
エンタングルする自然
-- 「逆理」から「原理」へ --

はじめに

2022年のノーベル物理学賞は、アラン・アスペ、ジョン・クラウザー、アントン・ツァイリンガーの三人に与えられた。三人は、いずれも「エンタングルメント＝量子もつれ」にかかわる実証的な実験の分野で大きな仕事をしてきた人たちである。

三人のノーベル賞受賞をきっかけに、量子の世界の不思議な現象である「量子エンタングルメント」に対する関心が高まることを期待している。

エンタングルメントは、現代では量子の世界ひいては自然のもっとも基本的な現象だと考えられている。今回のセミナーでは、「エンタングルする自然」という新しい自然観の成立を、一つのドラマとして紹介しようと思う。

第一部 「エンタングルメントの発見」

1935年、アインシュタインは今から80年以上前に、量子論の矛盾を示す「逆理」としてエンタングルメントを発見する。ただ、この現象は、当時の量子論の主流派であったボーアたちからは、事実上、黙殺された。

1964年、ベルは、ボーアたちとは異なる立場からこの問題を考え、アインシュタインの主張の誤りを示し、エンタングルメントの存在と量子論の正しさを理論的に確立する。

1982年、アスペは大規模な実験を行い、エンタングルメントの実在を実証する。アインシュタインの「逆理」としての発見から、半世紀たって、エンタングルメントの存在は、公式に認められるようになった。

エンタングルメントは、簡単なテンソル計算でも、簡単な量子回路でもすぐに構成できる。この単純さは、エンタングルメントが特殊な存在ではなくごく身近に遍在するものであることを示している。

第二部 「ベルが明らかにしたこと」

もっとも、エンタングルメントが一般にも、広く知られるようになったのは、今年のノーベル賞がエンタングルの研究分野に与えられたことが大きいと感じている。

ベルは1990年に急死して、ノーベル賞を受賞することはなかったが、エンタングルメントの研究を通じて、non-local な理論として量子論を基礎づけた最大の功績者は、ベルである。

ここでは、ベルの明らかにしたことを、「ベルの定理」を中心に振り返る。また、クラウザーが、「ベルの定理」の新しい定式で果たした役割、彼らが整理した「CHSHの不等式」を紹介しようとおもう。

ここで開発された「対話型ゲーム」の手法は、量子複雑性の研究と結びつき、現代の物理理論の中心的な領域となりつつある量子情報理論で重要な役割を果たしている。

第三部 「「原理」としてのエンタングルメント」

20世紀、自然科学は技術と結びつき科学技術として、現代社会に、経済的にも大きな影響を与えた。驚くべきことに、20世紀の自然科学のほとんどの分野を、原理的・理論的に導いたのは、量子論と相対論であった。この二つの理論は、それぞれの分野で、巨大な成功を収めた。こうして、我々の自然に対する認識は、飛躍的に高まった。ただ、この二つの基本的理論の「統一」は、20世紀中には叶わなかった。

21世紀に入って、大きな変化が起きようとしている。そこで中心的な役割を果たそうとしているのが、エンタングルメントとエントロピー（情報）である。ここでは、こうした理論の進展を紹介する。

いまや、エンタングルメントは、時空を生み出す最も基本的な原理として、多くの研究者の関心を惹きつけている。

第四部 「エンタングルメントの技術的応用」

現代のエンタングルメントをめぐるトピックで特筆すべきことは、先に述べた基礎理論でのエンタングルメントの重要性の認識の高まりに止まらず、現実的な技術である量子通信へのエンタングルメントの応用の道が開かれつつあることである。

今回、ノーベル賞を受賞したツァイリンガーの仕事は、その代表的な技術である「量子テレポーテーション」に関わるものである。

もっとも、ベルの場合と同様に、「量子テレポーテーション技術」の理論的開拓者は、1990年代のベネットとブラサールである。アインシュタインの発見から、ベネットらの発見まで60年近くかかっていることになる。

この技術は、21世紀の通信の世界を大きく変えることが期待されている。

Agenda

エンタングルする自然

-- 「逆理」から「原理」へ --

Part I エンタングルメントの発見

- 「逆理」としてのエンタングルメントの発見
- エンタングルメントの実在性
- エンタングルメントとはどのような状態か？

Part II ベルが明らかにしたこと

- Bellによる証明
- CHSH による定式化
- CHSHゲームという定式化

Interlude

Agenda

エンタングルする自然

-- 「逆理」から「原理」へ --

Part III 「時空」を生み出す「原理」としてのエンタングルメント

- ブラックホールのエントロピー
- AdS／CFT対応 -- 量子論と相対論の「対応」の発見
- エンタングルメントのエントロピー
- ER＝EPR仮説

Part IV エンタングルメントの応用

- Superdense Coding
- 量子テレポーテーション
- Entanglement Swapping

Part I

エンタングルメントの発見

Agenda

エンタングルする自然

-- 「逆理」から「原理」へ --

Part I エンタングルメントの発見

- 「逆理」としてのエンタングルメントの発見
- エンタングルメントの実在性
- エンタングルメントとはどのような状態か？

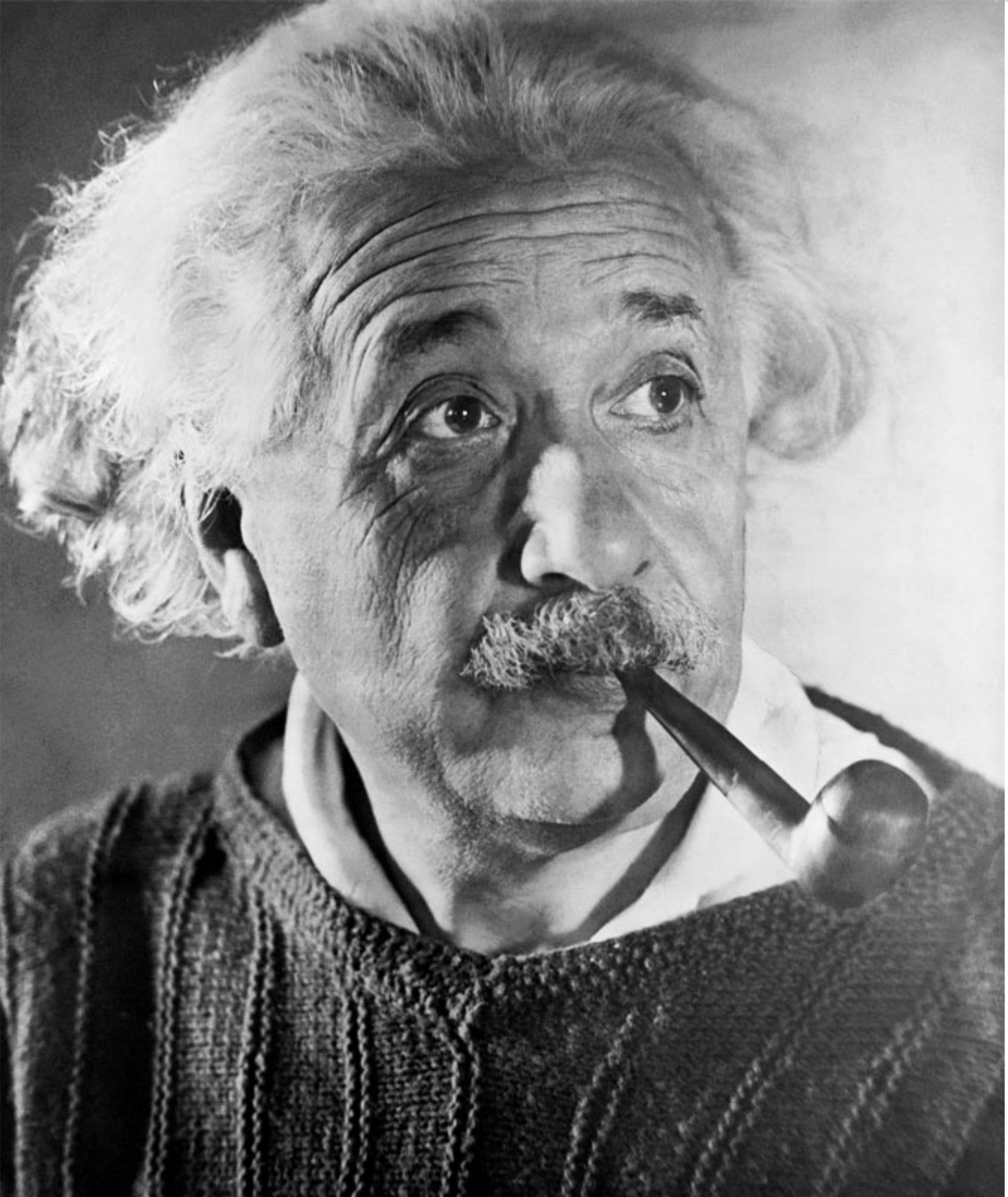

「逆理」としてのエンタングルメントの発見

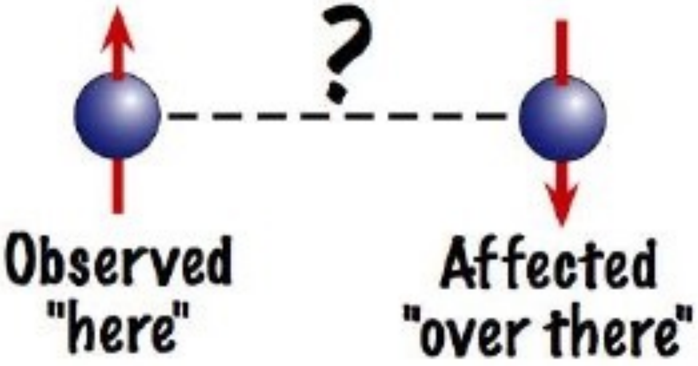
エンタングルメント
もつれあった二つの量子の状態の発見

1935年に、アインシュタインとポドルスキーとローゼンは、次の論文を発表する。（三人の著者の頭文字をとって、EPR論文と呼ばれる。）

"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?"「物理的な実在の量子力学の記述は、完全なものと考えることができるか？」https://goo.gl/qAWacP

この論文で、アインシュタインは、量子論では、二つの量子の「もつれあい」の状態が現れることを指摘する。エンタングルメントの発見である。

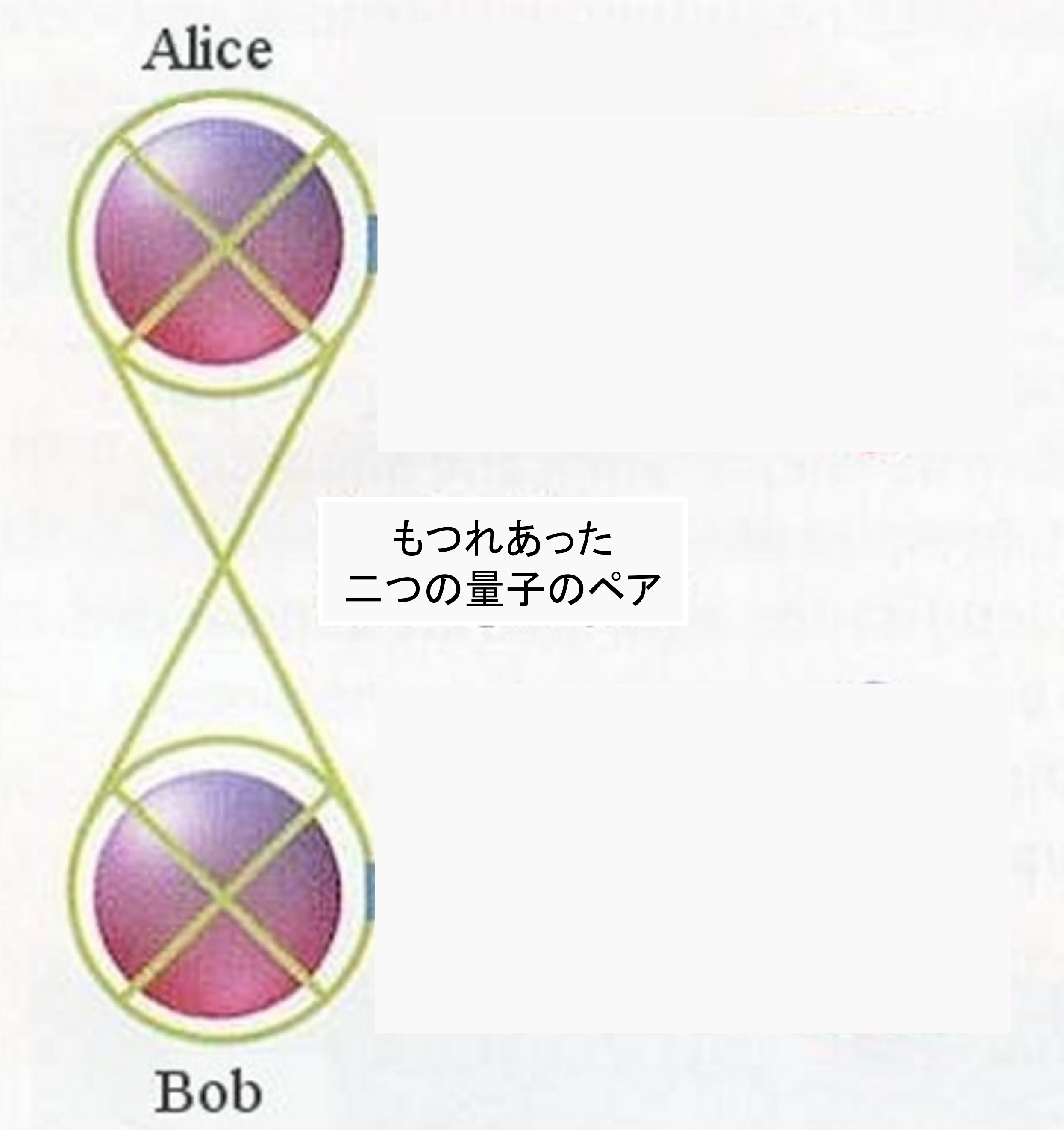




1935年

EPRの逆理

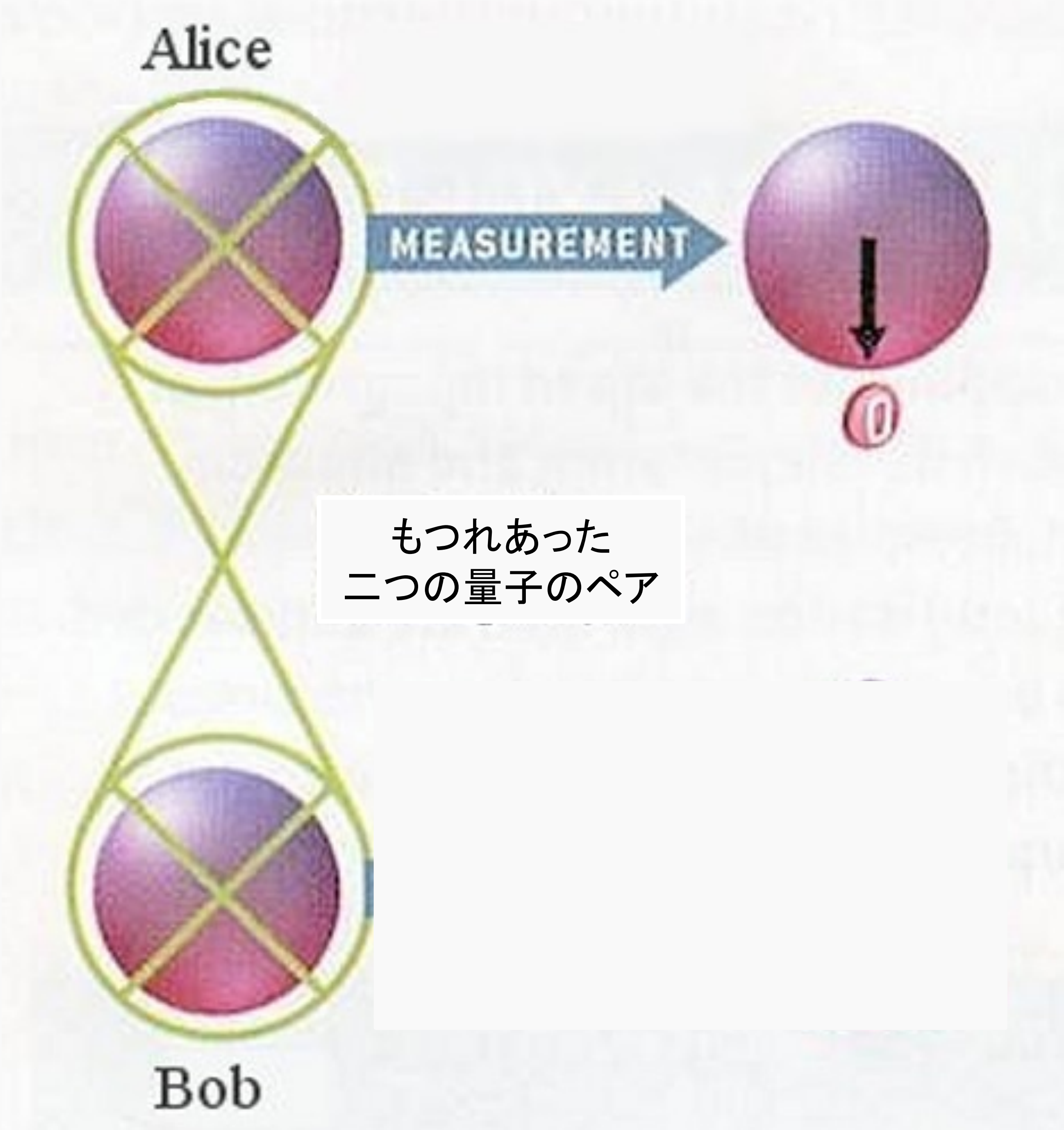
Einstein, Podolsky, Rosen



もつれあった
この二つの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

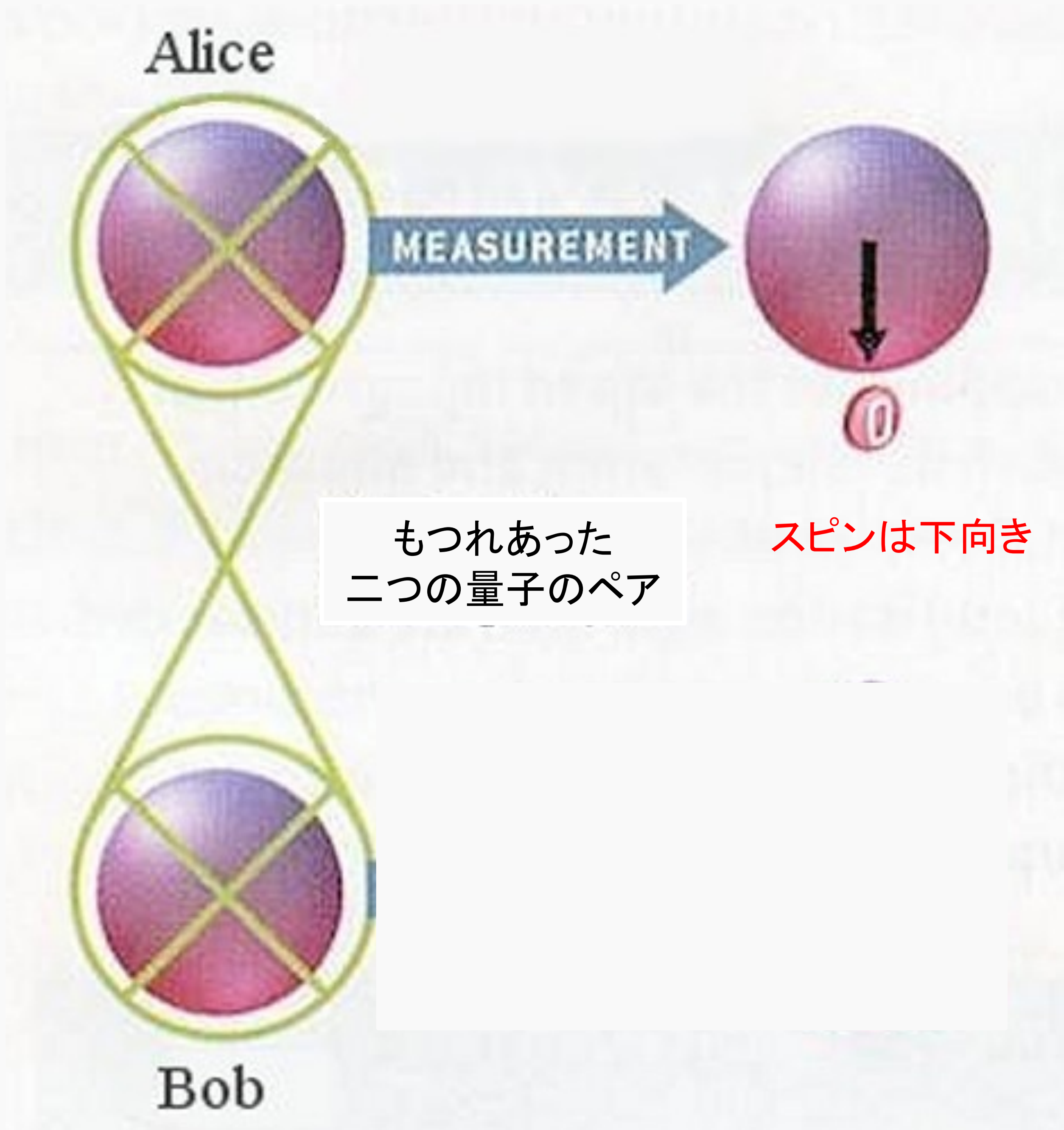
もつれあった
この二つの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、



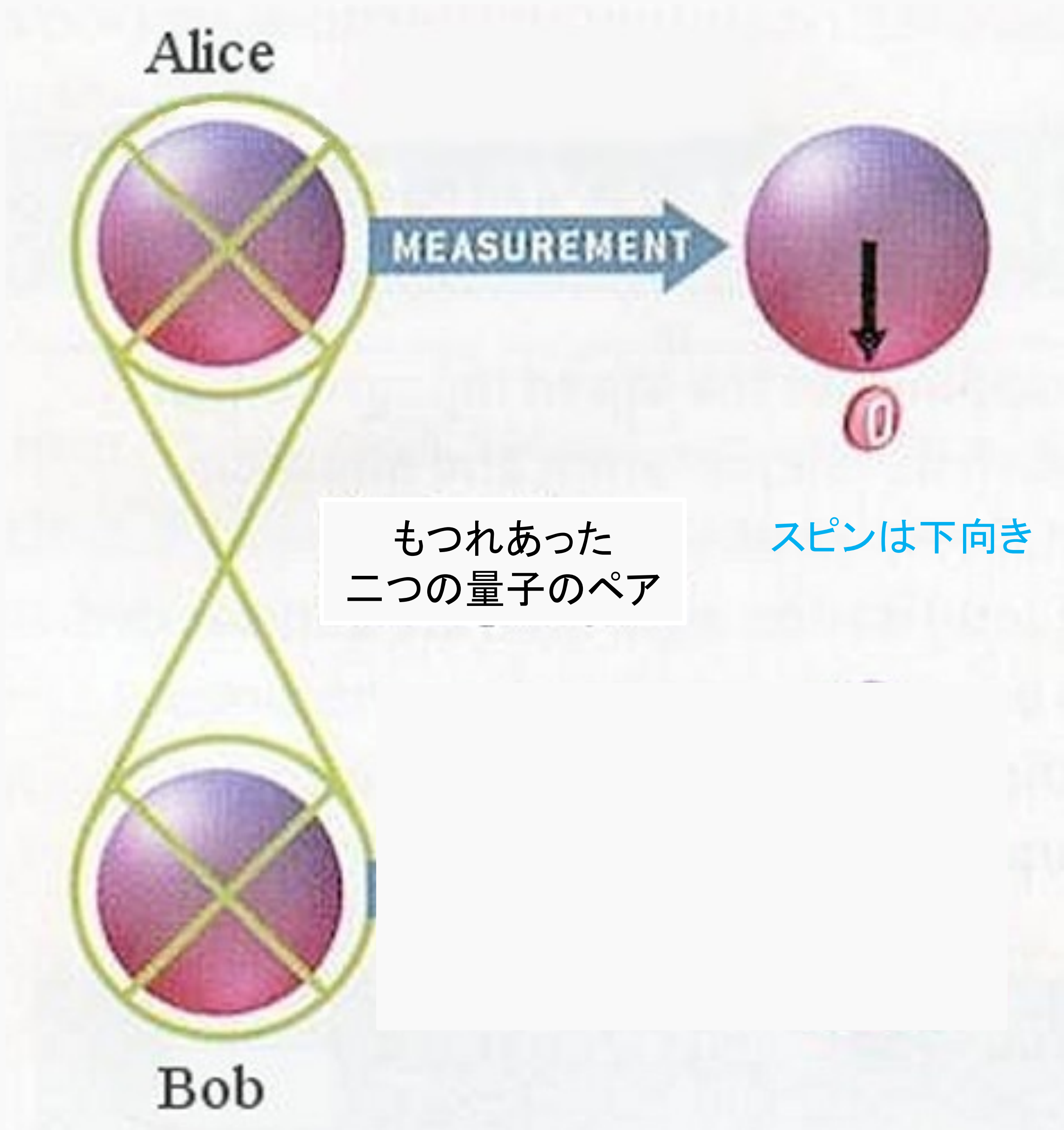
もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、



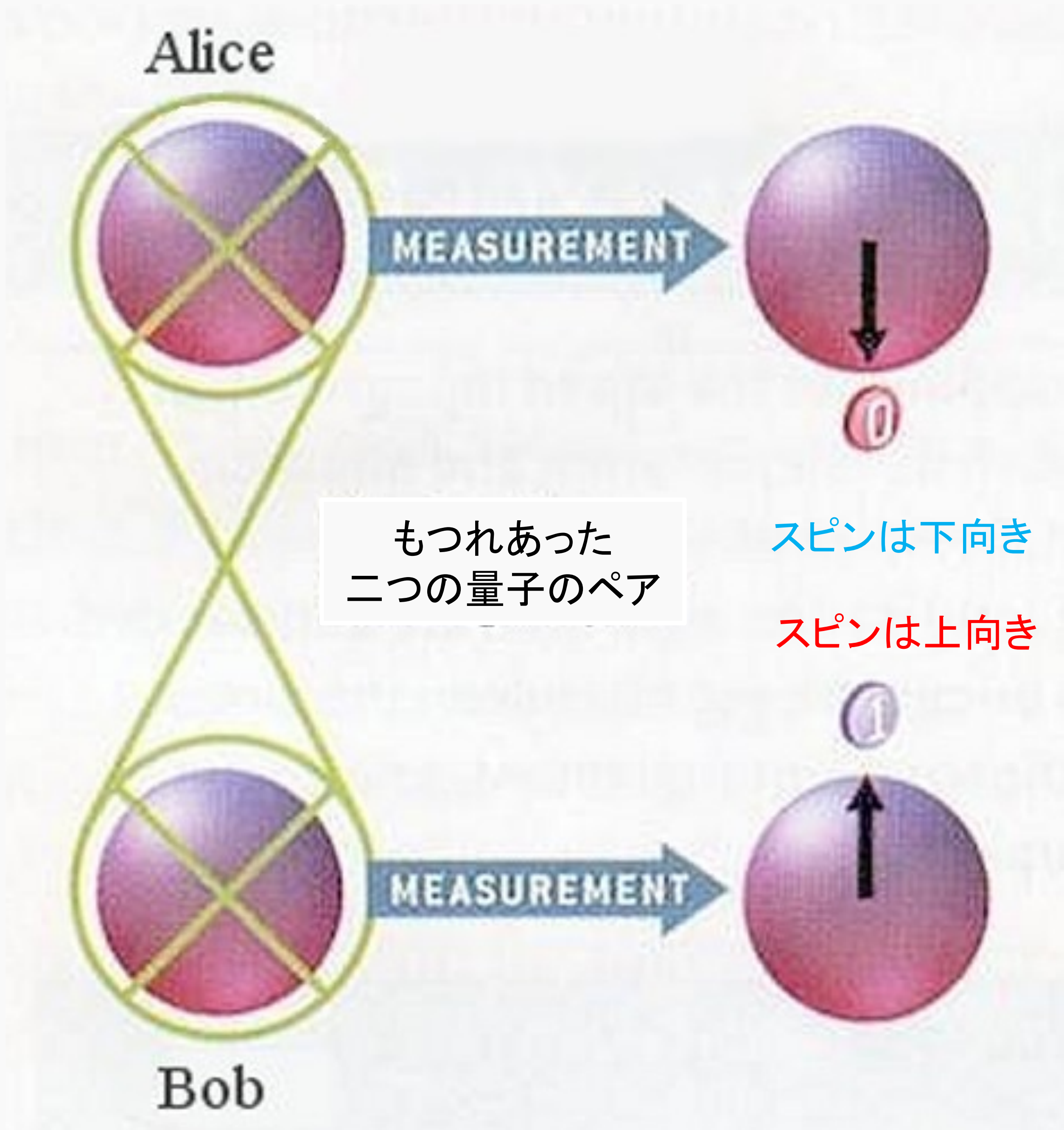
もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、



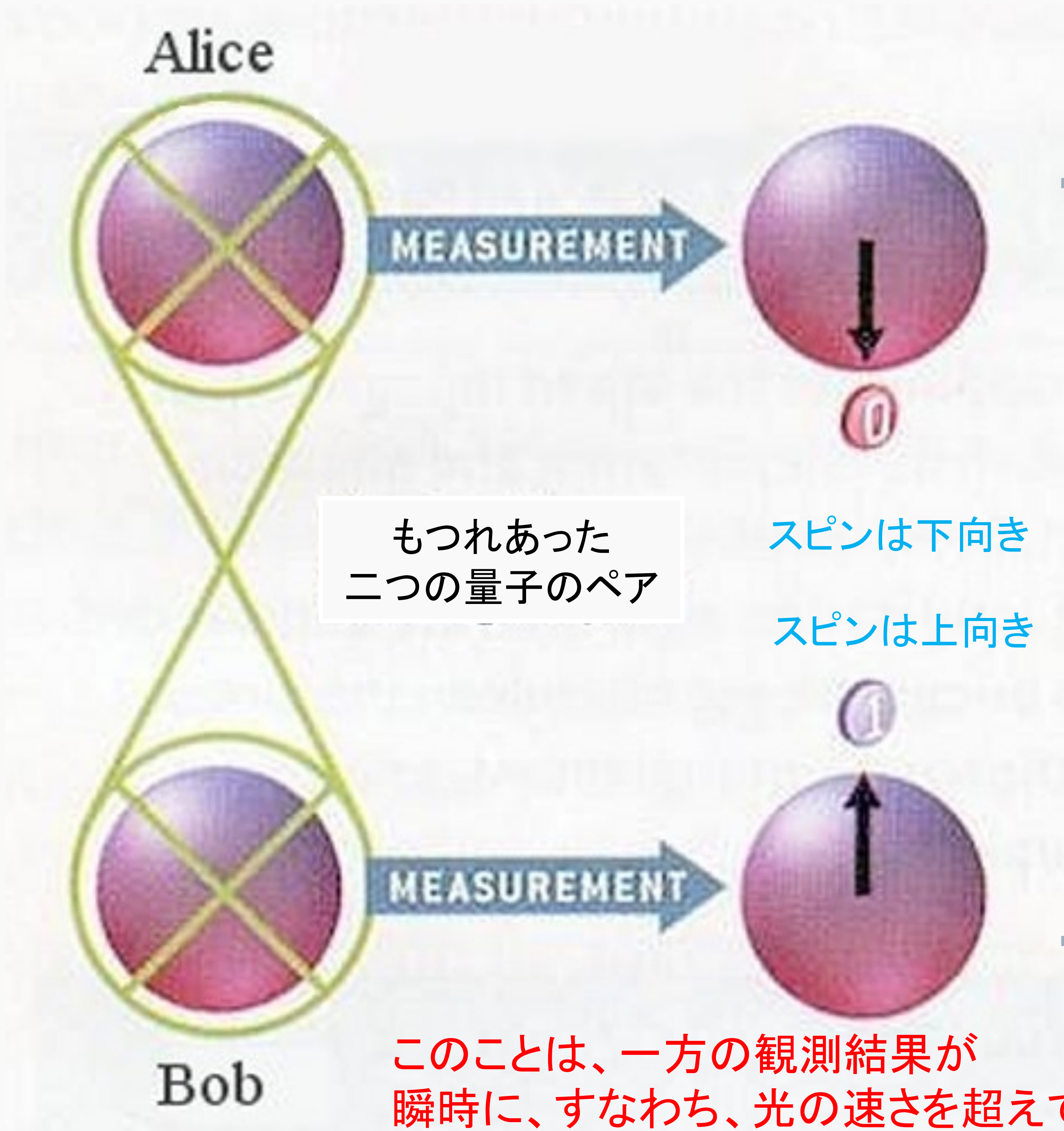
もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。



もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

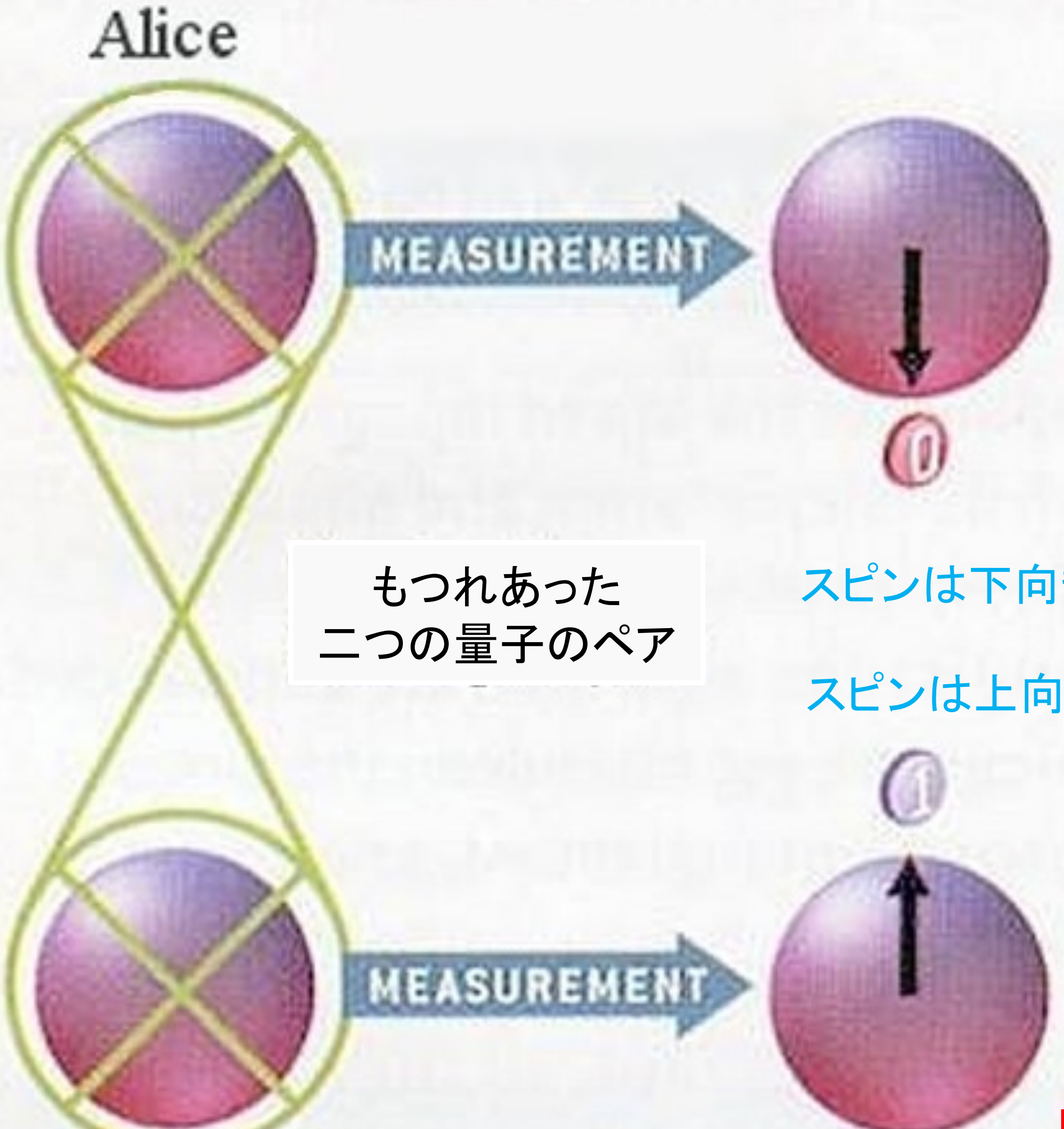
片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。



もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。

このことは、一方の観測結果が
瞬時に、すなわち、光の速さを超えて
他方に伝わることを意味する。



もつれあった
このニつの量子が
どれだけ遠くに
離されたとしても
このもつれ合いは
解けることがない。

片方の量子の状態
を観測すると、もう
一方の量子の状態
は瞬時にわかる。

アインシュタインは、
これを、

「馬鹿げた遠隔作用」

と呼んだ。

このことは、一方の観測結果が
瞬時に、すなわち、光の速さを超えて
他方に伝わることを意味する。

EPR論文を報ずる1935年のニューヨークタイムズ紙

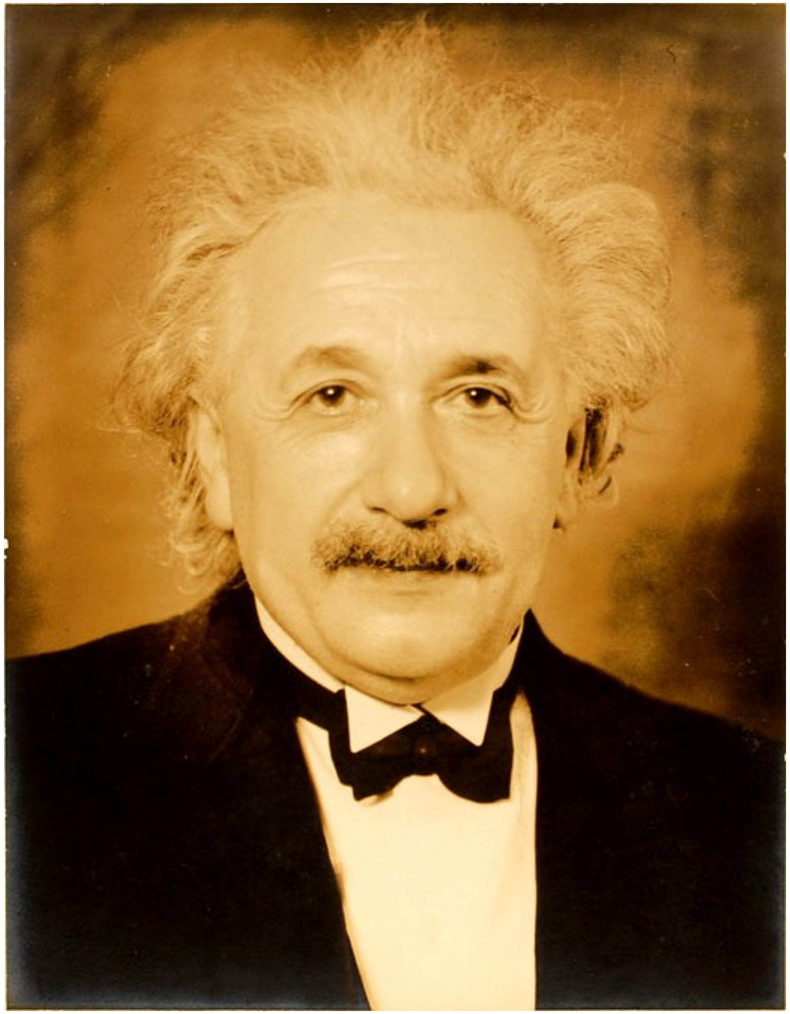
EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

Scientist and Two Colleagues Find It Is Not 'Complete' Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

Believe a Whole Description of 'the Physical Reality' Can Be Provided Eventually.

