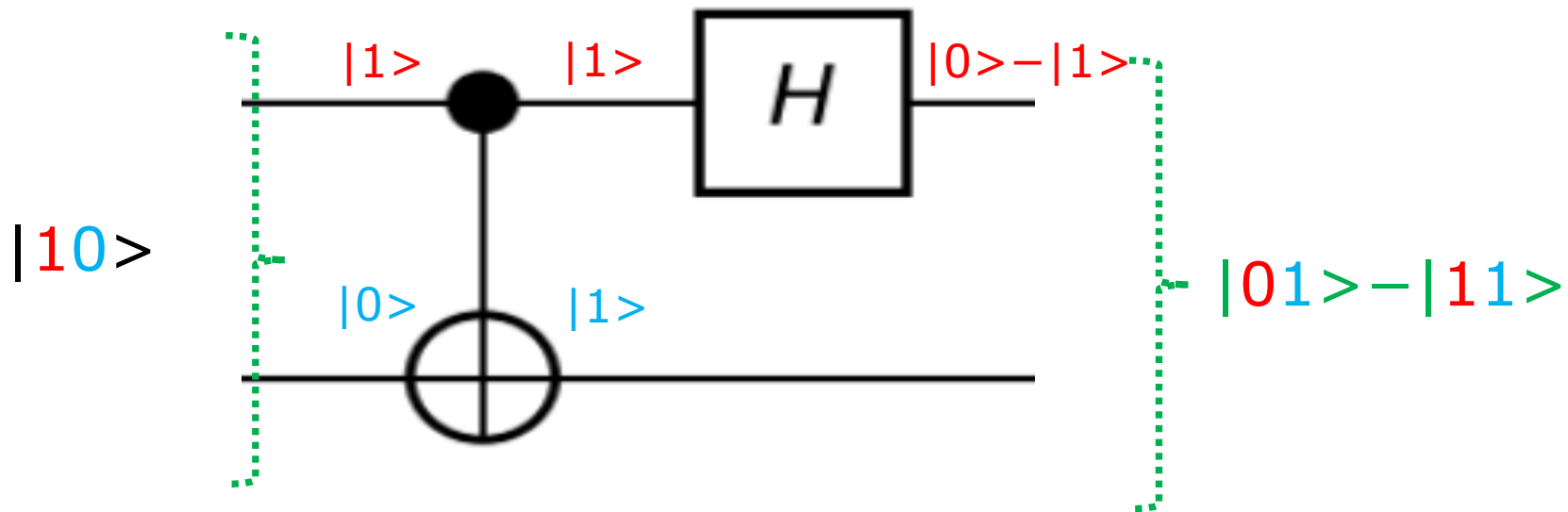
入力 $|01\rangle$ の場合



$$\text{BMG}|01\rangle = (|01\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き

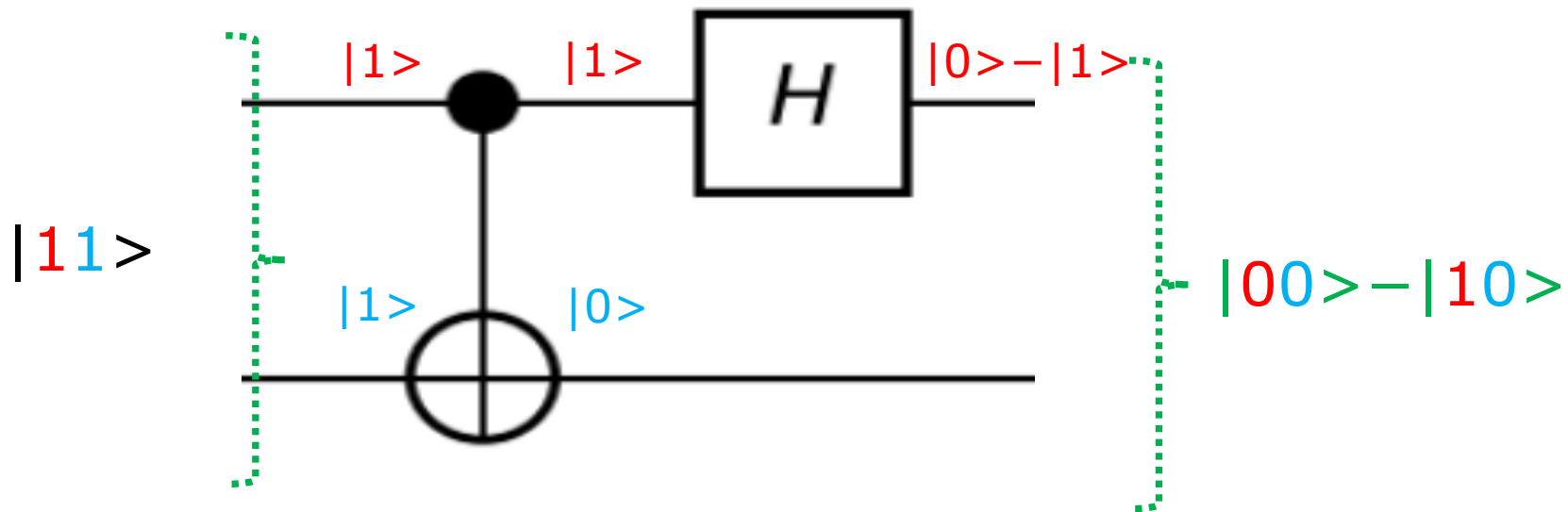
入力 $|10\rangle$ の場合



$$\text{BMG}|10\rangle = (|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き

入力 $|11\rangle$ の場合



$$\text{BMG}|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き まとめ

$$\text{BMG}|00\rangle = (|00\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|01\rangle = (|01\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|10\rangle = (|01\rangle - |11\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle) / \sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き 入力 $(|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$ の場合

$$\begin{aligned} & \text{BMG}((|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}) \\ &= (\text{BMG}|00\rangle + \text{BMG}|11\rangle) / \sqrt{2} \\ &= (|00\rangle + |10\rangle) / 2 + (|00\rangle - |10\rangle) / 2 \\ &= |00\rangle \end{aligned}$$

Bell Measure ゲートの働き
入力 $(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ の場合

$$\begin{aligned} & \text{BMG}((|01\rangle - |10\rangle) / \sqrt{2}) \\ &= (\text{BMG}|01\rangle - \text{BMG}|10\rangle) / \sqrt{2} \\ &= (|01\rangle + |11\rangle) / 2 - (|01\rangle - |11\rangle) / 2 \\ &= |11\rangle \end{aligned}$$

演習問題 4-1

□ 先の回路Bell State GateをBSGと表そう。

1. 先の計算 $\text{BSG}|00\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ を自分の手で確かめよ。
2. 先の計算 $\text{BSG}|11\rangle = 1/\sqrt{2} (|01\rangle - |10\rangle)$ を自分の手で確かめよ。
3. $\text{BSG}|01\rangle$ を計算せよ。
4. $\text{BSG}|10\rangle$ を計算せよ。

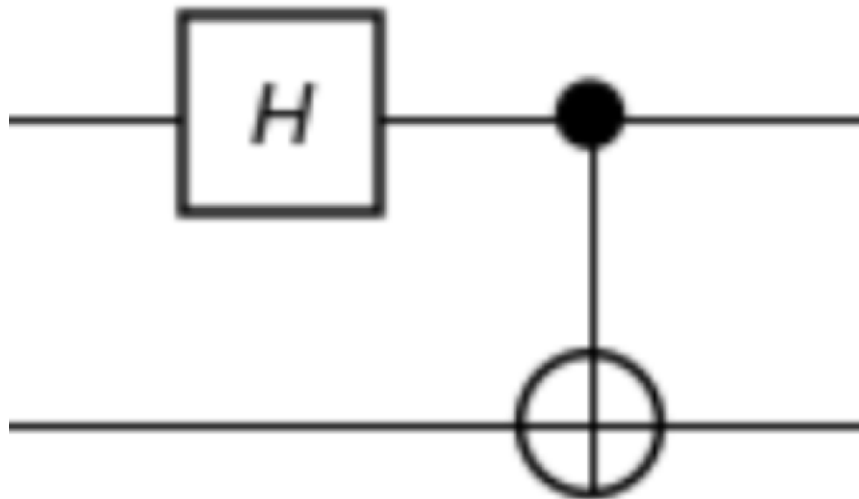
演習問題 4-2

□ 先の回路Bell Measure GateをBMGと表そう。

1. 先の計算 $\text{BMG}(1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)) = |00\rangle$ を自分の手で確かめよ。
2. 先の計算 $\text{BMG}(1/\sqrt{2} (|01\rangle - |10\rangle)) = |11\rangle$ を自分の手で確かめよ。
3. $\text{BMG}(1/\sqrt{2} (|00\rangle - |11\rangle))$ を計算せよ
4. $\text{BMG}(1/\sqrt{2} (|01\rangle + |10\rangle))$ を計算せよ