アインシュタインの「局所実在論」



実在性 (reality)
客観的な実在は、どんな物理理論やその理論の概念的操作からも独立に存在する。

「月は、我々が目を離した時に、存在しなくなるわけではない」

局所性 (locality)
ある場所にある物理的実在は、同時に行われる、遠く離れた場所にある実在の観測によっては影響を受けることはない。

「エンタングルメントは、馬鹿げた遠隔作用だ」

アインシュタインの「隠れた変数」論

「神はサイコロをふらない」

アインシュタインは、量子論の非決定論的で、確率的な性質に満足しなかった。もし、すべての素粒子の正確な性質がわかれば、古典物理学に似た決定論的な物理学でシステム全体を正確にモデル化することができると考えた。

1935年のEPR論文では、エンタングルメントする量子のパラドックスは、量子論は自然の物理学的記述としては、不完全な理論であることを示す例とされた。

観測された自然の確率的性質の根底には、決定論的な客観的基盤／性質、すなわち隠れた変数があるという考えを「隠れた変数論」という。

エンタングルメントの実在性

1964年：ベルによる「隠れた変数論」の否定と1982年：エンタングルメントの存在の確認

事態が大きく動くのは、アインシュタインのエンタングルメントの発見から30年近くたった1964年のことだった。

ベルは、アインシュタインらが量子論の不完全さを解決するものとして推進した「隠れた変数」理論を、理論的に否定することに成功する。

しかも、自然が、「隠れた変数」理論という古典論に従うか、あるいはエンタングルメントを含む量子論に従うかは、実験的に検証できると指摘する。

その後、Bellの主張は、1982年 Aspectによって実験的に実証されることになる。

ここに、量子論の正しさと、エンタングルメントの実在性は、理論的にも実験的にも確認される。

1964年　Bellの定理
アインシュタインの「隠れた変数」の否定

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL†
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(*Received* 4 *November* 1964)

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

https://goo.gl/wyvd7B

ベルの定理

ベルの不等式

古典論で、アインシュタインのいう「隠れた変数」を仮定した場合でも、観測の確率分布は、ある不等式を満たすことを示すことができる。

量子論は、この不等式を破る

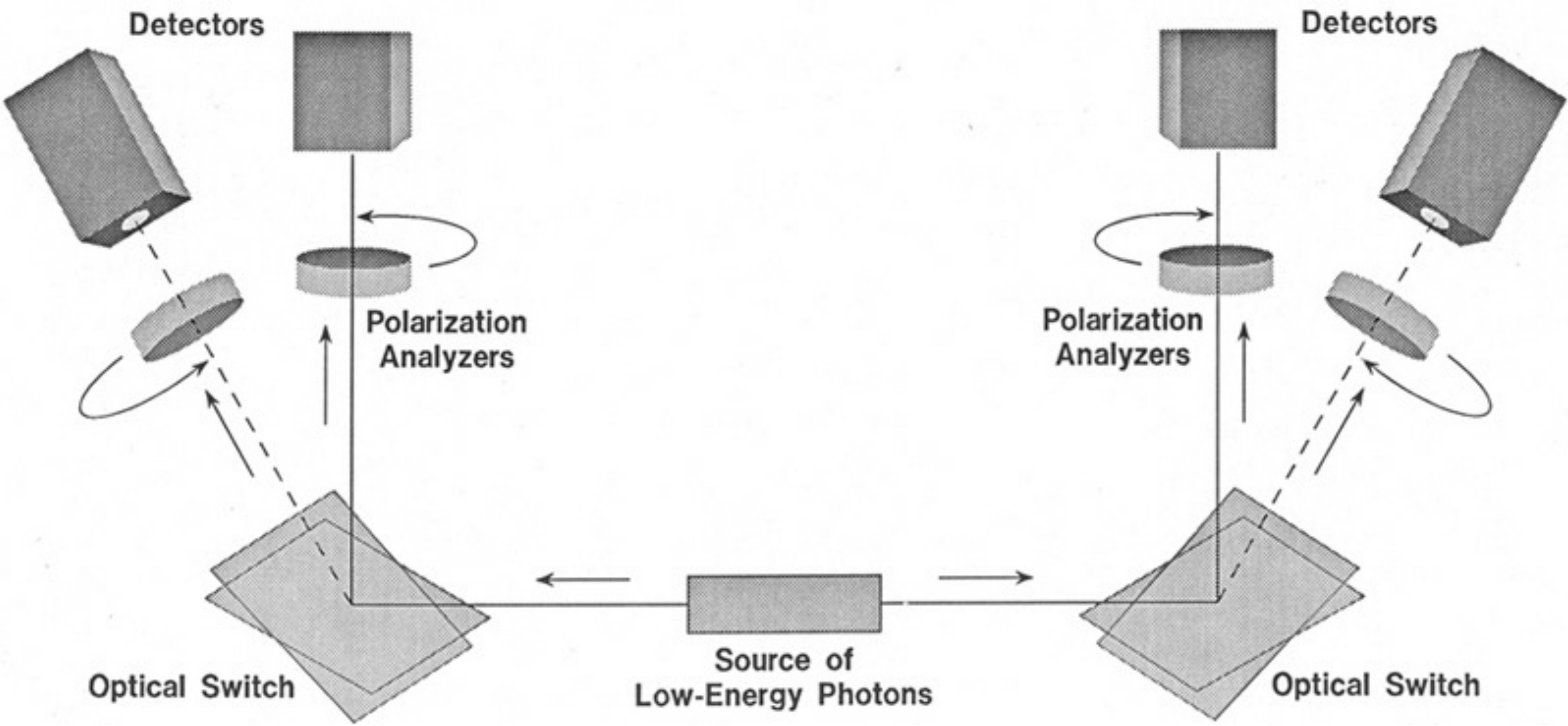
量子論的観測は、この不等式を破ることが、理論的に証明できる。

実験的な検証可能性

自然が、古典論に従うか量子論に従うかは、この違いを検出できれば、実験的に検証することが可能である。

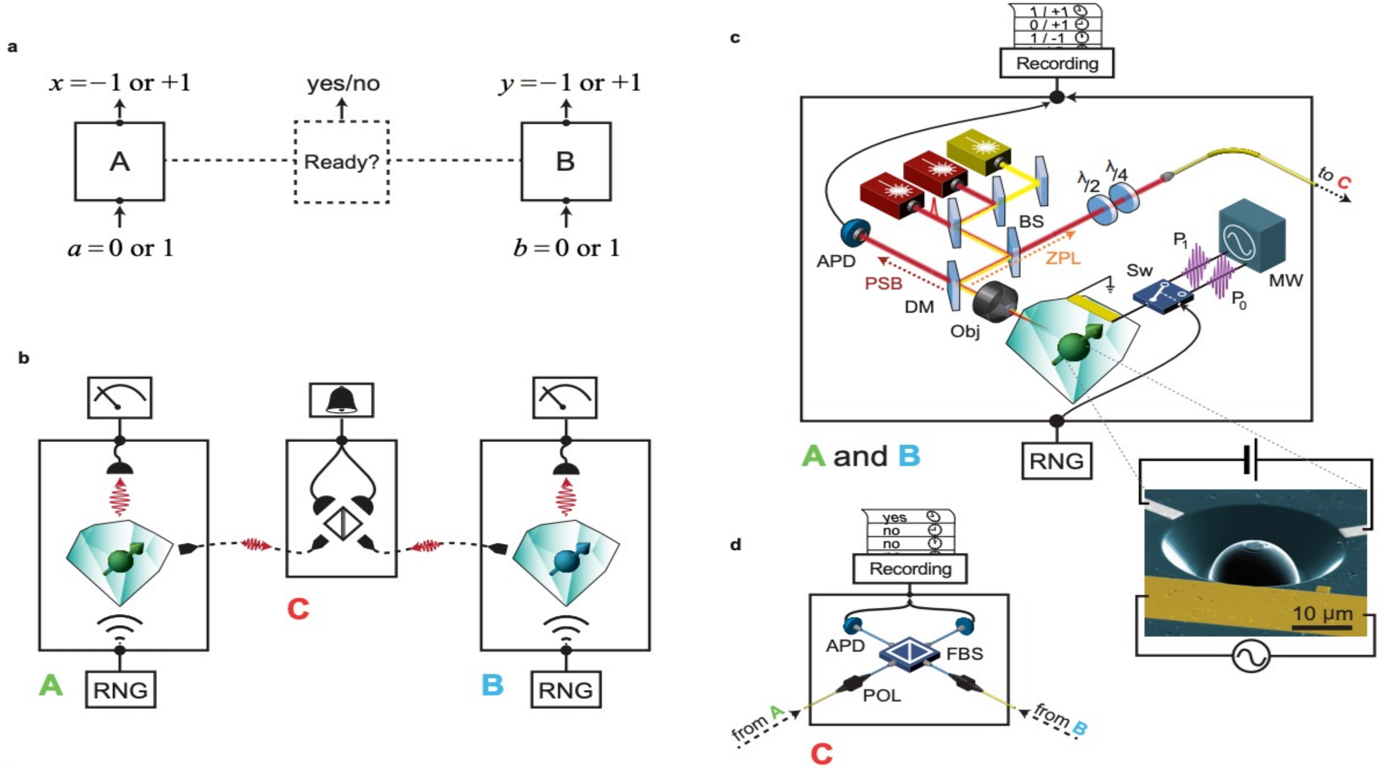
1964年
ベルの定理

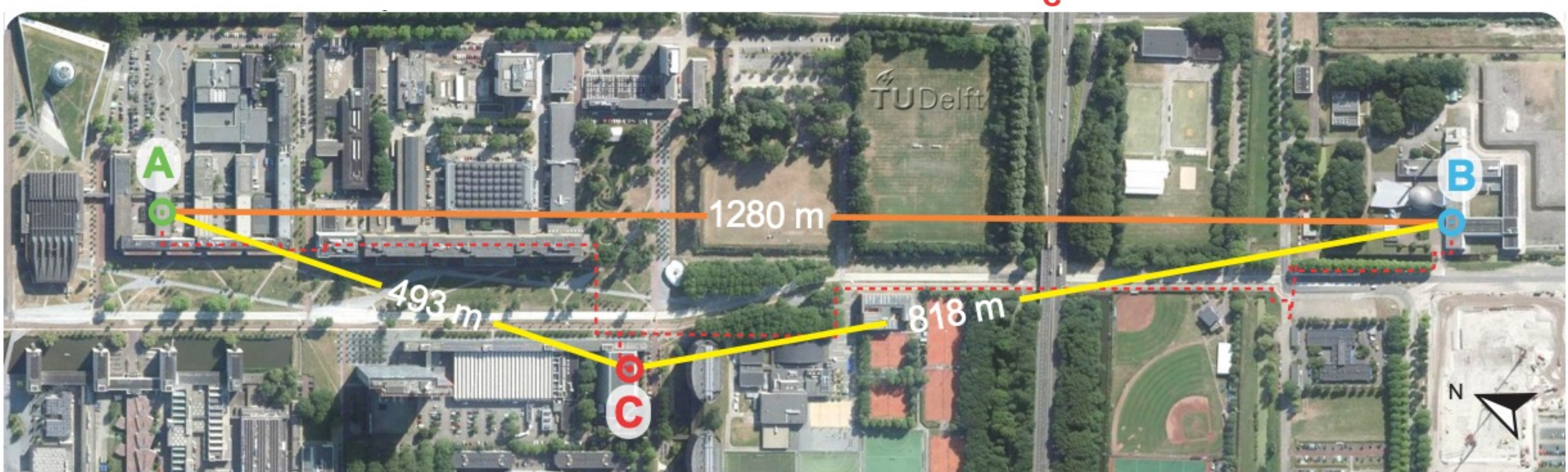
1982年　Aspectの実験



Bellの定理が成り立っていることの実験での確認

2015年
Delft University
での実験





https://arxiv.org/pdf/1508.05949.pdf


エンタングルメントとはどのような状態か？

簡単な計算で確かめる
エンタングルメント

2-qubitsの状態

エンタングルメントという状態は
どのように生まれるのか？

ここでは、独立した二つの状態を一つの状態と考える「テンソル積」の説明を通じて、エンタングルメントの状態がどのように生まれるのかを説明する。

二つ以上の量子の状態には、より単純な量子の状態のテンソル積で表現されない状態があらわれる。そうした状態を、エンタングルメント状態と呼ぶ。

量子が一個だけではエンタングルメントは起きない。しかし、量子が二個集まった状態を考えると、エンタングルメントは簡単に起きる。

最も単純なエンタングルメントは、二つの量子の状態の「テンソル積」としては表されない状態として自然に生まれてくる。

2-qubitsの状態

1-qubitの状態

一つのqubitの状態|1-qubit>は、|0>と|1>の二つの状態の「重ね合わせ」として、次のように表現される。

|1-qubit> = a|0> + b|1>

ここで、a, b は、$|a|^2 + |b|^2 = 1$ という条件を満たす複素数である。

一つのqubitの状態|1-qubit>を観測して、状態 |0>あるいは状態|1>を観測する確率は、次のように与えられる。

- |0> を観測する確率は、$|a|^2$
- |1> を観測する確率は、$|b|^2$

2-qubitsの状態は、どう表現されるか？

それでは、二つの量子からなる 2-qubitsの状態は、どのように
表現されるのであろうか？
もっと一般に、多数の量子からなる n-qubitのシステムの状態は、
どう表現されるのだろうか？

それには、状態の「テンソル積」という考え方を使う。

二つの量子の状態のテンソル積

独立した二つの量子の状態を
一つの量子の状態と考える

一つのqubitからなる状態S1,S2を考える

$qubit\ a|0> +b|1>$ のみを含む状態をS1、
$qubit\ c|0> +d|1>$ のみを含む状態をS2とする。

$S1$

$\boxed{a|0> +b|1>}$

$S2$

$\boxed{c|0> +d|1>}$

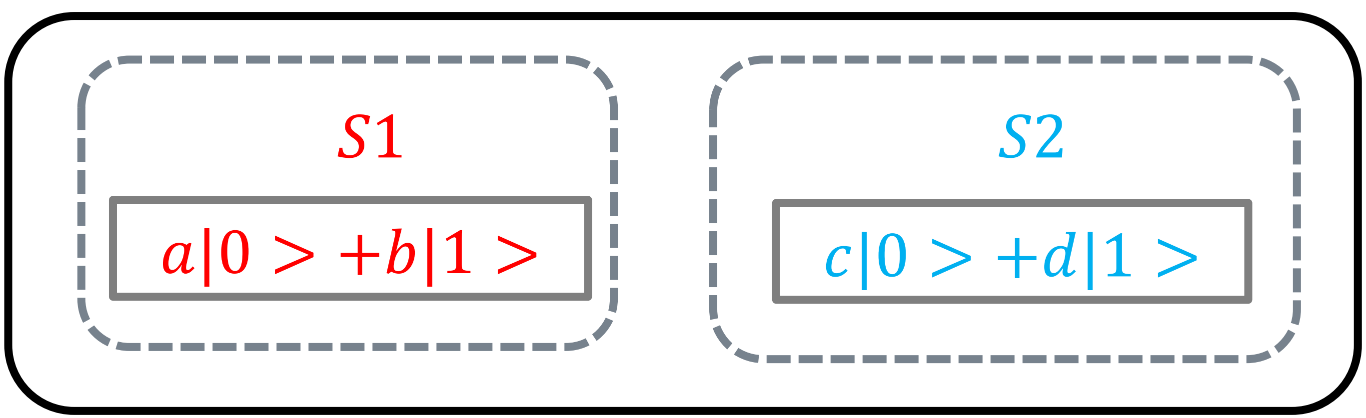
S1,S2を一緒にした状態を考え、それを $S1 \otimes S2$ と表す

$qubit\ a|0> + b|1>$ のみを含む状態を$S1$、

$qubit\ c|0> + d|1>$ のみを含む状態を$S2$とした時、

この二つを一緒にした状態 S を テンソル積 $S1 \otimes S2$で表す。

$$S = S1 \otimes S2$$



2-qubitの状態Sを計算をする

この時、次のようなたすきがけの計算で、Sの状態を計算する。

$ac(|0>\otimes|0>)$

$ad(|0>\otimes|1>)$

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$

$bd(|1>\otimes|1>)$

$bc(|1>\otimes|0>)$

$$= ac(|0>\otimes|0>) + ad(|0>\otimes|1>) + bc(|1>\otimes|0>) + bd(|1>\otimes|1>)$$

$|x>\otimes|y>$を$|xy>$と表す

この時、次のようなたすきがけの計算で、Sの状態を計算する。

$ac(|0>\otimes|0>)$

$ad(|0>\otimes|1>)$

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$

$bd(|1>\otimes|1>)$

$bc(|1>\otimes|0>)$

$$= ac(|0>\otimes|0>) + ad(|0>\otimes|1>) + bc(|1>\otimes|0>) + bd(|1>\otimes|1>)$$

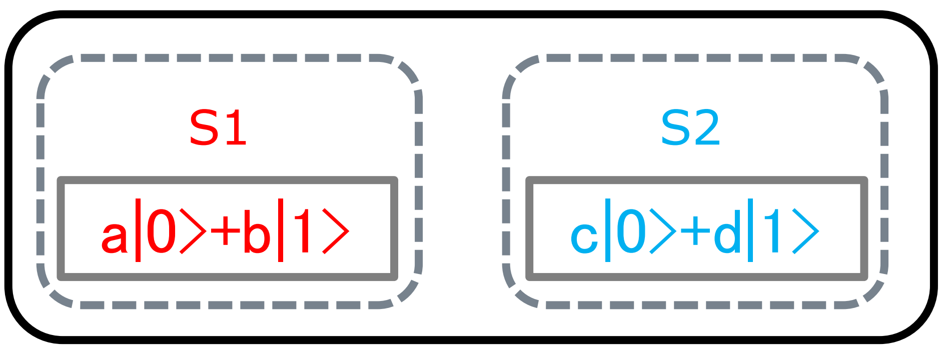
$$= ac(|00>) + ad(|01>) + bc(|10>) + bd(|11>)$$

$$= \boxed{ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>}$$

二つの1-qubitのテンソル積で表される状態Sは、次の形をしている

$$S = ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>$$

$$S = S1 \otimes S2$$



$$S = S1 \otimes S2 = (a|0>+b|1>) \otimes (c|0>+d|1>)$$
$$= ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>$$

ところで、全ての 2-qubitsの状態は、
二つの1-qubitの状態のテンソル積で
表現できるだろうか？

ところで、全ての 2-qubitsの状態は、
二つの1-qubitの状態のテンソル積で
表現できるだろうか？

↓

二つの1-qubitのテンソル積で
表される状態Sは、次の形をしている

$$S = ac|00> + ad|01> + bc|10> + bd|11>$$

2-qubitの状態が、二つの1-qubitの状態のテンソル積で表現できる例

1. $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes |0\rangle$
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle-|11\rangle) = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$
4. $3/5\sqrt{2}|00\rangle-3/5\sqrt{2}|01\rangle+4/5\sqrt{2}|10\rangle-4/5\sqrt{2}|11\rangle$
   $= (3/5|0\rangle+4/5|1\rangle) \otimes (1/\sqrt{2}|0\rangle-1/\sqrt{2}|1\rangle)$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle-|111\rangle) = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle) \otimes |1\rangle$
   最後のこの例は、3-qubitの状態が、三つの1-qubitの状態のテンソル積で表現できる場合の例である。

二つの1-qubitのテンソル積に分解できない状態 エンタングルメント

すべての2-qubitsの状態が、二つの1-qubitのテンソル積に分解できるとは限らない。二つの1-qubitのテンソル積に分解できない2-qubitの状態を、**エンタングルメント** という。
そういう状態があることを、次に見ていこう。

ある2-qubitの状態が二つの1-qubitのテンソル積に分解できるか否かは、二つの1-qubitのテンソル積で表現される2-qubitの状態が、次の係数を持つこと利用してチェックできる。

$$ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

この係数 ac, ad, bc, bdを、
2-qubitの状態の係数と比較すればいい。

$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>)の場合

$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>)

$=1/\sqrt{2}$(|00> + |11>)

=? ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

|01>, |10>の項が含まれていないので、ad=bc=0。
これから aとd、bとcのいずれかが0であることがわかる。
この時、ac あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>) はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}\,(|01>+|10>)$の場合

$$1/\sqrt{2}\,(|01>+|10>)$$

$$=1/\sqrt{2}(\qquad |01>+\quad |10>\qquad)$$

$$=?\qquad ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>$$

|00>, |11>の項が含まれていないので、ac=bd=0。
これから aとc、bとdのいずれかが0であることがわかる。
この時、ad あるいは bc のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

$1/\sqrt{2}\,(|01>+|10>)$ はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle - |11\rangle)$の場合

$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle - |11\rangle)$

$=1/\sqrt{2}(\quad |00\rangle \qquad\qquad - \quad |11\rangle\ )$

$=?\qquad ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$

|01>, |10>の項が含まれていないので、ad=bc=0。
これから aとd、bとcのいずれかが0であることがわかる。
この時、ac あるいは bd のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle - |11\rangle)$ はエンタングルメント状態である。

$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle - |10\rangle)$の場合

$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle - |10\rangle)$

$= 1/\sqrt{2}(\boxed{}\ |01\rangle - |10\rangle\ \boxed{})$

$= ?\quad ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$

|00>, |11>の項が含まれていないので、ac=bd=0。
これから aとc、bとdのいずれかが0であることがわかる。
この時、ad あるいは bc のいずれかは0になるので、二つの係数は一致しない。

$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle - |10\rangle)$ はエンタングルメント状態である。

EPRペア = Bell State

ここで見た四つの、もっとも基本的な二つの量子のエンタングルした状態を、発見者の名前をとって「EPRペア」、あるいは、「Bell State」と呼ぶ。

$$\Phi^{+}: 1/\sqrt{2}\,(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$\Phi^{-}: 1/\sqrt{2}\,(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$\Psi^{+}: 1/\sqrt{2}\,(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$\Psi^{-}: 1/\sqrt{2}\,(|01\rangle - |10\rangle)$$

簡単な量子ゲートで作る
エンタングルメント

Bell State Gateとは何か？

Bell Stateを出力するゲートをBell State Gateと呼ぶ。
Bell State Gate を**BSG**で表すと、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{BSG}|00> = (|00>+|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^{+}>$$

$$\mathbf{BSG}|01> = (|01>+|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^{+}>$$

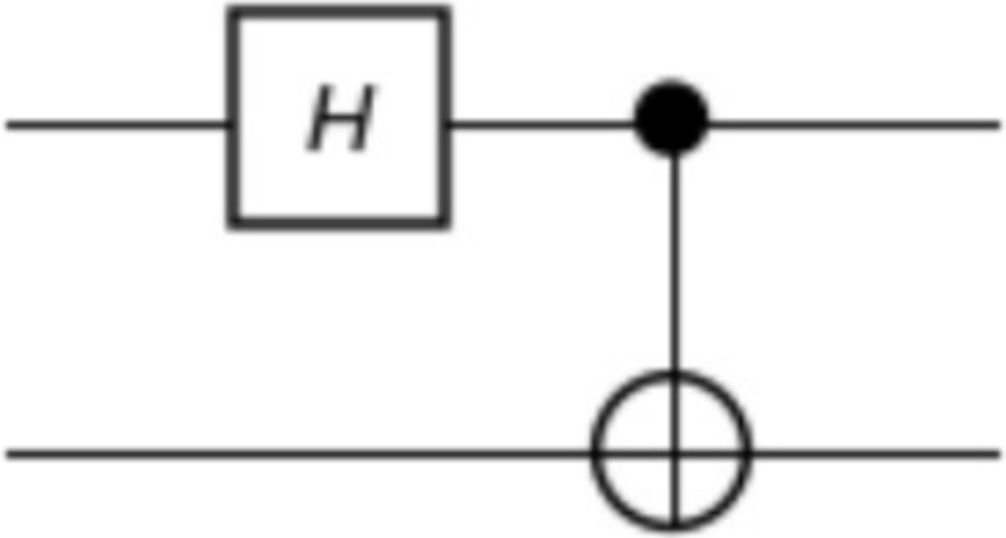
$$\mathbf{BSG}|10> = (|00>-|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^{-}>$$

$$\mathbf{BSG}|11> = (|01>-|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^{-}>$$

このことを、順番に見ていこう。

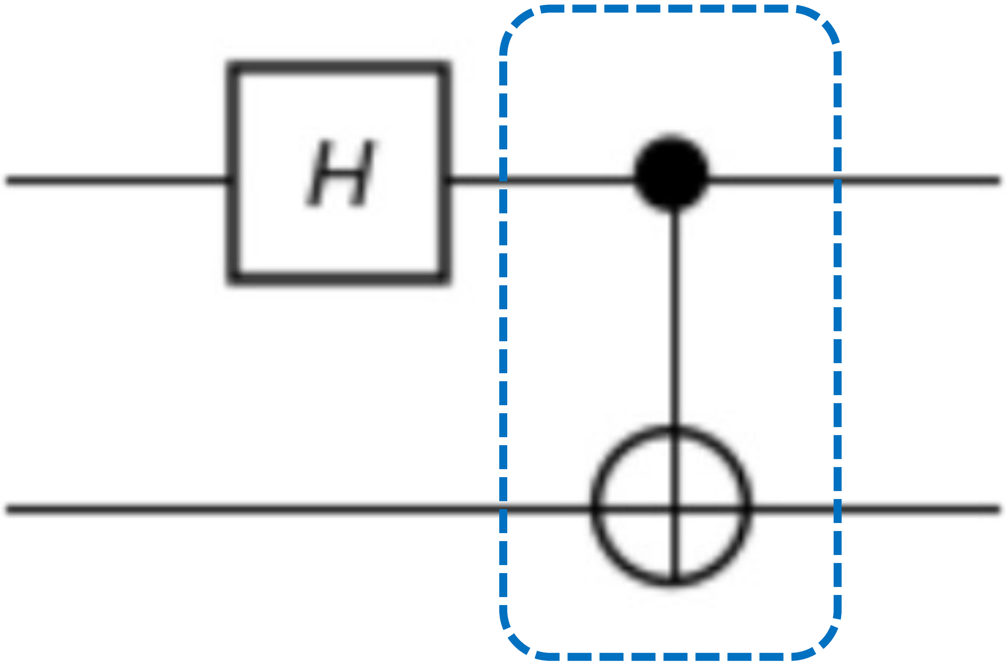
Bell State ゲート

エンタングルメント状態は、たった二つの
量子ゲートで簡単に作れる！



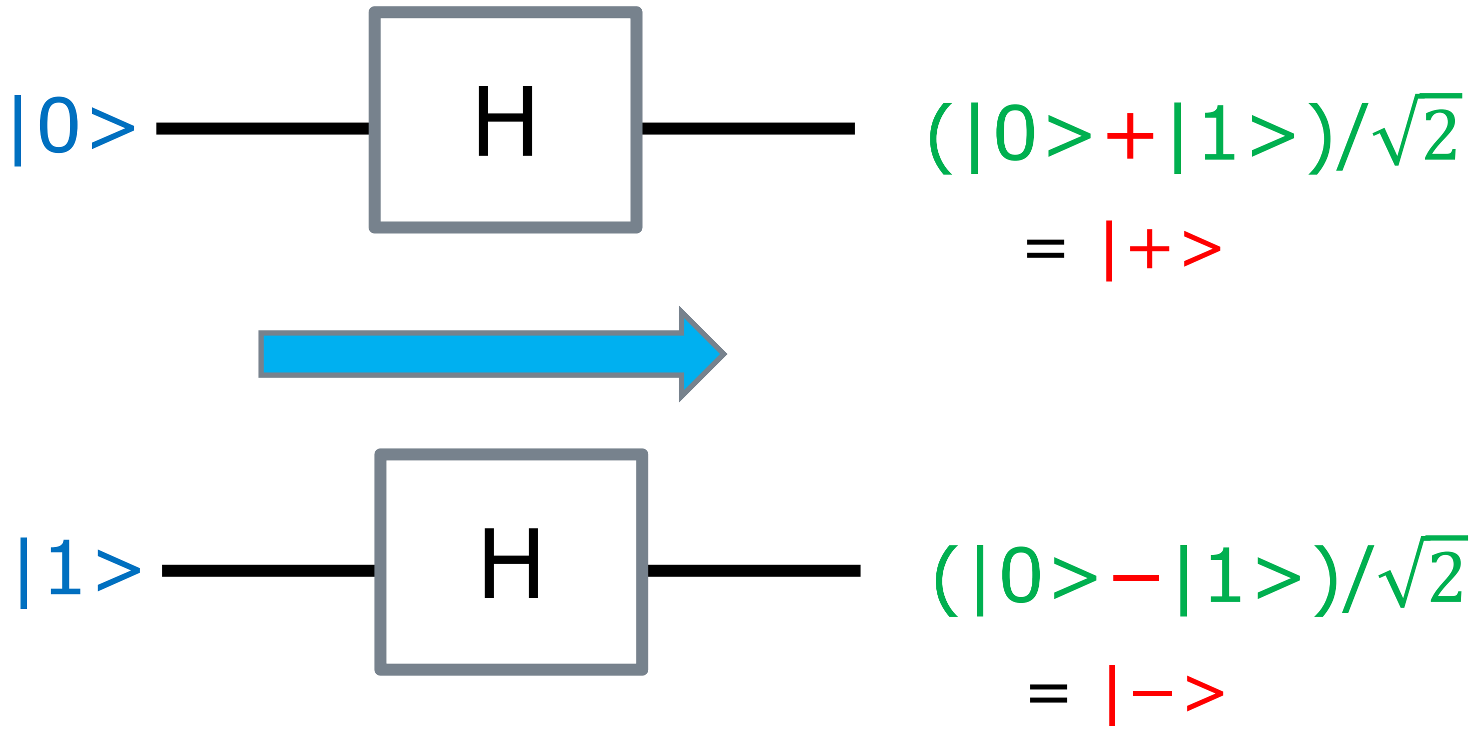
Bell State ゲート

Hadamard ゲート **CNOT ゲート**



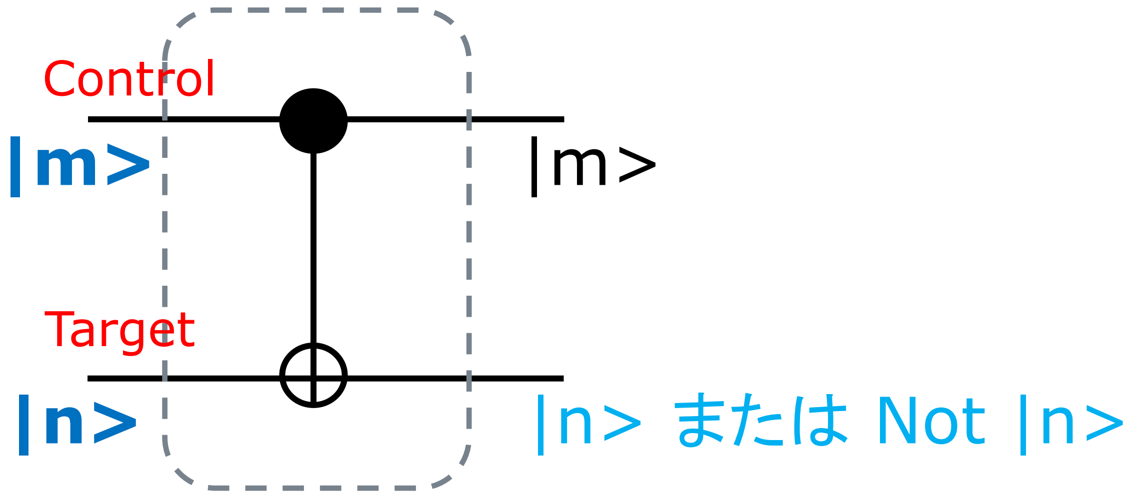
Bell State ゲートは、アダマール・ゲートとCNOTゲートの組み合わせで構成される

アダマール・ゲートの基本的な働き



CNOTゲートの基本的働き

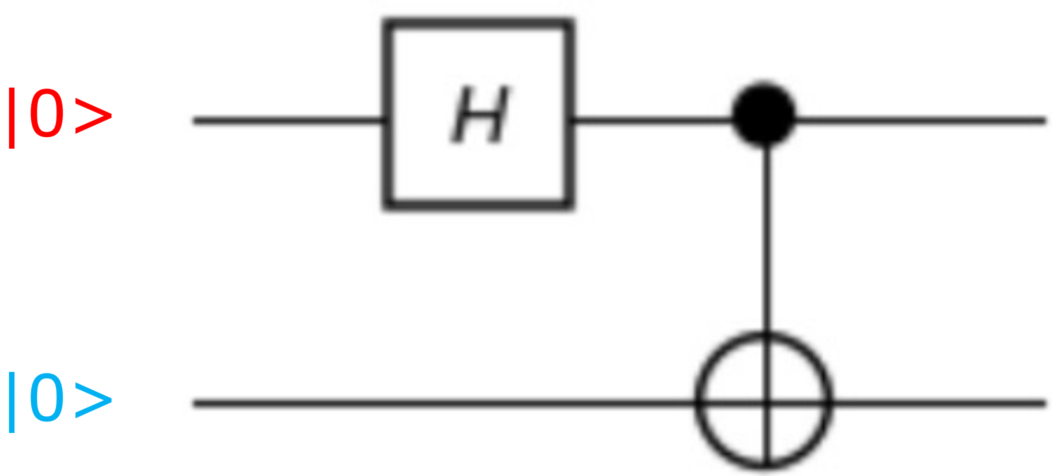
第一bit |m>をControl ビット
第二bit |n>をTarget ビット　と呼ぶ



Control ビットが |0>なら何もしない
Control ビットが |1> の時Target ビットのNOTをとる

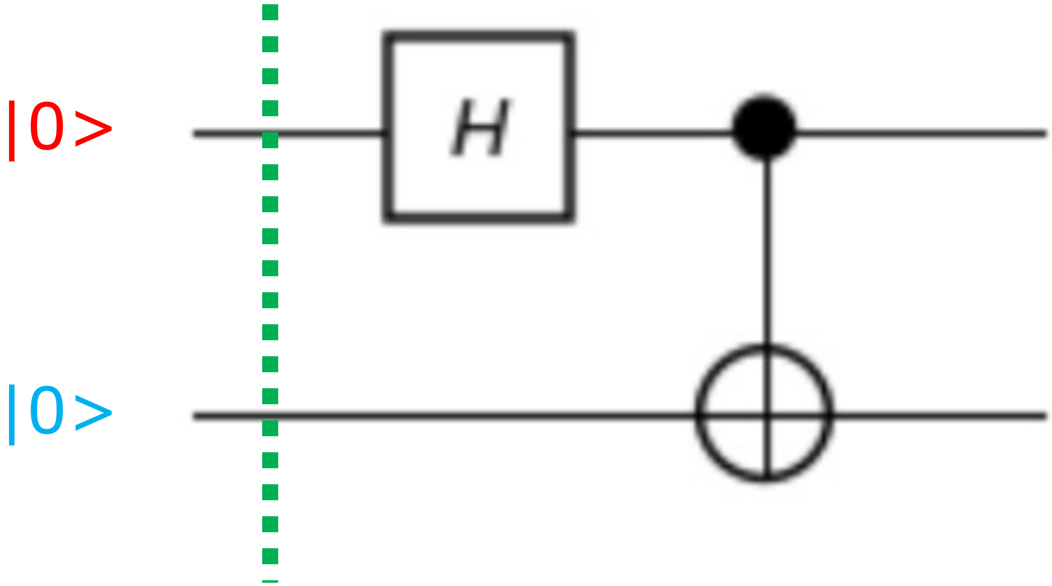
Bell State Gateの働き

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合



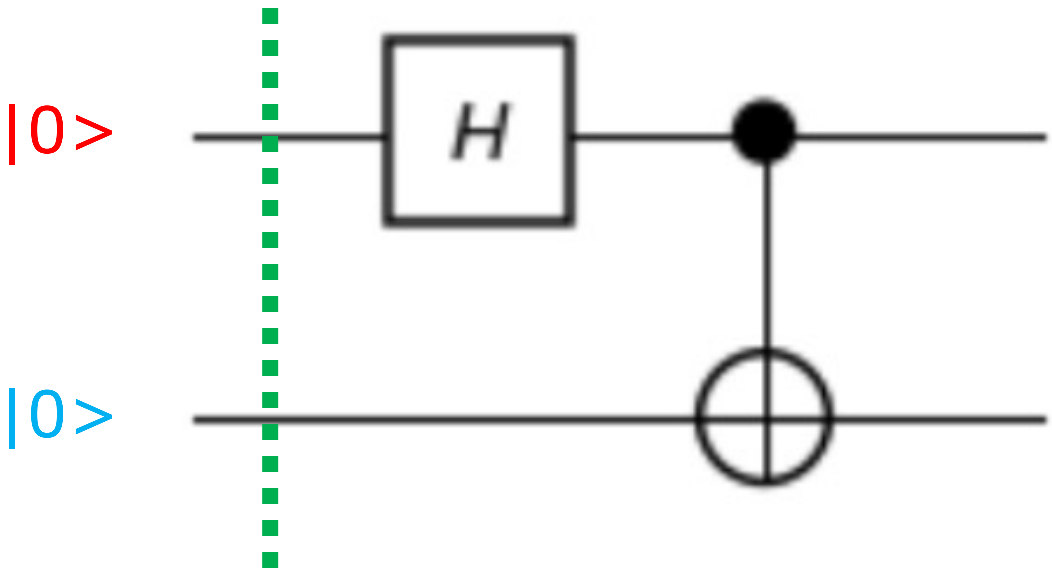
Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

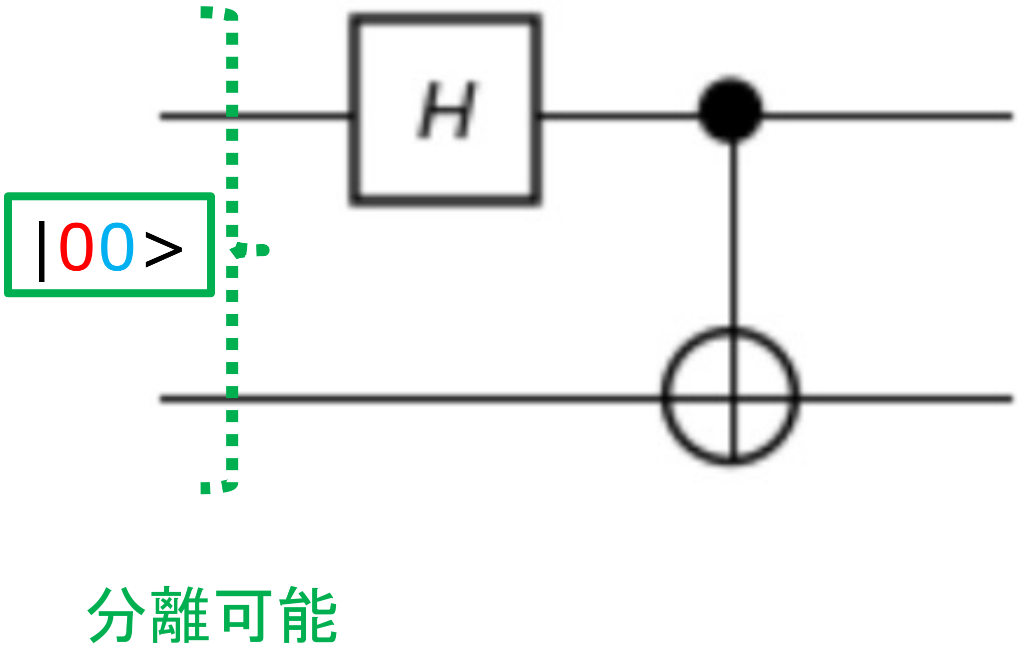


$|0\rangle \otimes |0\rangle$

この時点での
系全体の状態 $= \boxed{|00\rangle}$

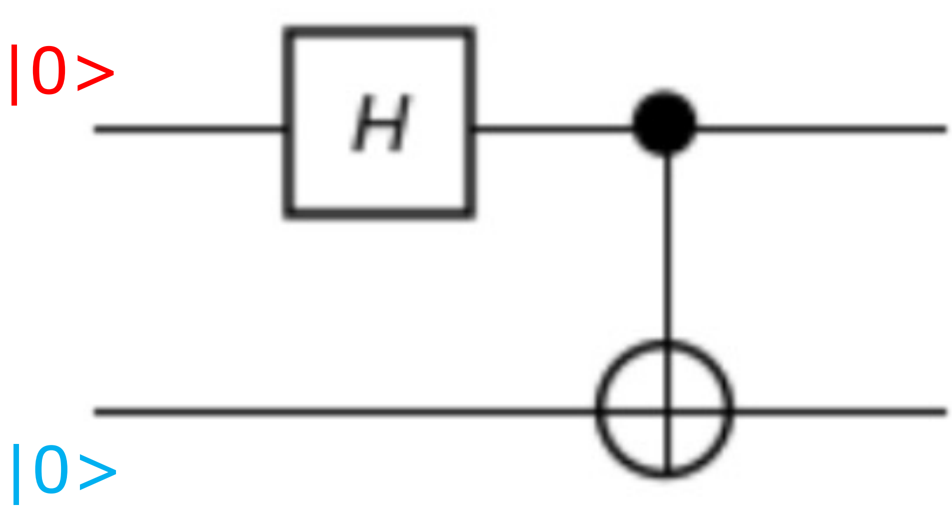
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



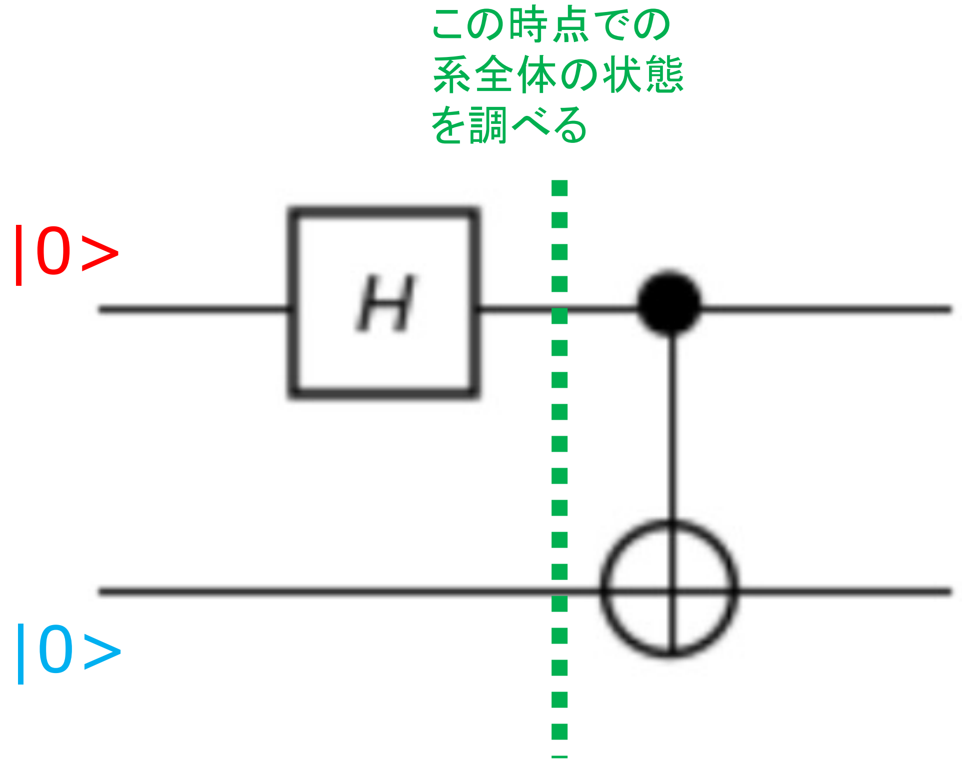
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



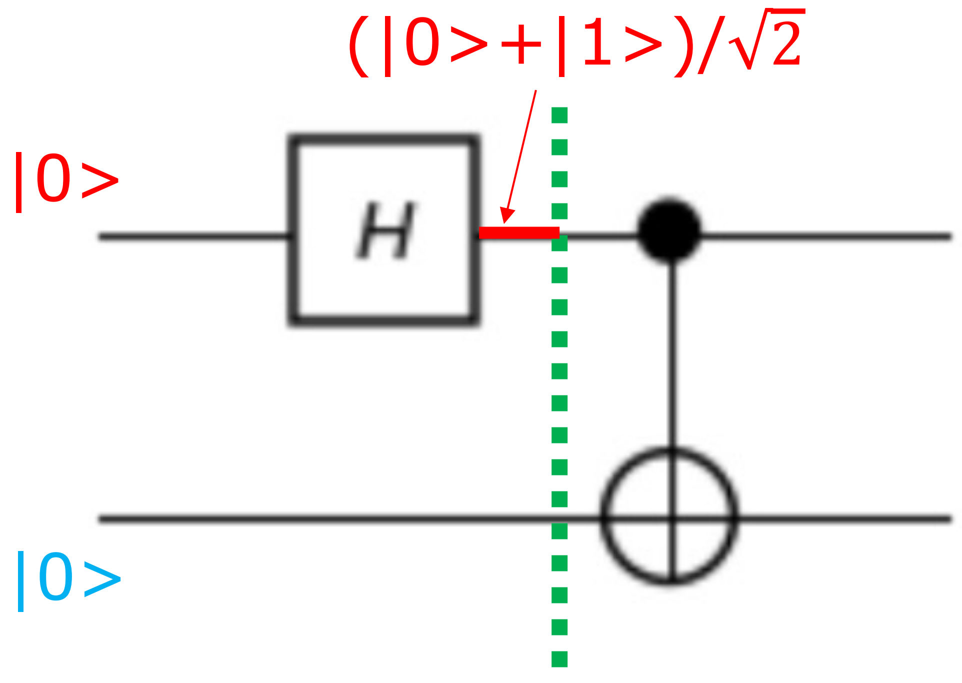
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

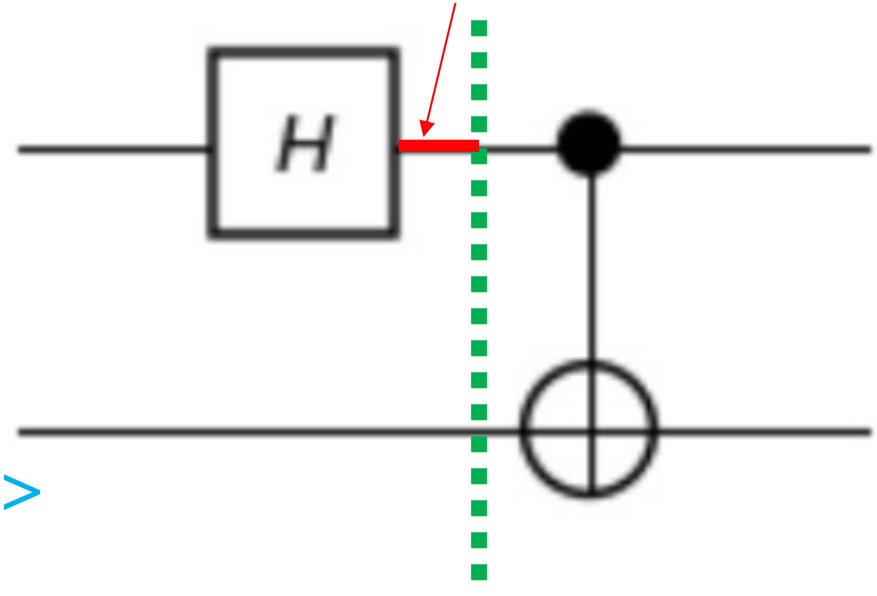


Hは|0>を$(|0>+|1>)/\sqrt{2}$に変える

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$



$|0\rangle$

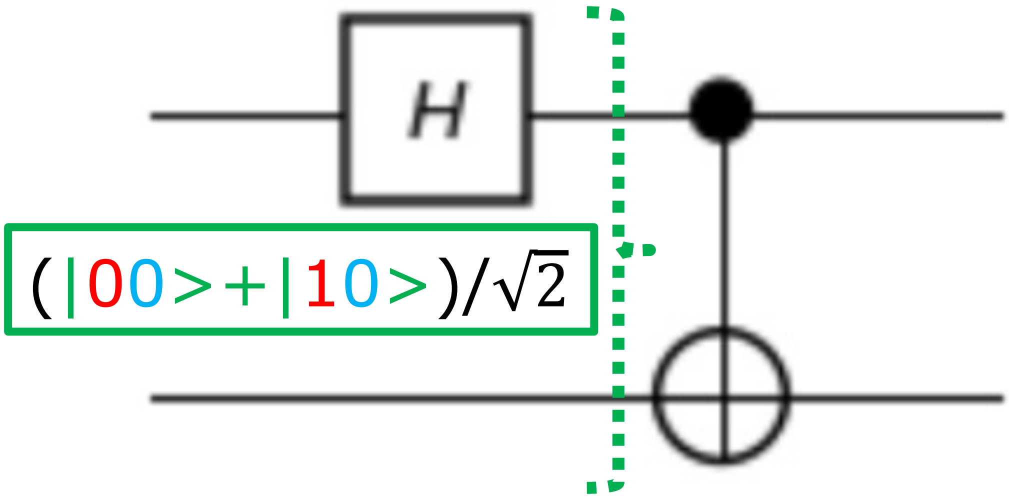
$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2} \otimes |0\rangle$

この時点での
系全体の状態

$= \boxed{(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}}$

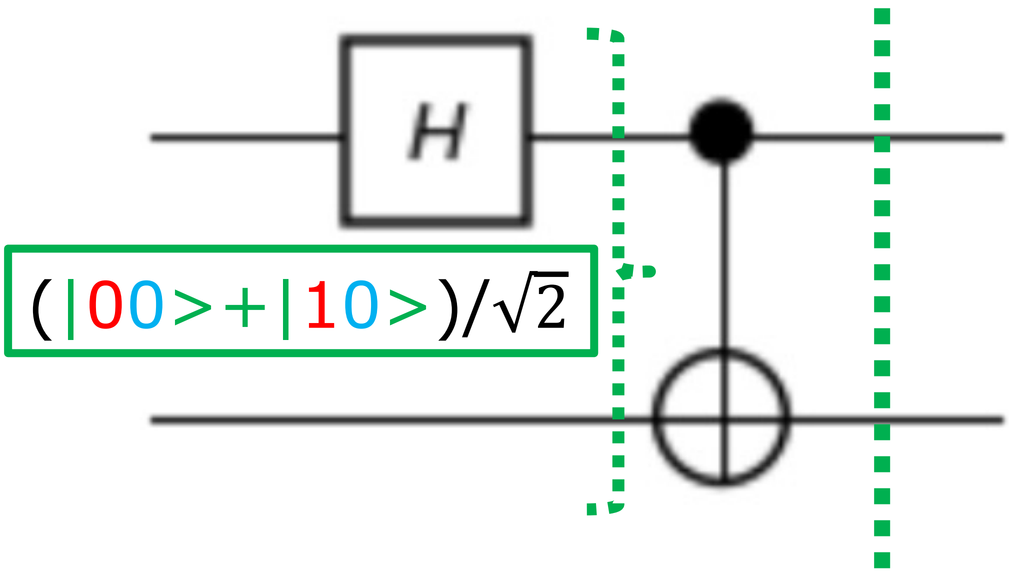
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



Bell State ゲートの働き

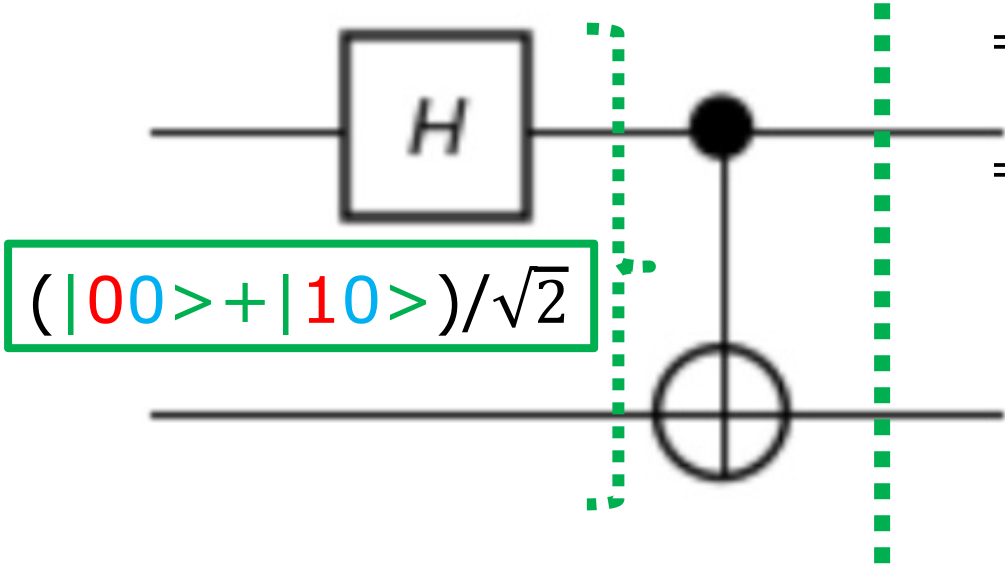
入力|00>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる

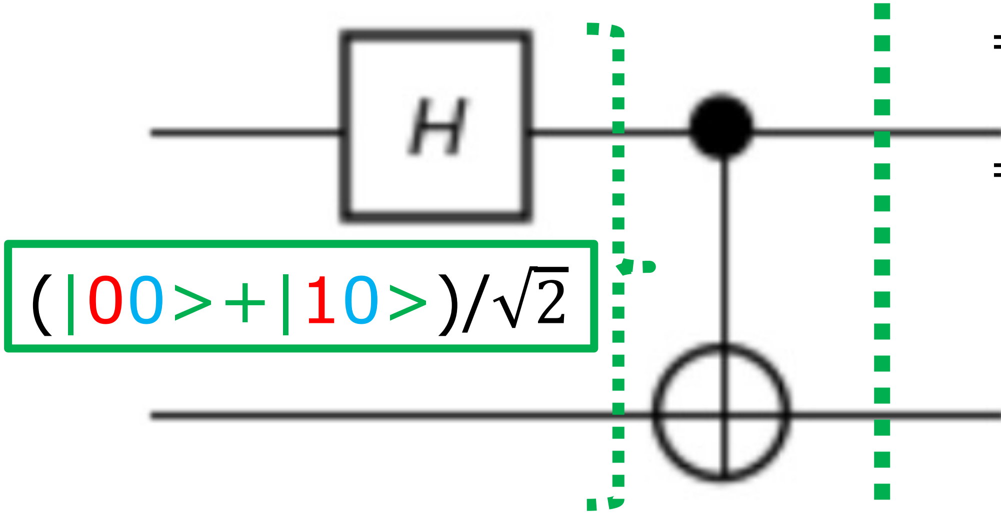


$$\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})$$
$$= \mathbf{CNOT}(|00\rangle)/\sqrt{2} + \mathbf{CNOT}(|10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



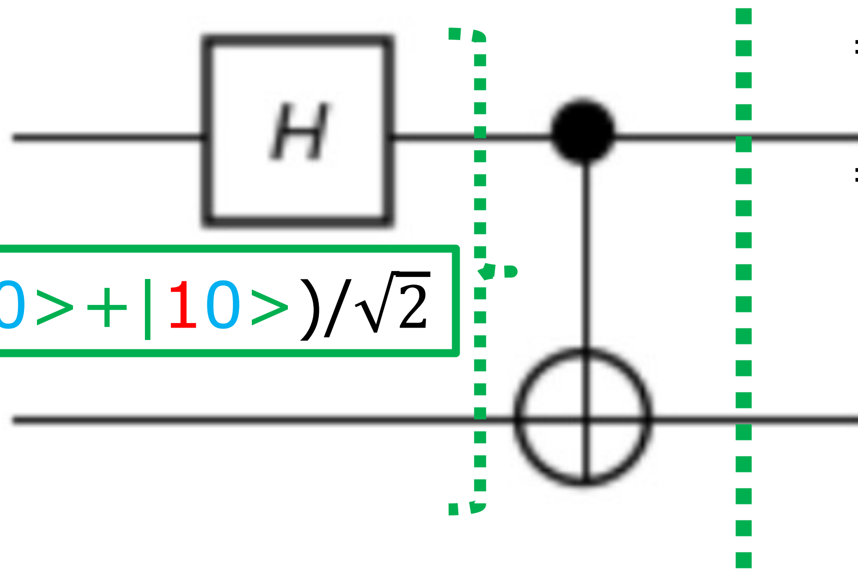
$\mathbf{CNOT}((|00>+|10>)/\sqrt{2})$
$= \mathbf{CNOT}(|00>)/\sqrt{2}$
$+\mathbf{CNOT}(|10>)/\sqrt{2}$
$= (|00>+|11>)/\sqrt{2}$

CNOTは線形演算子である。
ここでは、線形演算子Mで
スカラー a,b
ベクトル u,v について
M(au+bv)
= aM(u)+bM(v)
を利用した。

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる

$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$



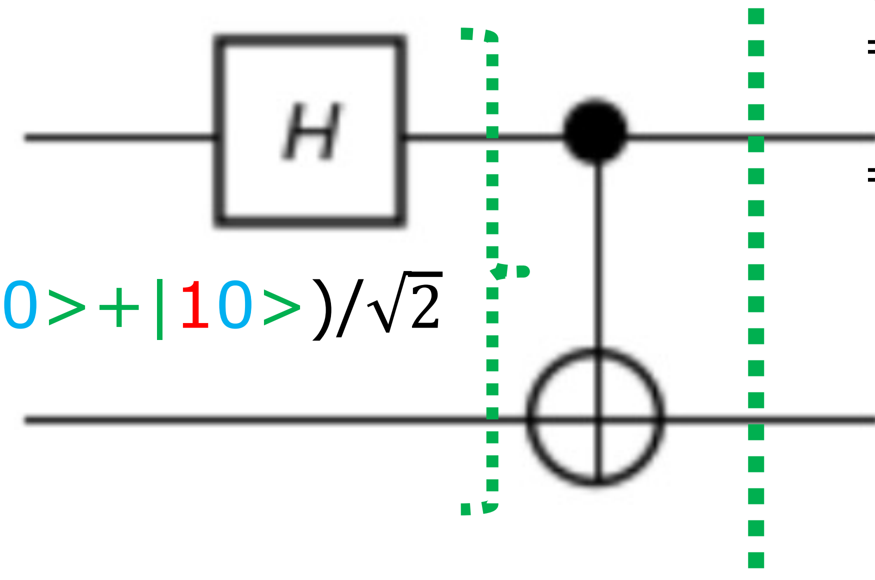
CNOT$((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})$
$=$ **CNOT**$(|00\rangle)/\sqrt{2}$
$+$**CNOT**$(|10\rangle)/\sqrt{2}$
$= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

CNOTは線形演算子である。
ここでは、線形演算子Mで
スカラー a,b
ベクトル u,v について
M(au+bv)
= aM(u)+bM(v)
を利用した。

また、
CNOT(|00>) = |00>
CNOT(|10>) = |11>
である。

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合

$$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$$



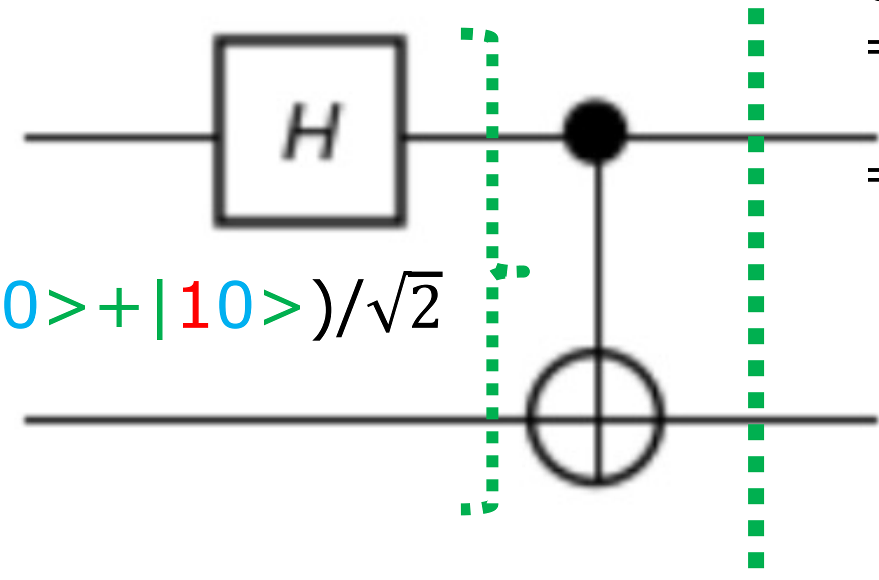
$\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)\ /\sqrt{2})$

$= \ \mathbf{CNOT}(|00\rangle)\ /\sqrt{2}$

$\ \ +\mathbf{CNOT}(|10\rangle)\ /\sqrt{2}$

$= (|00\rangle+|11\rangle)\ /\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合



$(|00>+|10>)/\sqrt{2}$

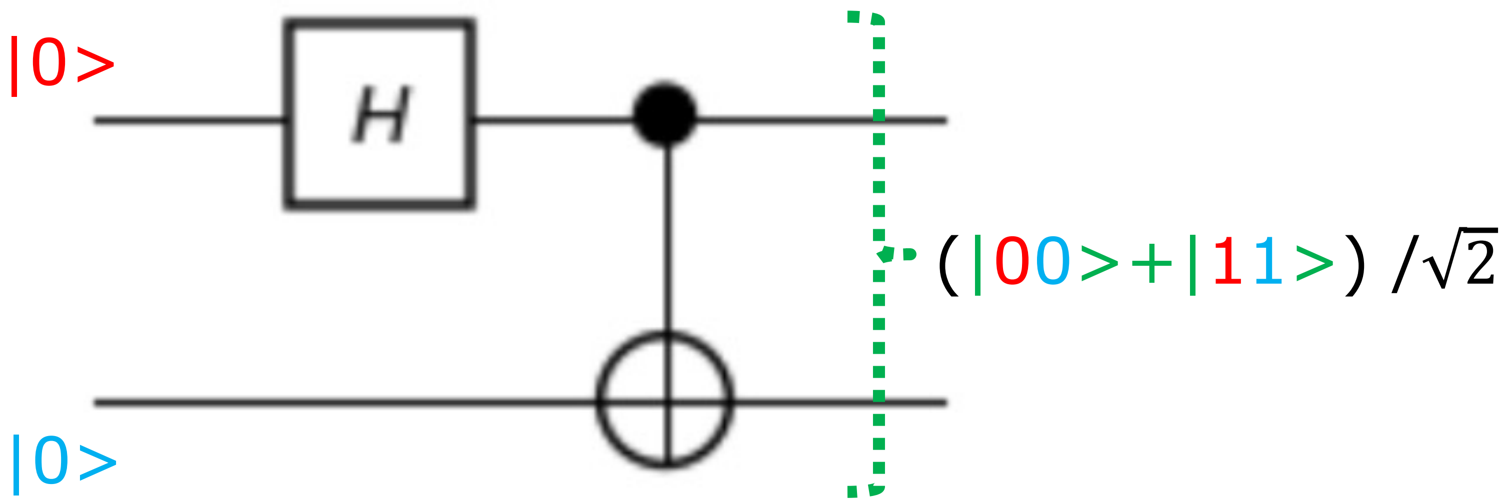
$\mathbf{CNOT}((|00>+|10>)\ /\sqrt{2})$
$= \ \mathbf{CNOT}(|00>)\ /\sqrt{2}$
$\quad +\mathbf{CNOT}(|10>)\ /\sqrt{2}$
$= (|00>+|11>)\ /\sqrt{2}$

この時点での
系全体の状態

$\boxed{= (|00>+|11>)\ /\sqrt{2}}$

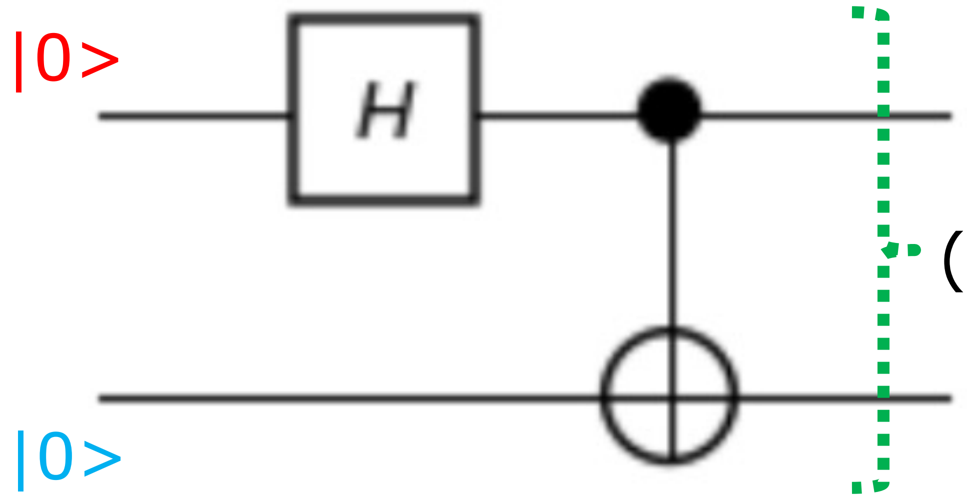
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



$(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$

これは、エンタングルメント状態のBell Stateの一つ$|\Phi^+\rangle$である。

CNOTの計算

前回は、演算子の「線形性」を用いて、次のように CNOTを計算した。

$$\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})$$
$$= \mathbf{CNOT}(|00\rangle)/\sqrt{2} + \mathbf{CNOT}(|10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$$

今回は、重ね合わせの和のそれぞれの項の、コントロール・ビットが1の場合だけ、ターゲット・ビットを反転させればいいと考えて、直接、暗算でCNOTを計算する。

CNOTの計算

例えば、次のように

コントロール・ビットが立っているので反転する

$$\mathbf{CNOT}((|00>+|10>)/\sqrt{2}) = (|00>+|11>)/\sqrt{2}$$

コントロール・ビットが立っていないので、この項は変わらない

ここで、赤字の1は、その項のコントロール・ビットが立っていることを表し、緑字の1は、反転されたターゲット・ビットを表す。

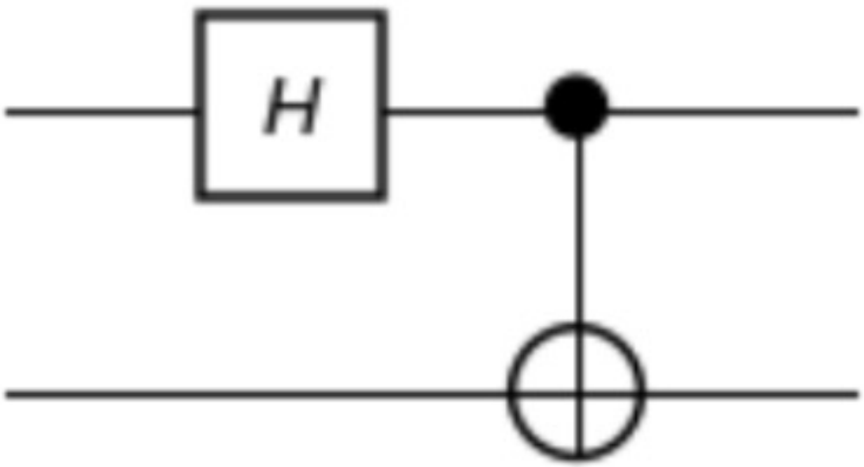
同様に

$$\mathbf{CNOT}((|01>+|11>)/\sqrt{2}) = (|01>+|10>)/\sqrt{2}$$

Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合

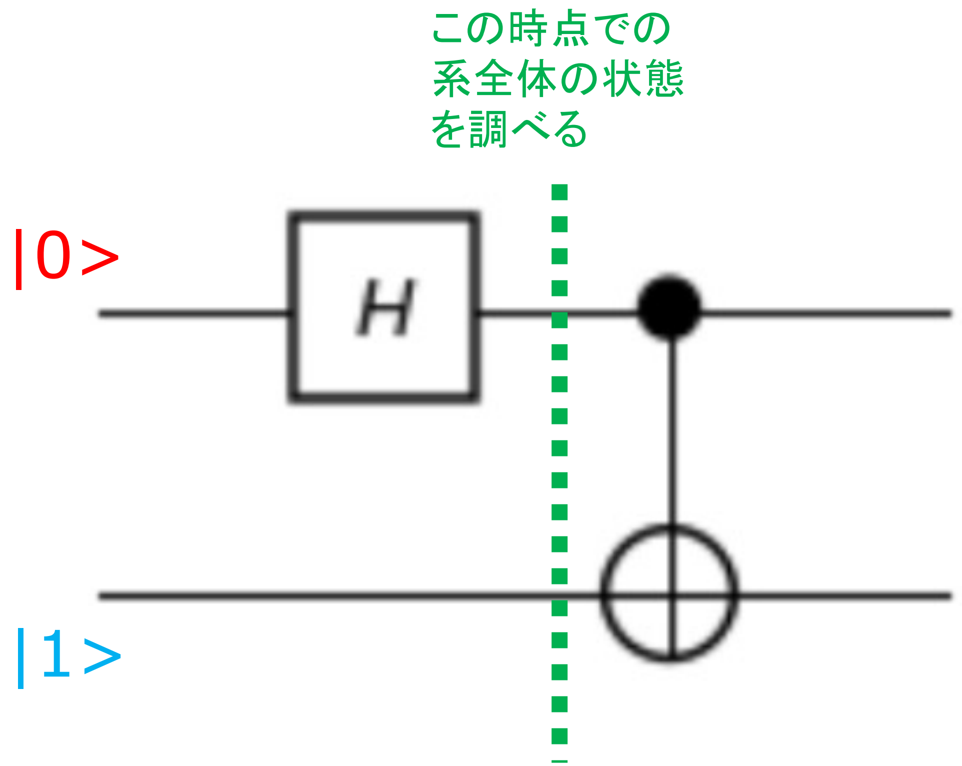
|0>

|1>

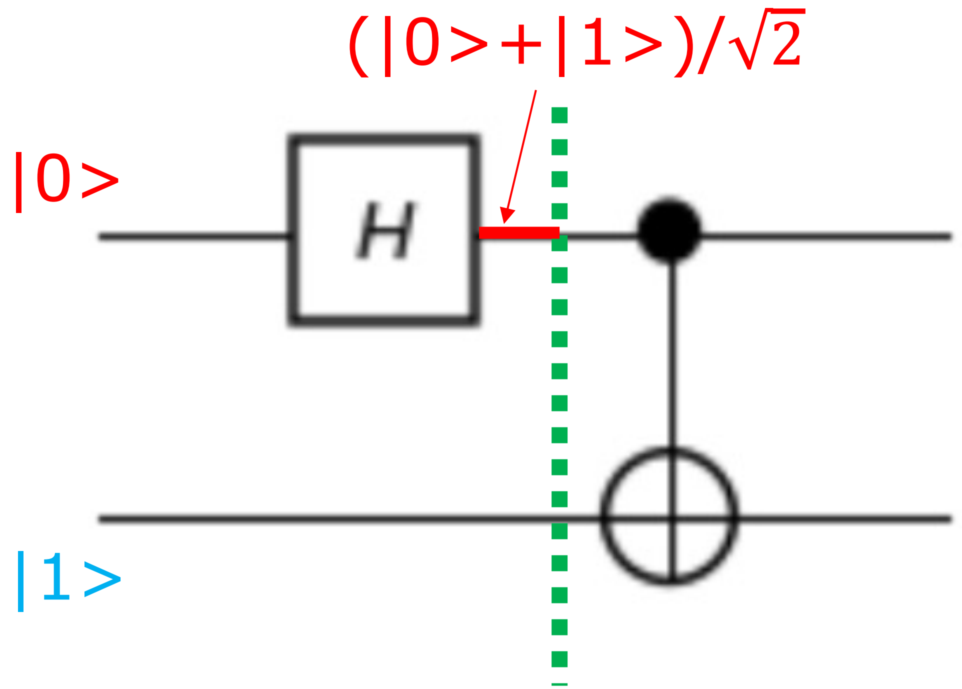


Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合



Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合

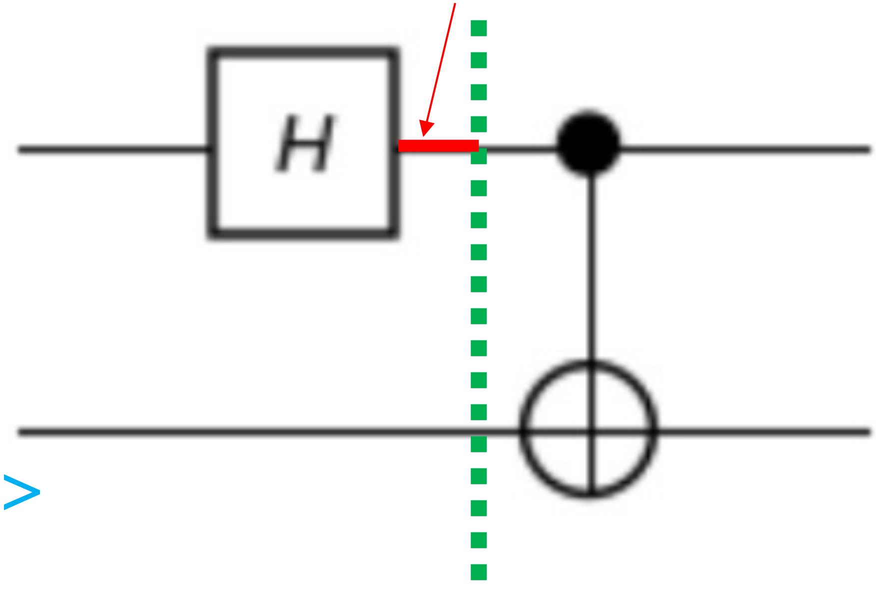


Hは|0>を
(|0>+|1>)/√2に
変える

Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合

$(|0>+|1>)/\sqrt{2}$



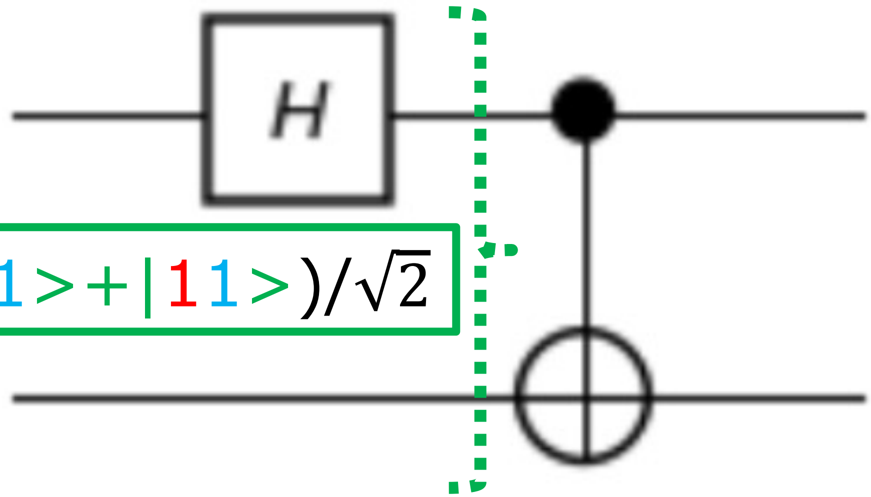
|1>

$(|0>+|1>)/\sqrt{2} \otimes |1>$

この時点での
系全体の状態

$= \boxed{(|01>+|11>)/\sqrt{2}}$

Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合

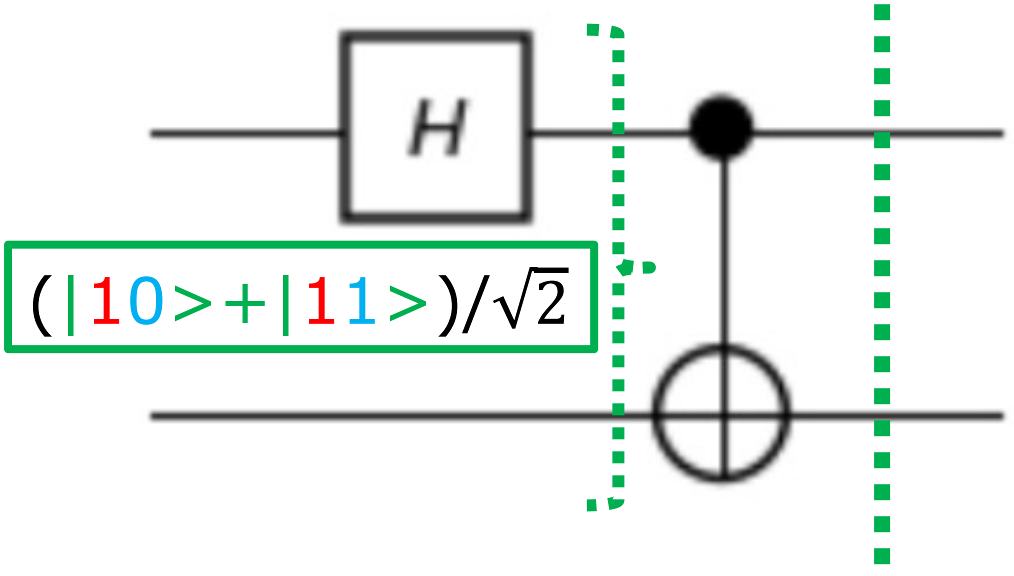


$(|01\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

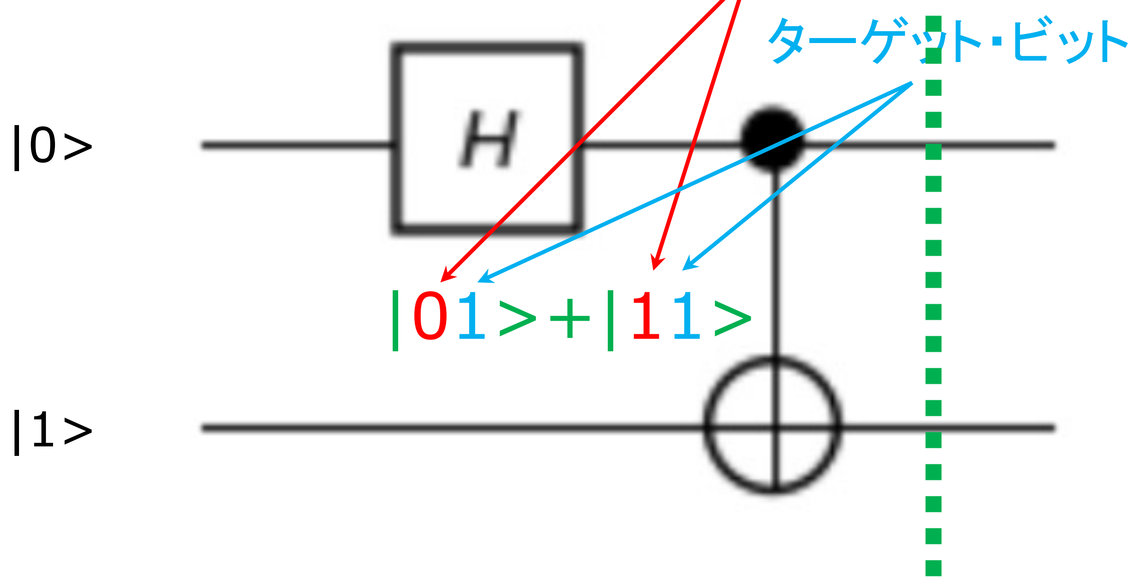
入力|01>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



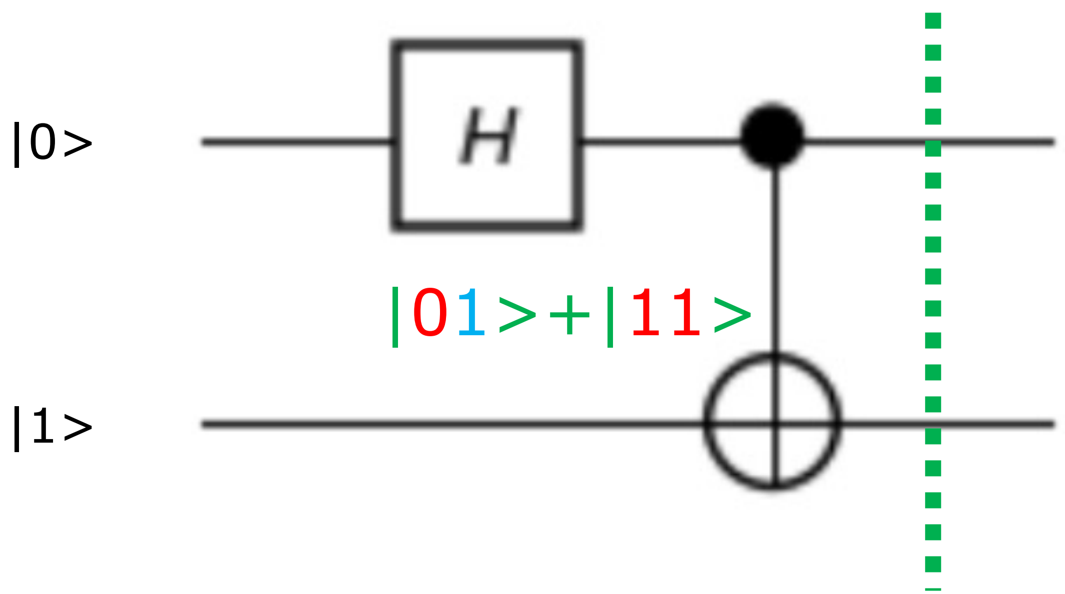
Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合

CNOTの働き
コントロール・ビットが1の場合だけ、
ターゲット・ビットを反転させればいい。



|01>+|11>

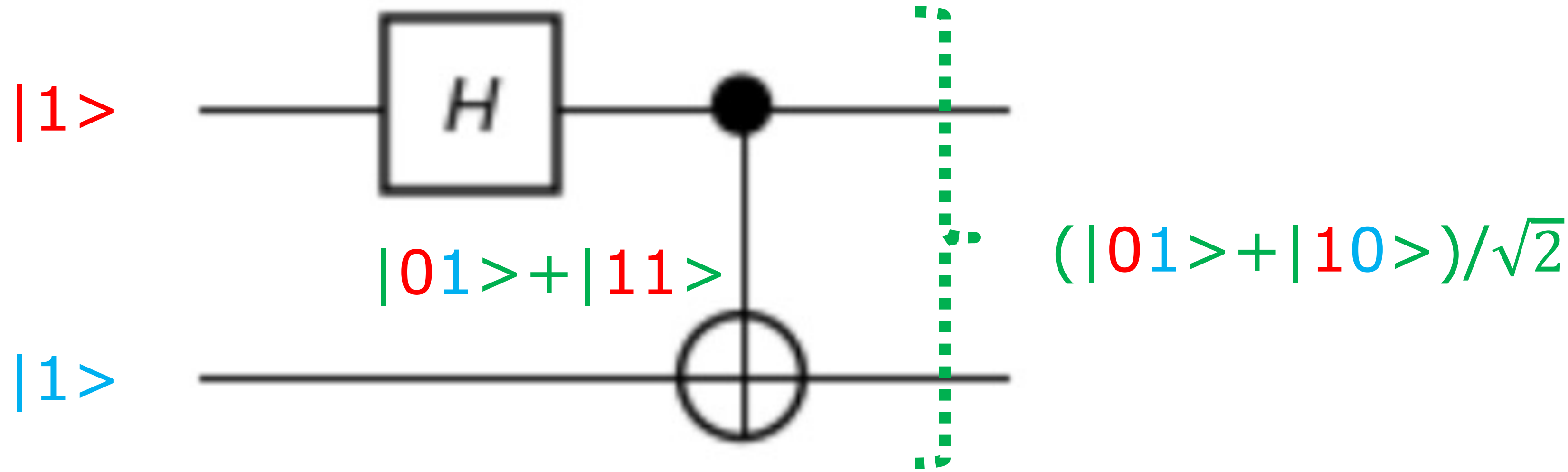
Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合



|01>+|11> ➔ |01>+|10>

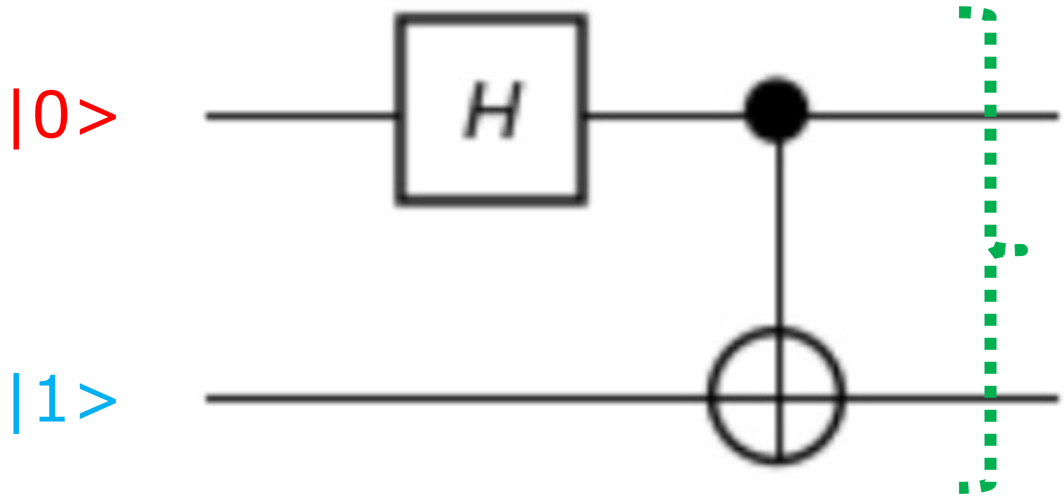
Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合



|01>+|11> ➔ |01>+|10>

Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合



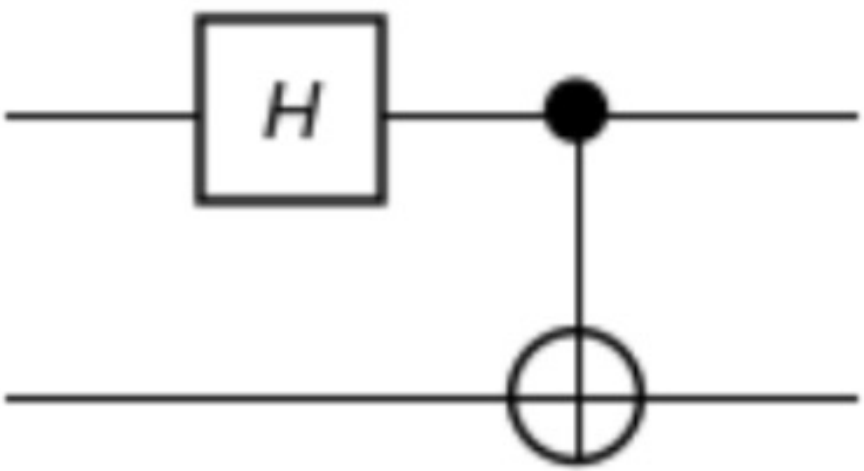
(|01>+|10>)/$\sqrt{2}$

これは、エンタングルメント状態の
Bell Stateの一つ$|\Psi^+>$である。

Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合

|1>

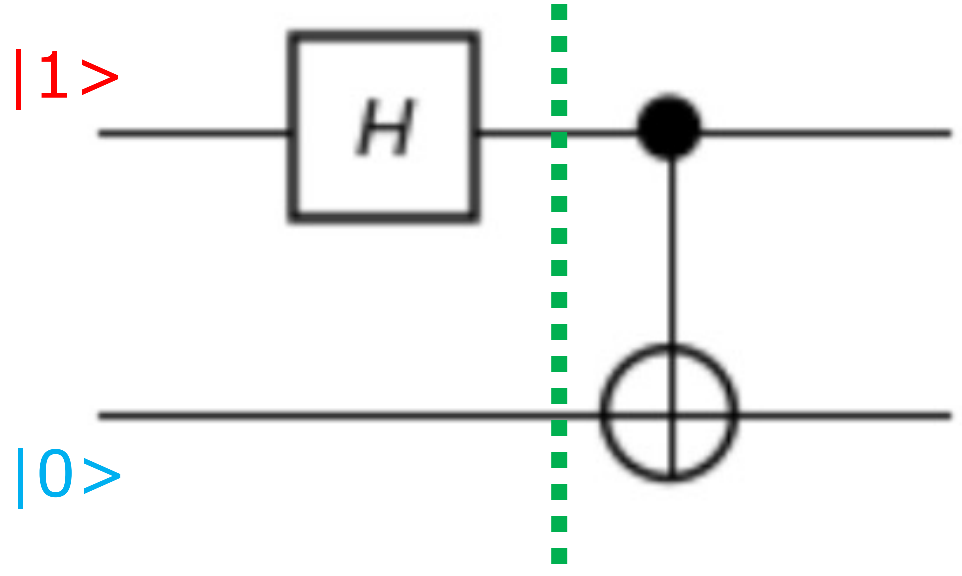
|0>



Bell State ゲートの働き

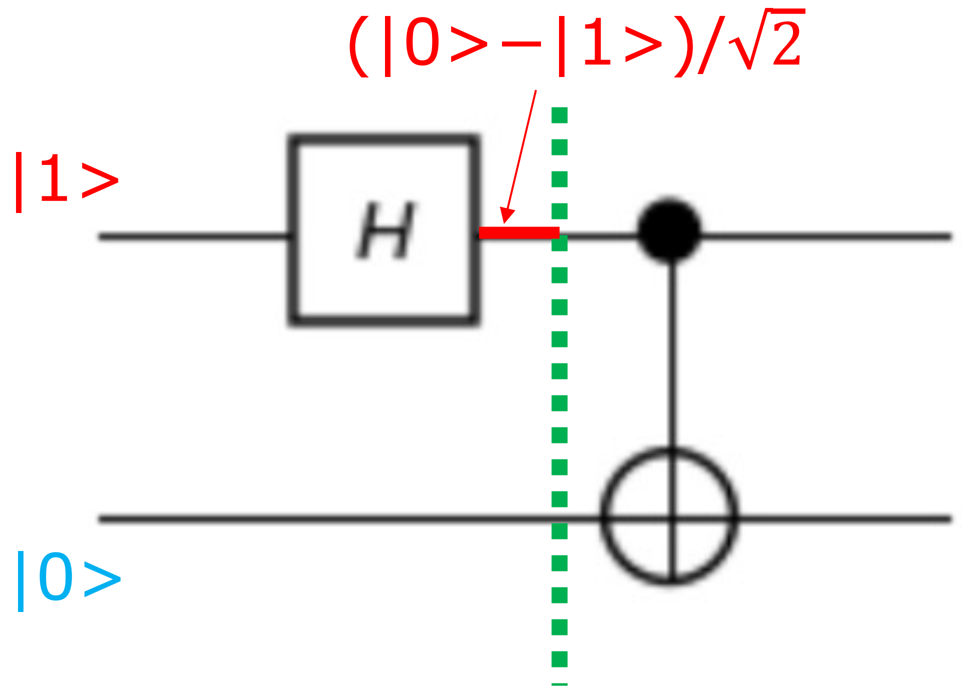
入力|10>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