Bell State Gateと Bell Measure Gate

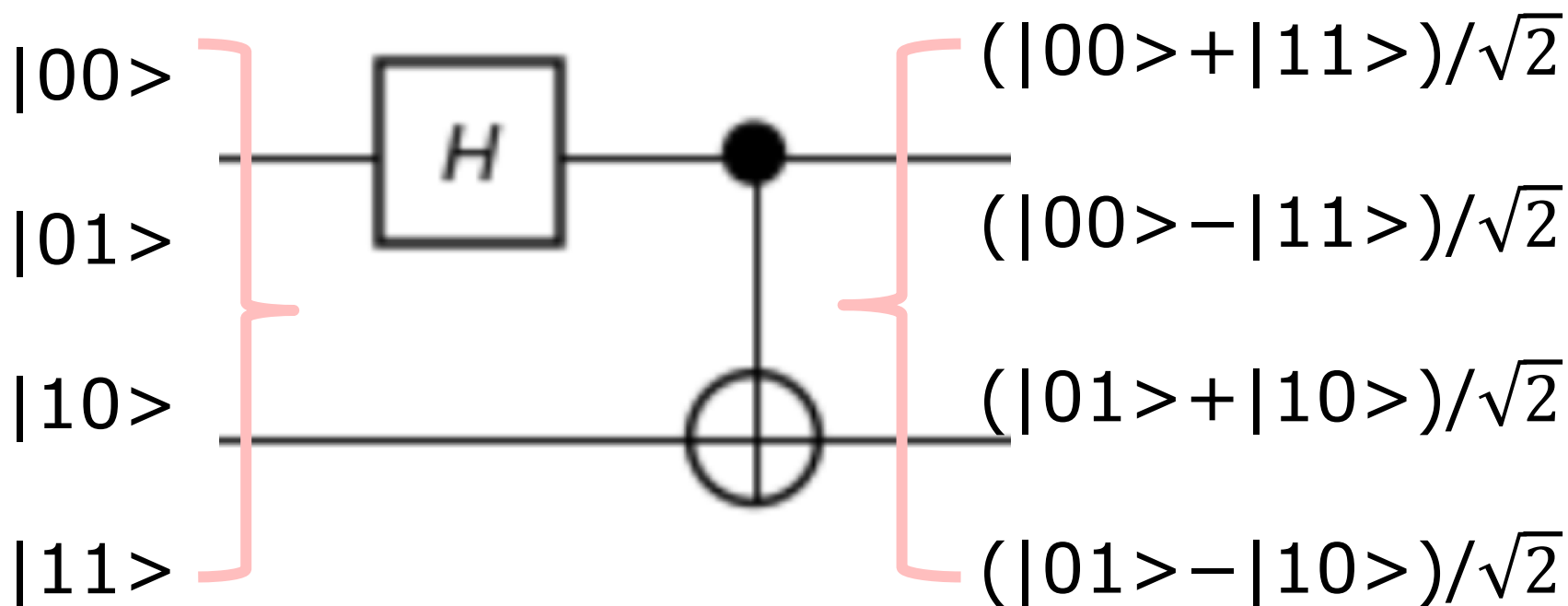
Bell State ゲート



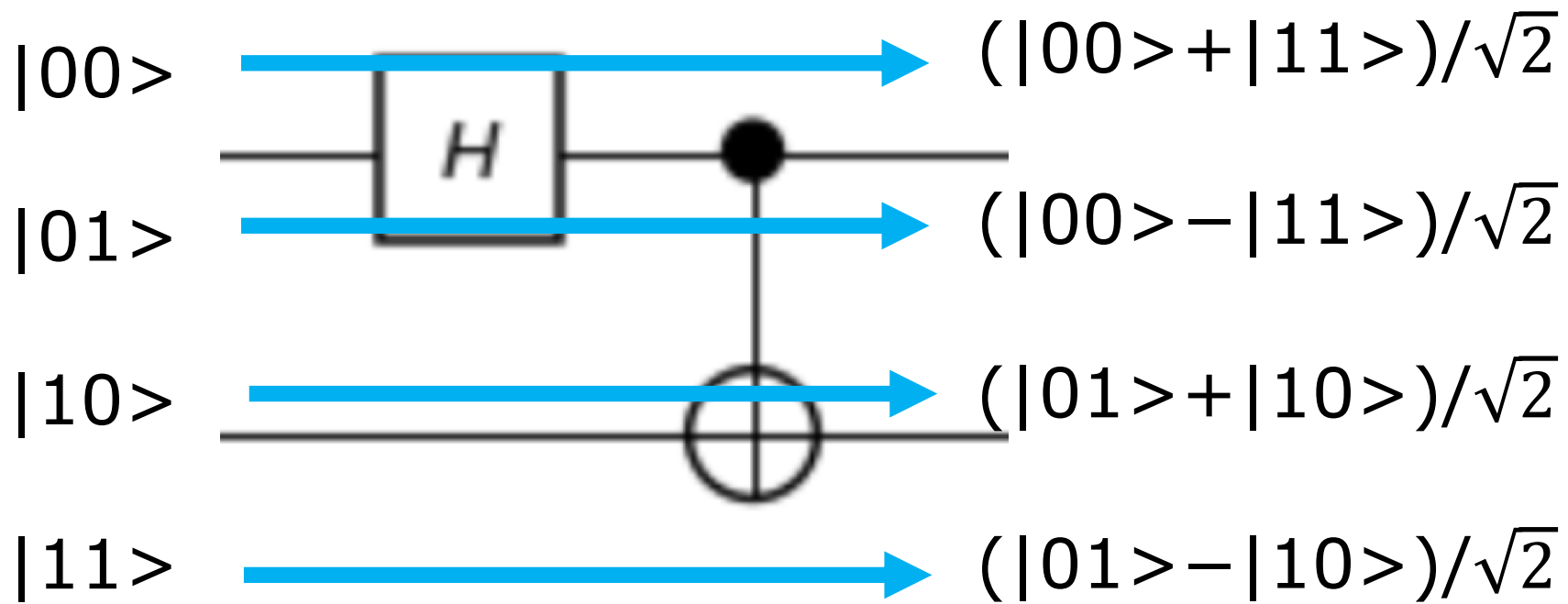
Bell State ゲート

入力

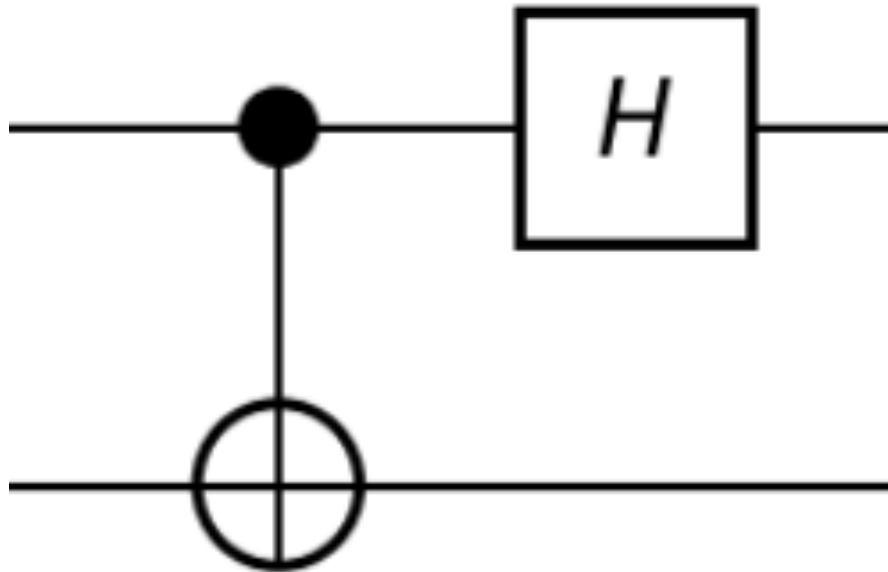
出力



Bell State ゲート



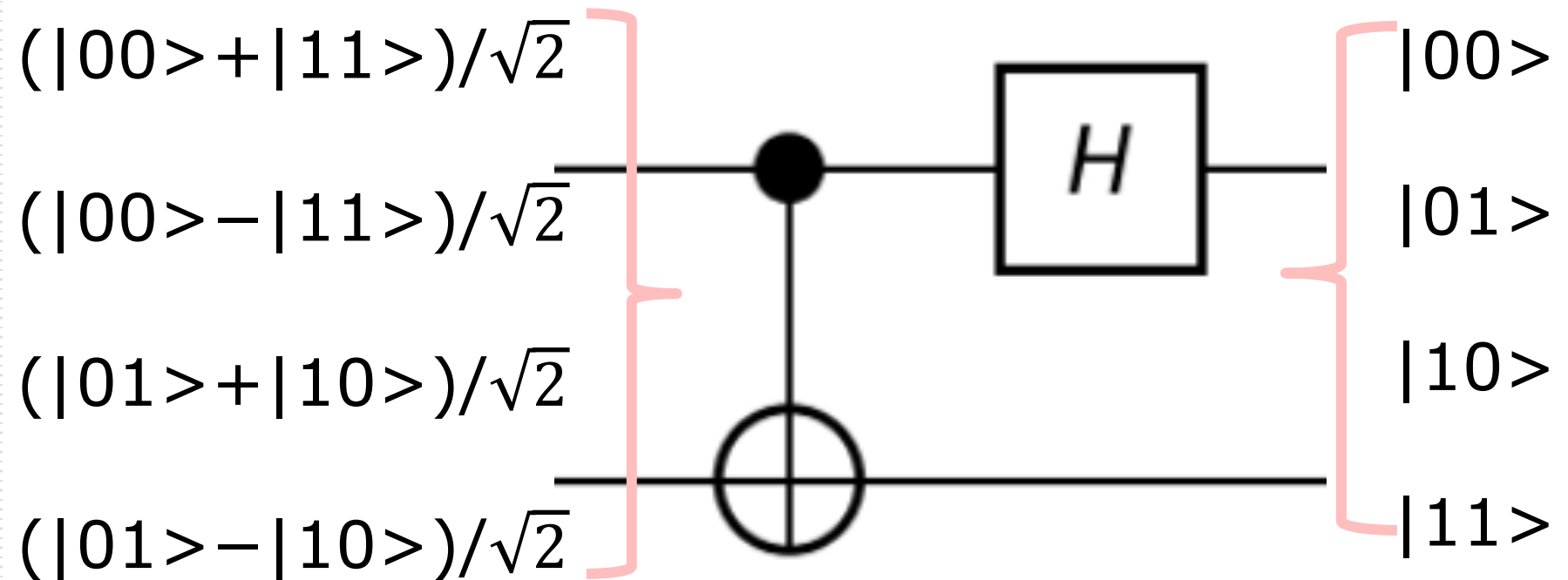
Bell Measure ゲート



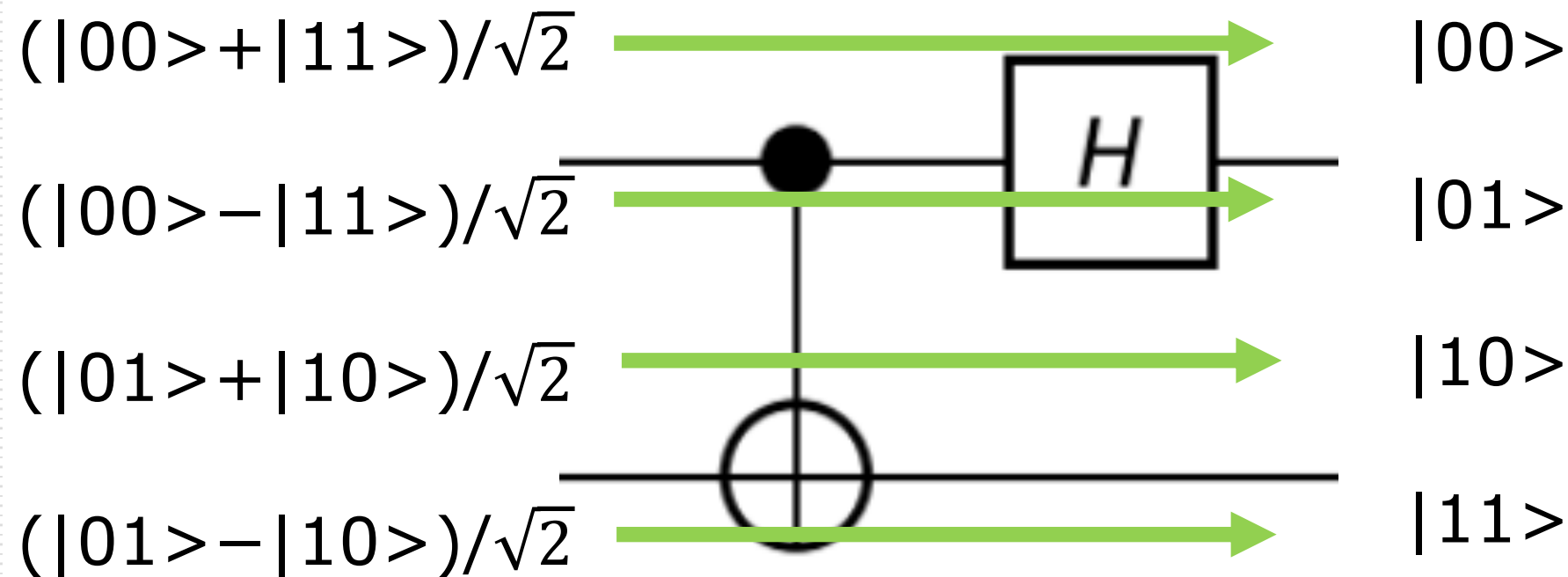
Bell Measure ゲート

入力

出力



Bell Measure ゲート



Bell 基底

$$(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^+\rangle$$

$$(|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^-\rangle$$

$$(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^+\rangle$$

$$(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^-\rangle$$

として、 $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, $|\Psi^-\rangle$
を、Bell 基底と呼ぶ。

Bell 基底と計算基底

この時、次の式が成り立つ。

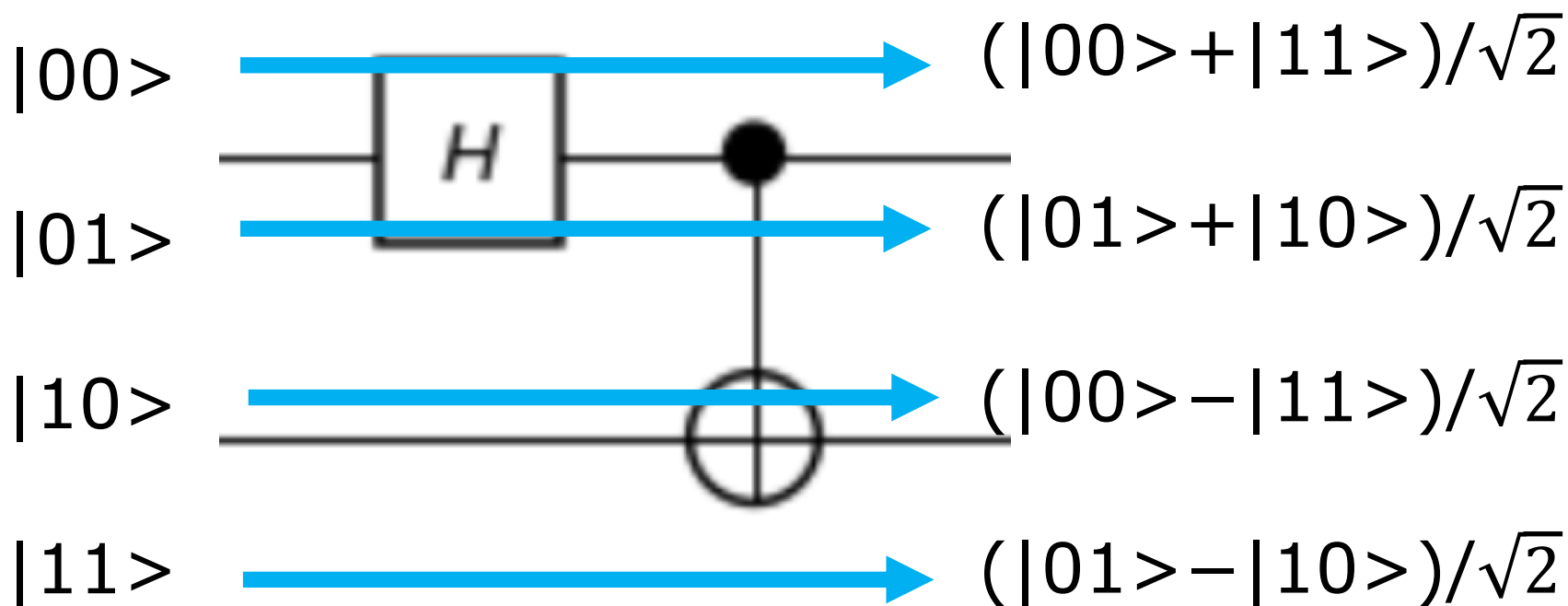
$$|00\rangle = (|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) \sqrt{2}/2$$

$$|11\rangle = (|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \sqrt{2}/2$$

$$|01\rangle = (|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) \sqrt{2}/2$$

$$|10\rangle = (|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) \sqrt{2}/2$$