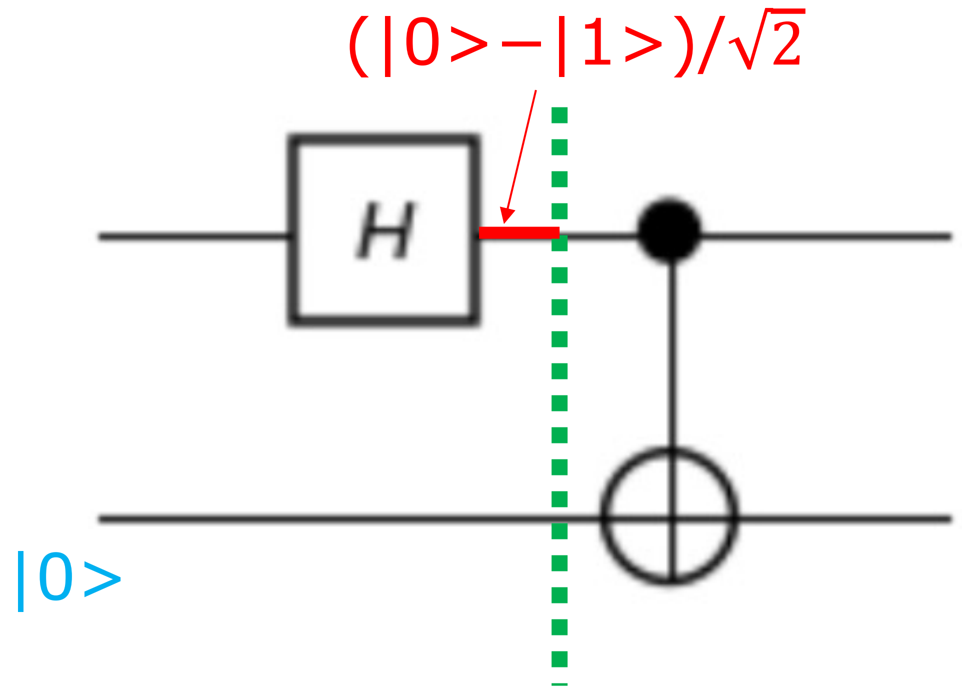
Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合



Hは|1>を
(|0>−|1>)/$\sqrt{2}$に
変える

Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合

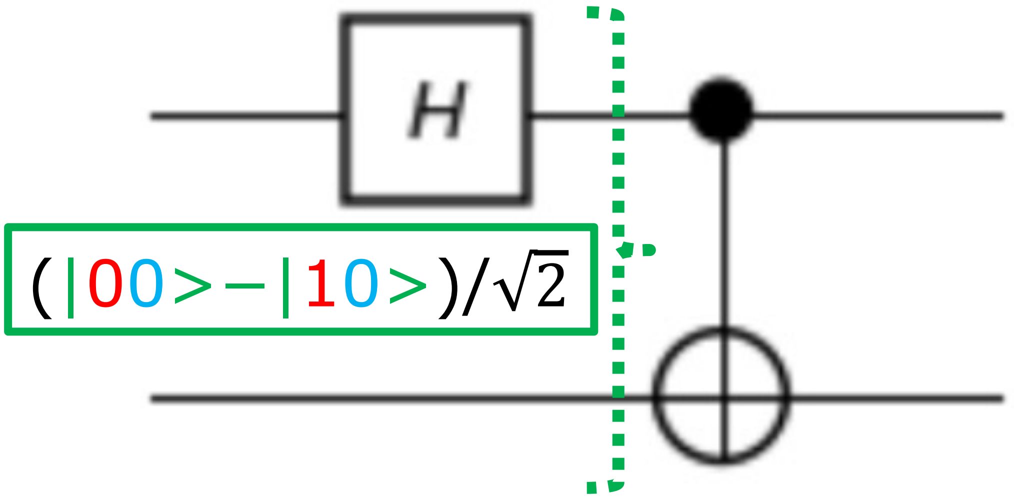


(|0>−|1>)/√2 ⊗|0>

この時点での系全体の状態 $= \boxed{(|00>-|10>)/\sqrt{2}}$

Bell State ゲートの働き

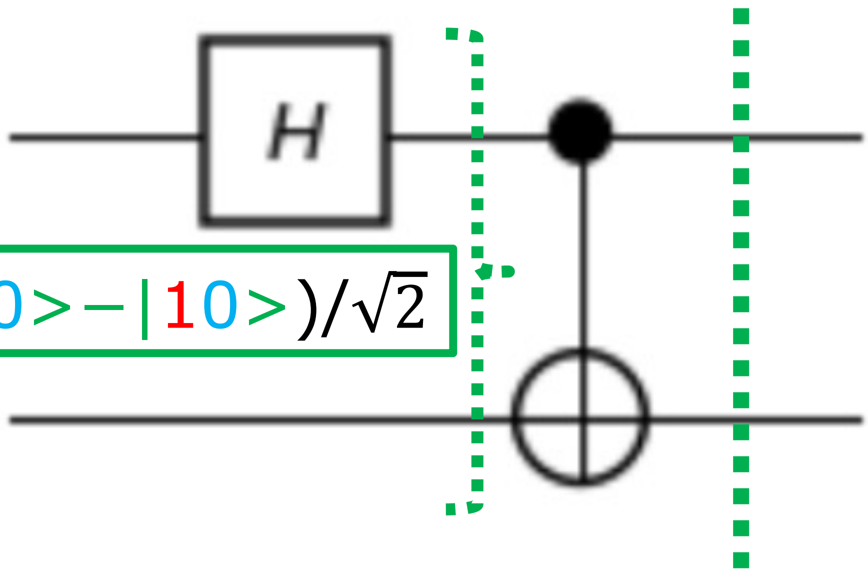
入力|10>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合

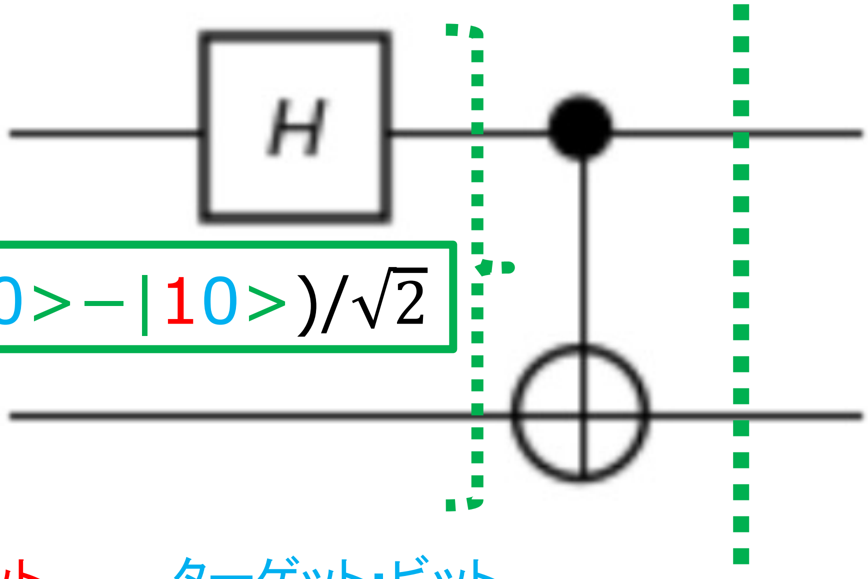
この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



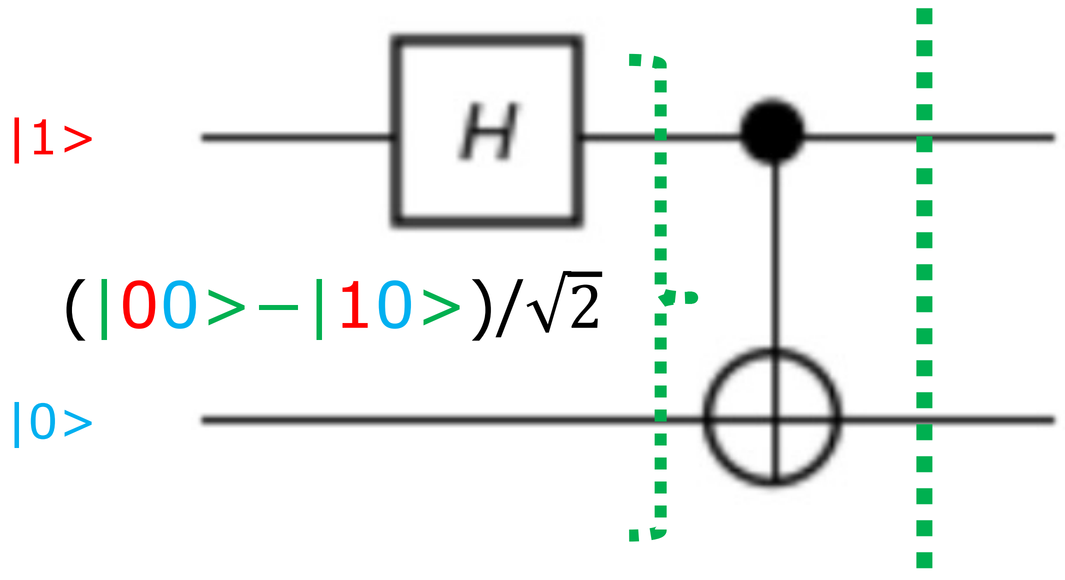
(|00>−|10>)/$\sqrt{2}$

コントロール・ビット　　ターゲット・ビット

|00>−|$\boxed{1}$0>

CNOTの働き
コントロール・ビットが1の場合だけ、
ターゲット・ビットを反転させればいい。

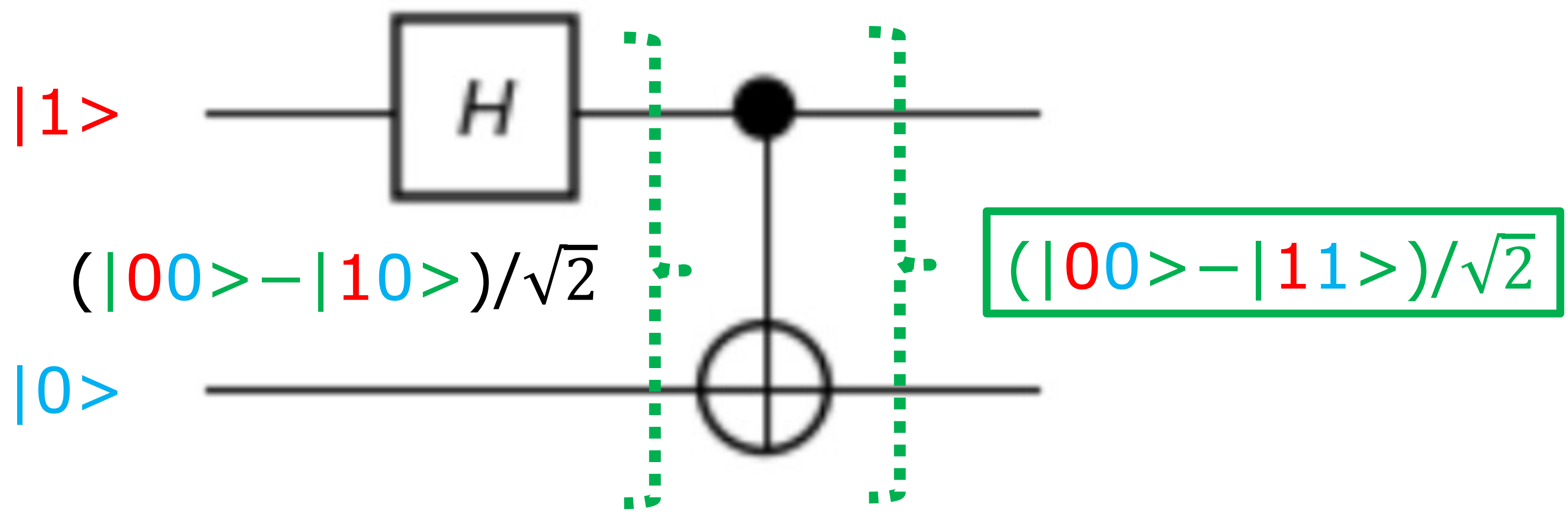
Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合



|00>−|10> ➔ |00>−|11>

Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合

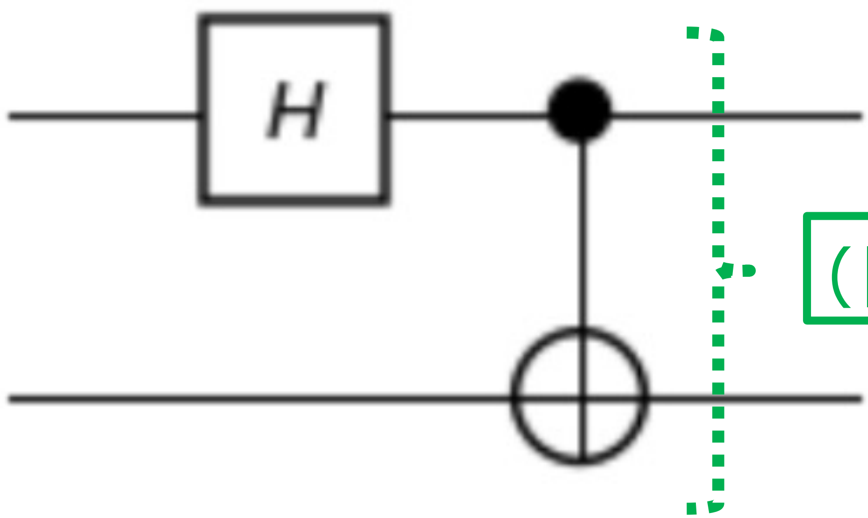


Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合　出力 |Φ⁻>

|1>

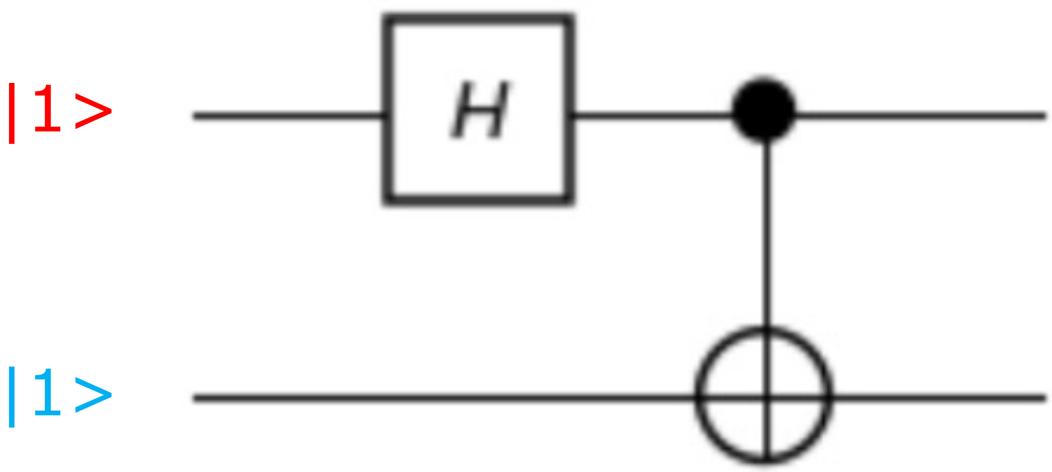
|0>



$(|00>-|11>)/\sqrt{2}$

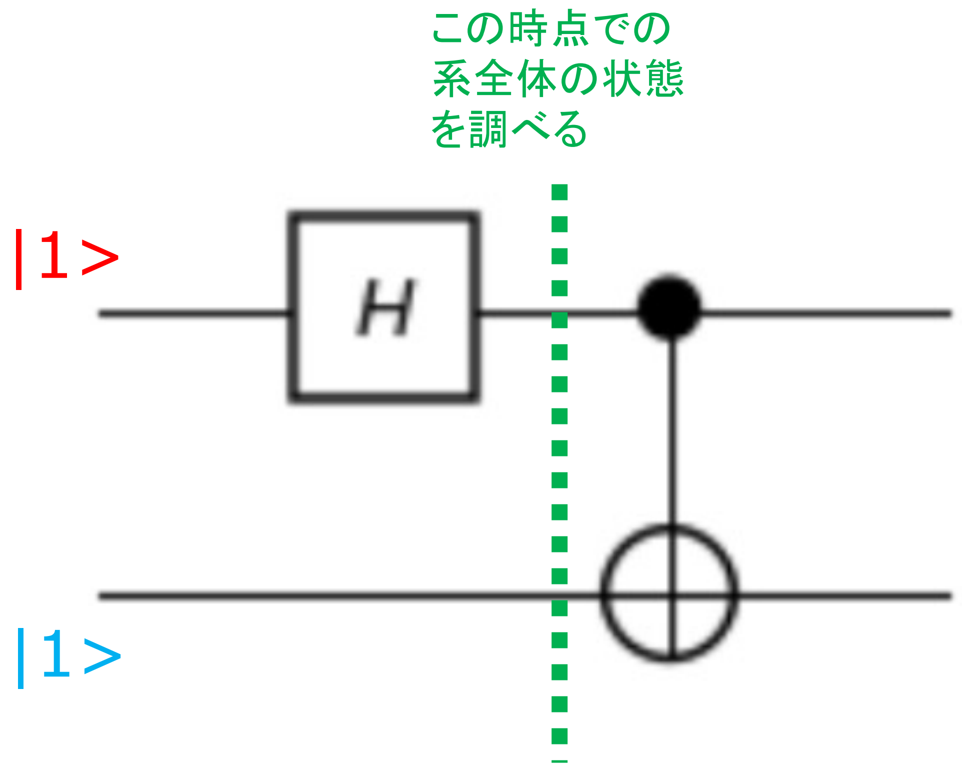
これは、エンタングルメント状態の
Bell Stateの一つ|Φ⁻>である。

Bell State ゲートの働き
入力|11>の場合



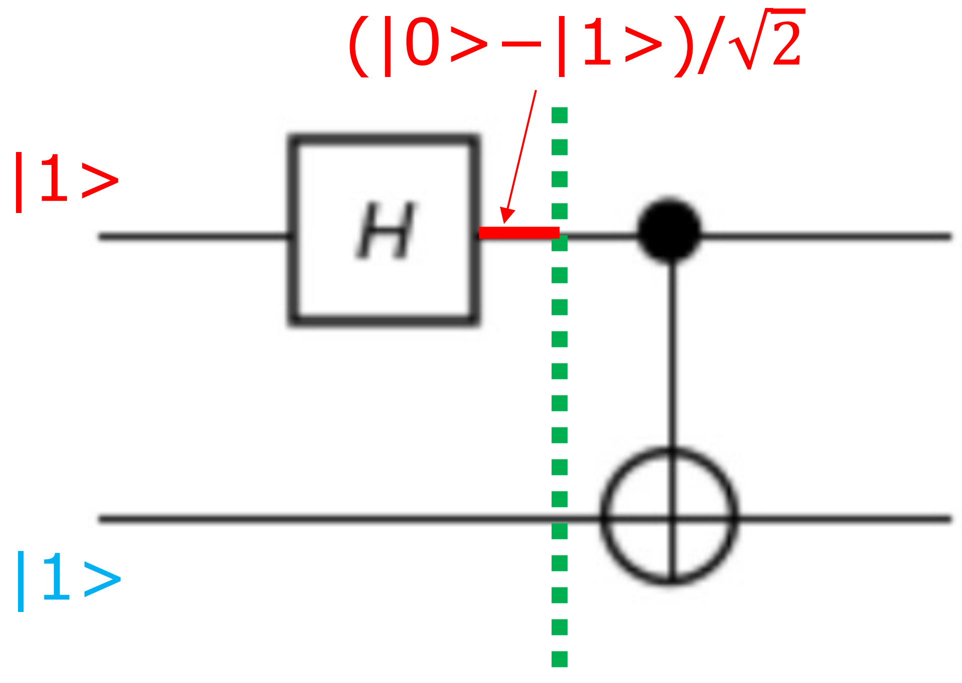
Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

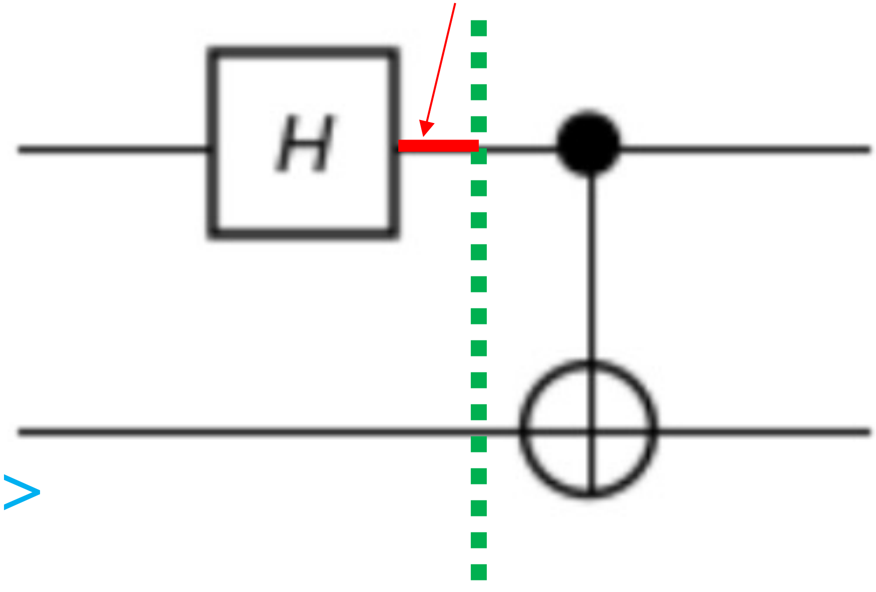


Hは|1>を$(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$に変える

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

$(|0>-|1>)/\sqrt{2}$



|1>

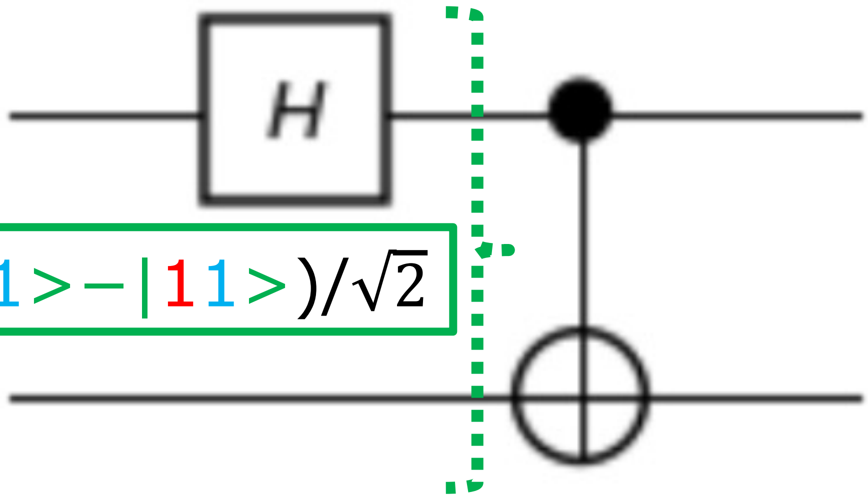
$(|0>-|1>)/\sqrt{2}\otimes|1>$

この時点での
系全体の状態

$=\boxed{(|01>-|11>)/\sqrt{2}}$

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

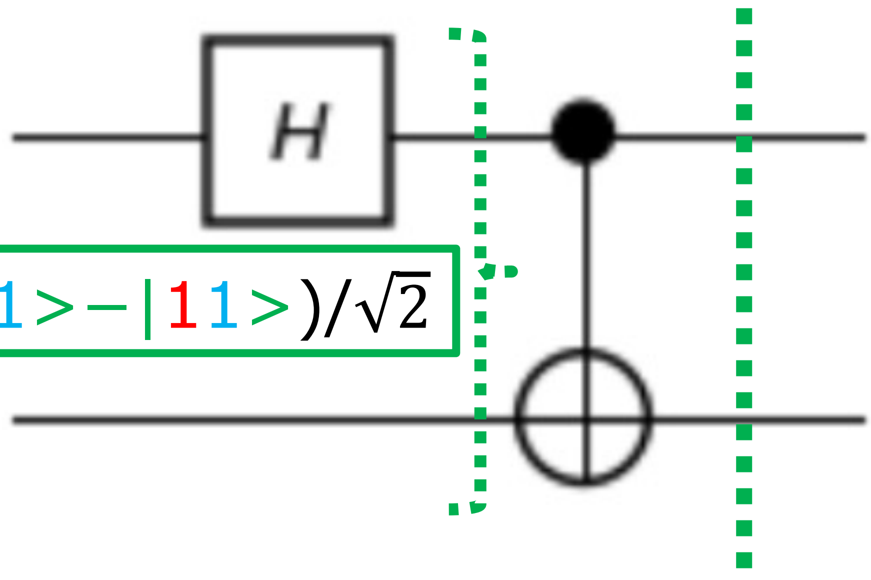


$(|01> - |11>)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

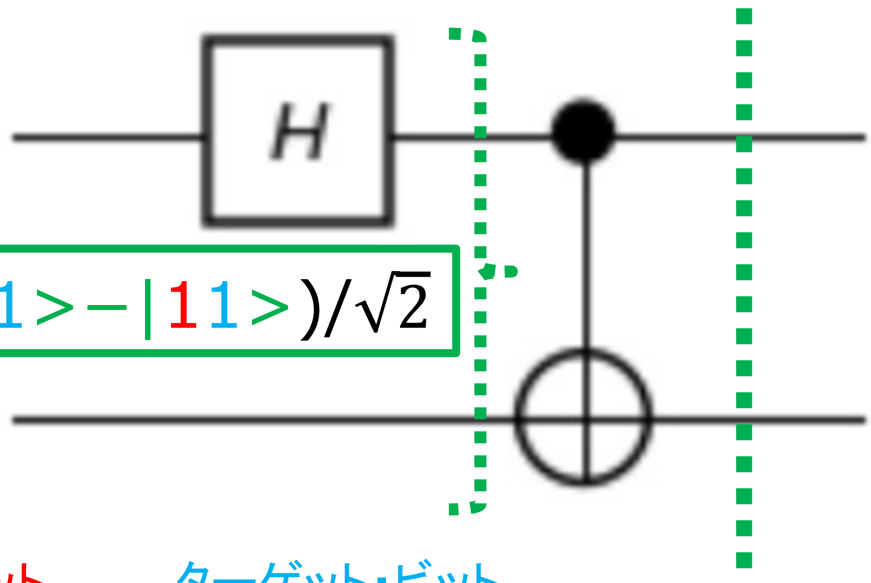
この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|01>-|11>)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き
入力|11>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$

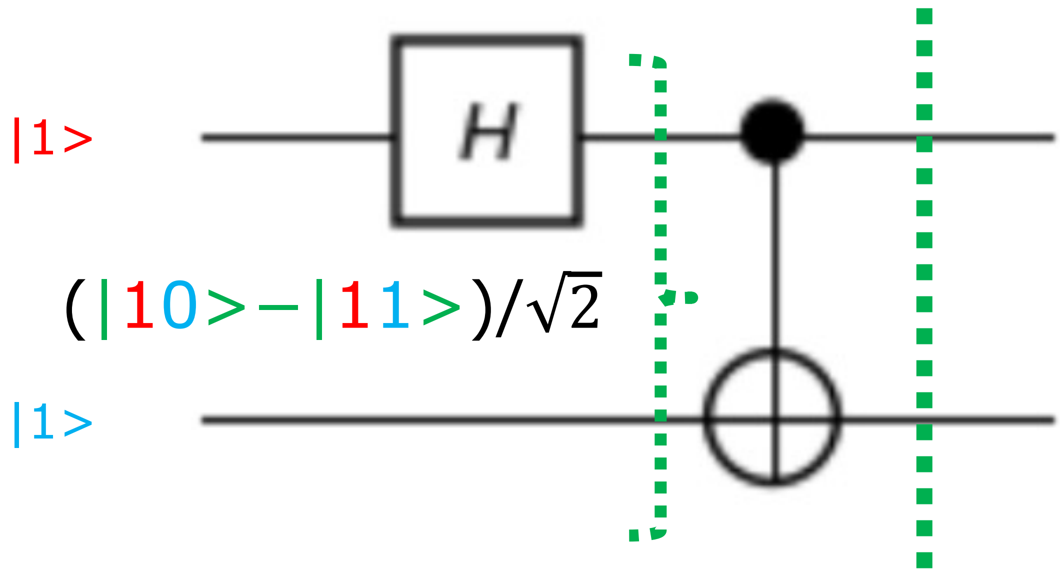
コントロール・ビット　ターゲット・ビット

$|01\rangle - |\boxed{1}1\rangle$

CNOTの働き
コントロール・ビットが1の場合だけ、
ターゲット・ビットを反転させればいい。

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

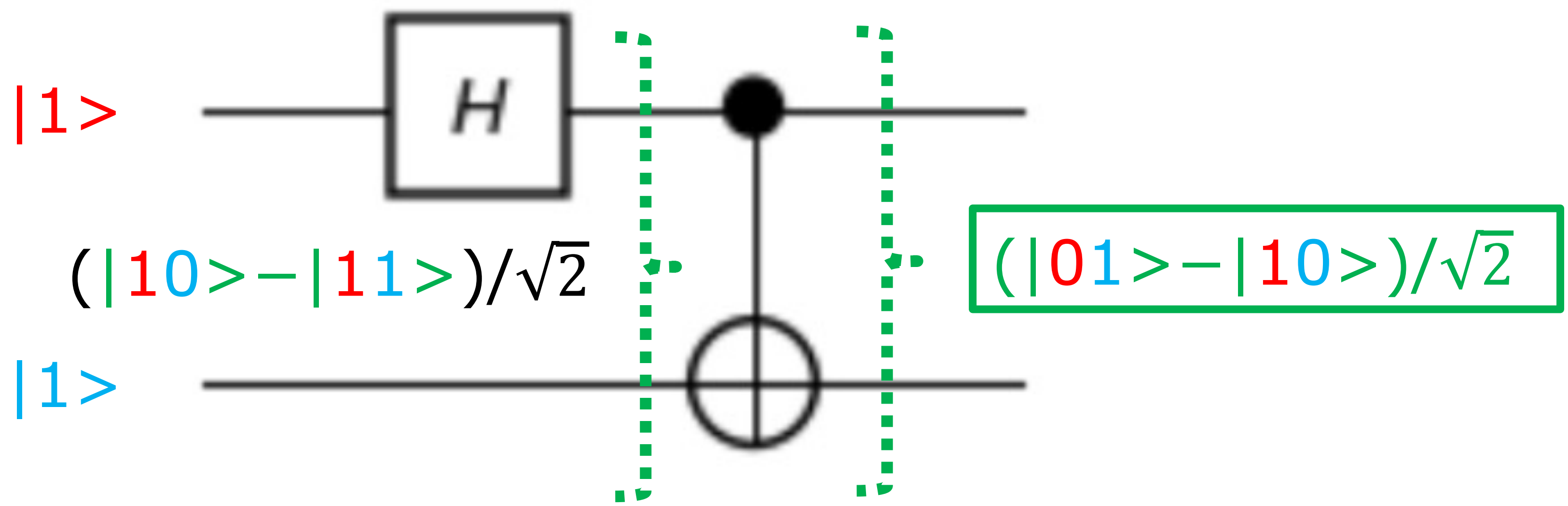


|01>−|11> ➔ |01>−|10>

★

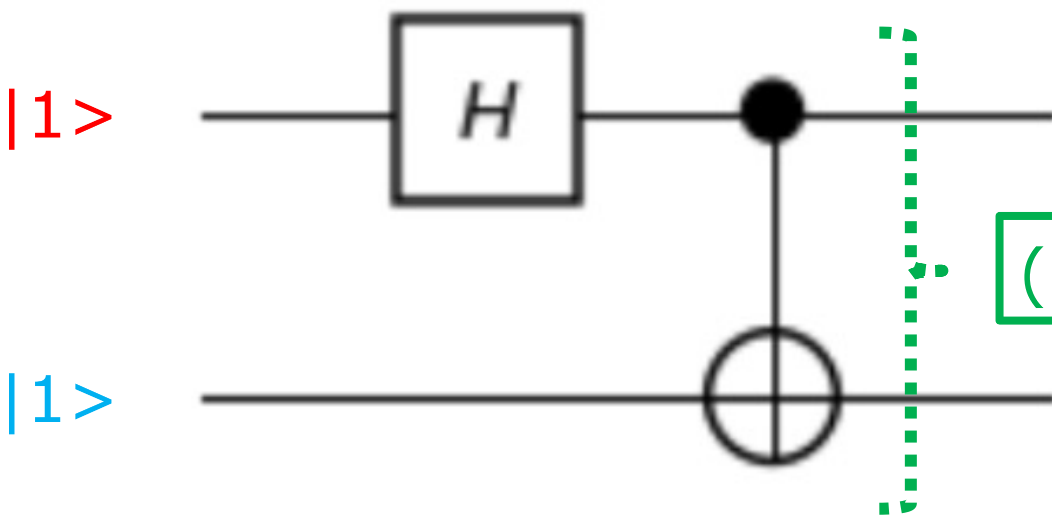
Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合　出力 $|\Psi^-\rangle$



$(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$

これは、エンタングルメント状態のBell Stateの一つ$|\Psi^-\rangle$である。

Bell State Gateの働き

Bell Stateを出力するゲートを**Bell State Gate**と呼ぶ。
Bell State Gate を**BSG**で表すと、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{BSG}|00> = (|00>+|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^{+}>$$

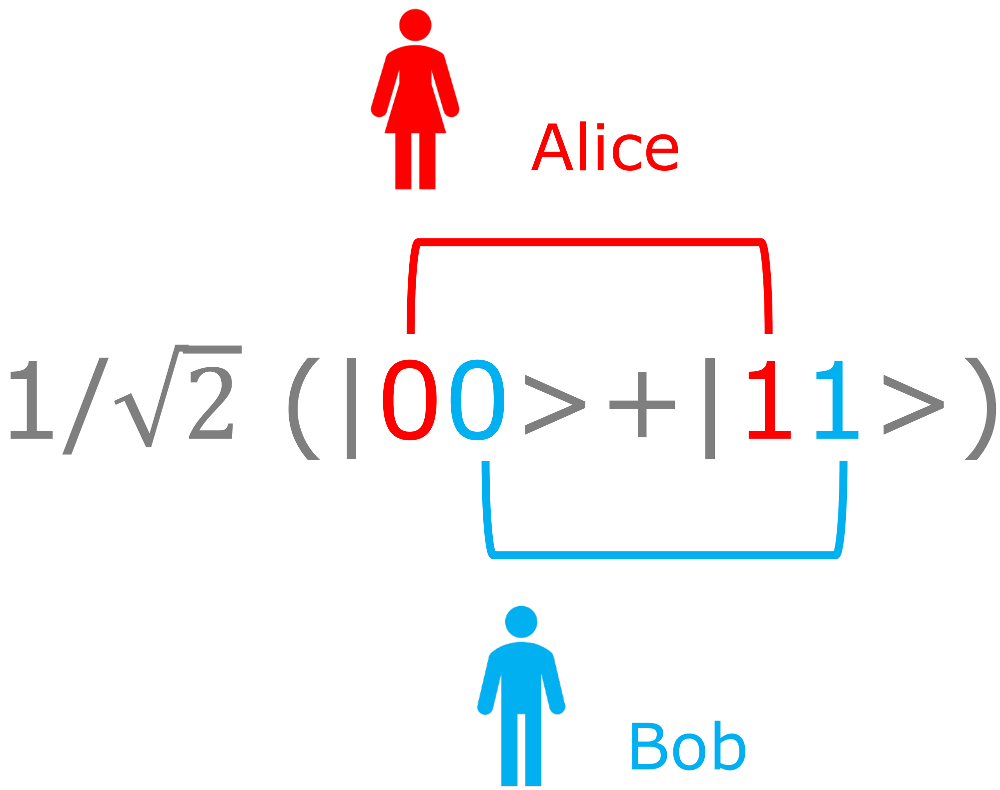
$$\mathbf{BSG}|01> = (|01>+|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^{+}>$$

$$\mathbf{BSG}|10> = (|00>-|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^{-}>$$

$$\mathbf{BSG}|11> = (|01>-|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^{-}>$$

もつれ合った二つのqubit
EPRペア = Bell State

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

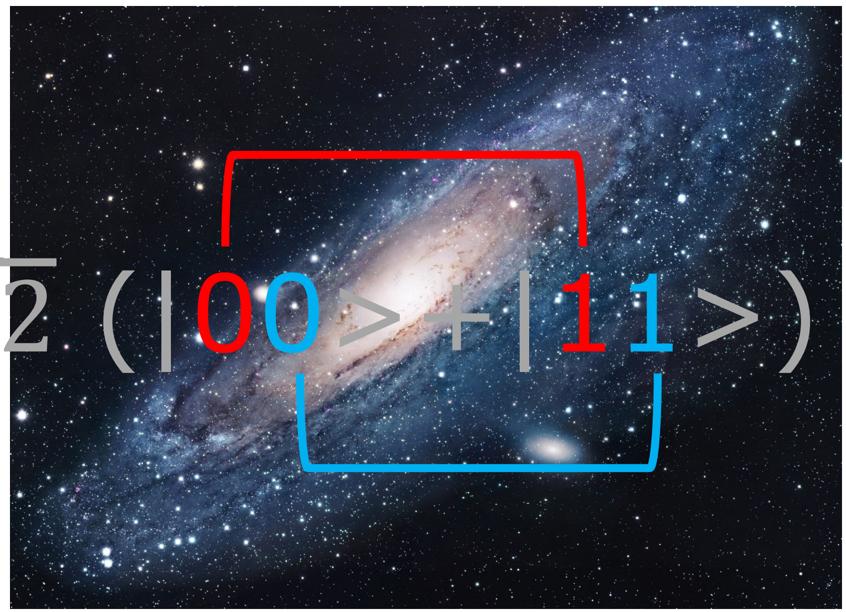


$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>) で表される状態は、二つのqubitの状態である。
一方のqubitをAliceが、他方のqubitをBobが持つことができる。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$



$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$

Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$

Aliceが観察できるのは、$|00\rangle + |11\rangle$の第一bitで、
Bobが観察できるのは、 $|00\rangle + |11\rangle$の第二bitである。
この関係は、両者がどんなに離れていても変わりない。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Φ^+

Alice

$$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$$

Bob

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>) だけではない。

EPRペア:もつれ合った二つのqubit

Φ^-

Alice

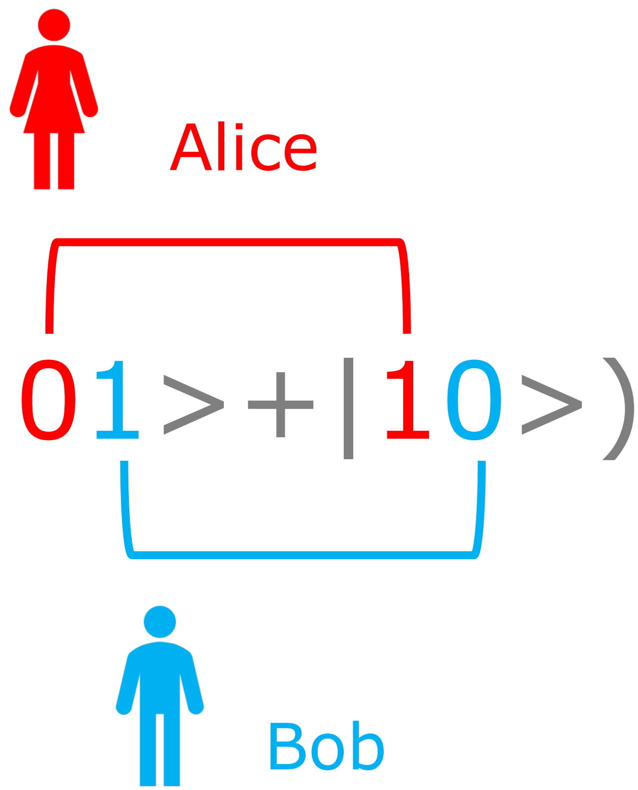
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

Bob

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle + |11\rangle)$ だけではない。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Ψ^+

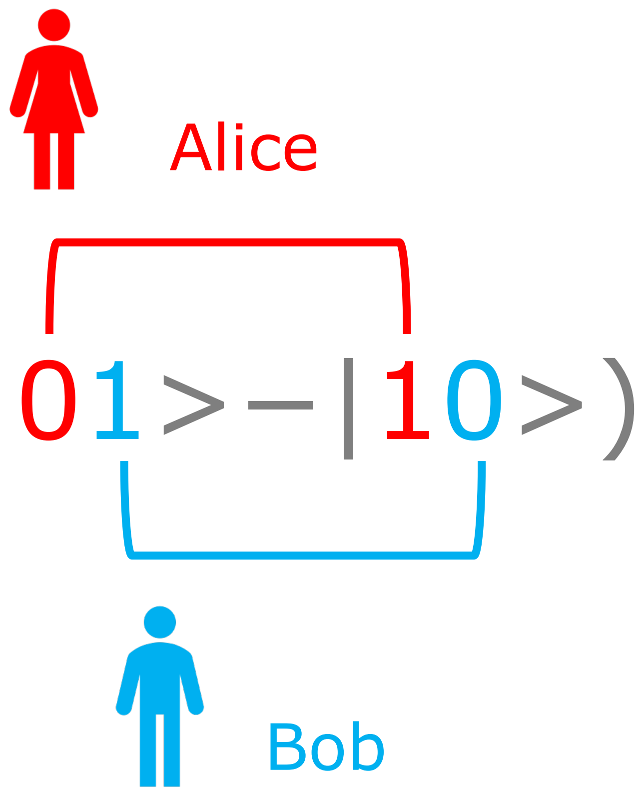


$$1/\sqrt{2}\ (|01>+|10>)$$

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$ だけではない。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Ψ^-



$$1/\sqrt{2}\ (|01>-|10>)$$

こうした性質を持つペアは、$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$ だけではない。

「分離可能」な状態と
「分離不可能」な状態

2-qubitの状態で重要なこと
「分離可能」な状態と「分離不可能」な状態

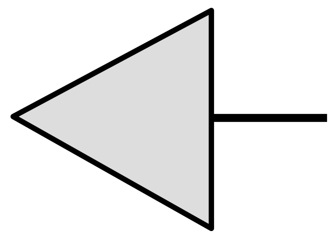
- 2-qubitの状態には、二つの1-qubitの状態のテンソル積で表すことができる状態と、そうした積では表せない状態の二種類がある。

- 前者を「分離可能」な状態、後者を「分離不可能」な状態という。

- エンタングルメント状態とは、二つの状態のテンソル積に「分離不可能」な状態のことをさす。

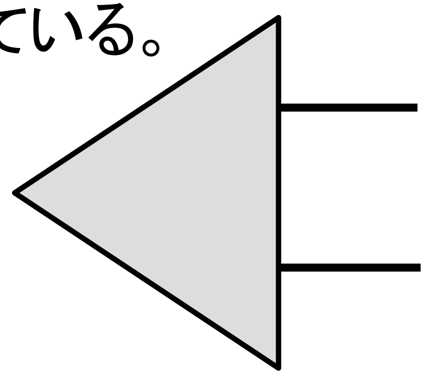
1-qubit, 2-qubitの状態を図形で表す

- 1-qubitの状態を、次のような図形で表すことにしよう。
右側に腕が一本出ているのは、それが1つのqubitからなる状態であることを表している。



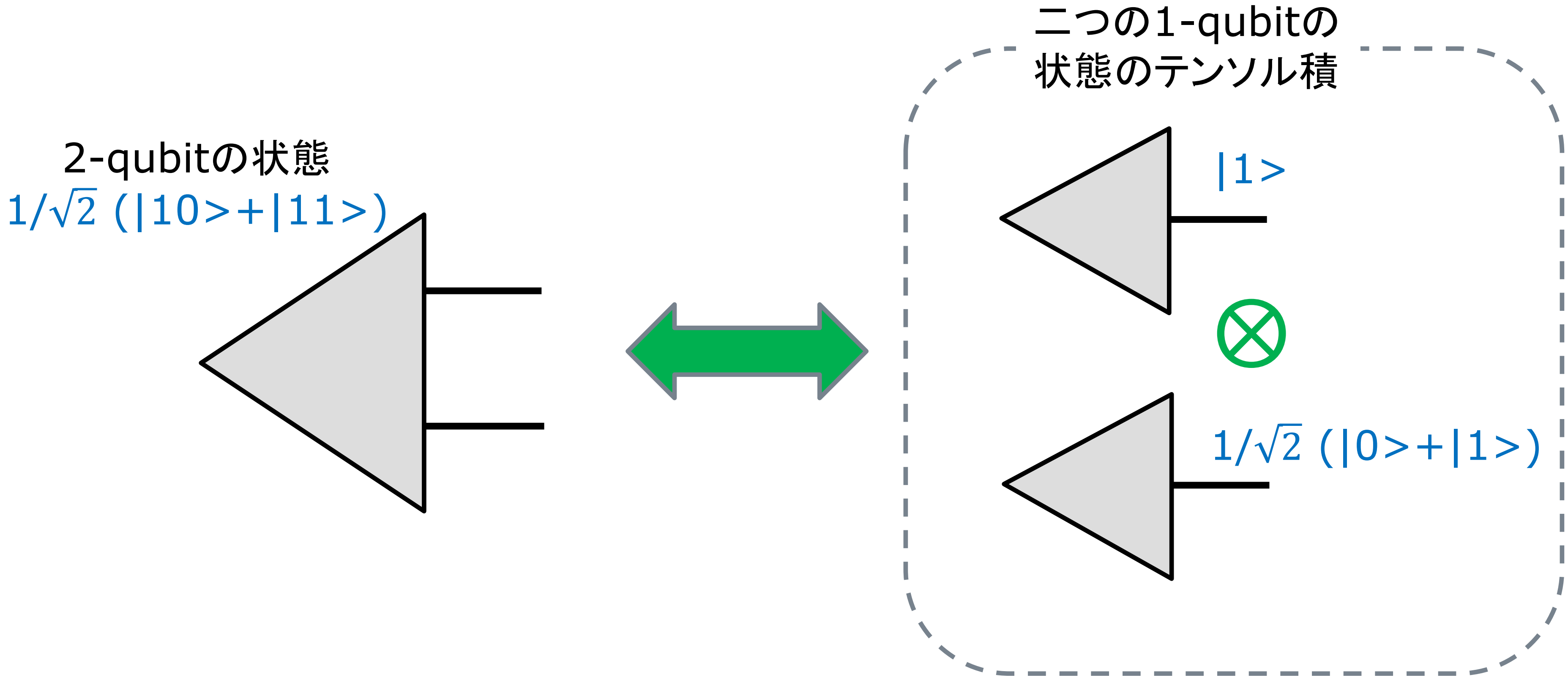
1-qubitの状態

- 2-qubitの状態を、次のような図形で表すことにしよう。
右側に腕が二本出ているのは、それが2つのqubitからなる状態であることを表している。

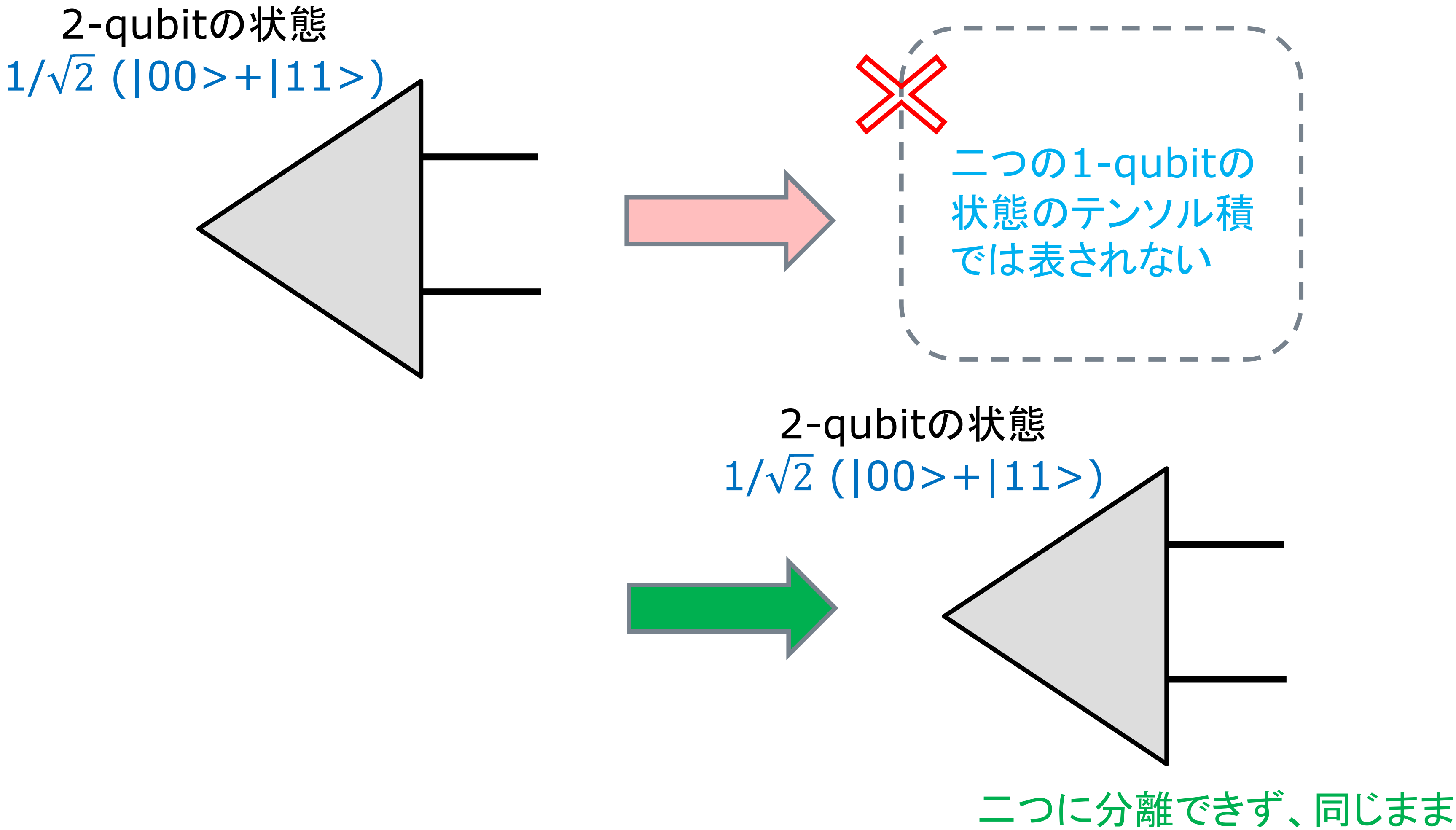


2-qubitの状態

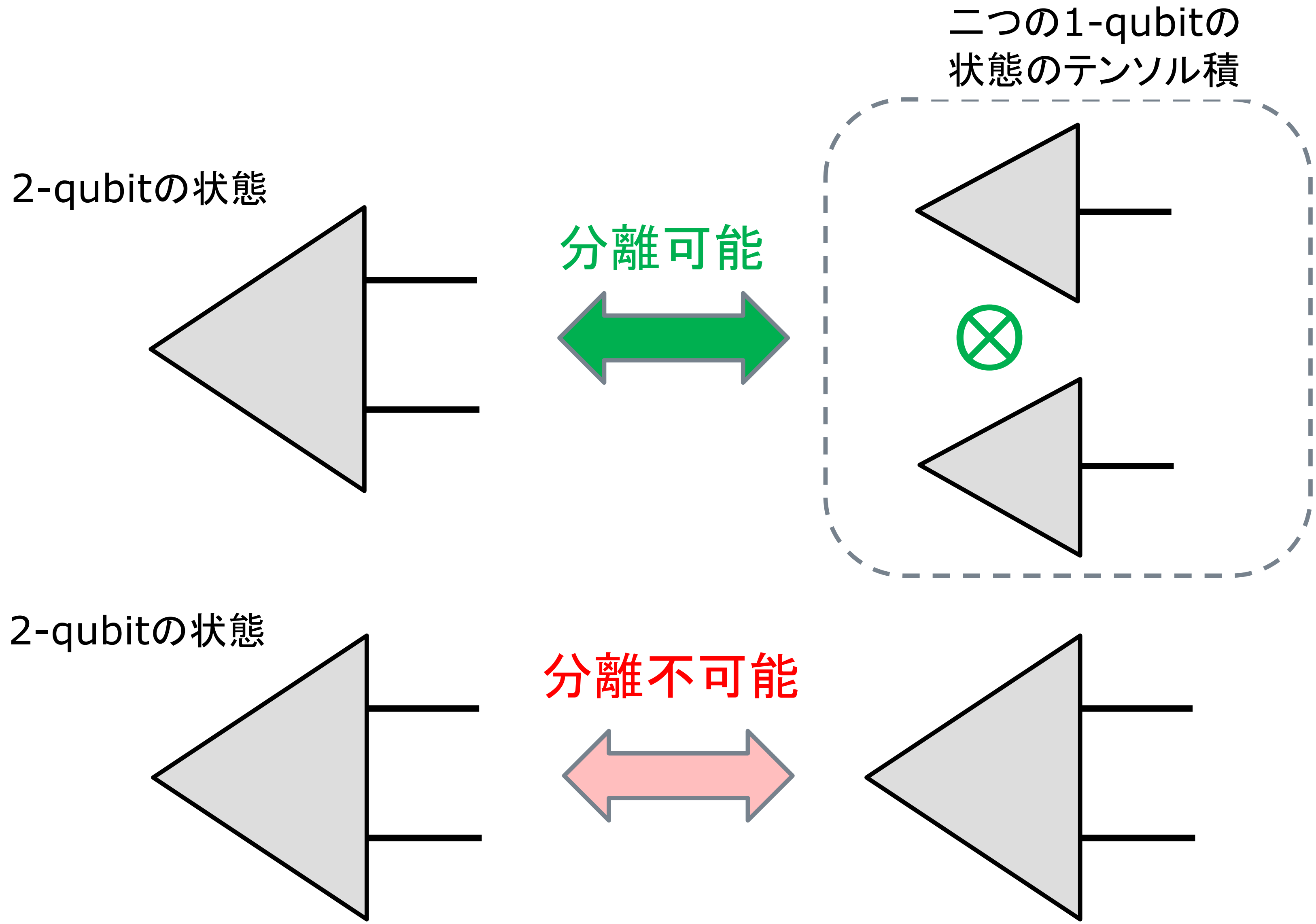
2-qubitの状態 $1/\sqrt{2}$ (|10>+|11>) は、
分離可能である



2-qubitの状態 $1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$ は、分離不可能である



分離可能な 2-qubitの状態と
分離不可能な 2-qubitの状態



Part II

ベルが明らかにしたこと

Agenda
エンタングルする自然
-- 「逆理」から「原理」へ --

Part II ベルが明らかにしたこと

- Bellによる証明
- CHSH による定式化
- CHSHゲームという定式化

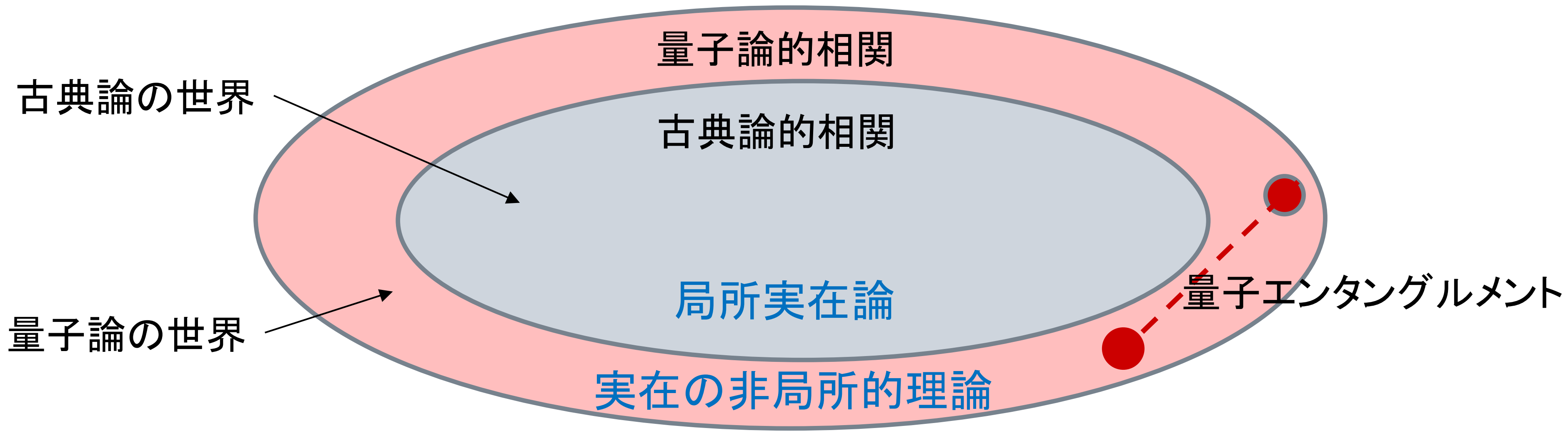
Interlude

Bellの定理
古典論的相関と量子論的相関

Bellの定理は、自然の事象間の古典論的相関と量子論的相関が、異なるものであることを示す定理である。

基本的には、古典的相関は量子的相関に含まれる。

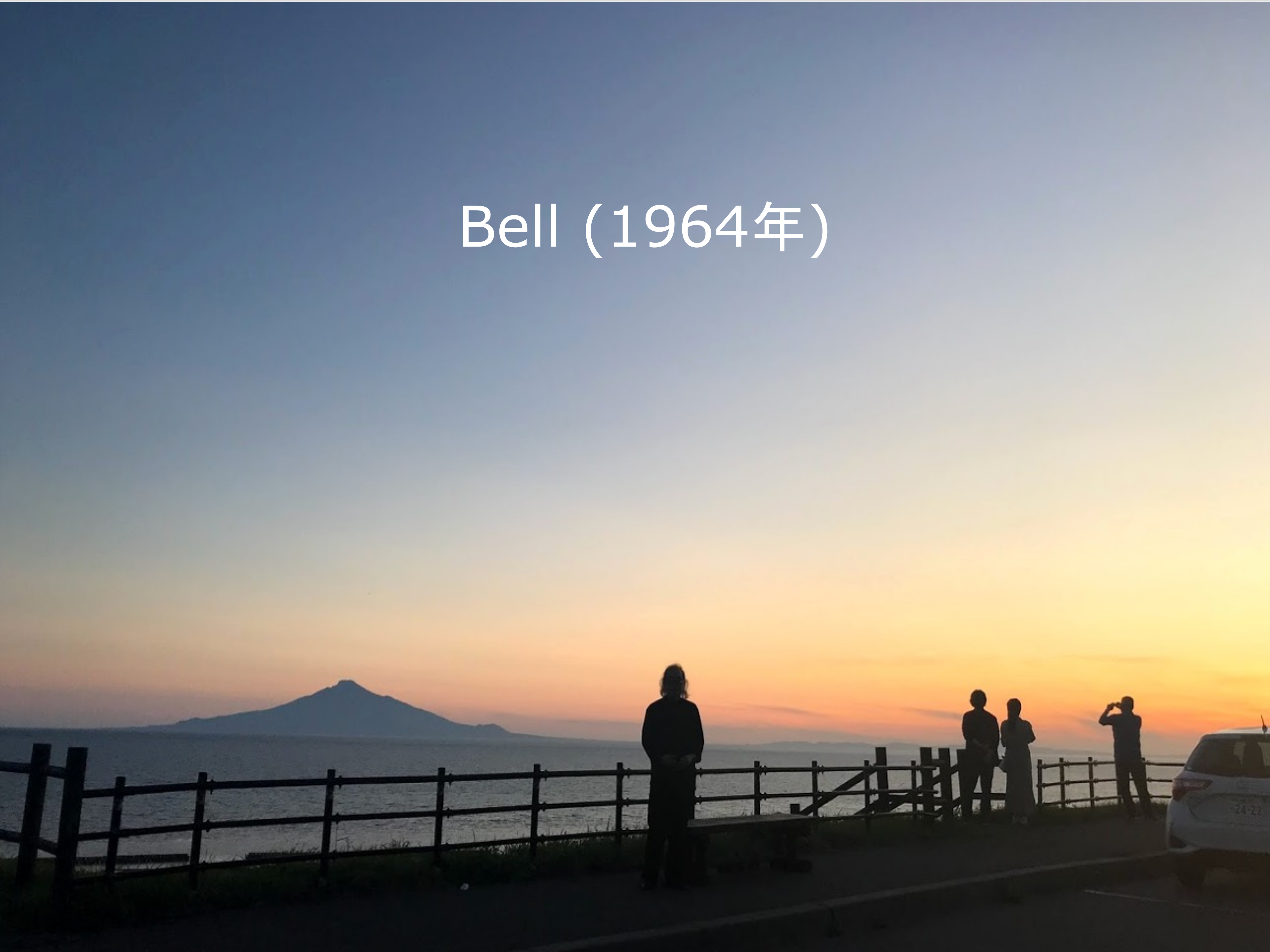
量子論の世界には、古典論の世界には含まれない相関関係が存在する。量子エンタングルメントは、まさにそうした相関関係である。



Bellの定理のバリエーション

Bellの定理には、いくつかのバリエーションがある。
ここでは、次の三つのスタイルを紹介する。

- Bellによる証明
- CHSH による定式化
- CHSHゲームという定式化


Bell (1964年)

Bell (1964年)

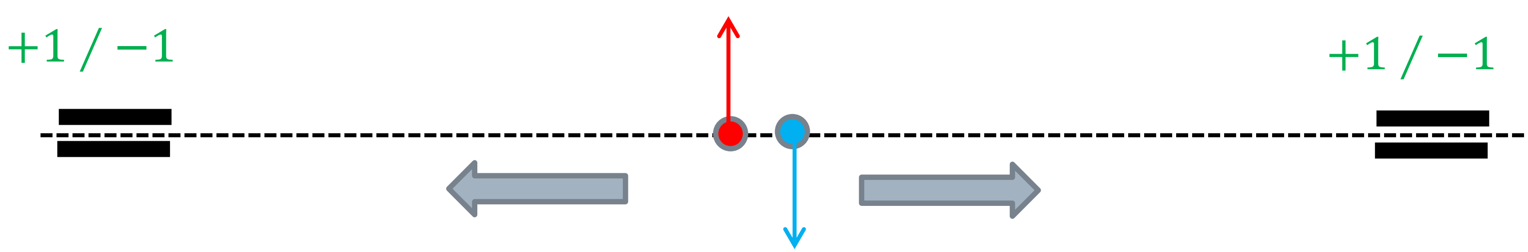
$$4(\varepsilon+\delta) \geqslant \sqrt{2}-1 \quad ?$$

ϵ, δ が小さい時、この式は成り立たない！

実験の想定

上下反対のスピンを持つ量子を対発生させ、それぞれの粒子を別々に反対方向に打ち出す。それを、離れた場所にある観測機器で独立に観測する。

それぞれの観測での値$+1$（上向き）あるいは -1（下向き）を記録する。

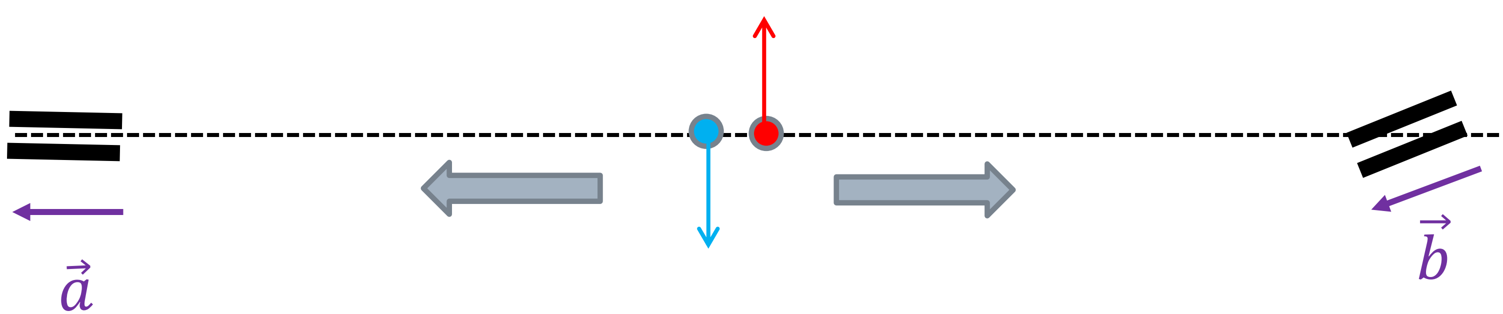


観測機器の配置

観測機器は、別々の方向を向いているとする。単位ベクトル$\vec{a}, \vec{b}$を取って、観測機器の配置を表すことにしよう。この時、設定$\vec{a}, \vec{b}$を取ったときの二つの観測機器間の出力の相関$P(\vec{a}, \vec{b})$は、次のように表すことができる。

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos\theta$$

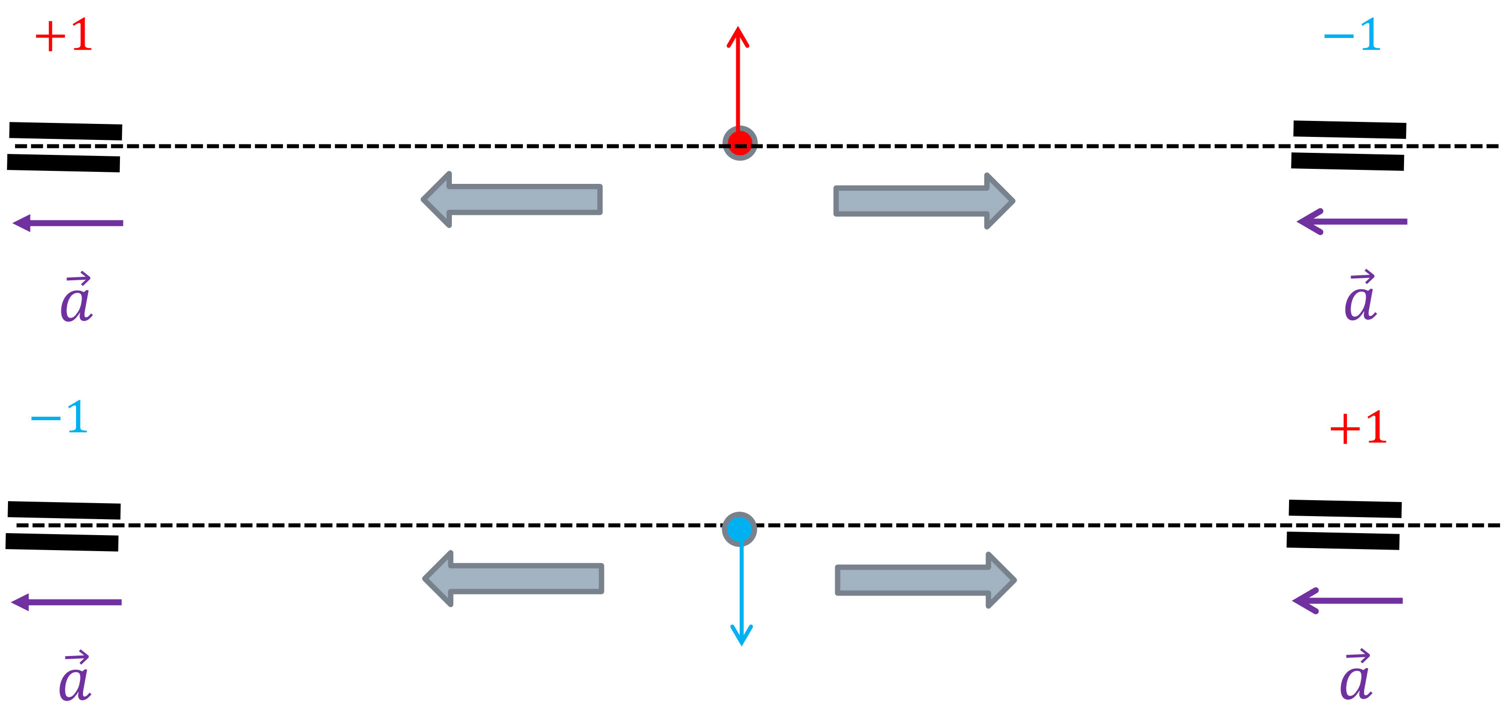
ここに θは、ベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角である



観測機器が平行に配置された場合

二つの機器が平行($\vec{a} = \vec{b}$)な場合には、それぞれの出力は他方の出力と反対のものになるので、その相関は

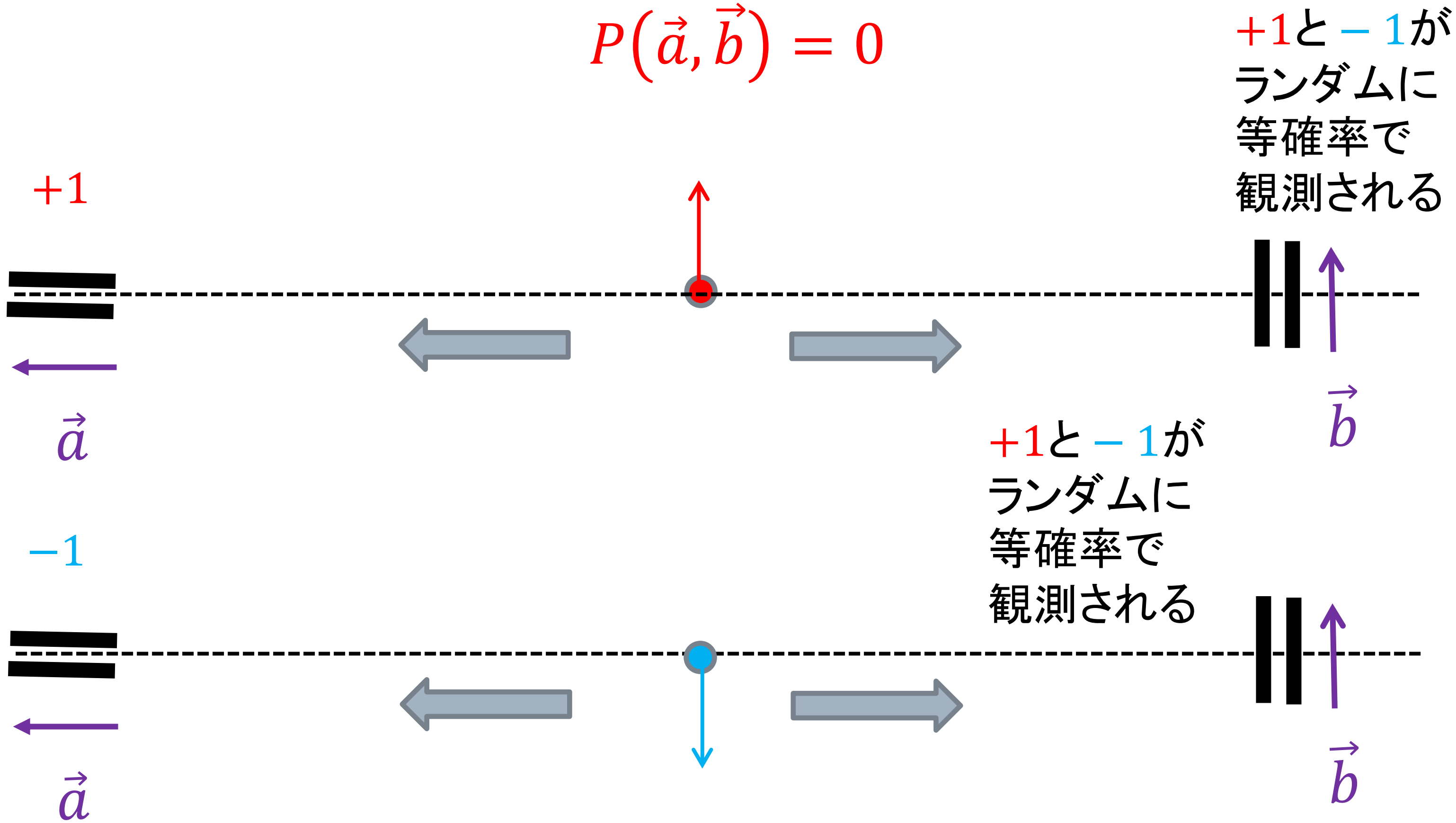
$$P(\vec{a}, \vec{a}) = -P(\vec{a}, -\vec{a}) = -1$$



観測機器が直交に配置された場合

二つの機器が直交する($\vec{a}\cdot\vec{b}=0$)場合には、それぞれの出力には相関はない。

$P\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$



隠れた変数を仮定した場合の相関

隠れた変数をλとし、λの確率密度関数を$\rho(\lambda)$とする。

また、二つの観測機器A, Bのベクトル$\vec{a}, \vec{b}$と隠れた変数λのもとでの、観測機器の出力を、$A(\vec{a}, \lambda), B(\vec{b}, \lambda)$とする。

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$$

である。

この時、可能なすべてのλについて積分して、次の式が成り立つ。

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

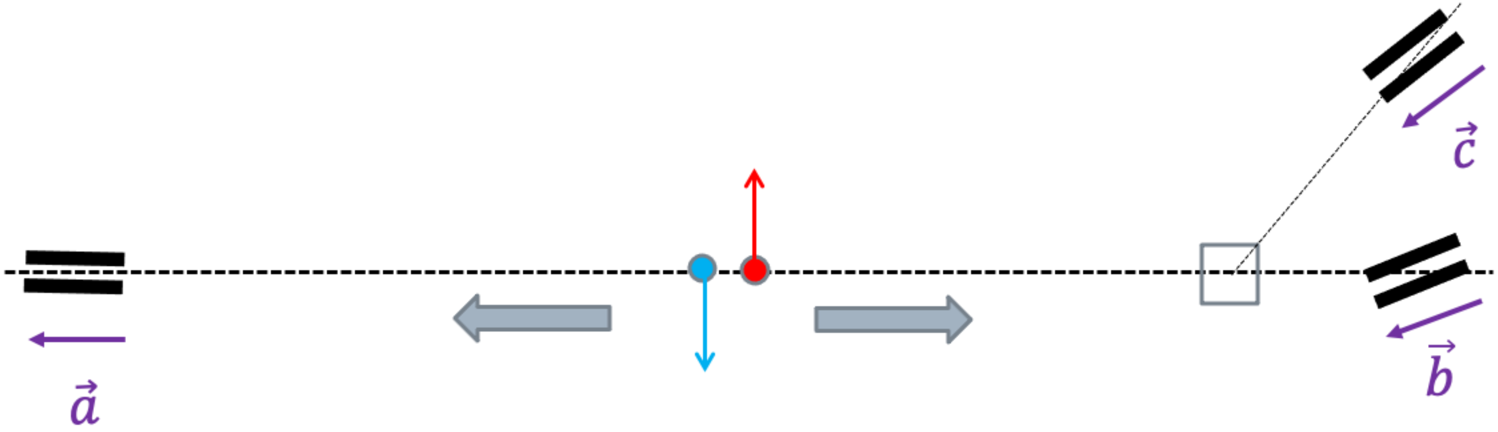
重要なことは、AとBは物理的に分離しているので、Aの出力は$\vec{b}$に依存せず、同様に、Bの出力は$\vec{a}$に依存しない。

隠れた変数の仮定のもとでの不等式

第二の観測機器の配置が$\vec{b}$でなく$\vec{c}$である実験も考えよう。

この時、Bellは、古典論の隠れた変数の仮定のもとで、次の不等式が成り立つことを示す。

$$\left|P\left(\vec{a},\vec{b}\right)-P(\vec{a},\vec{c})\right| \leq 1+P\left(\vec{b},\vec{c}\right)$$



$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$ の証明

$\rho(\lambda)$は確率分布なので

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

$A(\vec{a},\lambda) = \pm 1,\ B(\vec{b},\lambda) = \pm 1$ なので

$P(\vec{a},\vec{b}) = \int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda)$は$-1$以下の値を取らない。

$P(\vec{a},\vec{b}) = -1$となるのは、$\vec{a} = \vec{b}$で

$A(\vec{a},\lambda) = -B(\vec{b},\lambda)$の場合だけである。この時、

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda)$$

となる。

$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$ の証明続き

$A(\vec{a},\lambda) = \pm 1, A(\vec{b},\lambda) = \pm 1, A(\vec{c},\lambda) = \pm 1$ である。

$$P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) = -\int d\lambda\, \rho(\lambda)[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)[A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda) - 1]$$

$$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \leq \int d\lambda\, \rho(\lambda)\left[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)\right]$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda) + \int d\lambda\, \rho(\lambda)A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)$$

$$= 1 + P(\vec{b},\vec{c})$$

量子論のもとでの相関

しかし、量子論のもとでは、上の不等式は成り立たない。

例えば、$\vec{a}$と$\vec{b}$は直交し、$\vec{c}$ は$\vec{a}$と$\vec{b}$ いずれとも、45度の角度をなしているとしよう。

この時、

$$P(\vec{a},\vec{b}) = 0$$

$$P(\vec{a},\vec{c}) = P(\vec{b},\vec{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

この値を、先の式

$$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$$

に代入してみる。

古典論の不等式を量子論は破る

$$\left|0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

これは、矛盾している。

観測機器の可能なすべての配置 $\vec{a}$と$\vec{b}$と$\vec{c}$ の量子論的相関の中には、古典論的相関を破るものが存在する。

CHSHによる定式化

"CHSH"は何をあらわすか？

CHSHは、次の四人の物理学者の頭文字をとったもの。

- John Clauser
- Michael Horne
- Abner Shimony
- Richard Holt

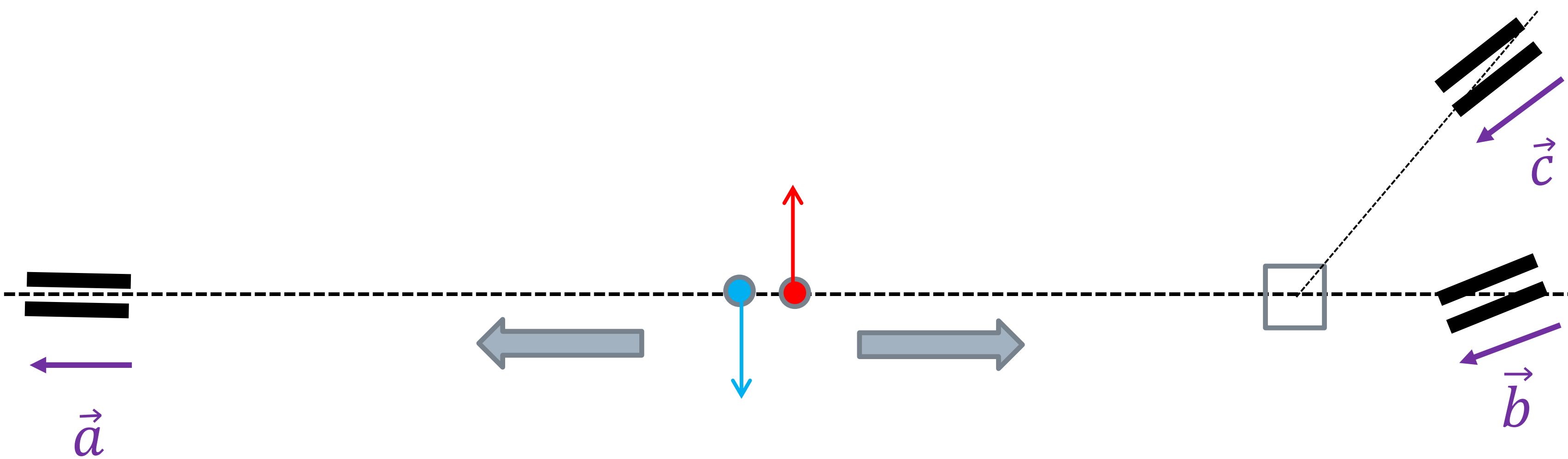
John Clauserは、2022年度の
ノーベル物理学賞を受賞した。

Bellの思考実験

Bellは、次のような実験を行って出力の相関Pを観測すれば、古典論の仮定のもとでは、次の不等式が成り立つことを示す。

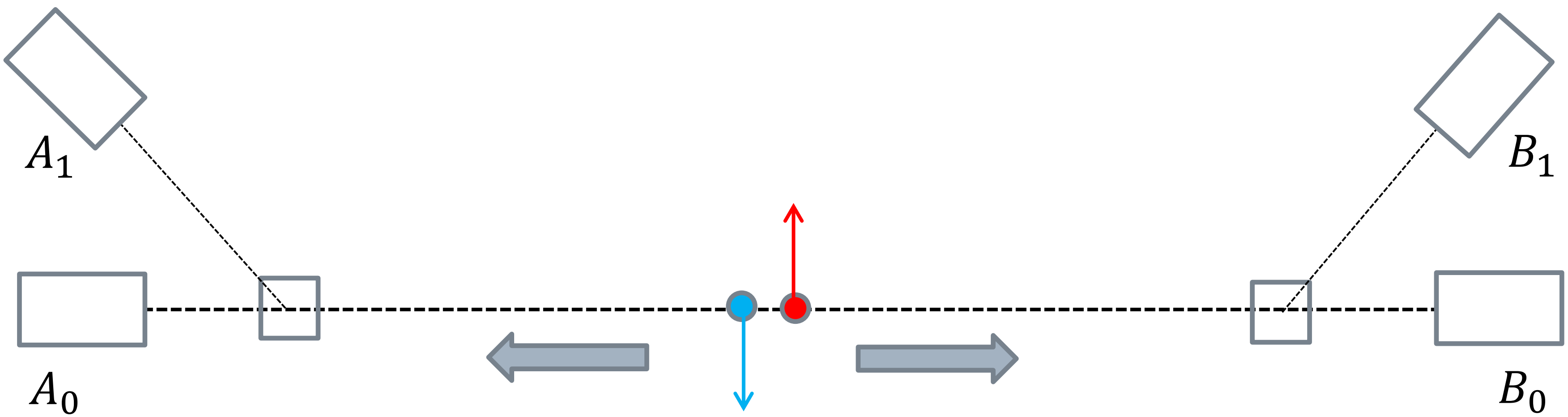
$$\left|P\left(\vec{a},\vec{b}\right)-P(\vec{a},\vec{c})\right|\leq 1+P\left(\vec{b},\vec{c}\right)$$

ただし、量子論では、この不等式は破られることをBellは示した。



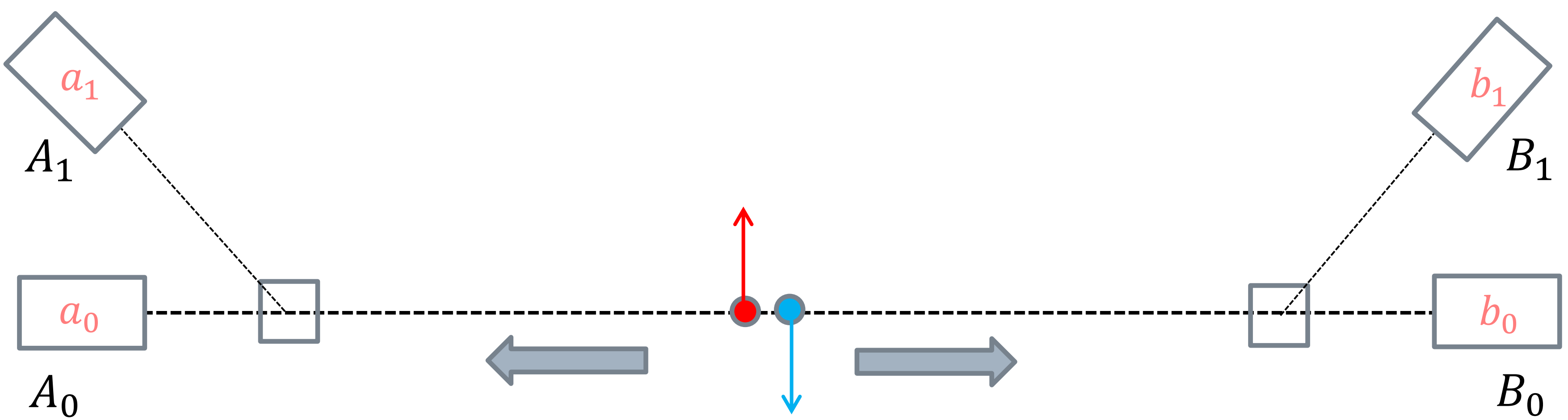
Aspectの実験

Aspectは、次のように観測機器 A_0, A_1, B_0, B_1を配置する。
この実験のもとになったのは、CHSHによる、Bellの定理の定式化である。



Aspectの実験

それぞれの観測機器が観測した値を $a_0, a_1, b_0. b_1$とする。
$a_0 = \pm 1,\ a_1 = \pm 1,\ b_0 = \pm 1.\ b_1 = \pm 1$ である。