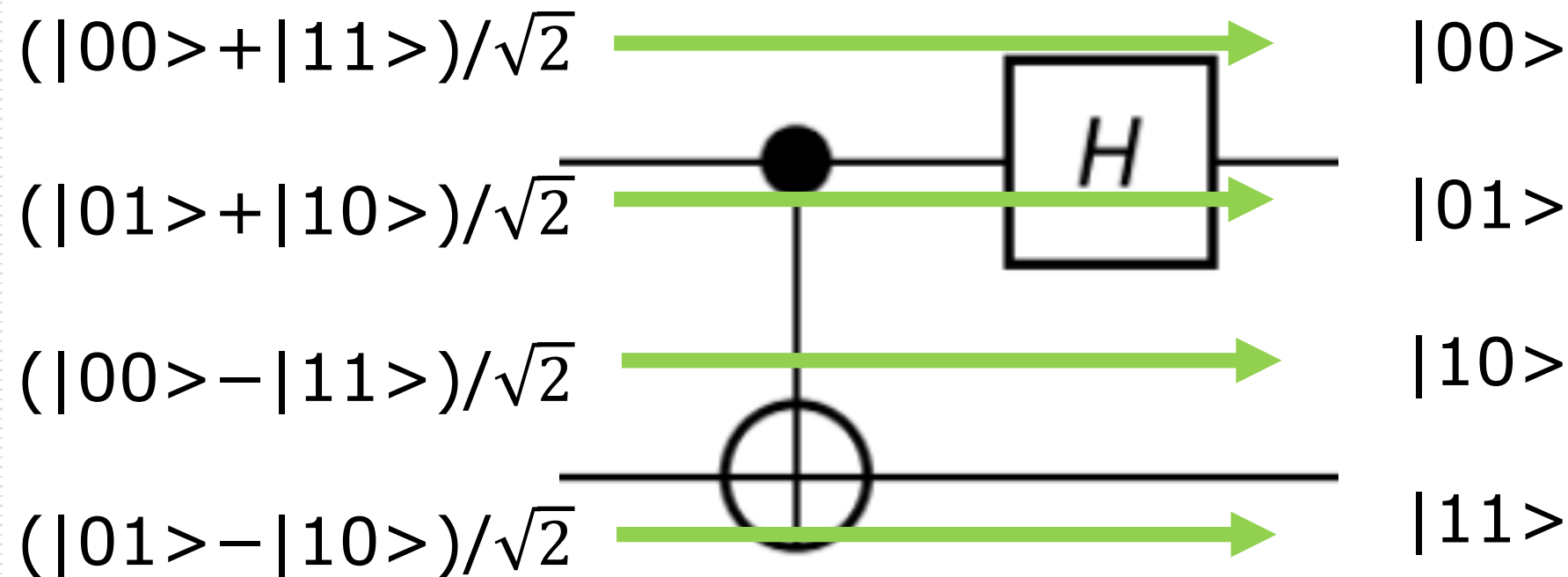
Bell State ゲート



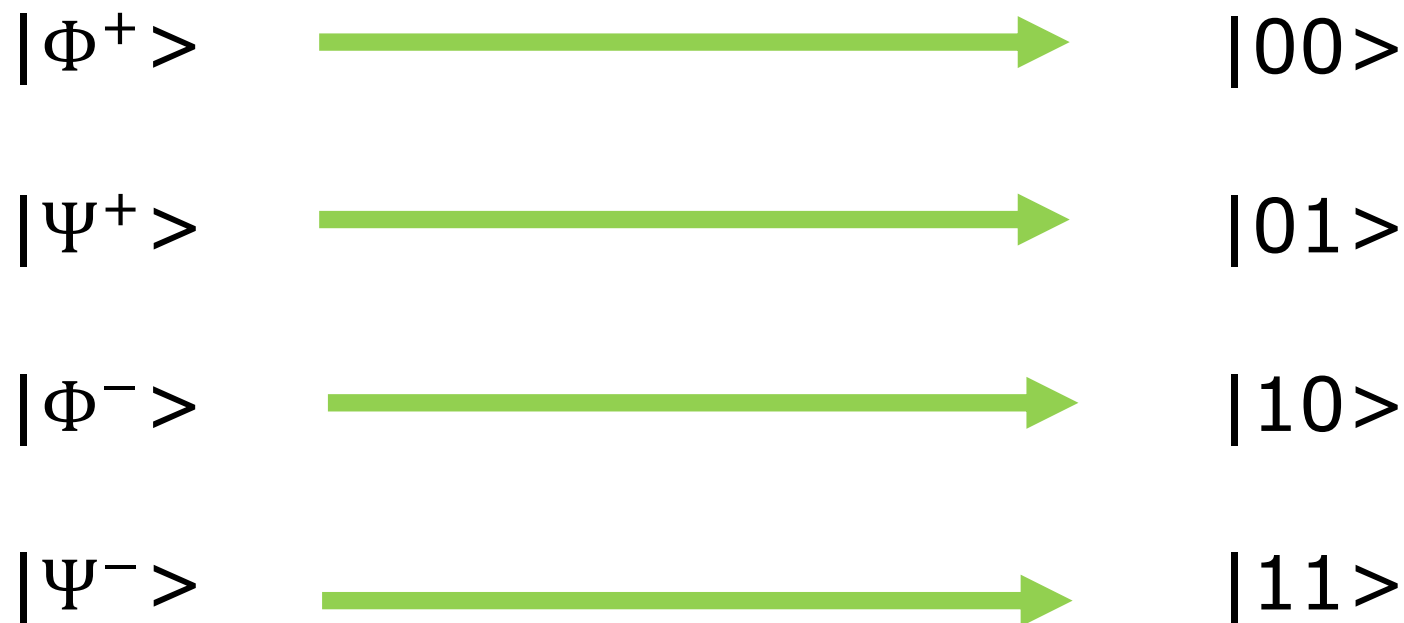
Bell State ゲートの働き



Bell Measure ゲート

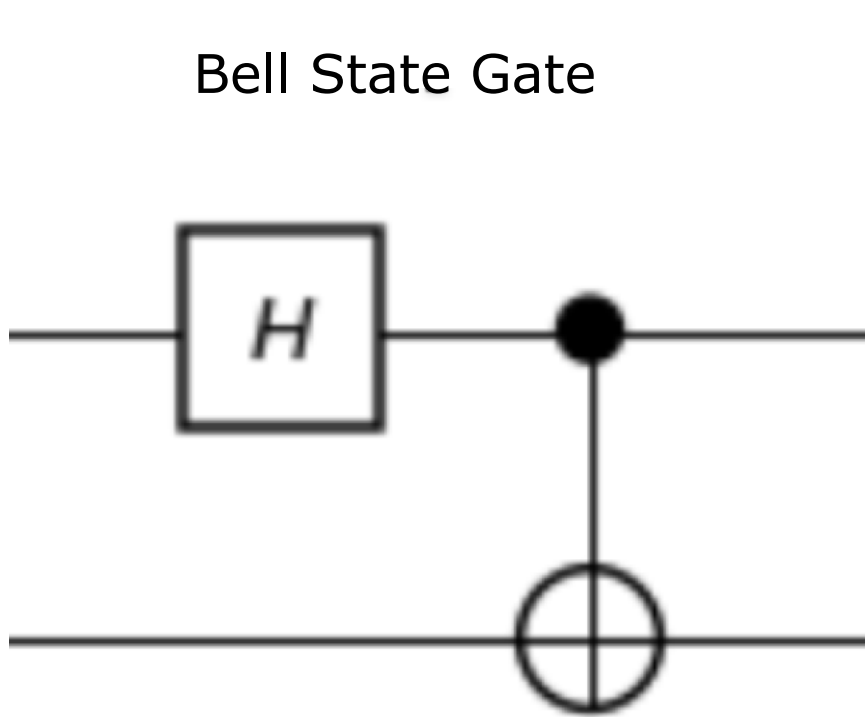


Bell Measure ゲートの働き

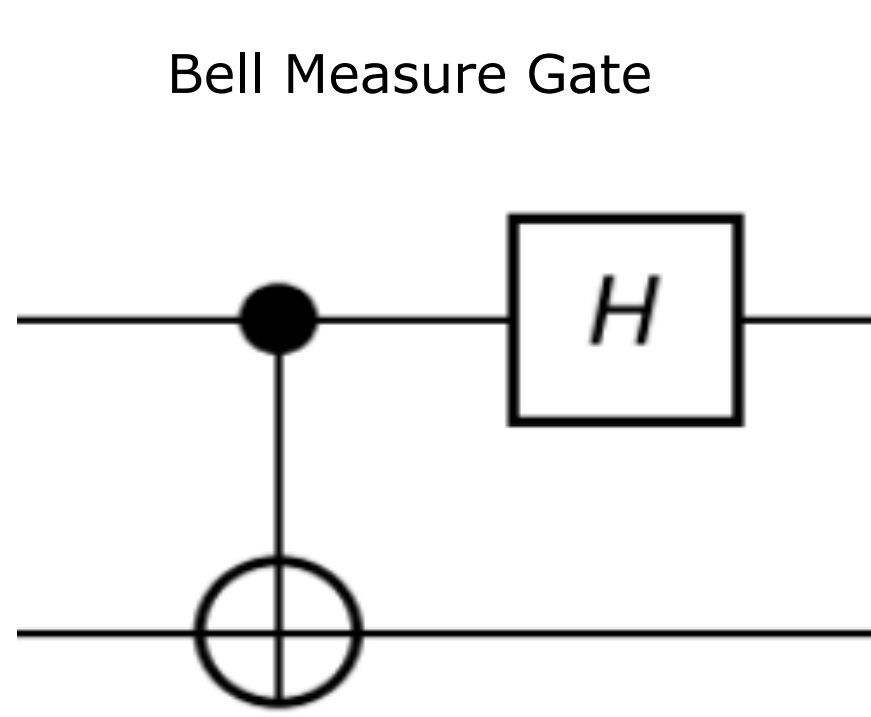


Bell State Gateと Bell Measure Gate