CHSHによるBellの不等式

先の観測値 $a_0, a_1, b_0. b_1$ について、次の式Cを考える。

$$C = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1$$

この式を、次のように変形する。

$$C = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 - a_1) b_1$$

$a_0 = \pm 1, a_1 = \pm 1$から、$a_0 = a_1$ あるいは $a_0 = -a_1$ である。

もし、$a_0 = a_1$ なら、$(a_0 - a_1) b_1 = 0$ となり、

$$C = (a_0 + a_1) b_0 + 0 = 2 a_0 b_0 = \pm 2$$

もし、$a_0 = -a_1$ なら、$(a_0 + a_1) b_0 = 0$ となり、

$$C = 0 + (a_0 - a_1) b_1 = 2 a_0 b_1 = \pm 2$$

観測機器A_i, B_jで繰り返し観測した結果の平均を$< A_i B_j >$で表すと

$$< A_0 B_0 > + < A_0 B_1 > + < A_1 B_0 > - < A_1 B_1 > \leq 2$$

これをBell不等式、あるいは CHSH不等式という。

ここでの観測の前提
局所実在論

ここでの観測には、次のような前提がある。

- 【実在論】観測された物理的性質 $a_0, a_1, b_0. b_1$ は、観測とは独立に存在している。

- 【局所性】Aでの観測はBの観測に影響を与えないし、Bでの観測はAでの観測に影響を与えない。

量子論での観測

量子論での観測

上下のスピンを持つエンタングルメント状態は、

$$|\psi_{\pm}>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01> \pm |10>)$$

と表すことができる。

|00>,|01>,|10>,|11>を基底として

$$|\psi_{-}>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

としよう。

A,BのObservable

パウリのスピン行列σ_x, σ_zは、次のもの。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aの側は、$A_0 = \sigma_z, A_1 = \sigma_x$ をobservableとし観測する。

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これらのobservableの固有ベクトルは|0>.|1>なので、標準基底で観測するということ。

Bの側は、$B_0 = -\frac{\sigma_x+\sigma_z}{\sqrt{2}}, B_1 = \frac{\sigma_x-\sigma_z}{\sqrt{2}}$ をobservableとし観測する。

$$B_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

これらのobservableの固有ベクトルは|+>.|->なので、アダマール基底で観測するということ。

Observableの観測の平均値

Observable Oが与えられた時、状態$|\phi>$の観測値の平均は、

$$<\phi|O|\phi>$$

で与えられる。

先の$|\psi>, A_0. A_1, B_0, B_1$について、次の値を計算してみよう。

$$<\psi|A_0 \otimes B_0|\psi>$$
$$<\psi|A_0 \otimes B_1|\psi>$$
$$<\psi|A_1 \otimes B_0|\psi>$$
$$<\psi|A_1 \otimes B_1|\psi>$$

$A_0 \otimes B_0$

$$A_0 \otimes B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$< \psi|A_0 \otimes B_0|\psi >$

$$< \psi|A_0 \otimes B_0|\psi >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(0 + (-1) + (-1) + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A_0 \otimes B_1$

$$A_0 \otimes B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & -1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$<\psi|A_0 \otimes B_1|\psi>$

$$<\psi|A_0 \otimes B_1|\psi>$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} (0 - 1 - 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A_1 \otimes B_0$

$$A_1 \otimes B_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$< \psi | A_1 \otimes B_0 | \psi >$

$$< \psi | A_1 \otimes B_0 | \psi >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + (-1) + (-1) + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A_1 \otimes B_1$

$$A_1 \otimes B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$< \psi|A_1 \otimes B_1|\psi >$

$$< \psi|A_1 \otimes B_1|\psi >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(0+1+1+0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

量子論での観測値

次の式で$< A_i B_j >$は$< A_i \otimes B_j >$を表しているとする。

$$< A_0 B_0 > + < A_0 B_1 > + < A_1 B_0 > - < A_1 B_1 >$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

量子論の観測では、

$$< A_0 B_0 > + < A_0 B_1 > + < A_1 B_0 > - < A_1 B_1 > = 2\sqrt{2}$$

これは、古典論での$Bell$の不等式

$$< A_0 B_0 > + < A_0 B_1 > + < A_1 B_0 > - < A_1 B_1 > \leq 2$$

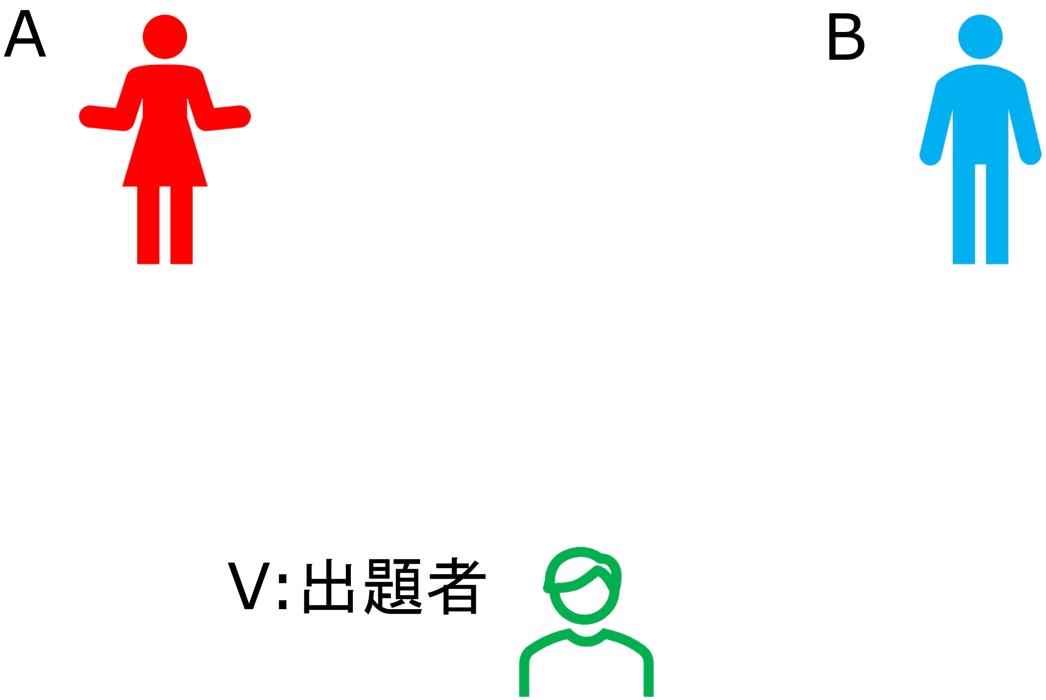
を破っている。

ここでの$2\sqrt{2}$を$Tsirelson\ bound$と呼ぶ。

CHSHゲームという定式化 (1)
local 版

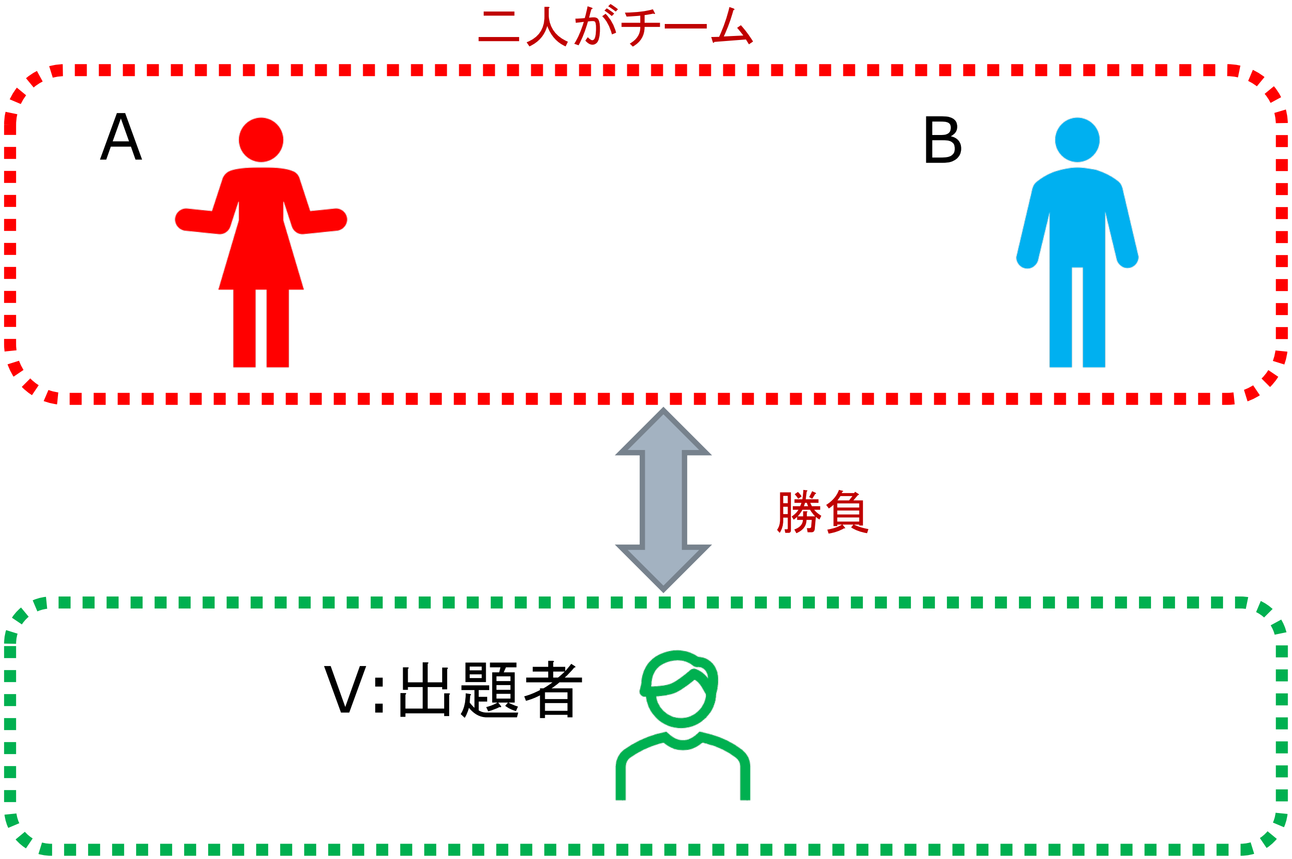
CHSHゲームの概要

A, B二人のチームが、出題者V の出す問題に答えて、二人のA, Bチームが勝つか出題者Vが勝つかを競うゲーム。



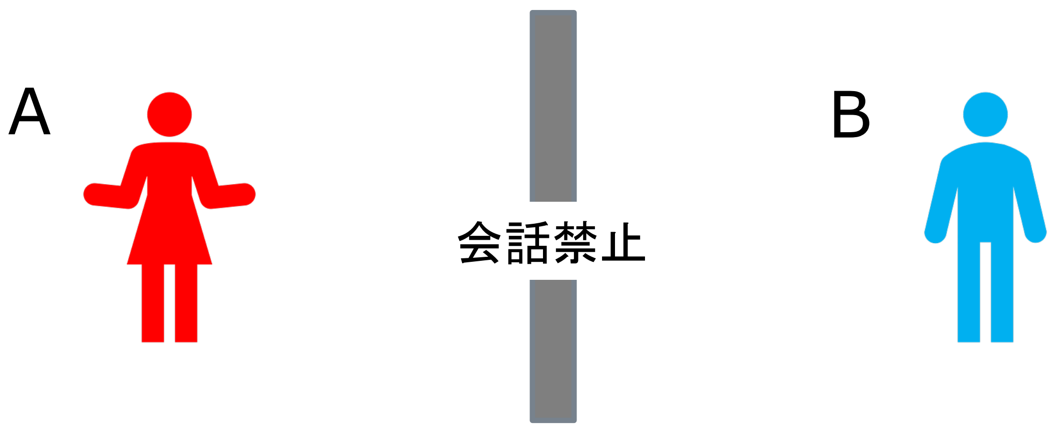
ゲームの概要

A, B二人のチームが、出題者V の出す問題に答えて、二人のA, Bチームが勝つか出題者Vが勝つかを競うゲーム。

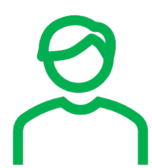


ゲームの条件

ただし、AとBとの会話は禁じられている。
また、出題者はAとBに別々に問題 x, y を出すものとする。

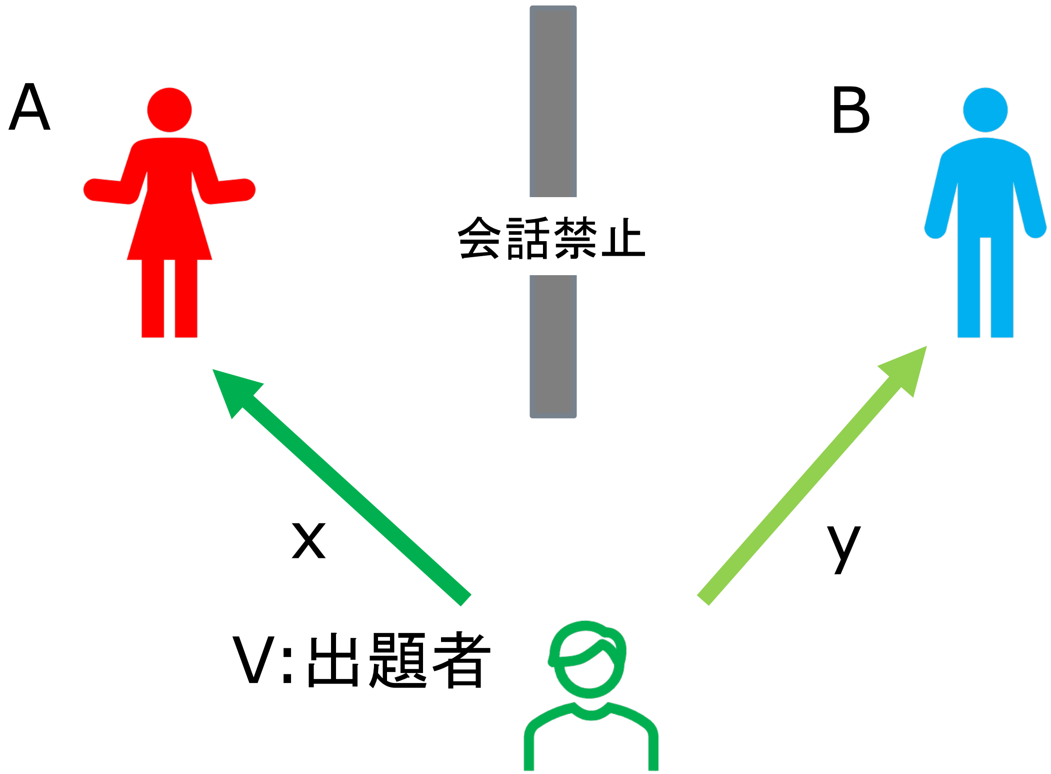


V:出題者



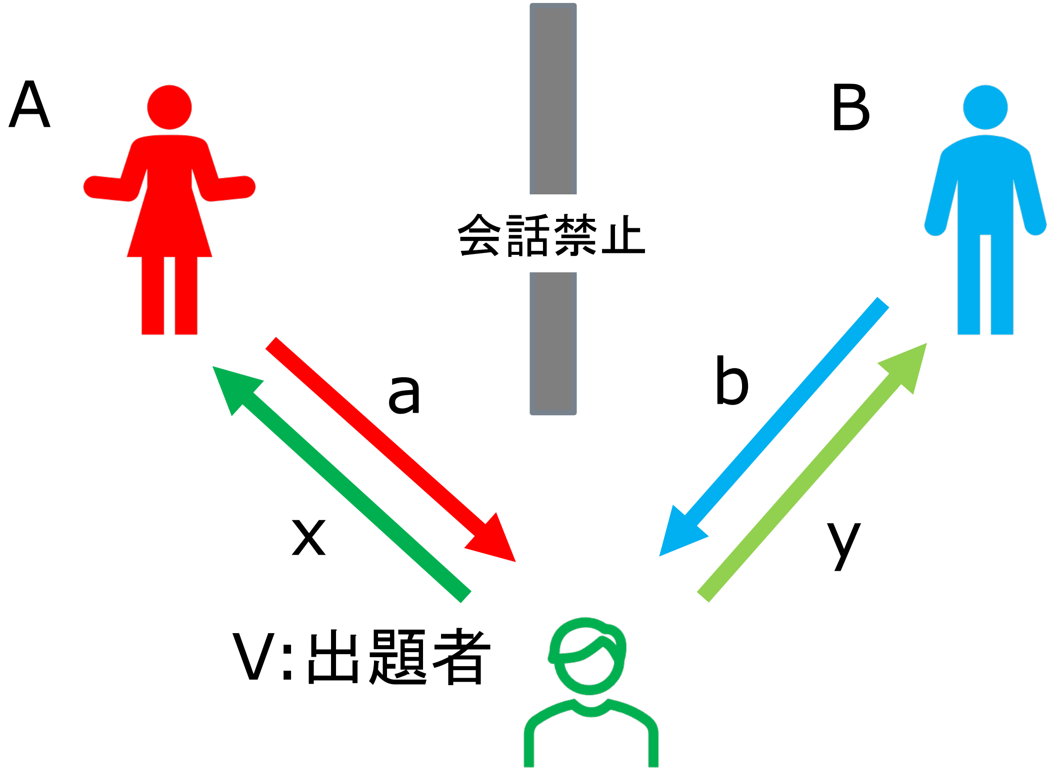
ゲームの条件

ただし、AとBとの会話は禁じられている。
また、出題者はAとBに別々に問題 x, y を出すものとする。



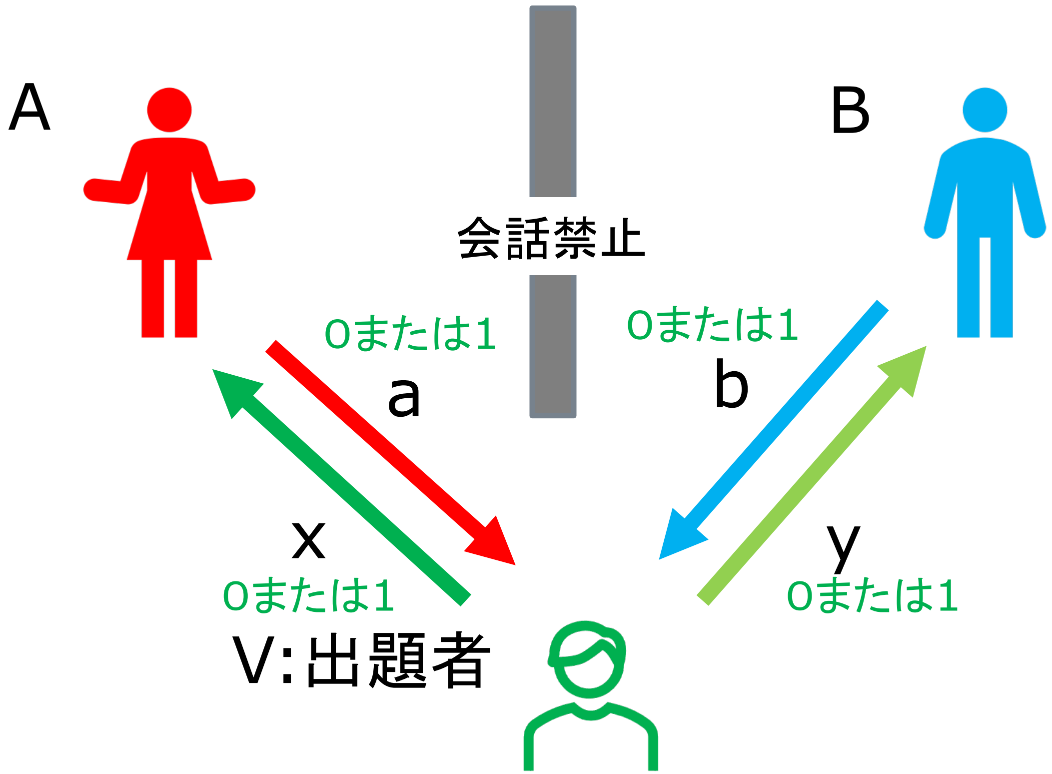
ゲームの条件

AとBは、Vの出した問題x, yに応じて答え a, bをす。
AとBとの会話は禁じられているので、それぞれに答えを返す。



問題と答えのパターン

Vは A, Bに、問題として、0または1を送る。
A, Bは Vに、答えとして、0または1を送る。



ゲームのルール

次の条件を満たす時、A,Bチームの勝ちとする。
そうでない場合、A,Bチームは負ける。

1. Vが出すx, y のどちらかが0の場合、
   Aの答えaとBの答えbが一致していれば、A,Bチームの勝ち。
2. $x = y = 1$の場合、
   aとbが違っていれば、A,Bチームの勝ち。

A,Bチームが勝つのは、問題 x,yの値に対して、
答え a, bが、次の値を取る場合である。

1. Vが出すx, y のどちらかが0の場合、

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0

A,Bチームが勝つのは、問題 x,yの値に対して、
答え a, bが、次の値を取る場合である。

1. Vが出すx, y のどちらかが0の場合、
   Aの答えaとBの答えbが一致していれば、A,Bチームの勝ち。

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1

A,Bチームが勝つのは、問題 x,yの値に対して、
答え a, bが、次の値を取る場合である。

1. Vが出すx, y のどちらかが0の場合、
   Aの答えaとBの答えbが一致していれば、A,Bチームの勝ち。
2. x = y = 1の場合、

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	

A,Bチームが勝つのは、問題 x,yの値に対して、
答え a, bが、次の値を取る場合である。

1. Vが出すx, y のどちらかが0の場合、
   Aの答えaとBの答えbが一致していれば、A,Bチームの勝ち。
2. x = y = 1の場合、
   aとbが違っていれば、A,Bチームの勝ち。

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=1
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=0

A,Bチームが勝つ条件は、次のように書ける。

$$xy = a + b \pmod 2$$

あるいは

$$xy = a \oplus b$$

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=1
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=0

必勝法？

A,Bチームは、ゲームの勝敗のルールは知っているとする。

A,Bチームに必勝法はあるだろうか？

もし、A,BがVからの問題を受け取った時点で、相談できれば、先の表を見て、勝つように答えを選ぶことができる。相談さえできれば、必勝法は存在する。

ただ、AとBの会話は禁じられている。

AはBがVから受け取ったyの値を知らないし、BはAがVから受け取ったxの値を知らない。これでは、必ず勝てるような答えを選ぶことはできない。このゲームの設定では、必勝法は存在しない。

A,Bがランダムに答えた場合の勝率

Vがランダムに問題を出し、A,Bがそれぞれランダムに答えた場合の勝率Pを計算しよう。

P = （x,yのいずれかが0である確率）x（a,b が等しい確率）

$\times\frac{1}{2}$

＋（x=y=1である確率）x（a,b が等しくない確率）

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

このゲームは、双方がランダムに振舞えば、どちらかが有利なゲームとは言えないことがわかる。

A,Bチームの勝率を高める戦略

A,Bチームは、事前に打ち合わせをして、次の戦略を取ることができる。

A,Bは、x,yの値に関わらず、a=b=0と全て0を返す (Plan 0)。あるいは、a=b=1と全て1 を返す (Plan 1)。

いずれの場合でも、A,Bチームの勝率は、3/4 となり、ランダムに対応した場合の1/2より、勝率を高めることができる。

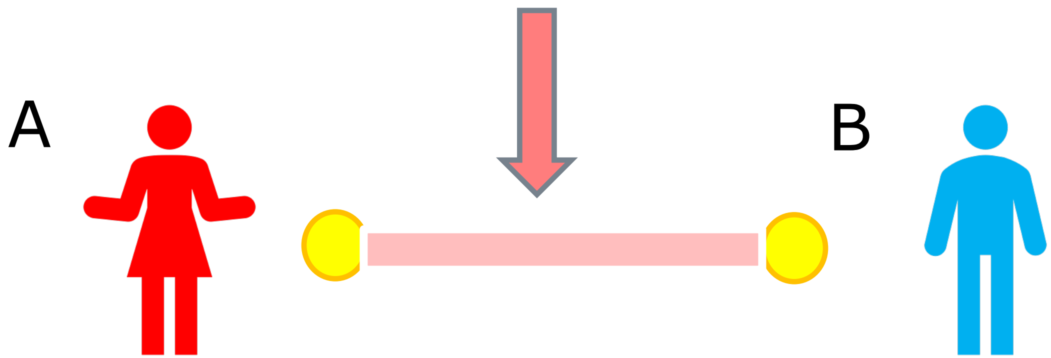
x=0, y=0	**x=0, y=1**	**x=1, y=0**	**x=1, y=1**	
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	⇦ Plan 0
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	⇦ Plan 1

CHSHゲームという定式化 (2)
non local 版

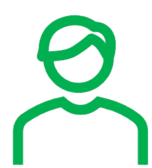
CHSHゲーム non-local

A,Bはentangleした量子を共有する

$$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00> + |11>)$$



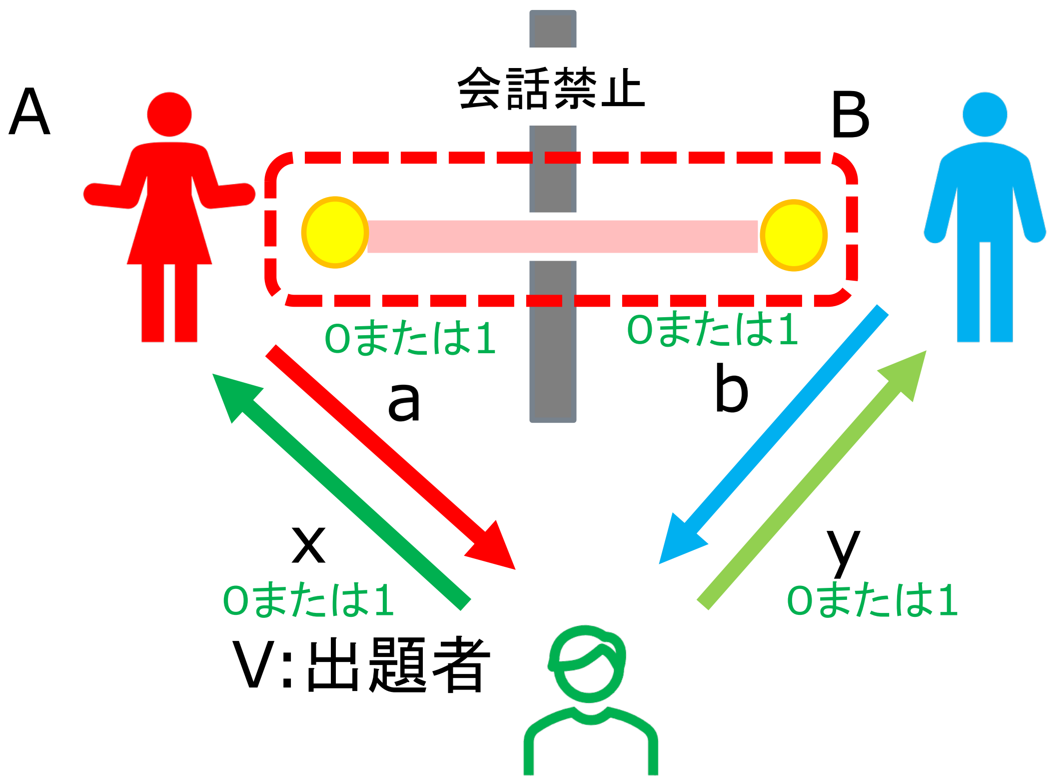
V:出題者



CHSHゲーム

A,Bはentangleした量子を共有する

Vは A, Bに、問題として、0または1を送る。
A, Bは Vに、答えとして、0または1を送る。



A,Bチームが勝つのは、問題 x,yの値に対して、
答え a, bが、次の値を取る場合である。

1. Vが出すx, y のどちらかが0の場合、
   Aの答えaとBの答えbが一致していれば、A,Bチームの勝ち。
2. x = y = 1の場合、
   aとbが違っていれば、A,Bチームの勝ち。

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=1
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=0

A,Bチームが勝つ条件は、次のように書ける。

$$xy = a + b \pmod 2$$

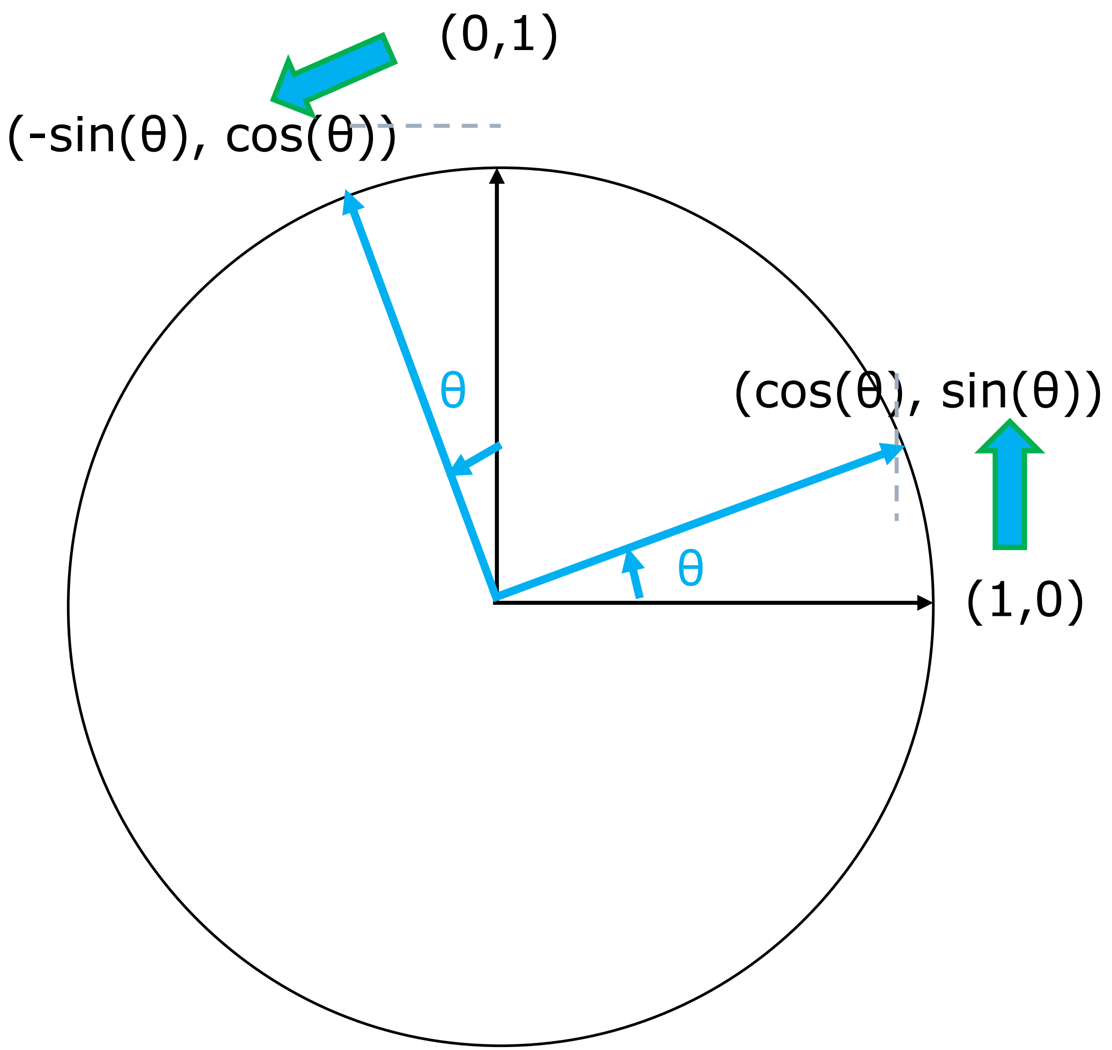
あるいは

$$xy = a \oplus b$$

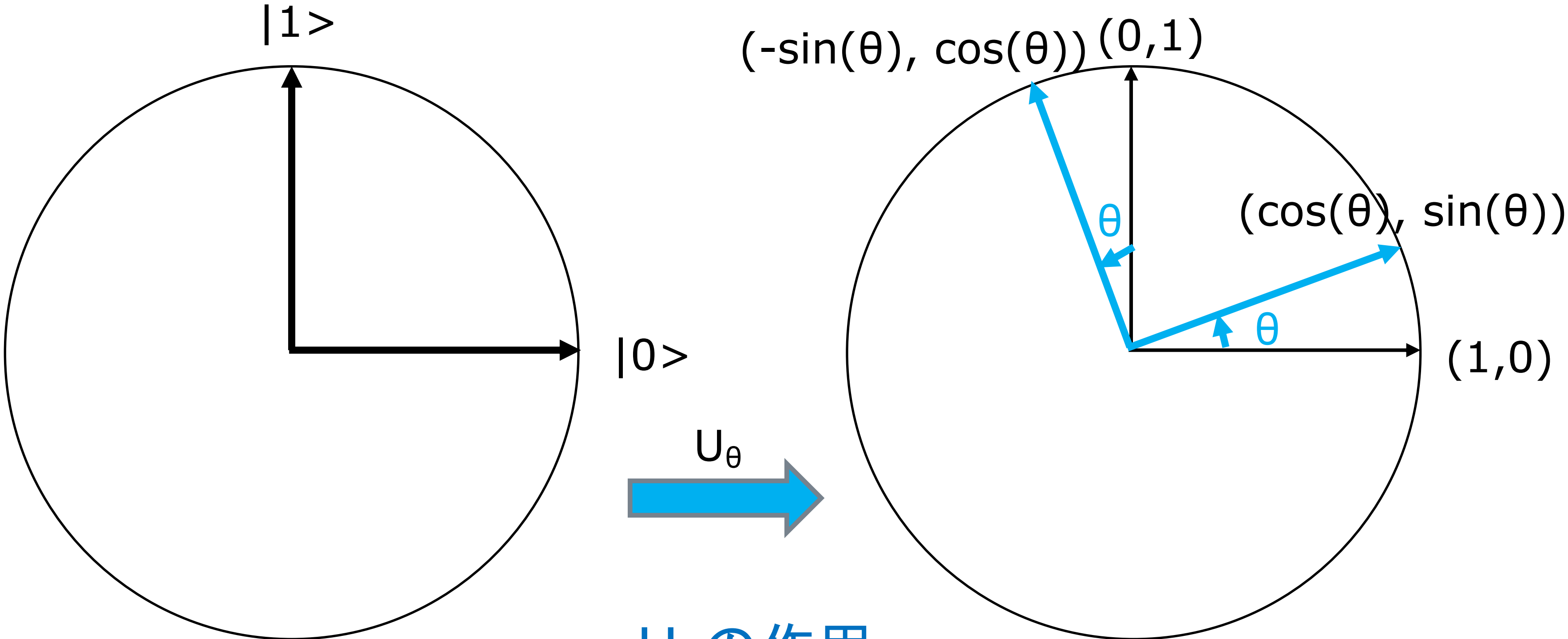
x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=1
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=0

AliceとBobの戦略

基底を変えて状態を見る



反時計回りにθだけ基底を回転する



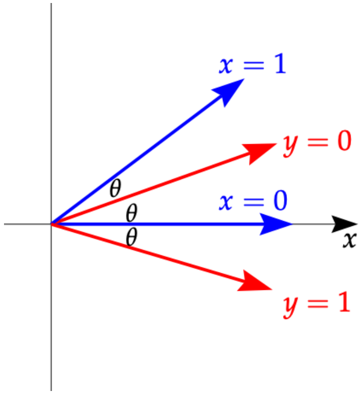
U_θの作用

$U_\theta|0> \Rightarrow \cos(\theta)|0> + \sin(\theta)|1>$

$U_\theta|1> \Rightarrow -\sin(\theta)|0> + \cos(\theta)|1>$

Alice, Bob チームの戦略

1. x=0 の時、Aliceは何もせず、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。
2. x=1の時、Aliceは自分のqubitに、U(2θ)を適用し、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。
3. y=0の時、Bobは自分のqubitに、U(θ)を適用し、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。
4. y=1の時、Bobは自分のqubitに、U(−θ)を適用し、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。



ここでは、$\theta = \frac{\pi}{8}$とおこう

$\theta = \frac{\pi}{8}$という角度は中途半端に思われるかもしれない。

ただ $2\theta = \frac{\pi}{4}$=45度である。先の戦略での「x=1の時、Aliceは自分のqubitに、U(2θ)を適用し、」というのは、標準基底を45度回転して、アダマール基底で観測するということを意味する。

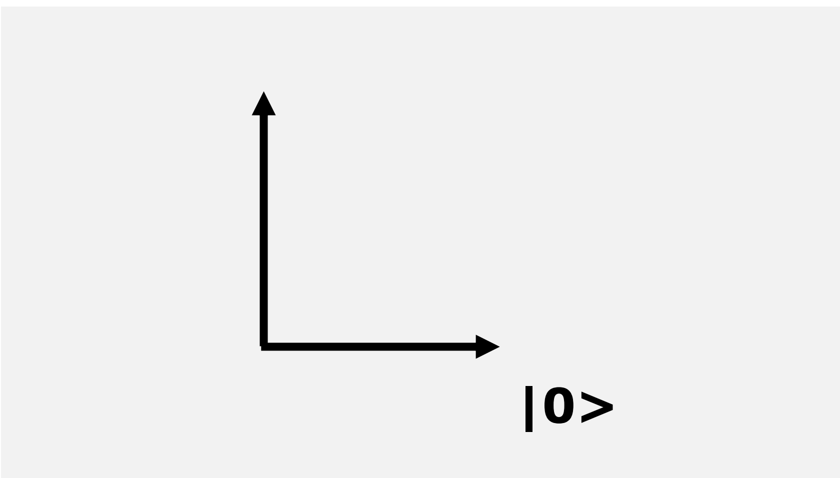
基底 $|\frac{\pi}{8}>, |-\frac{\pi}{8}>$ を次のように定義する。

$$\left|\frac{\pi}{8} > = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0 > + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| 1 >$$

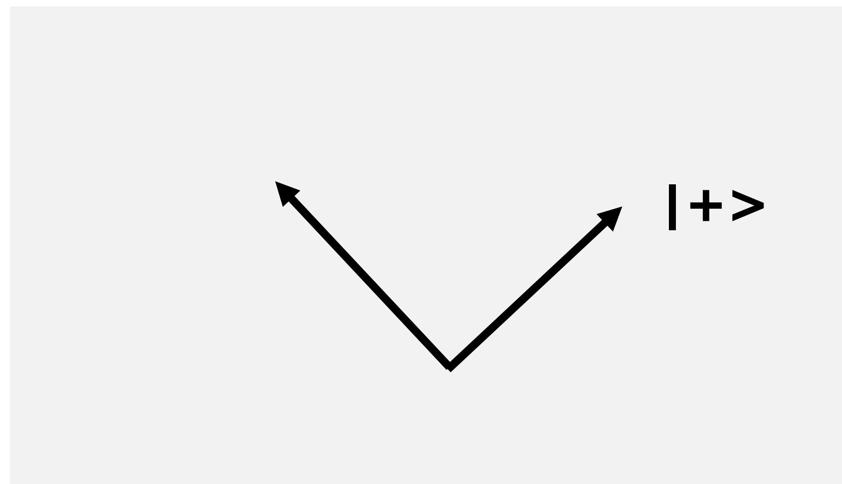
$$\left|-\frac{\pi}{8} > = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)|0 > + \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right| 1 >$$

Alice

もし、x=0 なら、
標準基底で観測する



もし、x=1 なら、
アダマール基底で観測する

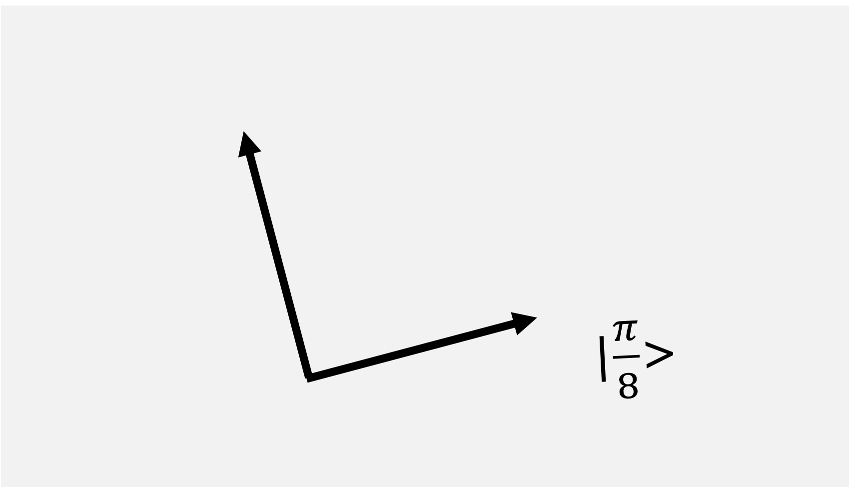


|0>または|+>を観測したら
a=0
|1>または |−>を観測したら
a=1

Bob

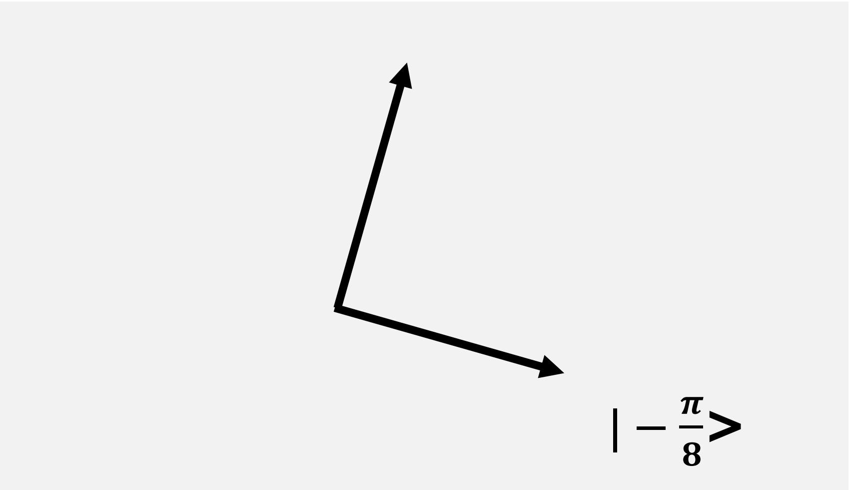
もし、y=0 なら、

$|\frac{\pi}{8}>$基底で観測する



もし、y=1 なら、

$|-\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}>$基底で観測する



$|\frac{\pi}{8}>$または$|-\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}>$を観測したら

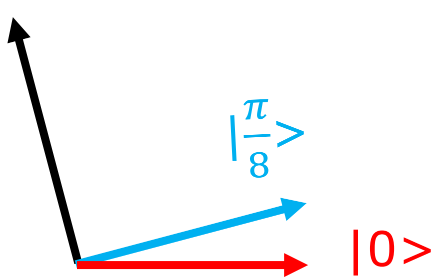
b=0

それ以外を観測したら

b=1

$x=0, y=0$ で　$a=b=0$ となる場合

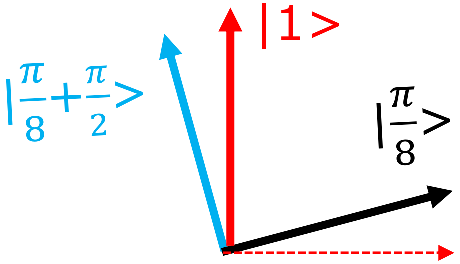
- Aliceが$x=0$を受け取って、$|0>$ を観測したとする。Aliceは、$a=0$を出力する。この場合、Bobが、$b=0$を出力すれば、チームの勝ちになる。
- Aliceが既にqubitを観測していたとすると、Bobのqubitは$|0>$状態になる。
- $y=0$だとしよう。Bobは、$|0>$状態を$\pi/8$だけ反時計回りに回転させた基底$|\frac{\pi}{8}>$で観測する。
- Bobが$b=0$を出力するのは$|\frac{\pi}{8}>$で$|0>$を観測した時である。
- よって、その確率は$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$となる。



$$|\frac{\pi}{8}> = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0>} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|1>$$

x=0,y=0 で　a=b=1 となる場合

- Aliceが$x=0$を受け取って、|1> を観測したとする。Aliceは、$a=1$を出力する。この場合、Bobが、$b=1$を出力すれば、チームの勝ちになる。
- Aliceが既にqubitを観測していたとすると、Bobのqubitは|1>状態になる。
- $y=0$だとしよう。Bobは、|1>状態を$\pi/8$だけ反時計回りに回転させた基底$|\frac{\pi}{8}>$で観測する。
- Bobが$b=1$を出力するのは$|\frac{\pi}{8}>$で|1>を観測した時である。
- よって、その確率は$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$となる。



$$\left|\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}>\right. = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)|0> + \sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|1>$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|0> \boxed{-cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|1>}$$

x=0, y=0 でチームが勝つ確率

$$|\psi>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00>+|11>)$$

で、Aliceがa=0を返すのは、どちらかの観測によって、状態$|\psi>$が状態$|\psi_{00}>=|00>$に変化した時。その確率は、$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$。

また、Aliceがa=1を返すのは、どちらかの観測によって、状態$|\psi>$が状態$|\psi_{11}>=|11>$に変化した時。その確率は、同じく$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$。

だから、x=0, y=0 でチームが勝つ確率は、
a=b=0 あるいは a=b=1 の場合だから、

$$\frac{1}{2}\times\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{2}\times\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

x=0, y=0	
a=0 b=0	$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$
a=1 b=1	$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

$\|0>$, $\|+\theta>$
$\|0>$ $\|+\theta>$
$\|1>$ $\|+\theta>$

$$\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=1
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=0

$\vert 0>$, $\vert\theta>$	$\vert 0>$, $\vert-\theta>$	$\vert+>$, $\vert\theta>$	$\vert+>$, $\vert-\theta>$
$\vert 0>$ $\vert\theta>$	$\vert 0>$ $\vert-\theta>$	$\vert+>$ $\vert\theta>$	$\vert+>$ $\vert-\theta>$
$\vert 1>$ $\vert\theta>$	$\vert 1>$ $\vert-\theta>$	$\vert->$ $\vert\theta>$	$\vert->$ $\vert-\theta>$

x=0, y=0	x=0, y=1	x=1, y=0	x=1, y=1
a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=0	a=0 b=1
a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=1	a=1 b=0

$\|0>$, $\|\theta>$	$\|0>$, $\|-\theta>$	$\|+>$, $\|\theta>$	$\|+>$, $\|-\theta>$
$\|0>$ $\|\theta>$	$\|0>$ $\|-\theta>$	$\|+>$ $\|\theta>$	$\|+>$ $\|-\theta>$
$\|1>$ $\|\theta>$	$\|1>$ $\|-\theta>$	$\|->$ $\|\theta>$	$\|->$ $\|-\theta>$
$\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

non-localなCHSHゲームで Alice, Bob チームが勝つ確率 P

$$P = \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

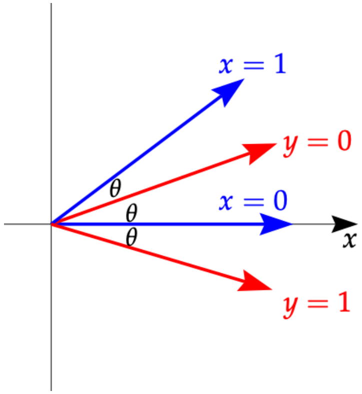
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + cos\,\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.8535\ldots > 0.75$$

non-localなCHSHゲームの勝率は、
localなCHSHゲームの勝率 3/4 を超える！

別の計算

Alice, Bob チームの戦略

1. x=0 の時、Aliceは何もせず、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。
2. x=1の時、Aliceは自分のqubitに、U(2θ)を適用し、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。
3. y=0の時、Bobは自分のqubitに、U(θ)を適用し、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。
4. y=1の時、Bobは自分のqubitに、U(−θ)を適用し、
   自分のqubitを観測し、その値を出題者に返す。



先の戦略を取った時の Alice, Bobの共有qubitの状態の変化

1. x=0, y=0の時、
   $|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle \otimes U(\theta)|0\rangle + |1\rangle \otimes U(\theta)|1\rangle)$
2. x=1, y=0の時、
   $|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}\,(U(2\theta)|0\rangle \otimes U(\theta)|0\rangle + U(2\theta)|1\rangle \otimes U(\theta)|1\rangle)$
3. x=0, y=1の時、
   $|\psi_3\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle \otimes U(\theta)|0\rangle + |1\rangle \otimes U(\theta)|1\rangle)$
4. x=1, y=1の時、
   $|\psi_4\rangle = 1/\sqrt{2}\,(U(2\theta)|0\rangle \otimes U(\theta)|0\rangle + U(2\theta)|1\rangle \otimes U(\theta)|1\rangle)$

U=U(θ) は、|0>, |1> を次のように変換する

U=U(θ)の作用

$U|0\rangle \Rightarrow \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$

$U|1\rangle \Rightarrow -\sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle$

以下、場合わけ

x=0, y=0 の時

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle \otimes U(\theta)|0\rangle + |1\rangle \otimes U(\theta)|1\rangle)$$

$$= 1/\sqrt{2}\,(\,(|0\rangle \otimes (\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle)$$

$$+|1\rangle \otimes (-\sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle))$$

$$= 1/\sqrt{2}\,(\,\cos(\theta)|00\rangle + \sin(\theta)|01\rangle$$

$$-\sin(\theta)|10\rangle + \cos(\theta)|11\rangle\,)$$

AliceとBobが同じ答えを返すのは、観測された状態が、$|00\rangle$ または $|11\rangle$の場合である。その確率は、

$(1/\sqrt{2}\cos(\theta))^2 + (1/\sqrt{2}\cos(\theta))^2 = \cos^2(\theta)$ である。

x=0, y=1 の時

$$|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle \otimes U(-\theta)|0\rangle + |1\rangle \otimes U(-\theta)|1\rangle)$$

$$= 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle \otimes (\cos(-\theta)|0\rangle + \sin(-\theta)|1\rangle)$$

$$+|1\rangle \otimes (-\sin(-\theta)|0\rangle + \cos(-\theta)|1\rangle))$$

$$= 1/\sqrt{2}\,(\ \cos(\theta)|00\rangle - \sin(\theta)|01\rangle$$

$$+\sin(\theta)|01\rangle + \cos(\theta)|11\rangle\ )$$

AliceとBobが同じ答えを返すのは、観測された状態が、
$|00\rangle$ または $|11\rangle$の場合である。その確率は、

$(1/\sqrt{2}\cos(\theta))^2 + (1/\sqrt{2}\cos(\theta))^2 = \cos^2(\theta)$ である。

x=1, y=0 の時

$$|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}\,(U(2\theta)|0\rangle \otimes U(\theta)|0\rangle + U(2\theta)|1\rangle \otimes U(\theta)|1\rangle)$$

$$= 1/\sqrt{2}\,(\ (\cos(2\theta)|0\rangle + \sin(2\theta)|1\rangle) \otimes (\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle) + (-\sin(2\theta)|0\rangle + \cos(2\theta)|1\rangle) \otimes (-\sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle)\ )$$

$$= 1/\sqrt{2}\,(\ (\cos(2\theta)\cos(\theta) + \sin(2\theta)\sin(\theta))|00\rangle + (\cos(2\theta)\sin(\theta) - \sin(2\theta)\cos(\theta))|01\rangle + (\sin(2\theta)\cos(\theta) - \cos(2\theta)\sin(\theta))|10\rangle + (\sin(2\theta)\sin(\theta) + \cos(2\theta)\cos(\theta))|11\rangle\ )$$

x=1, y=0 の時 (続き)

$$= 1/\sqrt{2}\ (\ \cos(\theta)|00> \\ -\sin(\theta)|01> \\ +\sin(\theta)|10> \\ +\cos(\theta)|11>\ )$$

AliceとBobが同じ答えを返すのは、観測された状態が、|00> または |11>の場合である。その確率は、

$(1/\sqrt{2}\cos(\theta))^2+(1/\sqrt{2}\ \cos(\theta))^2= \cos^2(\theta)$ である。

x=1, y=1 の時

$|\psi_4\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\ U(2\theta)|0\rangle \otimes U(-\theta)|0\rangle$

$\qquad + U(2\theta)|1\rangle \otimes U(-\theta)|1\rangle)$

$= 1/\sqrt{2}\,(\ (\cos(2\theta)|0\rangle + \sin(2\theta)|1\rangle)$

$\qquad \otimes (\cos(-\theta)|0\rangle + \sin(-\theta)|1\rangle)$

$\qquad + (-\sin(2\theta)|0\rangle + \cos(2\theta)|1\rangle)$

$\qquad \otimes (-\sin(-\theta)|0\rangle + \cos(-\theta)|1\rangle)\ )$

$= 1/\sqrt{2}\,($

$(\cos(2\theta)\cos(-\theta) + \sin(2\theta)\sin(-\theta))|00\rangle$

$+ (\cos(2\theta)\sin(-\theta) - \sin(2\theta)\cos(-\theta))|01\rangle$

$+ (\sin(2\theta)\cos(-\theta) - \cos(2\theta)\sin(-\theta))|10\rangle$

$+ (\sin(2\theta)\sin(-\theta) + \cos(2\theta)\cos(-\theta))|11\rangle\ )$

x=1, y=1 の時 (続き)

$= 1/\sqrt{2}\,($

$(\ \cos(\theta)|00\rangle$

$-\sin(3\theta)|01\rangle$

$+\sin(3\theta)|10\rangle$

$+\cos(\theta)|11\rangle\ )$

AliceとBobが違う答えを返すのは、観測された状態が、
$|01\rangle$ または $|10\rangle$の場合である。

この場合、その確率は、

$(1/\sqrt{2}\sin(3\theta))^2+(1/\sqrt{2}\sin(3\theta))^2= \sin^2(3\theta)$ である。

Alice, Bobチームが勝つ確率

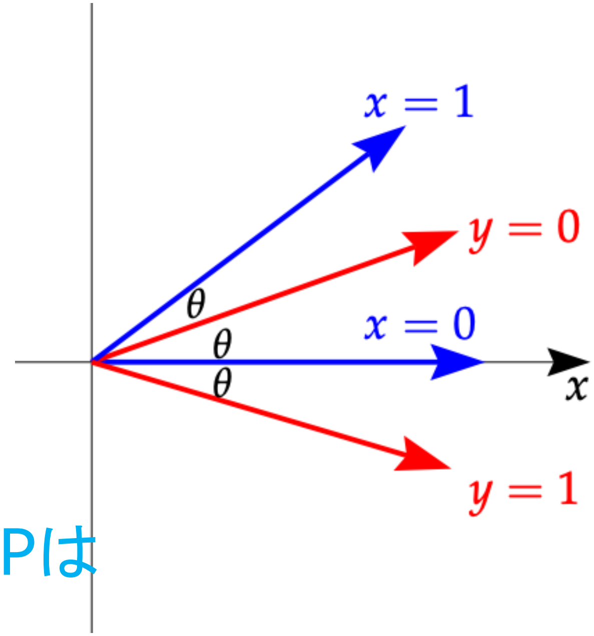
この戦略を取った時、Alice, Bobチームがそれぞれの場合に勝つ確率は、次のようになる。

x=0, y=0の時、$\cos^2(\theta)$

x=1, y=0の時、$\cos^2(\theta)$

x=0, y=1の時、$\cos^2(\theta)$

x=1, y=1の時、$\sin^2(3\theta)$



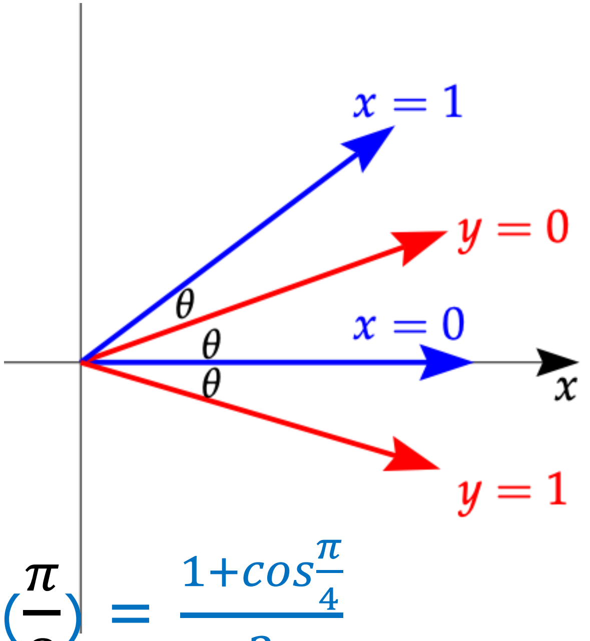
よって、Alice, Bobチームが勝つ確率Pは

$$P=\frac{3}{4}\times \cos^2(\theta)+\frac{1}{4}\times \sin^2(3\theta)$$

Alice, Bobチームが勝つ確率

Alice, Bobチームが勝つ確率Pは

$$P(\theta)=\frac{3}{4}\times\cos^2(\theta)+\frac{1}{4}\times\sin^2(3\theta)$$



$$P(0)=\frac{3}{4}$$

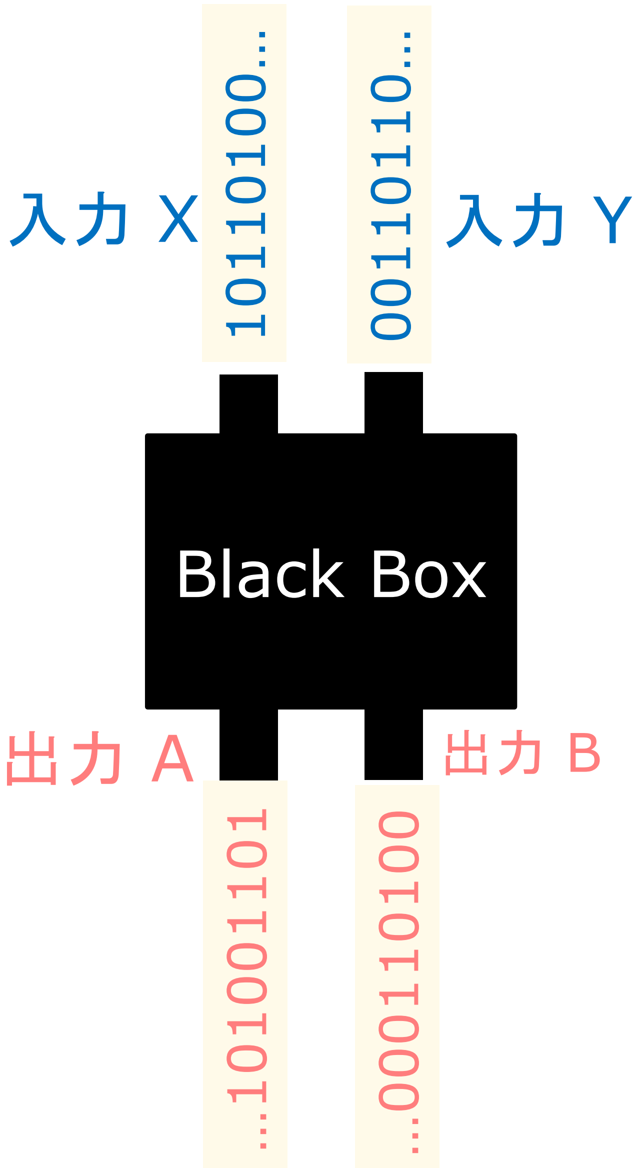
$$p\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$p\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3}{4}\times\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{4}\times\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+cos\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0.8535\ldots > 0.75$$

実験と対話型ゲーム

入力と出力の相関を実験で検出する



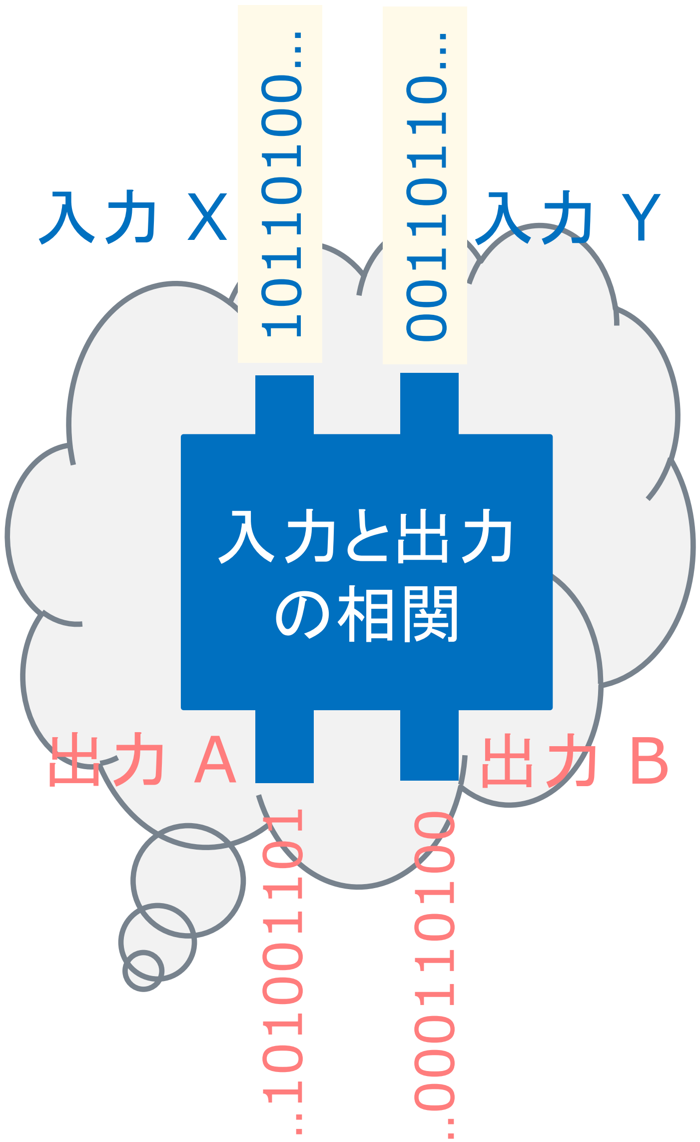
0または1を入力X,Yとして受け取り、0または1を出力A,Bとして吐き出す箱があるとしましょう。まずは、内部の仕掛けはわからないブラックボックスだと考えましょう。

ただ、ここでのブラックボックスを、実験装置のモデルと考えることができます。

先には、「内部の仕掛けはわからない」と書きましたが、実験装置は、その物理的設計に忠実に入力を出力に変えます。そのメカニズムはよくわかっているはずです。

よくわからないのは、入力と出力の関係が意味するところです。

実験装置

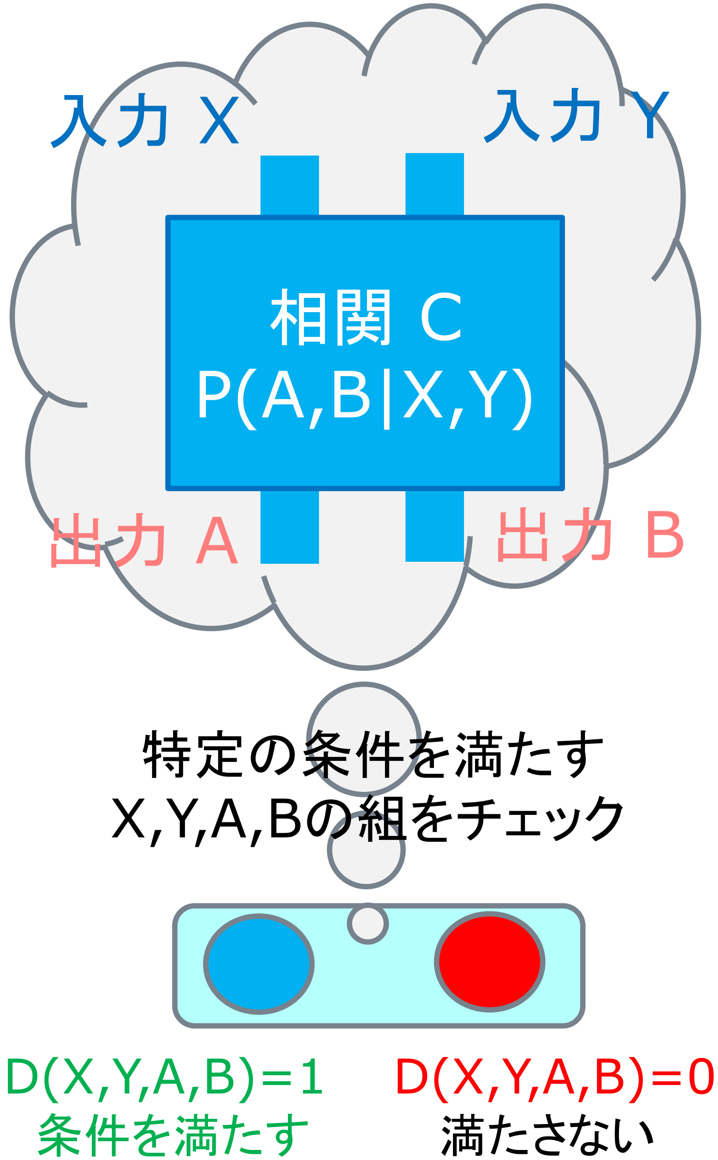


入力と出力の関係が意味するところがわからないとしても、入力と出力を観察すれば、両者の「相関 C」は知ることができます。

入力と出力の「相関 C」は、入力X, Yが与えられた時の出力A, Bの条件付き確率で与えられます。

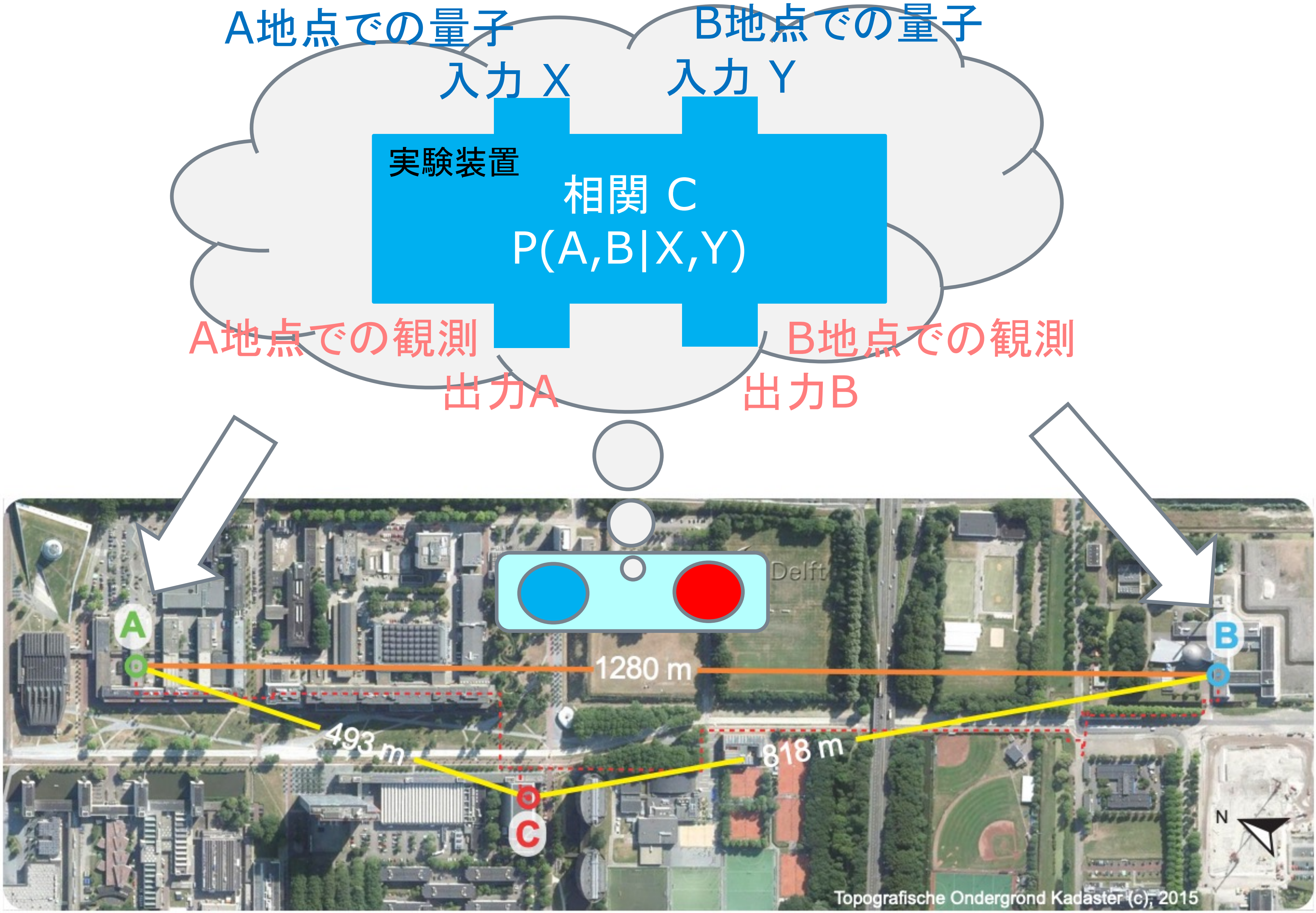
$C = P(A, B \mid X, Y)$ です。

入力の分布：μ(X,Y)

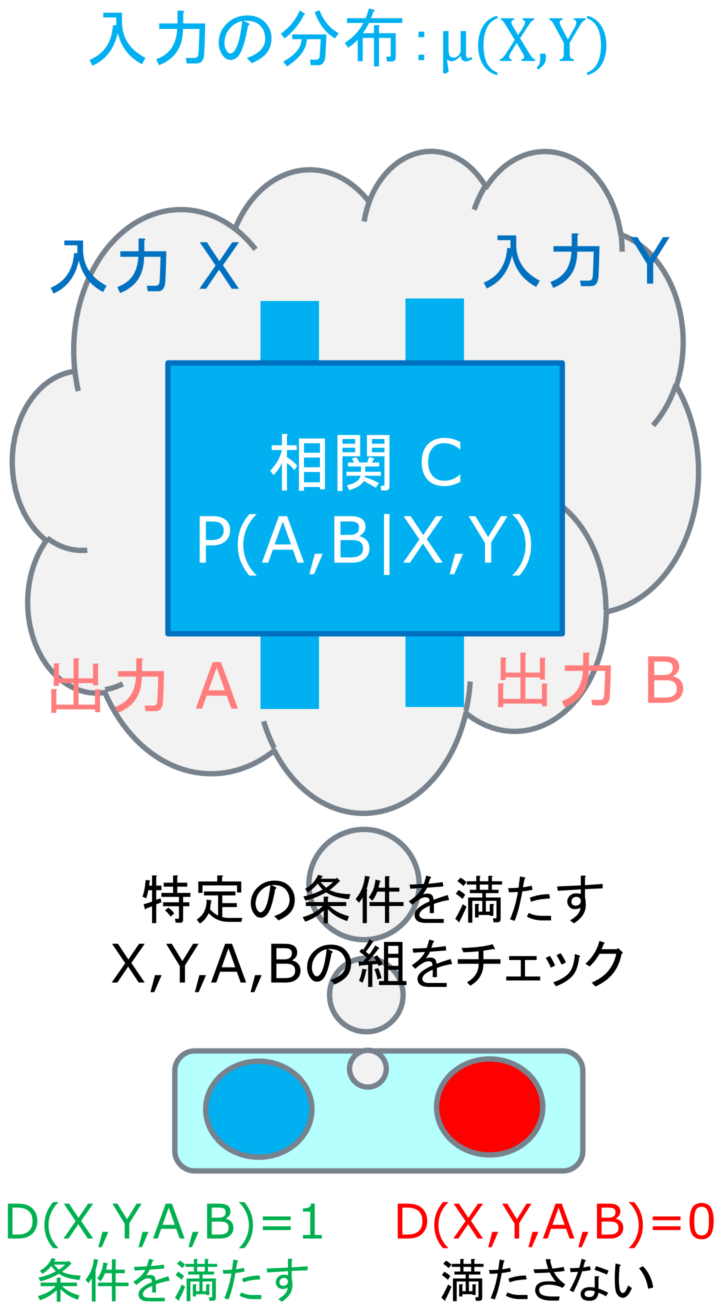


今、装置への入力 X, Yと出力 A, Bが、ある関係 D(X,Y,A,B)=1を満たす時、青いランプがついて、そうでない時は赤いランプがつくとしましょう。

この時、入力の分布μ(X,Y) が与えられれば、相関Cのもとで、青いランプがつく確率を求めることができます。


A地点での量子
入力 X
B地点での量子
入力 Y
実験装置
相関 C
P(A,B|X,Y)
A地点での観測
出力A
B地点での観測
出力B
Delft
A
B
C
1280 m
493 m
818 m
N
Topografische Ondergrond Kadaster (c), 2015

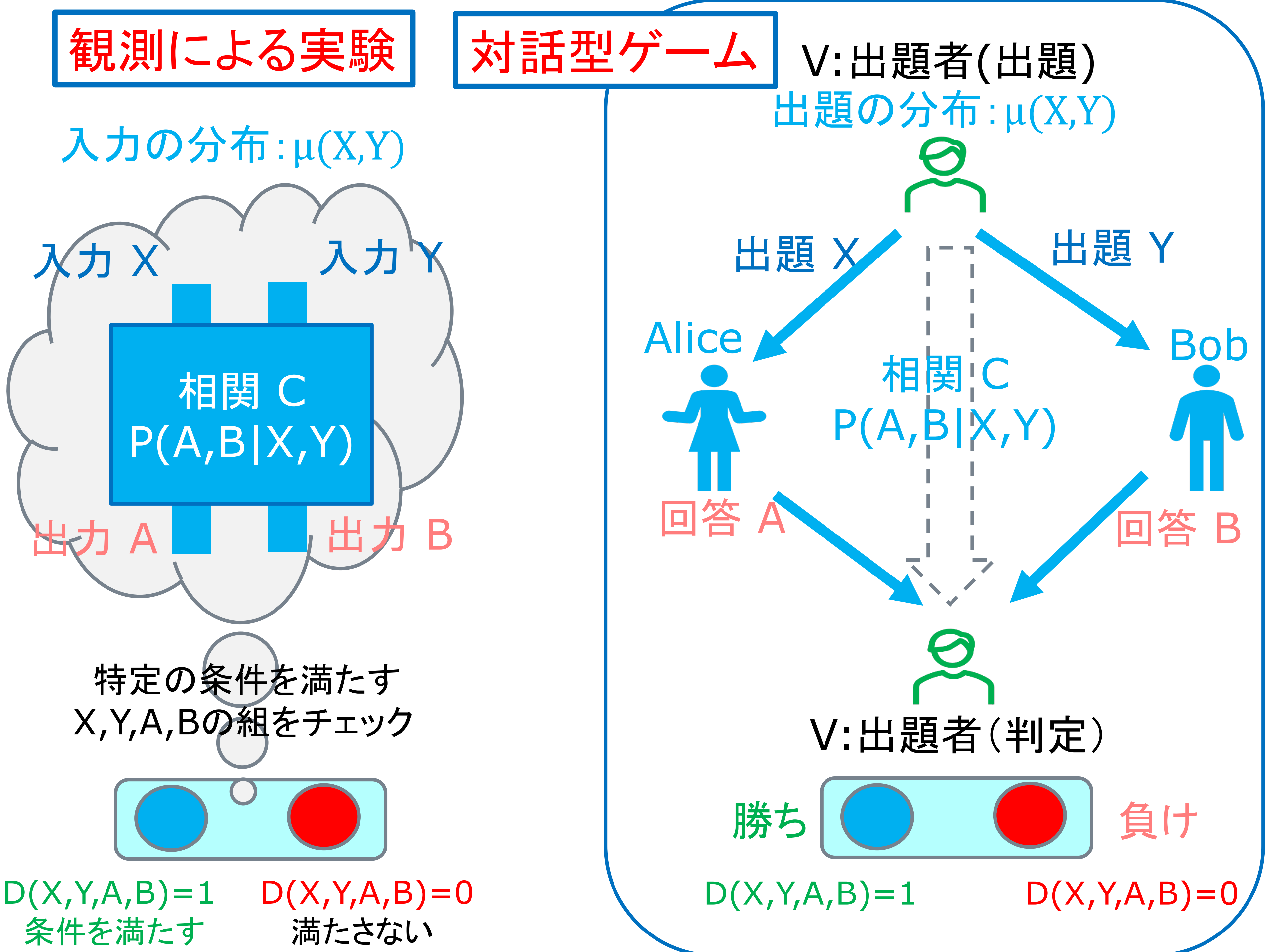
実験を対話型ゲームとして解釈する

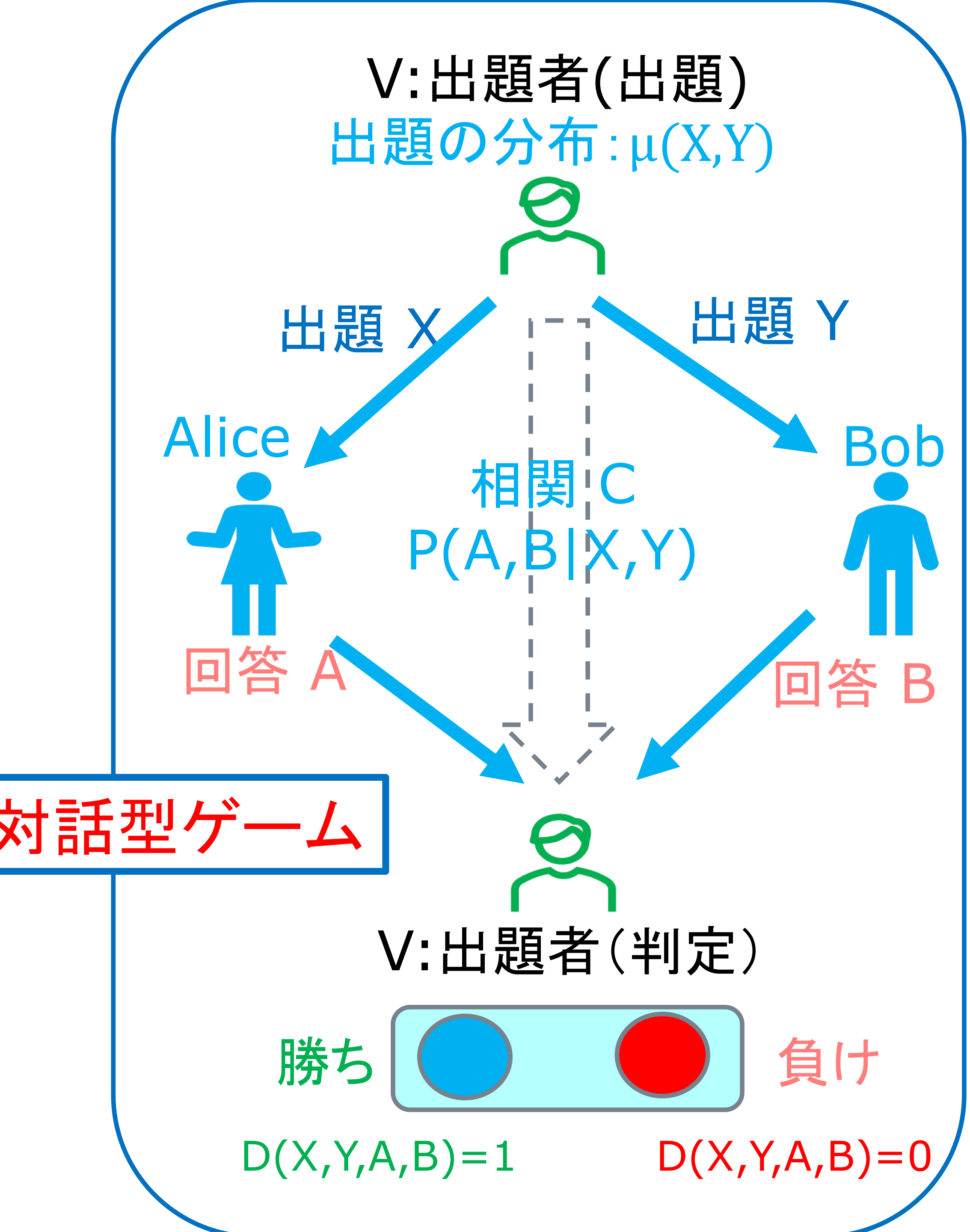


同じ状況を、出題者 vs. (Alice+Bobチーム)の **対話型の対戦ゲーム**に読み替えたものが、CHSHゲームです。

出題者が、AliceとBobに問題を出して、AliceとBobはそれに答えます。問題 X, Y と回答 A, Bが、ある条件を満たすときに、Alice+Bobチームは、ゲームに勝ちます。

ここでは、実験装置のように、入力を出力に変換するメカニズムが明確ではないかもしれません。ある場合にはランダムに出力がなされることもあります。ブラックボックスと考えることもできます。

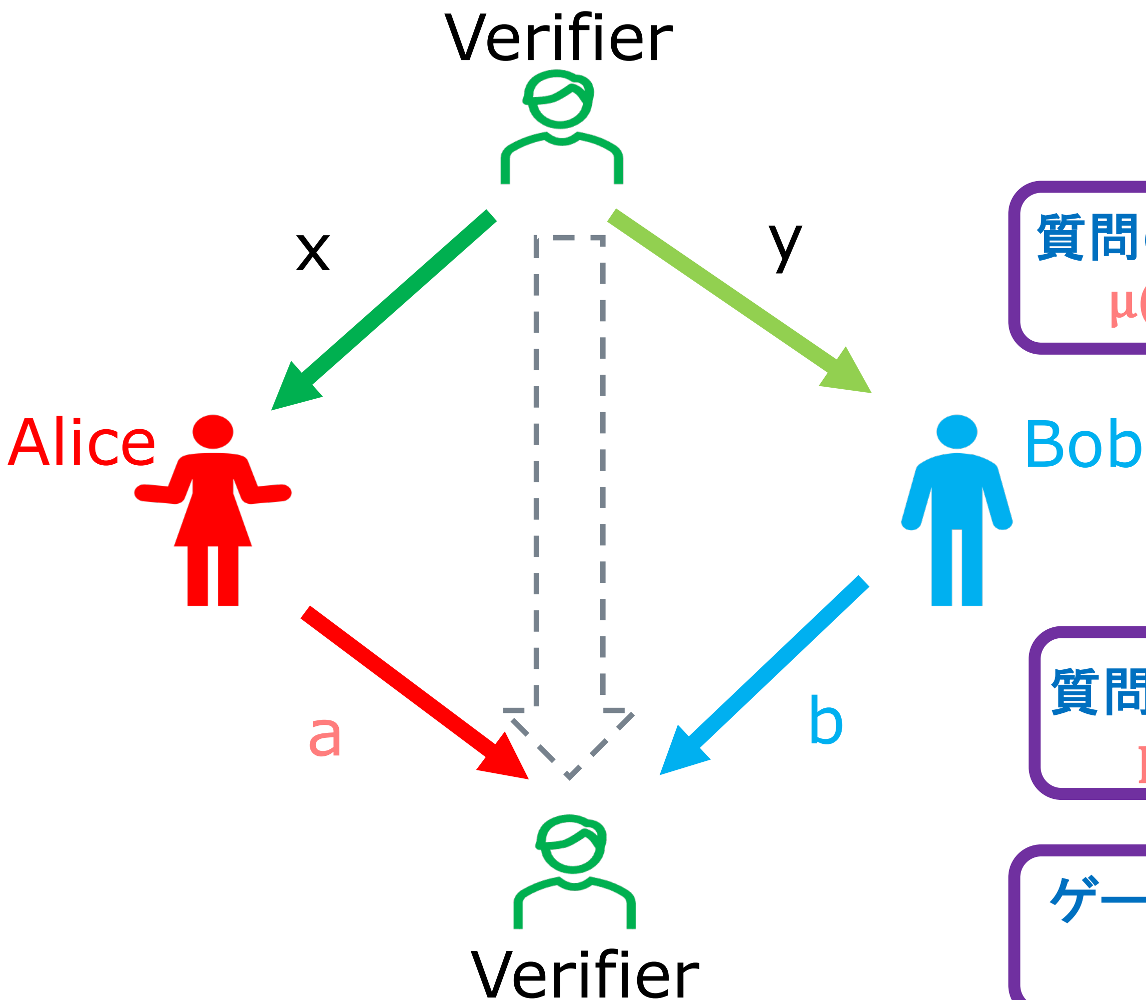

観測による実験
入力の分布：μ(X,Y)
入力 X
入力 Y
相関 C
P(A,B|X,Y)
出力 A
出力 B
特定の条件を満たす
X,Y,A,Bの組をチェック
D(X,Y,A,B)=1
条件を満たす
D(X,Y,A,B)=0
満たさない
対話型ゲーム
V:出題者(出題)
出題の分布：μ(X,Y)
出題 X
出題 Y
Alice
Bob
相関 C
P(A,B|X,Y)
回答 A
回答 B
V:出題者（判定）
勝ち
負け
D(X,Y,A,B)=1
D(X,Y,A,B)=0



実験装置への
入力 X, Y 出力 A, Bは、
対話型ゲームの
出題 X, Y 回答 A, Bに
対応しています。

観測による実験で
青いランプがつく確率は、
対話型ゲームで
Alice+Bobチームが
勝つ確率に対応します。

対話型ゲームの定式化



①

質問の分布:
$\mu(x, y)$

②

質問と回答の相関:
$p(a, b \mid x, y)$

③

ゲームの勝敗を定義する関数:
$D(a, b, x, y) \to \{0, 1\}$

対話型ゲームの定式化

対話型ゲームは、次の三つの式で特徴付けられます。

1. 質問の分布:　$\mu(x, y)$
2. 質問と回答の相関:　$p(a, b \mid x, y)$
   入力x, yが与えられた時a, bを出力する、条件付き確率であたえられる
3. ゲームの勝敗を定義する関数:　$D(a, b, x, y) \to \{0, 1\}$

CHSHゲームの場合、

- $\mu(x, y)$は、0と1の一様にランダムな分布、
- $p(a, b \mid x, y)$
  $= p(a, b \mid 0, 0) + p(a, b \mid 0, 1) + p(a, b \mid 1, 0) + p(a, b \mid 1, 1)$、
- $D(a, b, x, y)$は、
  $a+b=xy \pmod 2$の時に1を、それ以外の時に0を返す関数。

相関pが与えられた時のゲームの勝率

相関pが与えられたときのゲームGの勝率 $\omega(\mathrm{G},\mathrm{p})$は、次の式で与えられます。

$$\omega(\mathrm{G},\mathrm{p}) = \sum_{x,y,a,b} \mu(x,y) \cdot D(\mathrm{x},y,a,b) \cdot p(a,b|x,y)$$

どのような相関を選択するかで勝率は変わります。こうして選択された相関をゲームの「戦略」といいます。

古典論的なlocalなCHSHと、エンタングルメントを利用したnon localなCHSHとの違いは、相関pが古典論的相関に属するか $p \in C_c$ 、量子論的相関に属するか$p \in C_q$の違いに帰着します。

自然との対話としてのCHSHゲーム

Bellの不等式に従う古典的相関のもとでは、CHSHゲームの最大勝率は、3/4 = 0.75 になります。

物理実験に基づくCHSHゲームでは、その勝率は$\cos^2(\pi/8)$であることが確かめられました。それは量子論の予測と一致します。

量子論的相関のもとでは、CHSHゲームの最大勝率は、$\cos^2(\pi/8) = 0.8125... > 3/4$ になります。

こうして、自然は、古典論的相関ではなく、量子論的相関に従うこと、エンタングルメントは実在することが、実験的にも確かめられました。

CHSHゲームに基づく実験は、自然との対話によって、自然の背後にある法則性を明らかにするものと解釈できます。

Interlude

-

Bell’s Theorem Blues

The whole idea that, either there might be determinism, or action at a distance, was so repugnant to them that they looked away.