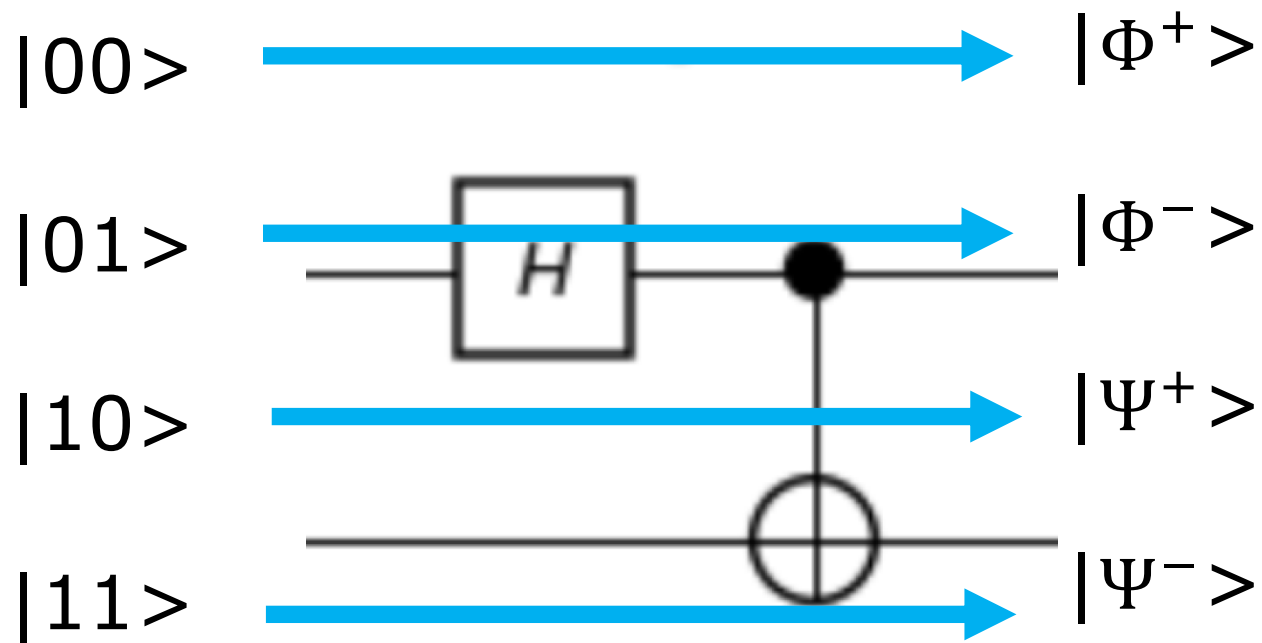
Bell State Gate



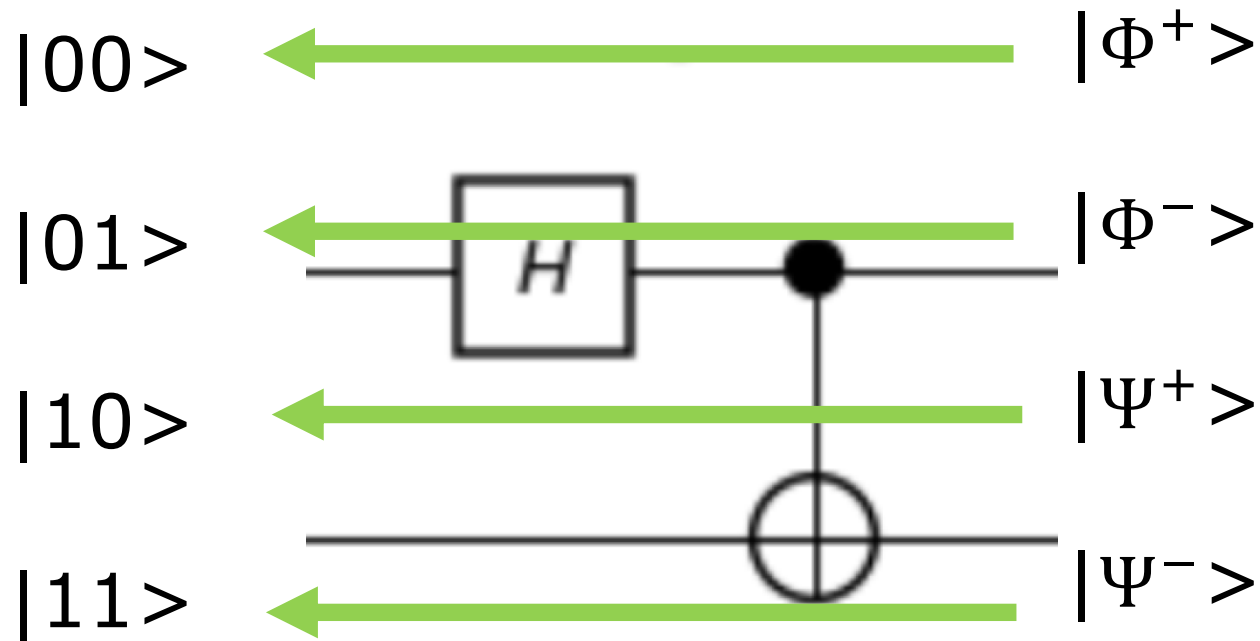
Bell Measure Gate



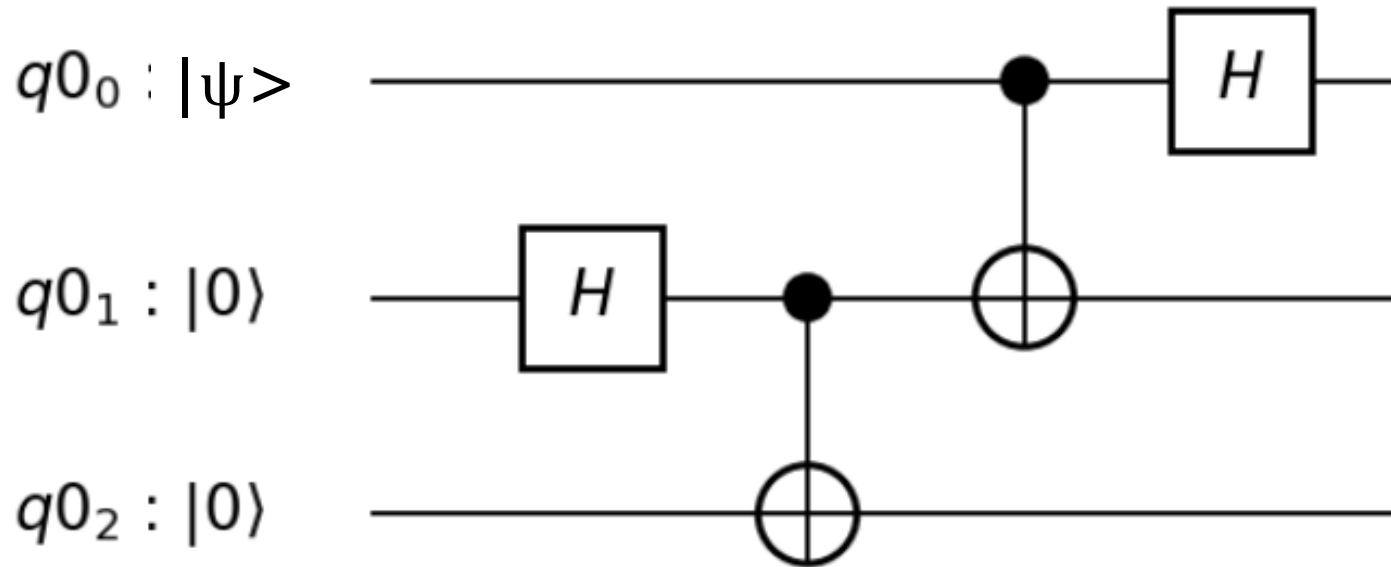
Bell State Gate



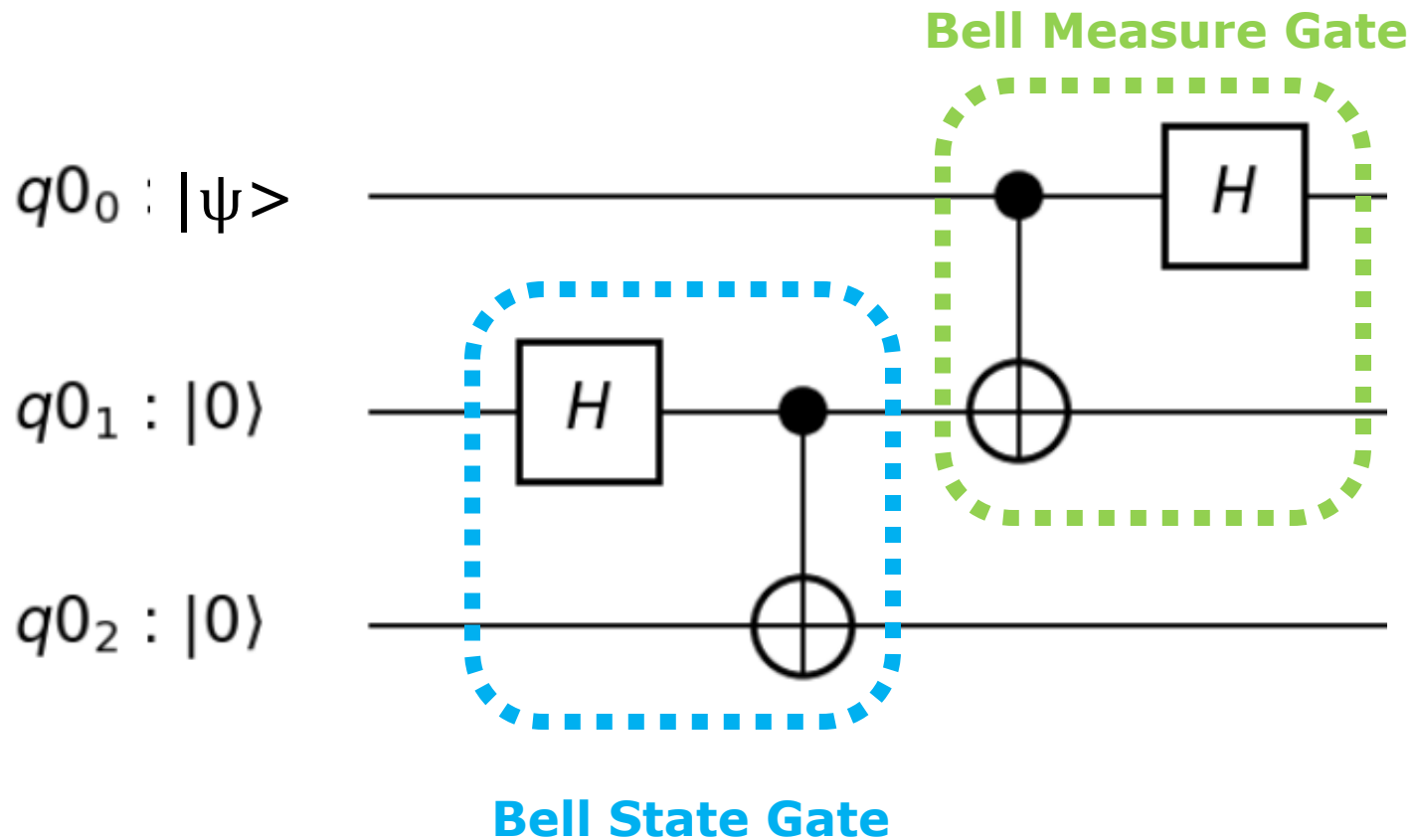
Bell Measure Gate
 $= (\text{Bell State Gate})^{-1} = (\text{Bell State Gate})^\dagger$



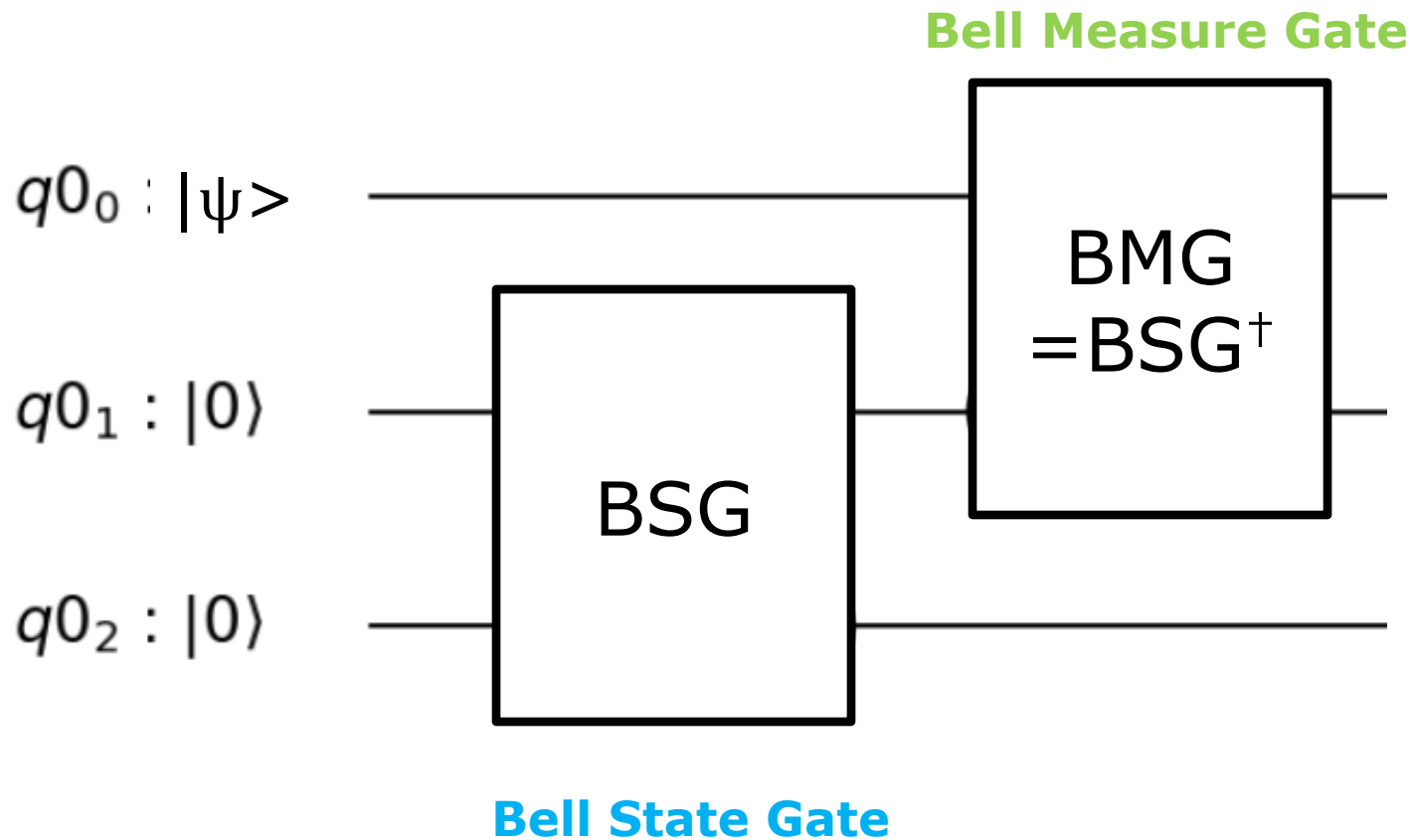
量子テレポーテーション回路の一部



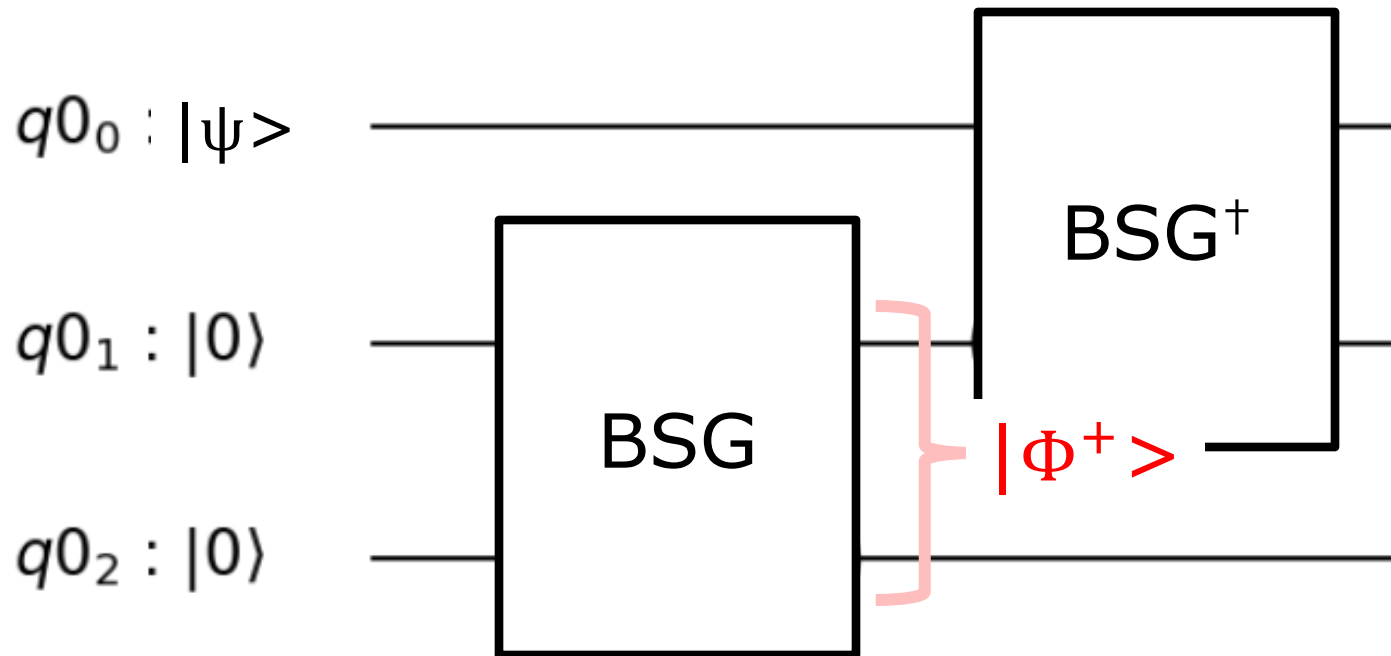
量子テレポーテーション回路の一部



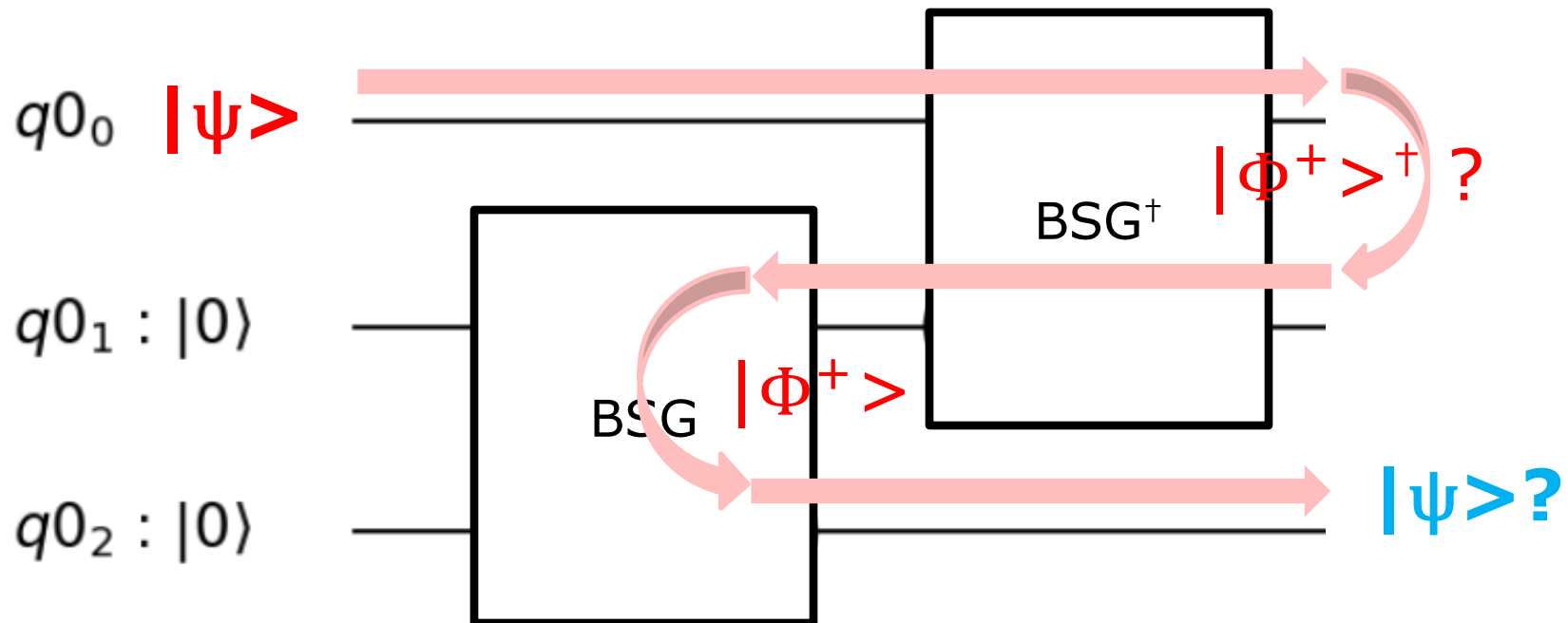
量子テレポーテーション回路の一部



量子テレポーテーション回路の一部



量子テレポーテーション回路の一部 String Diagram的解釈



量子テレポーテーション

量子テレポーテーション

- AliceとBobは、ずいぶん昔にあっていただけだが、今は、遠くに離れて住んでいる。
- 一緒にいた時に、EPRペアを作って、別れる時に、それぞれがEPRペアの一つのqubitを持つようにした。
- 数年経ってから、Bobは遠くにいるのだが、Aliceのミッションは受け取ったqubit $|\psi\rangle$ をBobに送ることだった。
- 彼女は、qubitの状態を知らない。さらに、Bobには、古典的な手段でしか情報を送れない。
- この時、Aliceは、このミッションを遂行できるだろうか？

量子テレポーテーション

$|\Psi\rangle$



Alice

$$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$|\Psi\rangle ?$

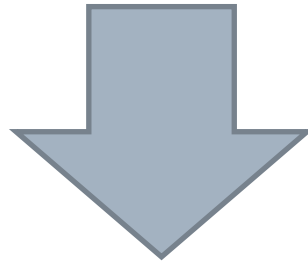


Bob

$$1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$

量子テレポーテーションが可能とすること

- Aliceは、Bobに送らなければならない そのqubit $|\Psi\rangle$ の状態を知らない。知ろうとして、それを観測すれば、その状態は失われてしまう。
- たとえ彼女が $|\Psi\rangle$ の状態を知っていたとしても、 $|\Psi\rangle$ の状態を正確に記述するには、無限の量の古典情報が必要になる。それをBobに伝えるには無限の時間が必要になる。



- 量子テレポーテーションは、エンタングルしたEPRペアを利用して、ほんの少しの古典的コミュニケーションの手間だけで、AliceがBobに $|\Psi\rangle$ の状態を送ることを可能にする。

量子テレポーテーション

Aliceが行うこと

- Aliceは、彼女の持つEPRペアの片方に作用して、彼女が持つ二つのqubitを測定して、四つの可能な古典的結果 00, 01, 10, 11 を得る。
- 彼女は、この情報を、古典的な手段でBobに送る。
- Aliceの古典的なメッセージに基づいて、Bobは四つのうち一つの操作を選んで彼のEPRペアの片方に適応する。
- 驚くべきことに、それだけで、Bobはオリジナルの状態 $|\Psi\rangle$ を復元できるのである。

量子テレポーテーション

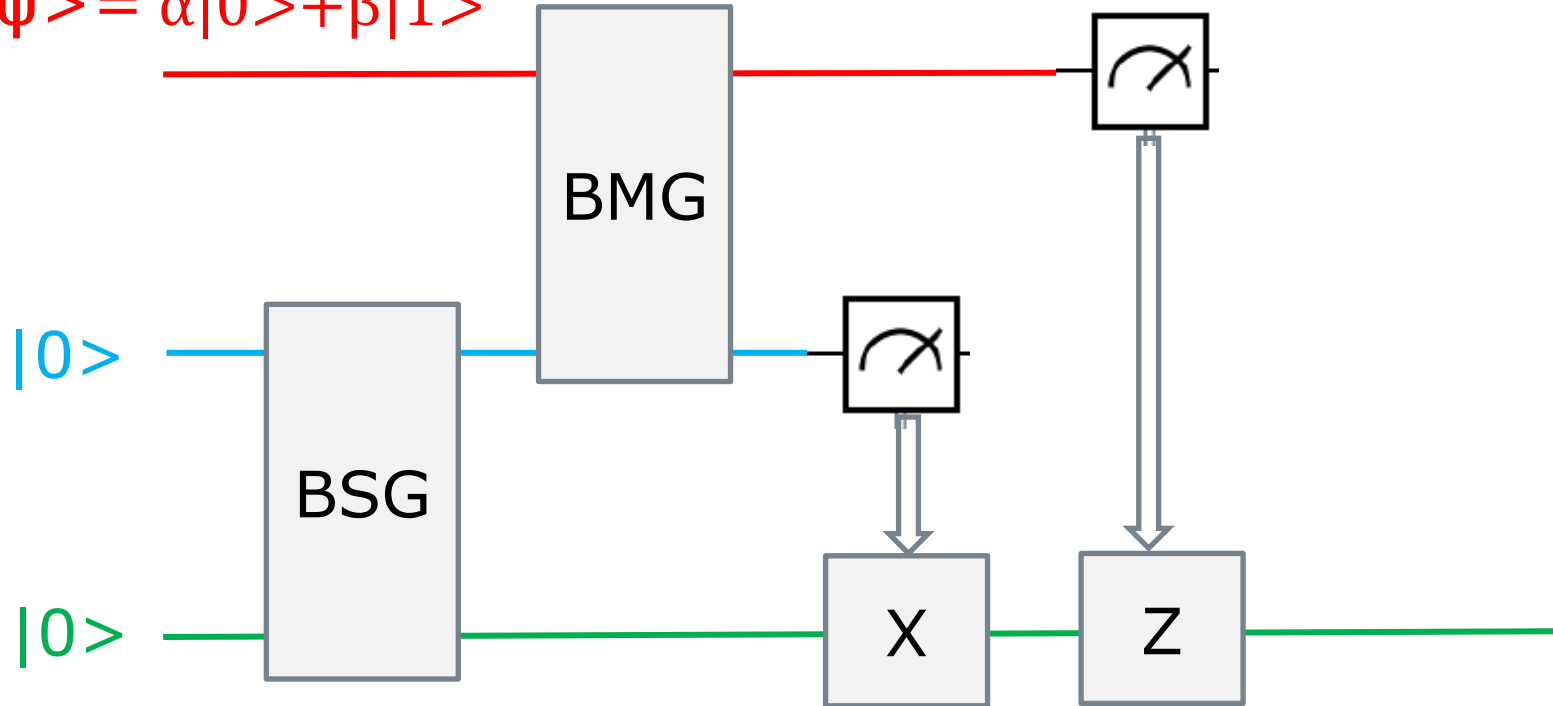
Bobが行うこと

- Aliceの出力の測定に従って、Bobのqubitは四つの可能な状態をとることがわかる。
- もちろん、どの状態にあるかを知るためには、BobはAliceの測定の結果を知らされていなければならない。この事実によって、情報の伝達が光より速くなることは避けられることになる。
- いったんBobが測定の結果を知れば、Bobはその状態を、適当な量子ゲートを適応して「修正」して $|\Psi\rangle$ を復活できる。
- 例えば、測定の結果が00であれば、Bobは何もする必要はない。測定が01の時には、Xゲートを適用すればいい。10ならZゲートを適用すればいい。もし、11ならば、最初にXゲートを、続いてZゲートを適用すればいい。

量子テレポーテーション回路の働きを見る 1

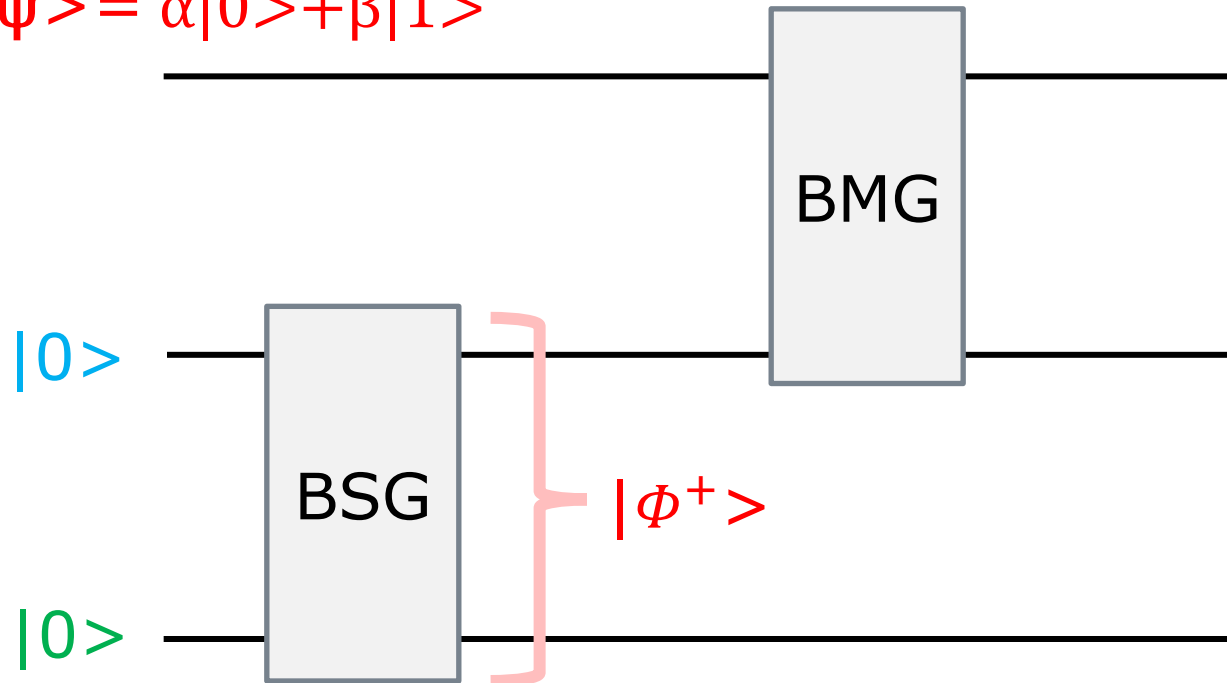
量子テレポーテーション回路

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



量子テレポーテーション回路の一部

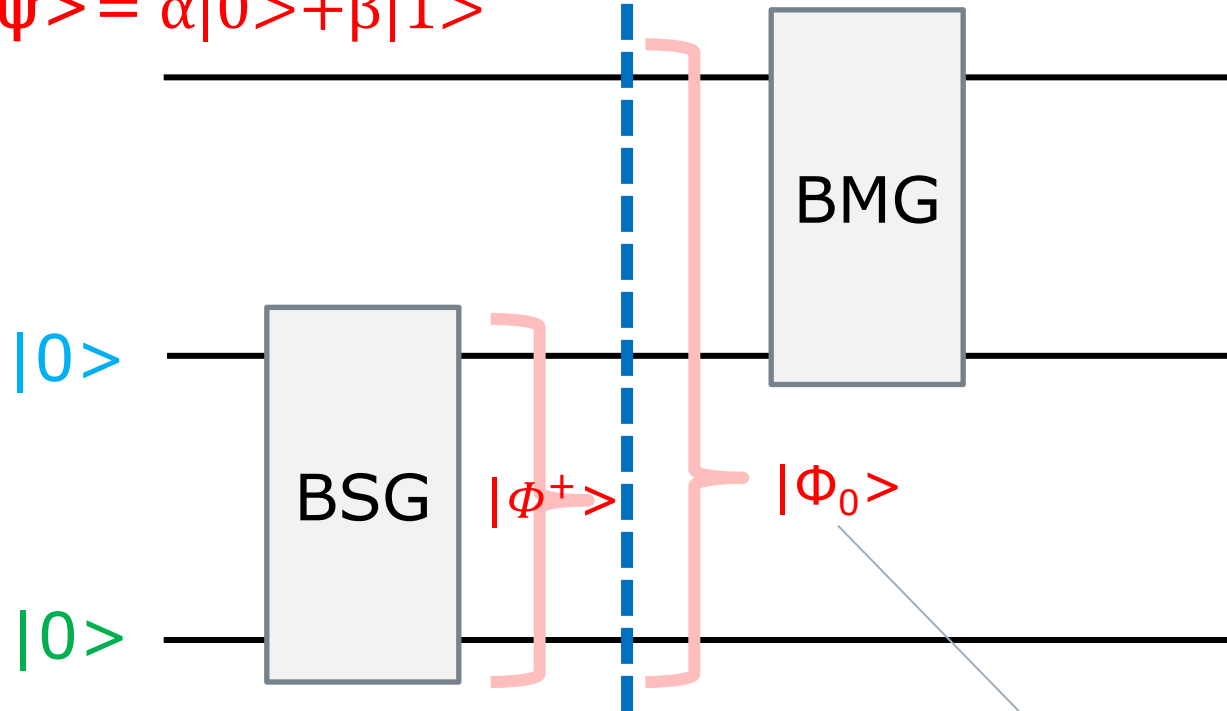
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



量子テレポーテーション回路の一部

$|\Phi_0\rangle$ を計算する

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



$$|\Phi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$$

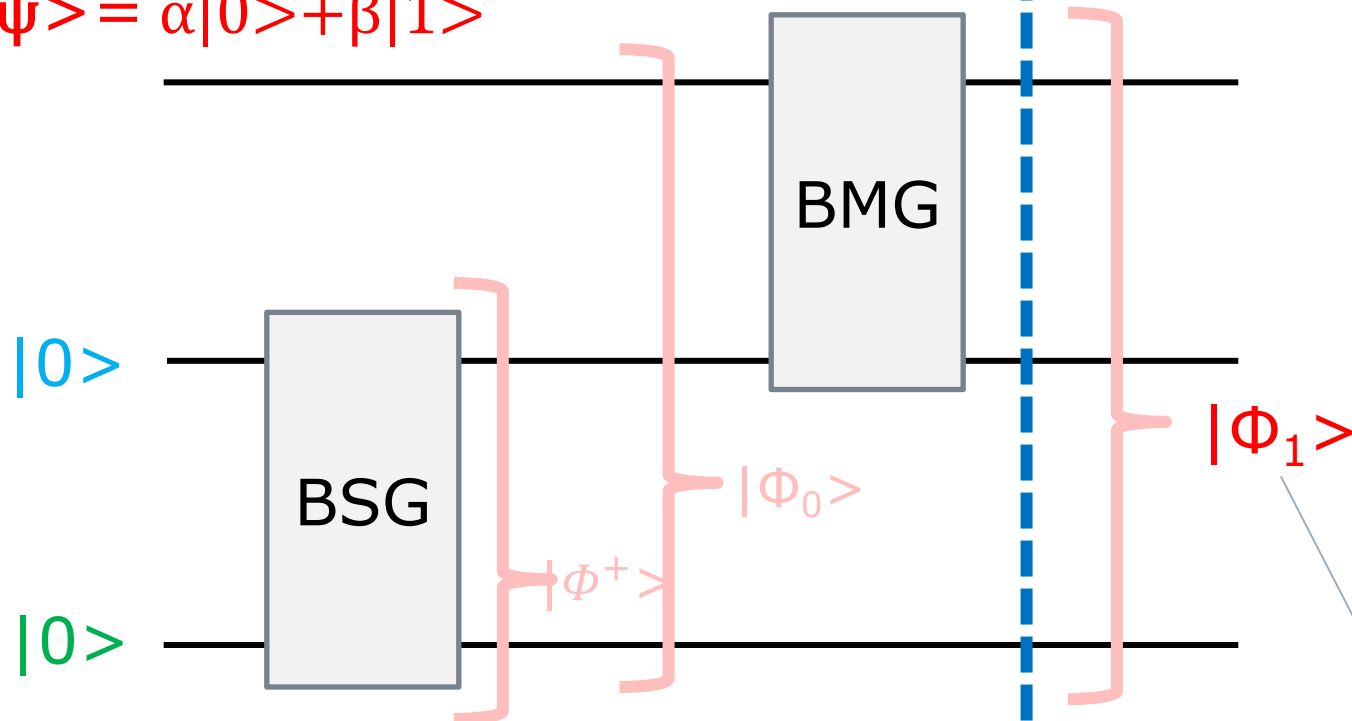
$$= (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle) / \sqrt{2}$$

$$= (|00\rangle \otimes \alpha|0\rangle + |01\rangle \otimes \alpha|1\rangle + |10\rangle \otimes \beta|0\rangle + |11\rangle \otimes \beta|1\rangle) / \sqrt{2}$$

量子テレポーテーション回路の一部

$|\Phi_1\rangle$ を計算する

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



$|\Phi_1\rangle$ は、先の $|\Phi_0\rangle$ の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$$|\Phi_0\rangle = (|00\rangle \otimes \alpha|0\rangle + |01\rangle \otimes \alpha|1\rangle + |10\rangle \otimes \beta|0\rangle + |11\rangle \otimes \beta|1\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (BMG|00\rangle \otimes \alpha|0\rangle + BMG|01\rangle \otimes \alpha|1\rangle + BMG|10\rangle \otimes \beta|0\rangle + BMG|11\rangle \otimes \beta|1\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|00\rangle = (|00\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|01\rangle = (|01\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|10\rangle = (|01\rangle - |11\rangle) / \sqrt{2}$$

$$\text{BMG}|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle) / \sqrt{2}$$

であるから、

$|\Phi_1\rangle$ を計算して
変形する

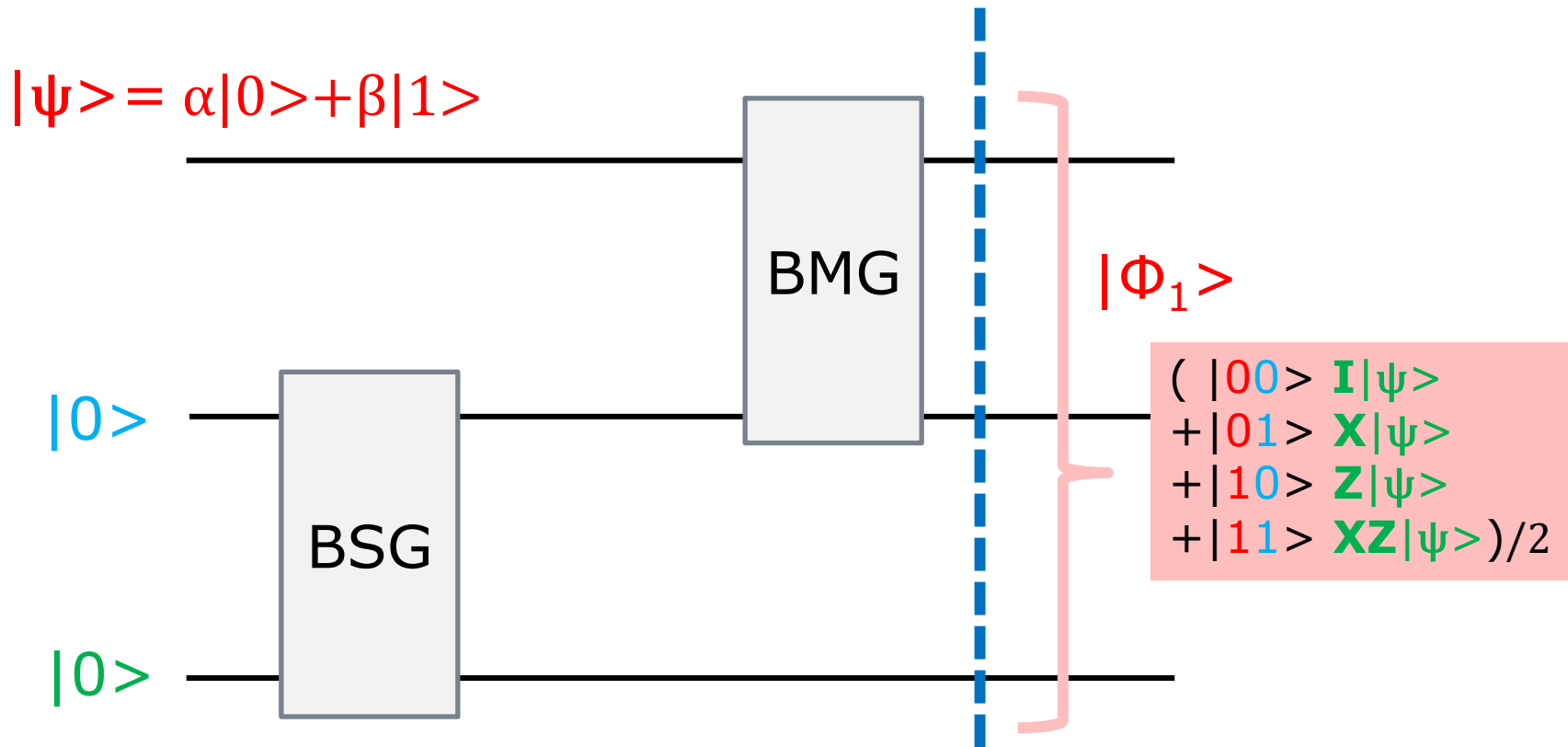
$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= (\text{BMG}|00\rangle \otimes \alpha|0\rangle + \text{BMG}|01\rangle \otimes \alpha|1\rangle \\ &\quad + \text{BMG}|10\rangle \otimes \beta|0\rangle + \text{BMG}|11\rangle \otimes \beta|1\rangle) / \sqrt{2} \\ &= ((|00\rangle + |10\rangle) \otimes \alpha|0\rangle + (|01\rangle + |11\rangle) \otimes \alpha|1\rangle \\ &\quad + (|01\rangle - |11\rangle) \otimes \beta|0\rangle + (|00\rangle - |10\rangle) \otimes \beta|1\rangle) / 2 \\ &= (|00\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\ &\quad + |10\rangle (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)) / 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= (|00\rangle \mathbf{I}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle \mathbf{X}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &\quad + |10\rangle \mathbf{Z}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |11\rangle \mathbf{XZ}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)) / 2 \end{aligned}$$

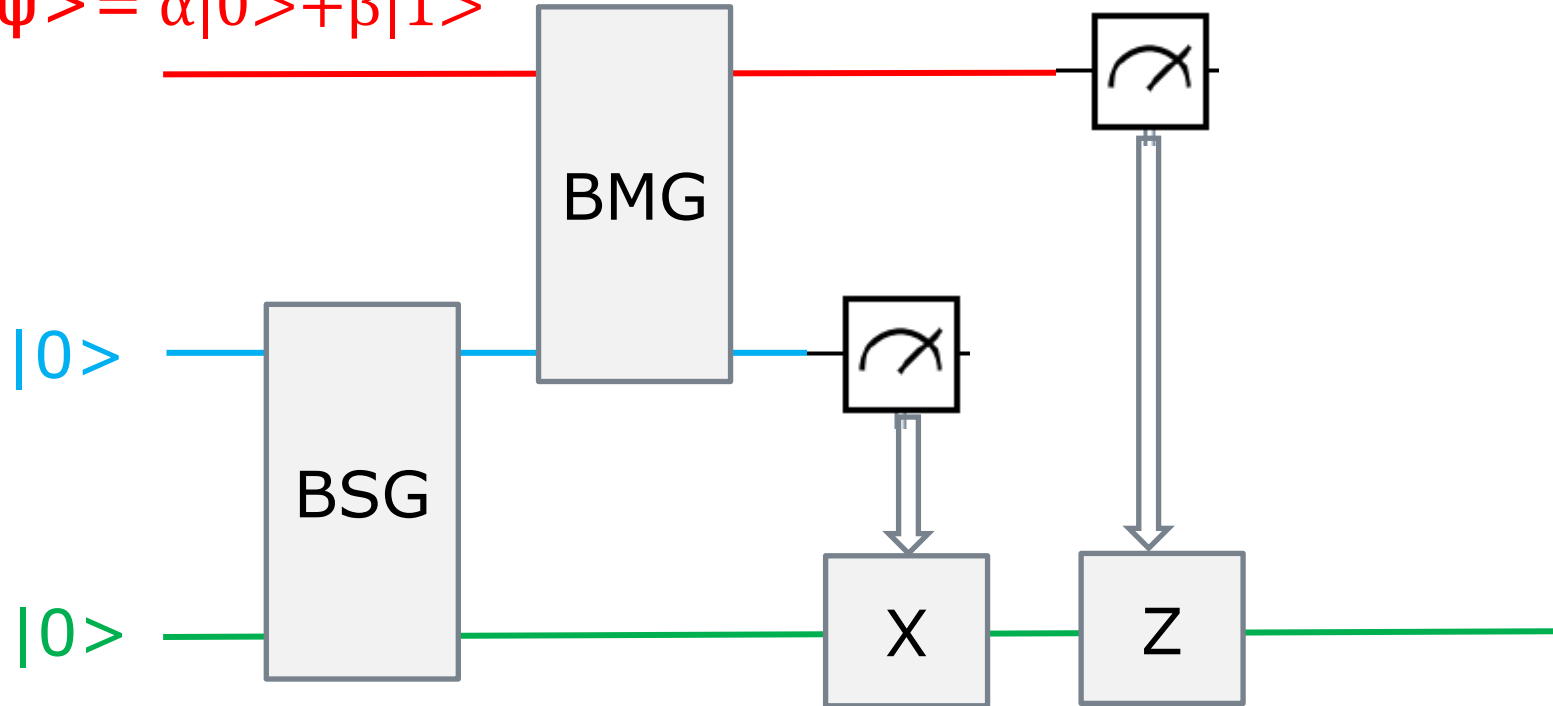
$$= (|00\rangle \mathbf{I} |\psi\rangle + |01\rangle \mathbf{X} |\psi\rangle + |10\rangle \mathbf{Z} |\psi\rangle + |11\rangle \mathbf{XZ} |\psi\rangle) / 2$$

量子テレポーテーション回路の一部



量子テレポーテーション回路

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



第三qubitの動き

$|00\rangle$ が観測された時

$I|\psi\rangle$



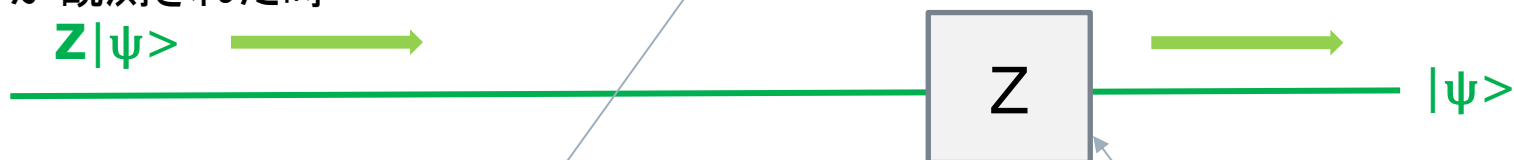
$|01\rangle$ が観測された時

$X|\psi\rangle$



$|10\rangle$ が観測された時

$Z|\psi\rangle$



$|11\rangle$ が観測された時

$XZ|\psi\rangle$

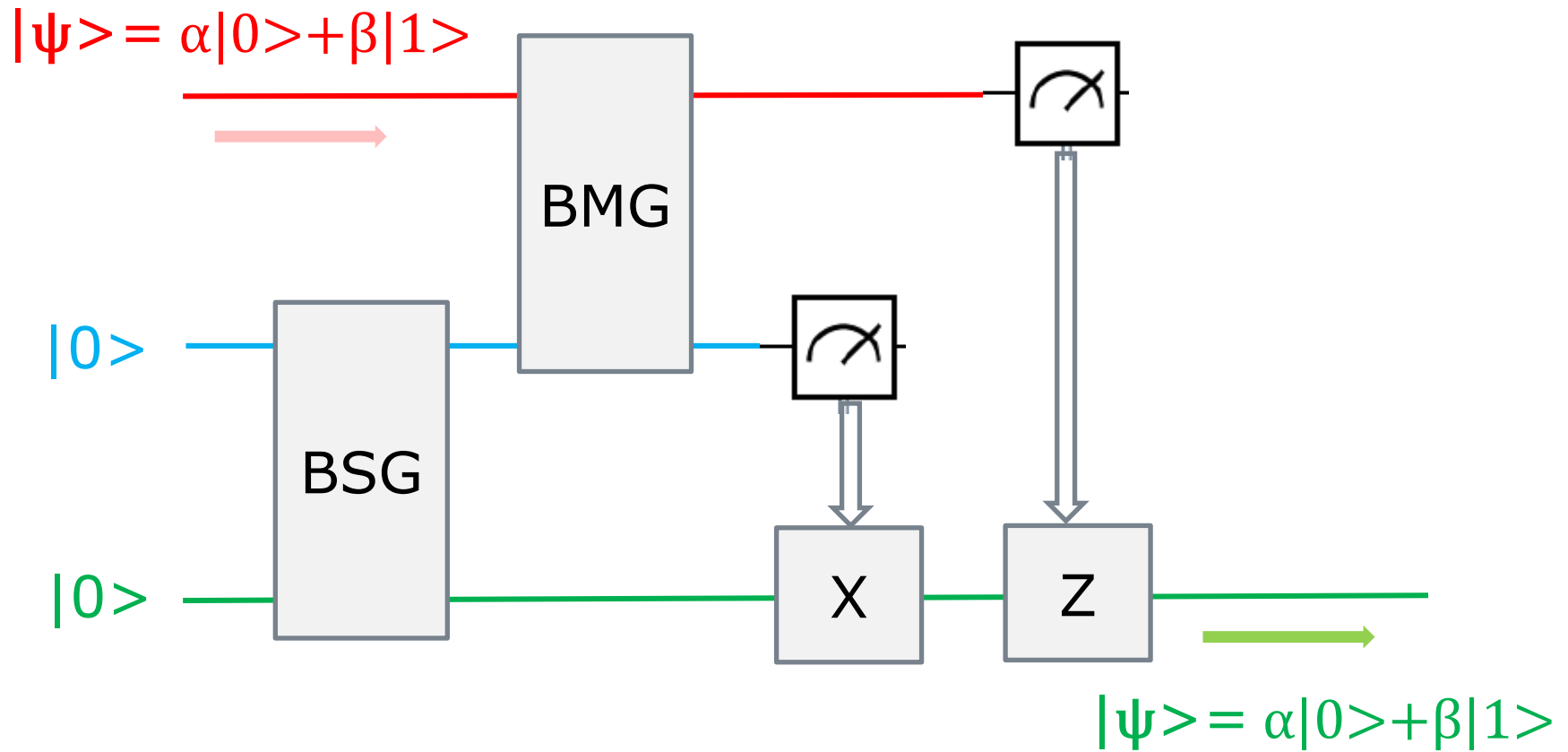


$$\begin{aligned} X(X|\psi\rangle) \\ &= X^2|\psi\rangle \\ &= I|\psi\rangle = |\psi\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(XZ|\psi\rangle) \\ &= X^2Z|\psi\rangle \\ &= IZ|\psi\rangle \end{aligned}$$

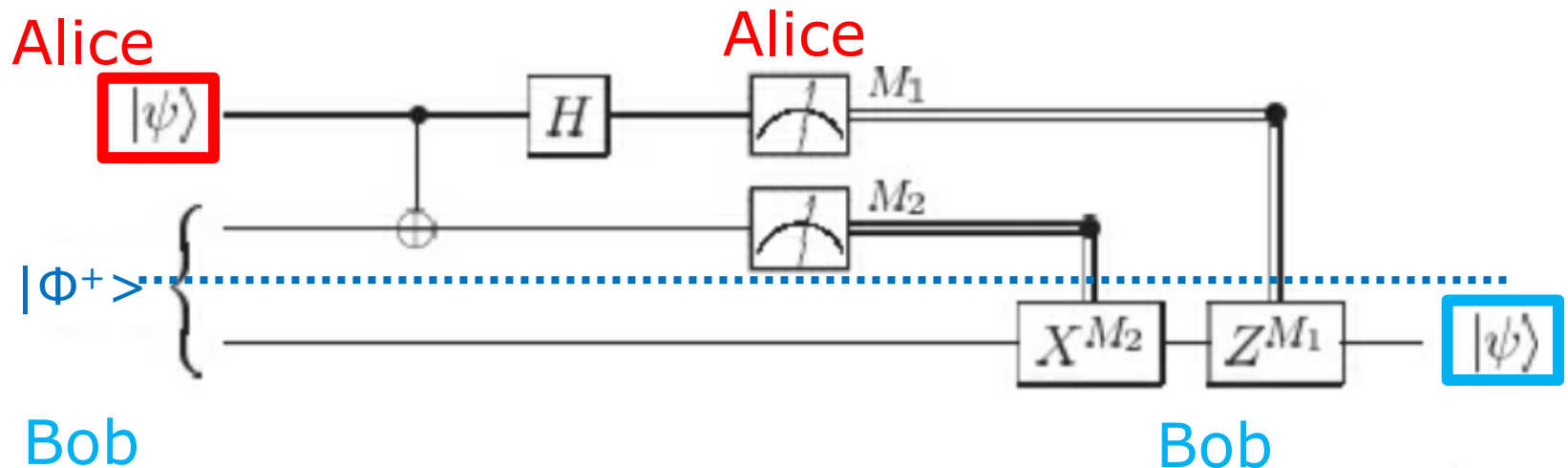
$$\begin{aligned} Z(Z|\psi\rangle) \\ &= Z^2|\psi\rangle \\ &= I|\psi\rangle = |\psi\rangle \end{aligned}$$

量子テレポーテーション回路

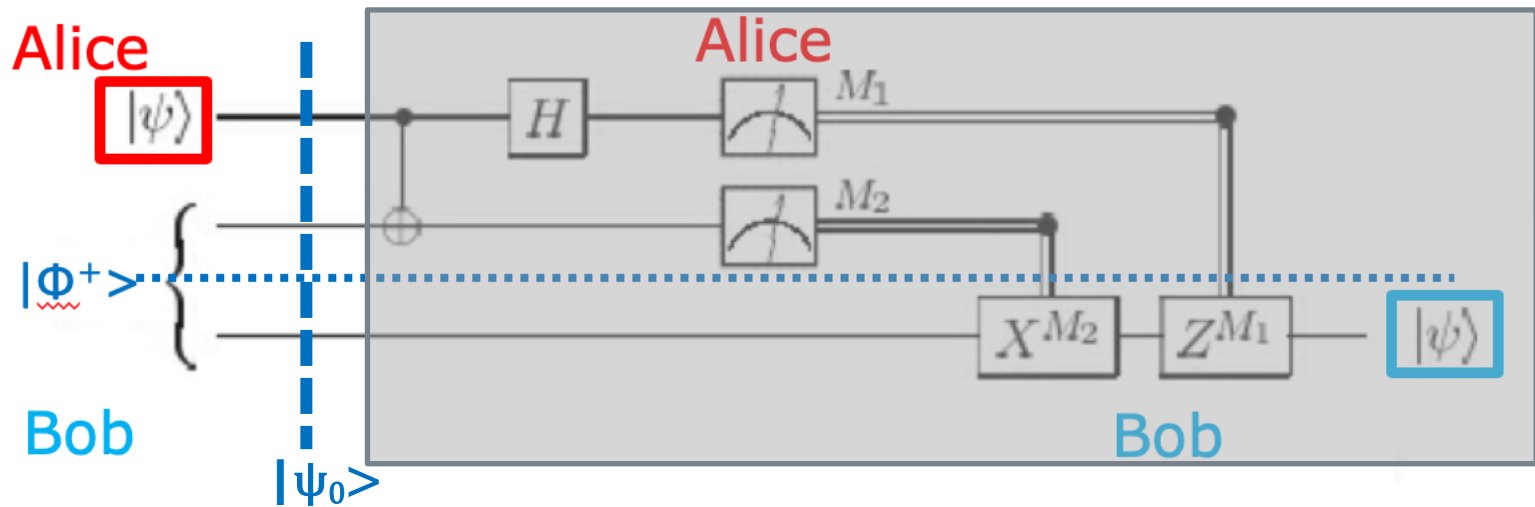


量子テレポーテーション回路の働きを見る 2

量子テレポーテーションを実現する回路



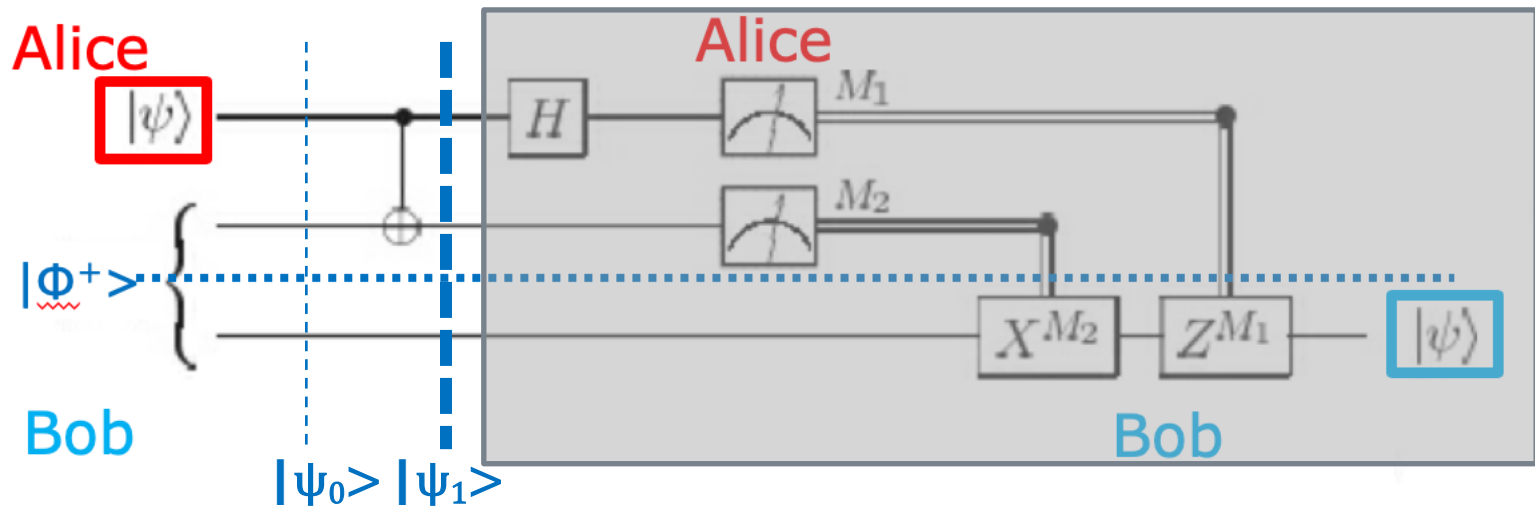
この回路図は、横長に書かれているが、通信が行われるのは、AliceからBobへ、縦方向に行われることに注意。また、すでにAliceとBobは、エンタングル状態にあることが前提されている。(図の $|\Phi^+\rangle$ がそれを表している。)



$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ とすると。

$$\begin{aligned}
 |\psi_0\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \\
 &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle) \\
 &= 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle))
 \end{aligned}$$

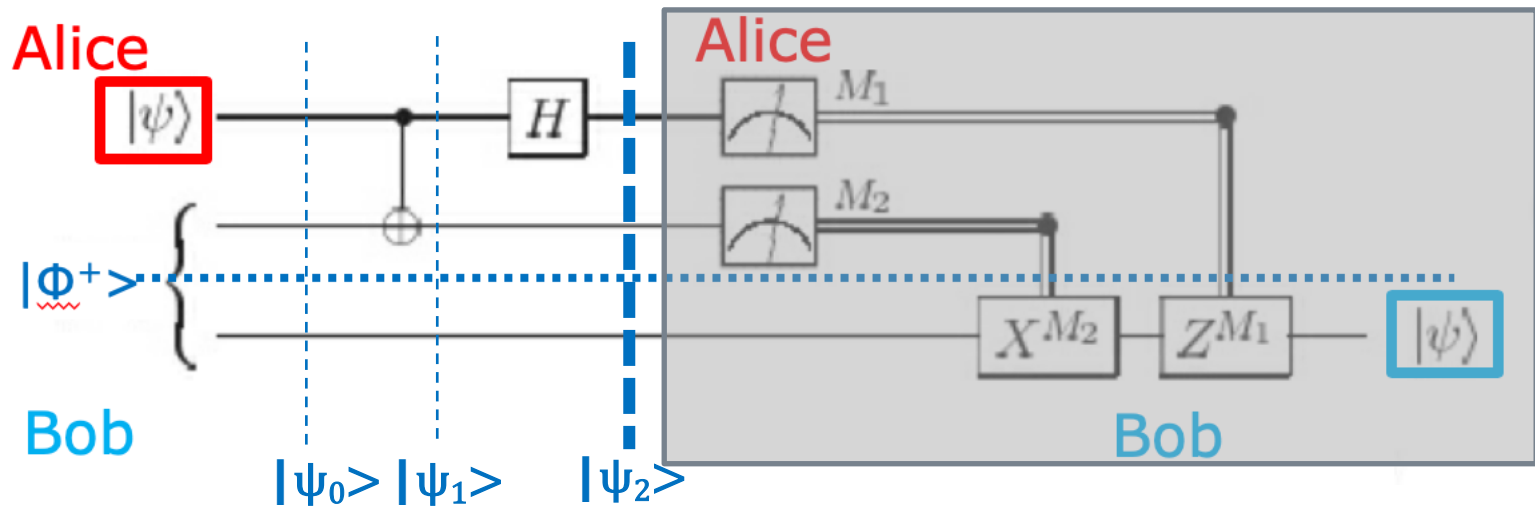
回路に入る直前の $|\psi_0\rangle$ 段階でのシステムの状態



$$|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|\mathbf{1}\rangle \otimes (|\mathbf{1}0\rangle + |\mathbf{0}1\rangle))$$

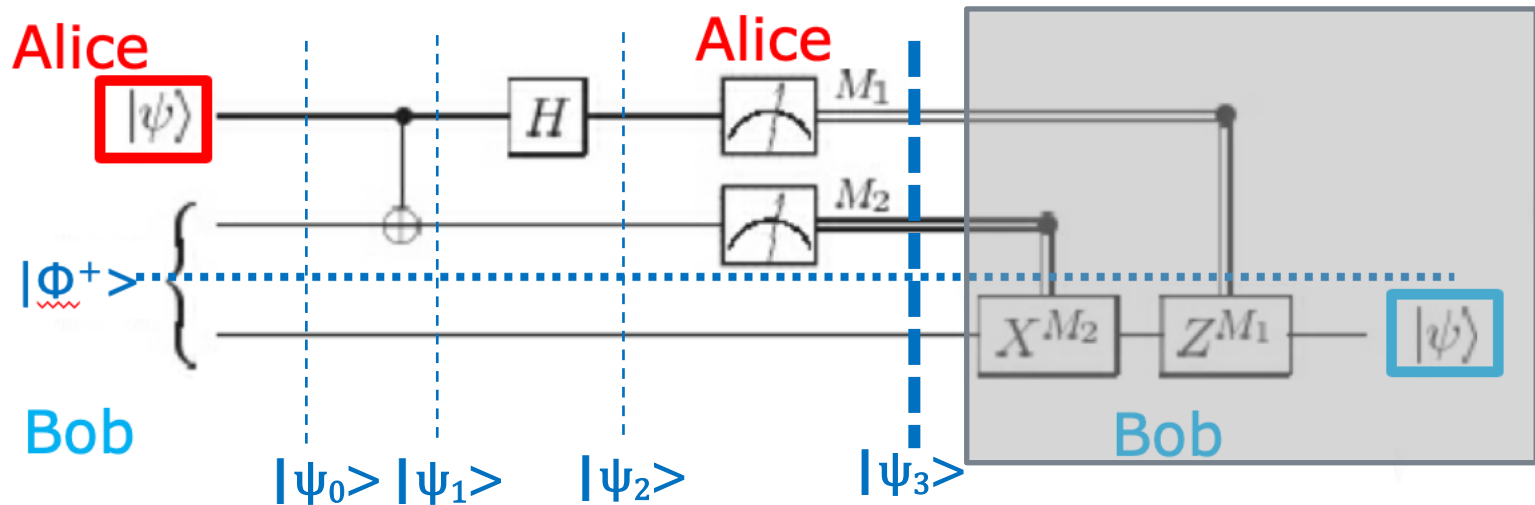
回路上のCNOTを実行した直後の $|\psi_1\rangle$ 段階でのシステムの状態



$$|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|10\rangle + |01\rangle))$$

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= 1/\sqrt{2} (\alpha(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \\ &\quad \beta(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|10\rangle + |01\rangle)) \\ &= 1/\sqrt{2} (\alpha(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) + \\ &\quad \beta(|01\rangle + |00\rangle - |11\rangle - |10\rangle)) \\ &= 1/\sqrt{2} (|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \\ &\quad |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)) \end{aligned}$$



$$|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2} (\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|10\rangle + |01\rangle))$$

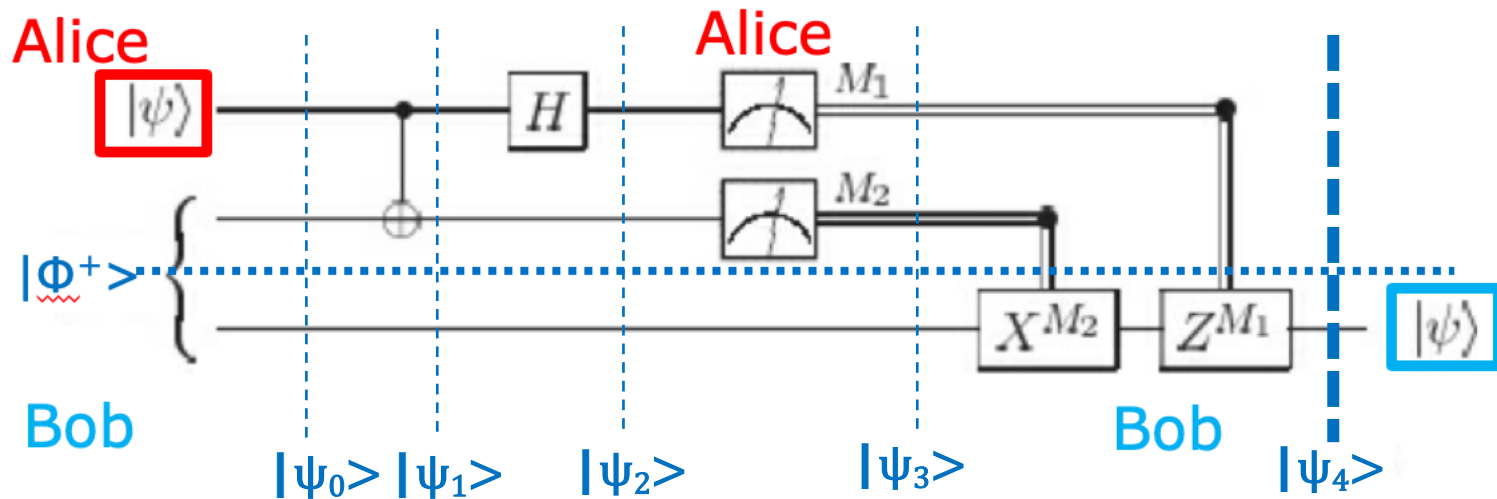
$$|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle))$$

$$|\psi_3(00)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_3(01)\rangle = (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$$

$$|\psi_3(10)\rangle = (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_3(11)\rangle = (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$



$$|\psi_3(00)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_3(01)\rangle = (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$$

$$|\psi_3(10)\rangle = (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_3(11)\rangle = (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$

$$|\psi_4(00)\rangle = |\psi_3(00)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_4(01)\rangle = X|\psi_3(01)\rangle = X(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_4(10)\rangle = Z|\psi_3(10)\rangle = Z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$|\psi_4(11)\rangle = ZX|\psi_3(11)\rangle = ZX(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\psi_4(00)\rangle \\ |\psi_4(01)\rangle \\ |\psi_4(10)\rangle \\ |\psi_4(11)\rangle \end{array} \right\} |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

いくつかの疑問

- 第一。量子テレポーテーションは、光より早く量子状態を送ることができるのだろうか？

これに対する答えは、明確にノーだ。テレポーテーションを実行するためには、Aliceは観測結果を、古典的な通信路で、Bobに送らなければならないのだから。

- 第二。量子テレポーテーションは、未知の量子状態のコピーを禁じたNo Cloning定理を破ることにならないか？

これについても、答えはノーだ。Bobのもとで、量子状態は再現されるのだが、Aliceのもとにあったオリジナルの量子状態は、Aliceの観測によって、 $|0\rangle$ か $|1\rangle$ かの状態に変わって、失われている。

演習問題 5-1

1. 先の量子テレポーテーションの回路の働きを、自分の手で確かめよ。

演習問題 5-2

1. 先の回路では、AliceとBobが、
 $|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ でエンタングルした qubitを共有していたのだが、 $|\psi^-\rangle = 1/\sqrt{2} (|01\rangle - |10\rangle)$ でエンタングルしたqubitを使っても、回路を少し変形させれば、量子テレポーテーションが可能である。その回路を求めよ。
2. 他のBell State $|\Phi^-\rangle$, $|\psi^+\rangle$ についても、こうした量子テレポーテーション回路を求めよ。