Well that's tradition, and we have to learn in life sometimes to learn new traditions. And it might be that we have to learn to accept not so much action at a distance, but inadequacy of no action at a distance.

--- John Bell

Indeterminism and non locality

On the 22nd of January 1990, Bell gave a talk explaining his inequality at CERN in Geneva, organized by Antoine Suarez (of the Center for Quantum Philosophy).

Center of quantum philosophy of Geneva :

John Bell's talk - his theorem and debate.

Taking part John Bell, Antoine Suarez, Herwig Schopper, J M Belloc, G Cantale, John Layter, P Veija and P Ypes.

https://www.youtube.com/watch?v=3l9HtG-VZCU&t=1909s

https://iis-edu.org/wp-content/uploads/2022/10/Bell-indeterminism-and-nonlocality.pdf

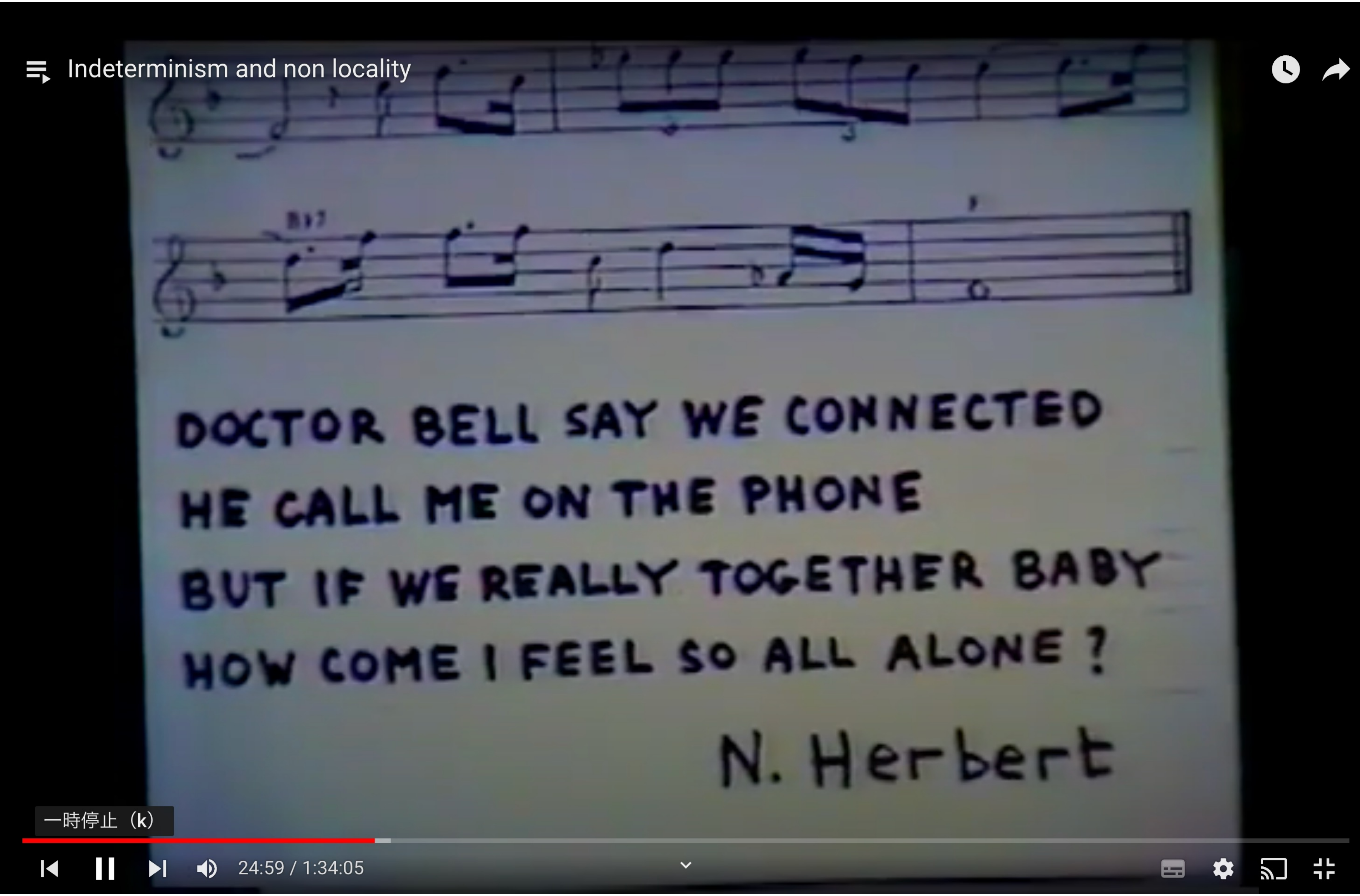
no action on a distance (polarisers parallel) $\Rightarrow$ **determinism**

determinism (polarisers nonparallel) $\Rightarrow$ **action on a distance**

That curious situation has inspired a musical composition. There is a musical composition called `The Bell's theorem blues'. I'm not going to sing it, I'll say the words:


Indeterminism and non locality
一時停止（k）
24:39 / 1:34:05


Indeterminism and non locality
QUANTUM NUMBER
BELL'S THEOREM BLUES
Words Nick Herbert
Music Traditional Blues
(Number Twelve Train)
F
B♭7
F
C7
一時停止（k）
24:54 / 1:34:05


Indeterminism and non locality
DOCTOR BELL SAY WE CONNECTED
HE CALL ME ON THE PHONE
BUT IF WE REALLY TOGETHER BABY
HOW COME I FEEL SO ALL ALONE ?
N. Herbert
一時停止（k）
24:59 / 1:34:05

Bell’s Theorem Blues

Doctor Bell say we connected
He call me on the phone
Doctor Bell say united
He call me on the phone
But if we really together, baby
How come I feel so all alone?

It’s so easy to forget you
Last night I did it fifty times
And I never think about you
Except from nine to nine
Since we got tangled up in quantum honey
Can’t get that sweet thing off my mind.

On the dance floor, in the kitchen
We each move separately
But Bell prove we united
Down in deep reality
How did that quantum magic happen?
One of Mother Nature's mysteries.

Doctor Bell say we connected
He call me on the phone
Doctor Bell say united
He call me on the phone
But if we really together, baby
How come I feel so all alone?

Words: Nick Herbert
Music: Traditional Blues: Number Twelve Train

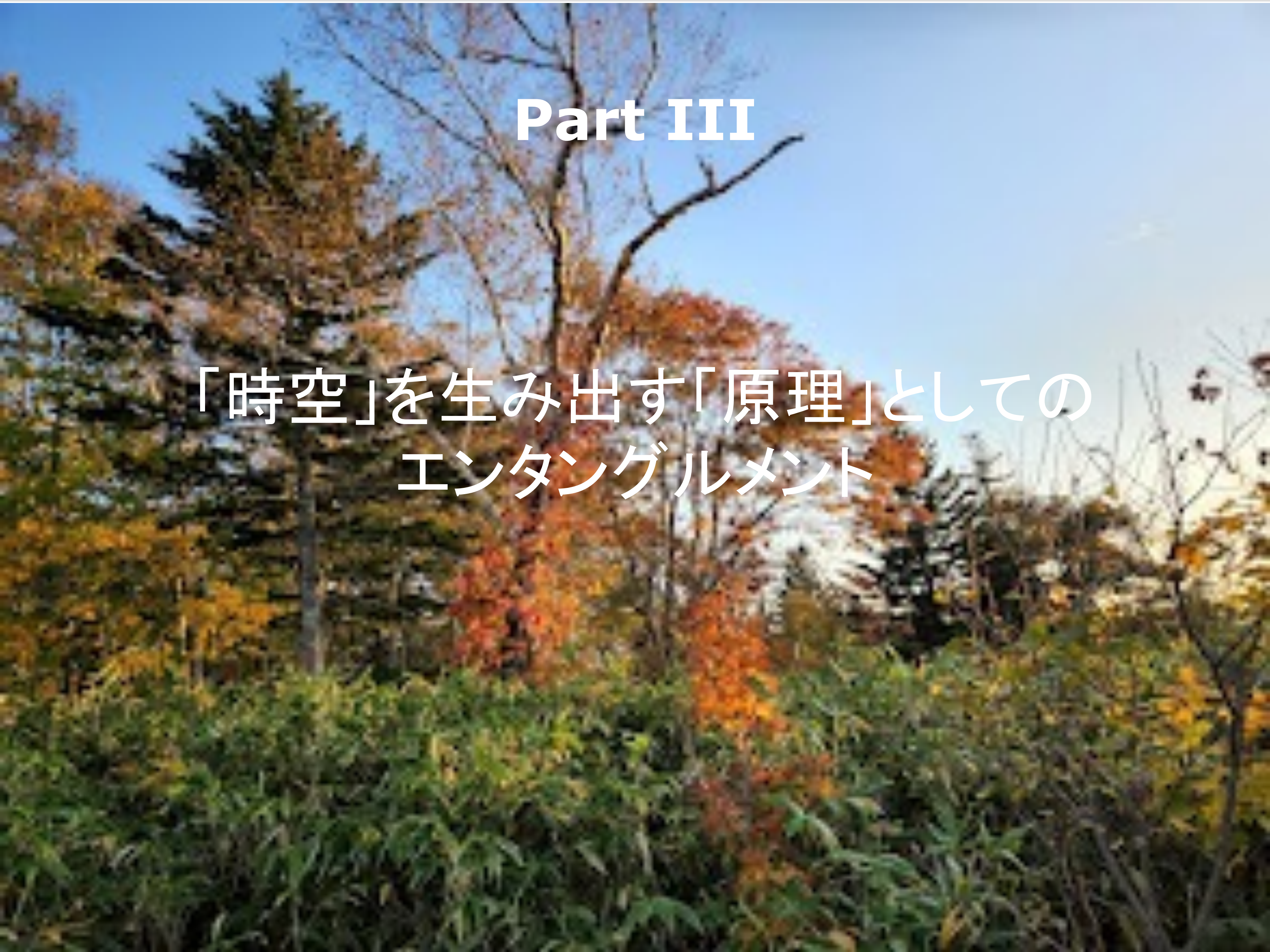
Performers:
Vocal: Joy Rush
Piano: Jack Bowers
Harmonica: George Galt

https://quantumtantra.tumblr.com/post/101941768645/bells-theorem-blues-doctor-bell-say-we

丸山のblogで歌詞を翻訳してみました。
https://maruyama097.blogspot.com/2022/10/blog-post_26.html

Part III

「時空」を生み出す「原理」としての
エンタングルメント



Agenda

エンタングルする自然

-- 「逆理」から「原理」へ --

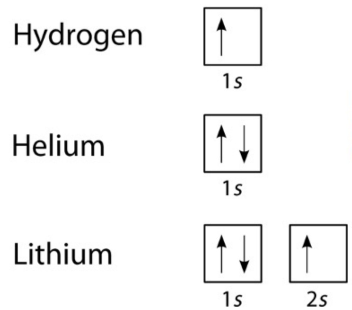
Part III 「時空」を生み出す「原理」としてのエンタングルメント

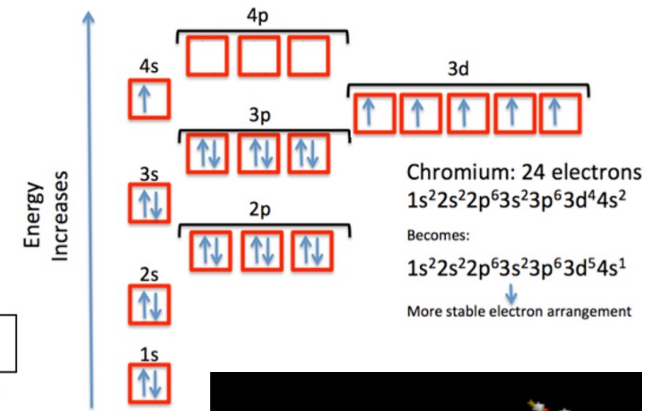
- ブラックホールのエントロピー
- AdS／CFT対応 -- 量子論と相対論の「対応」の発見
- エンタングルメントのエントロピー
- ER＝EPR仮説

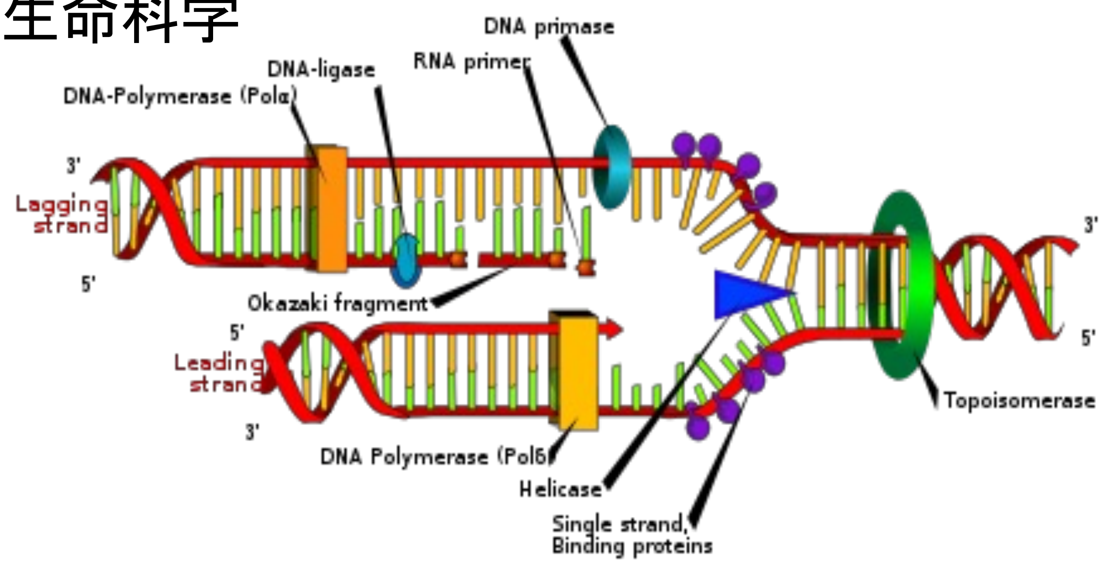

20世紀の自然科学

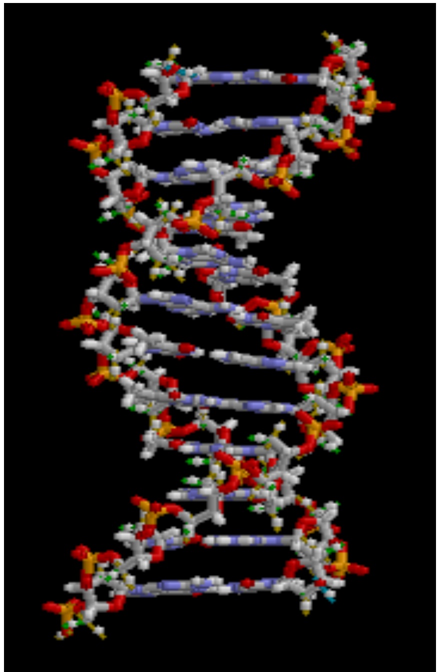
20世紀の自然科学

- 物質科学
  - Pauliの排他原理
  - 量子化学
  - 半導体のバンド構造
  - 半導体技術
  - レーザー技術
- 生命科学

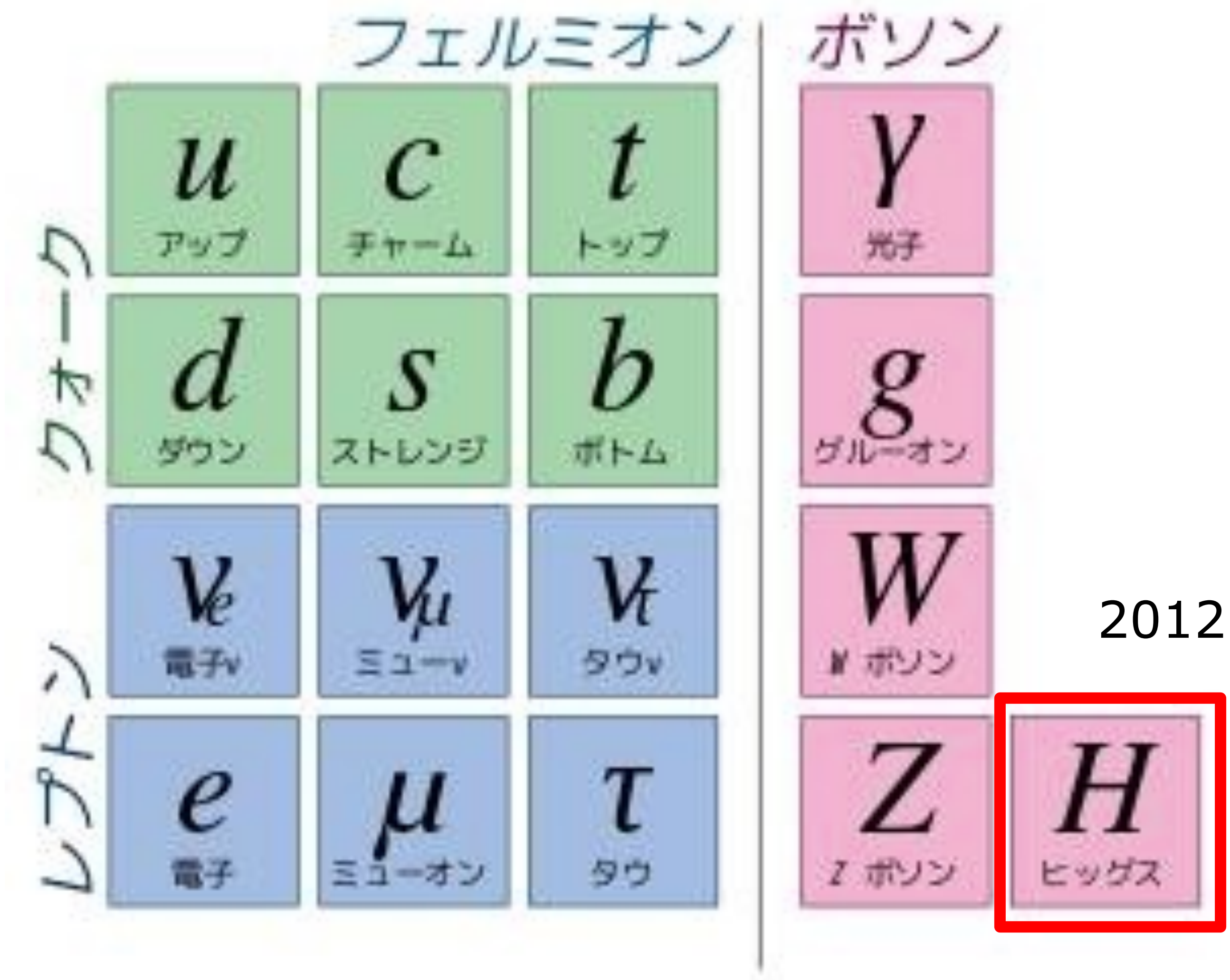






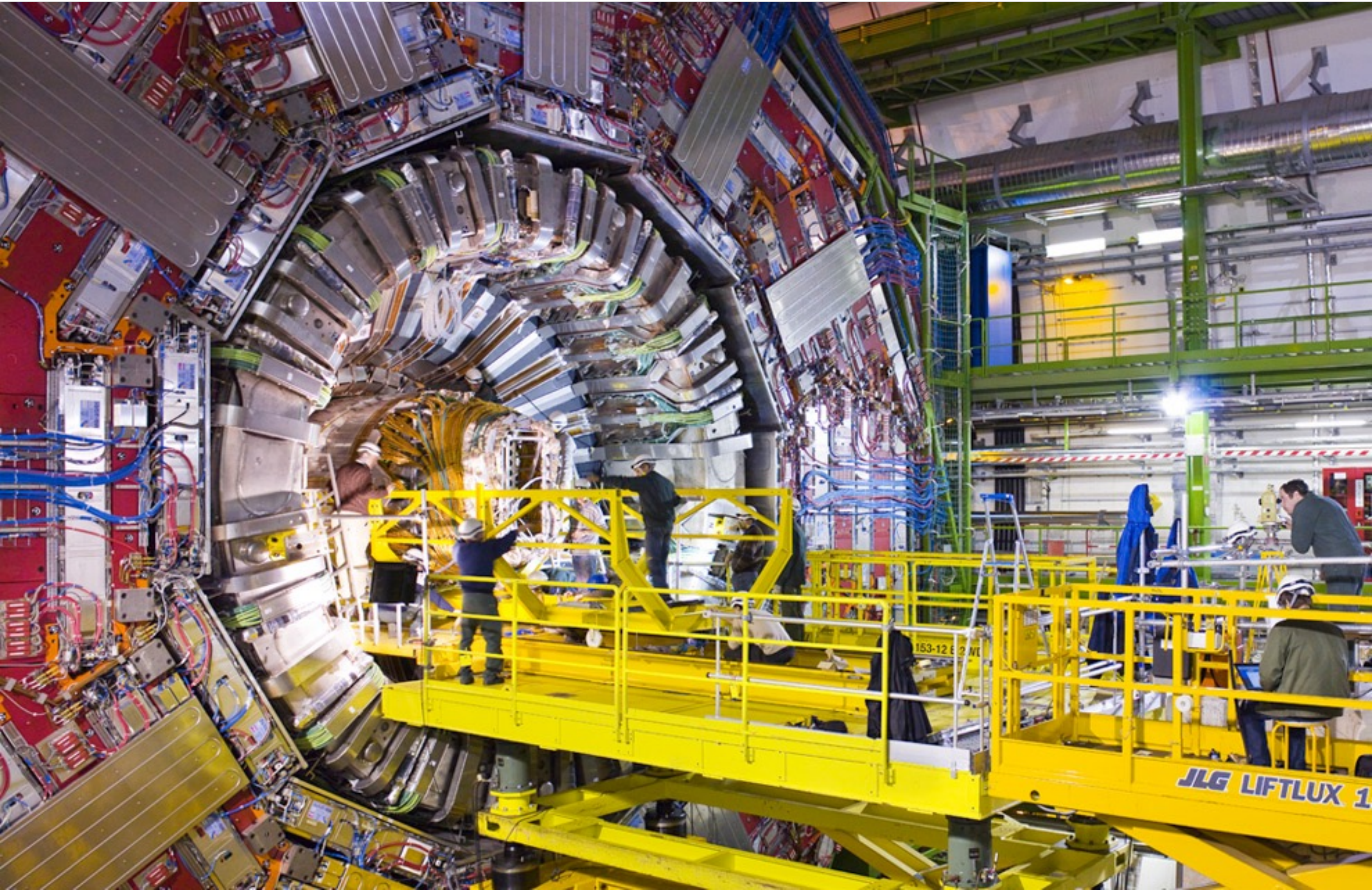


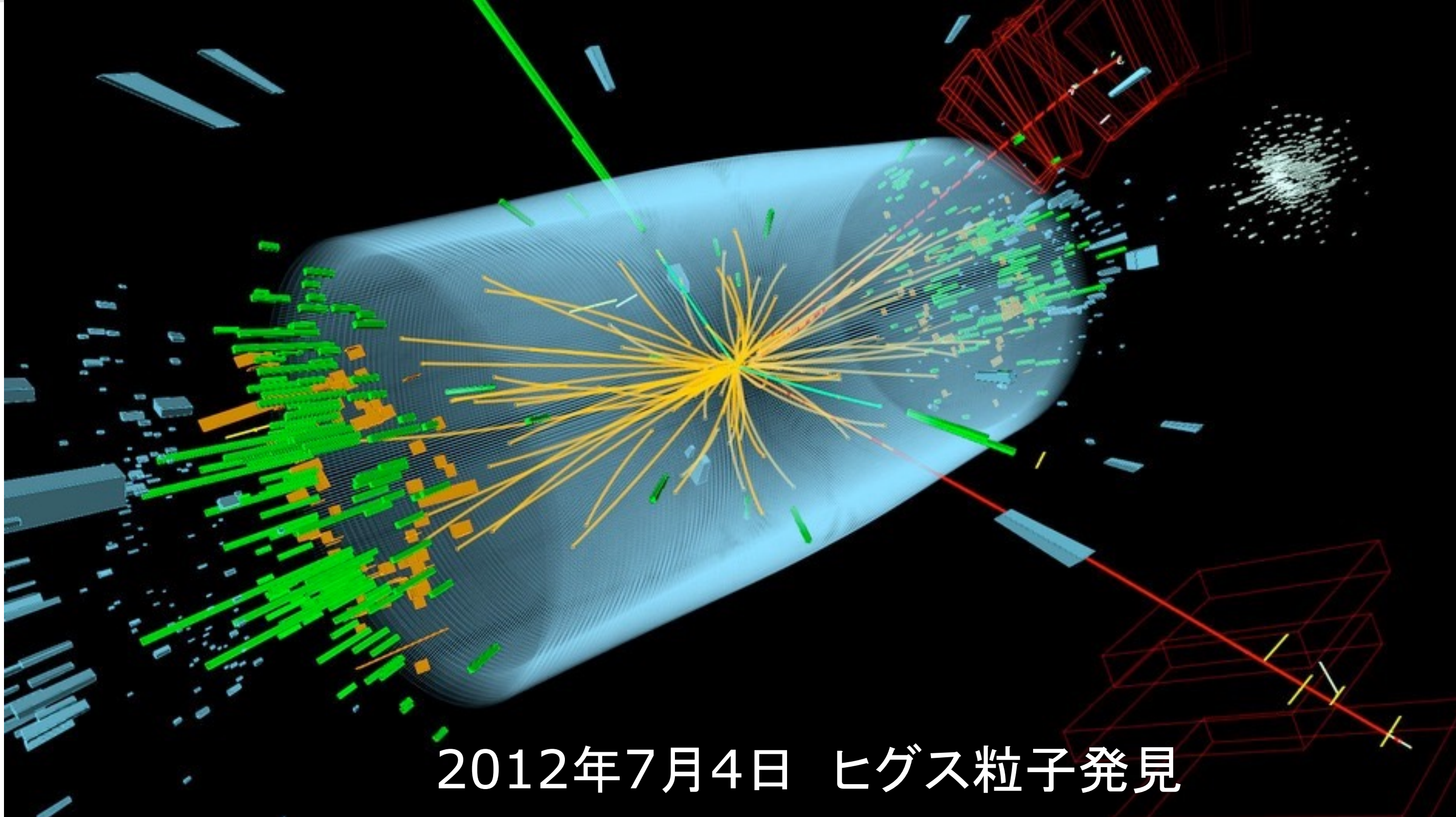
素粒子の標準モデル
1967年 ワインバーグ･サラム



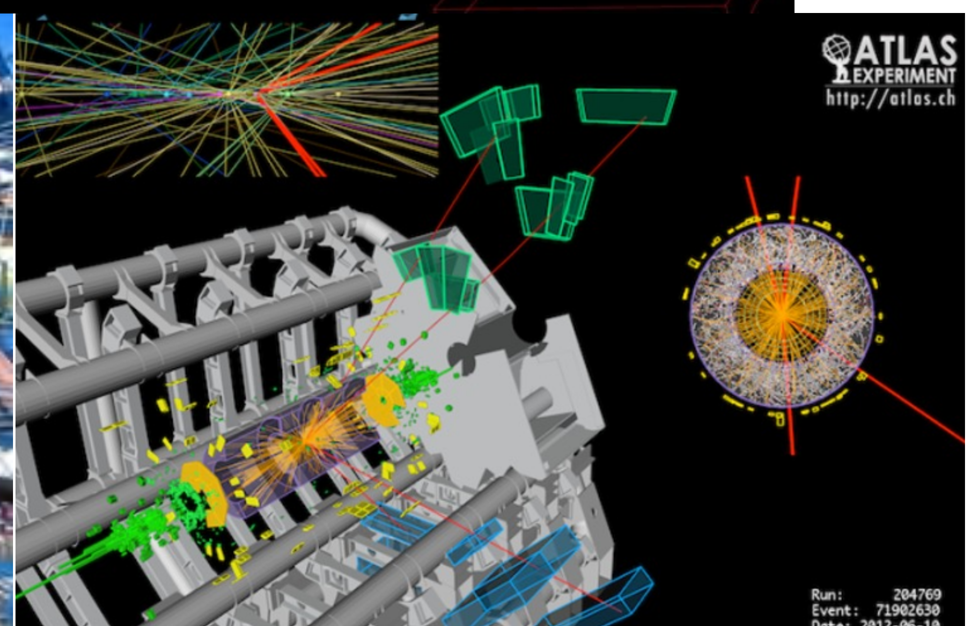
2012年7月4日　発見

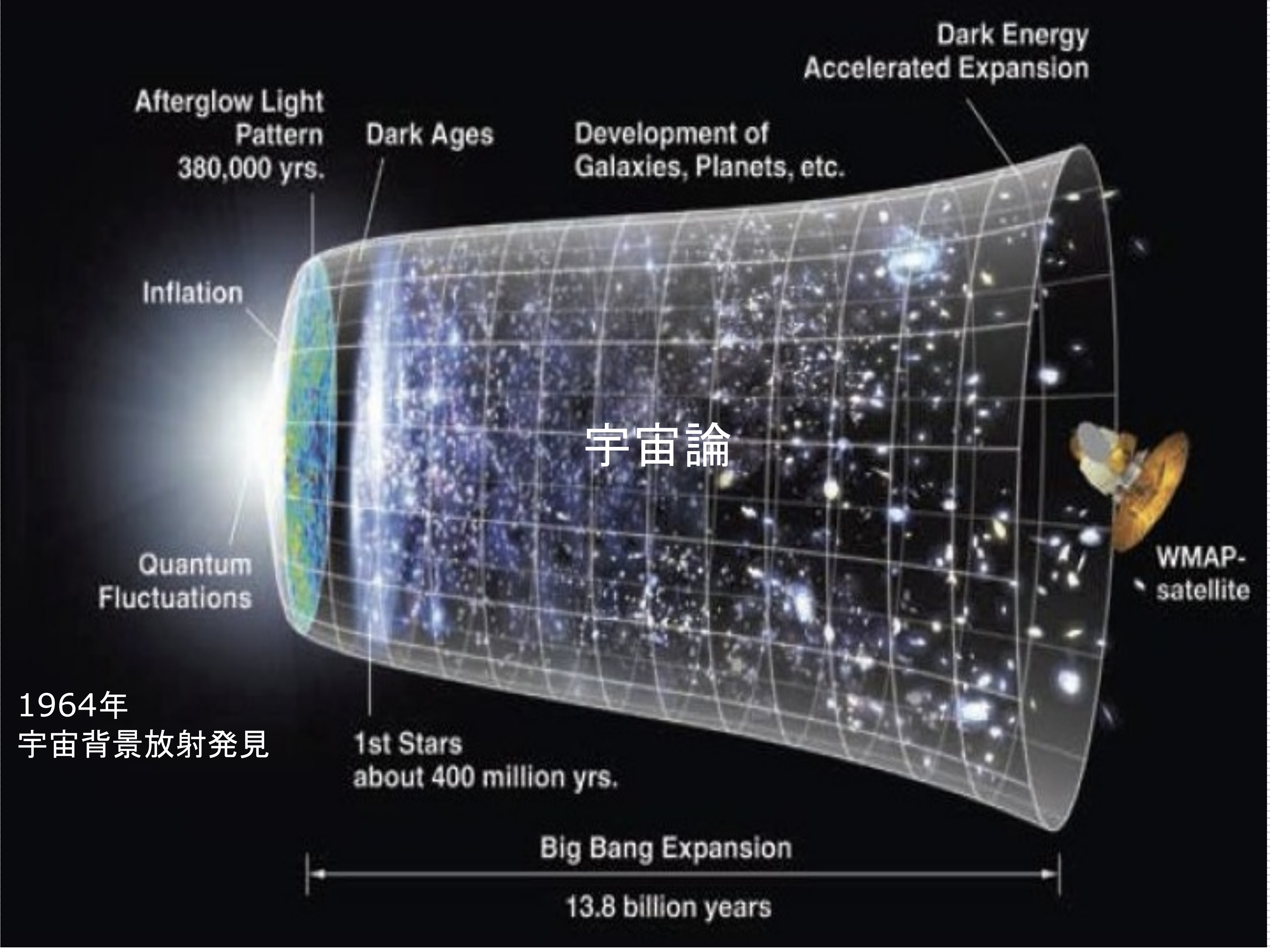
2013年
ノーベル賞
Higgs
Englert


JLG LIFTLUX

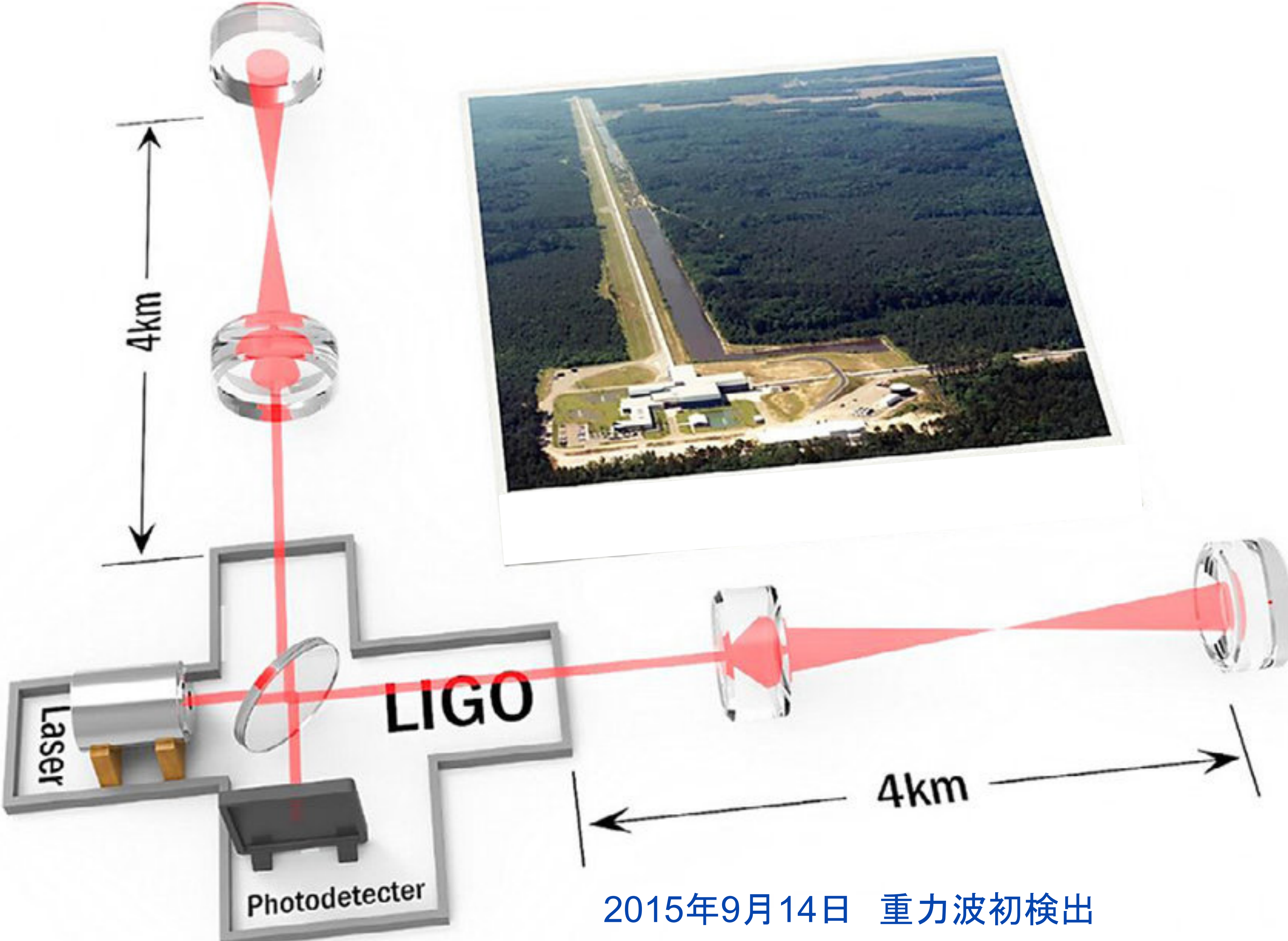


2012年7月4日　ヒグス粒子発見





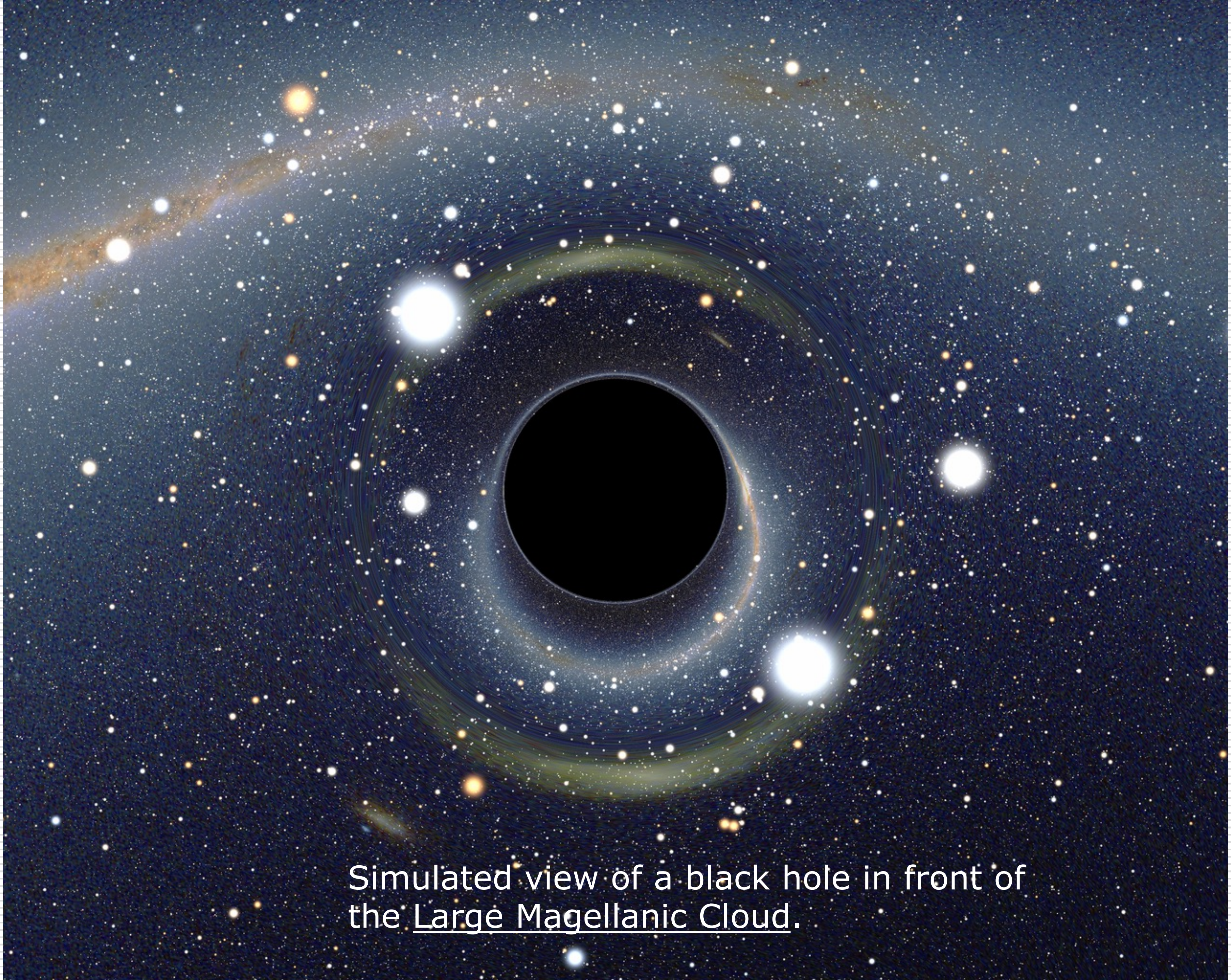
1964年
宇宙背景放射発見



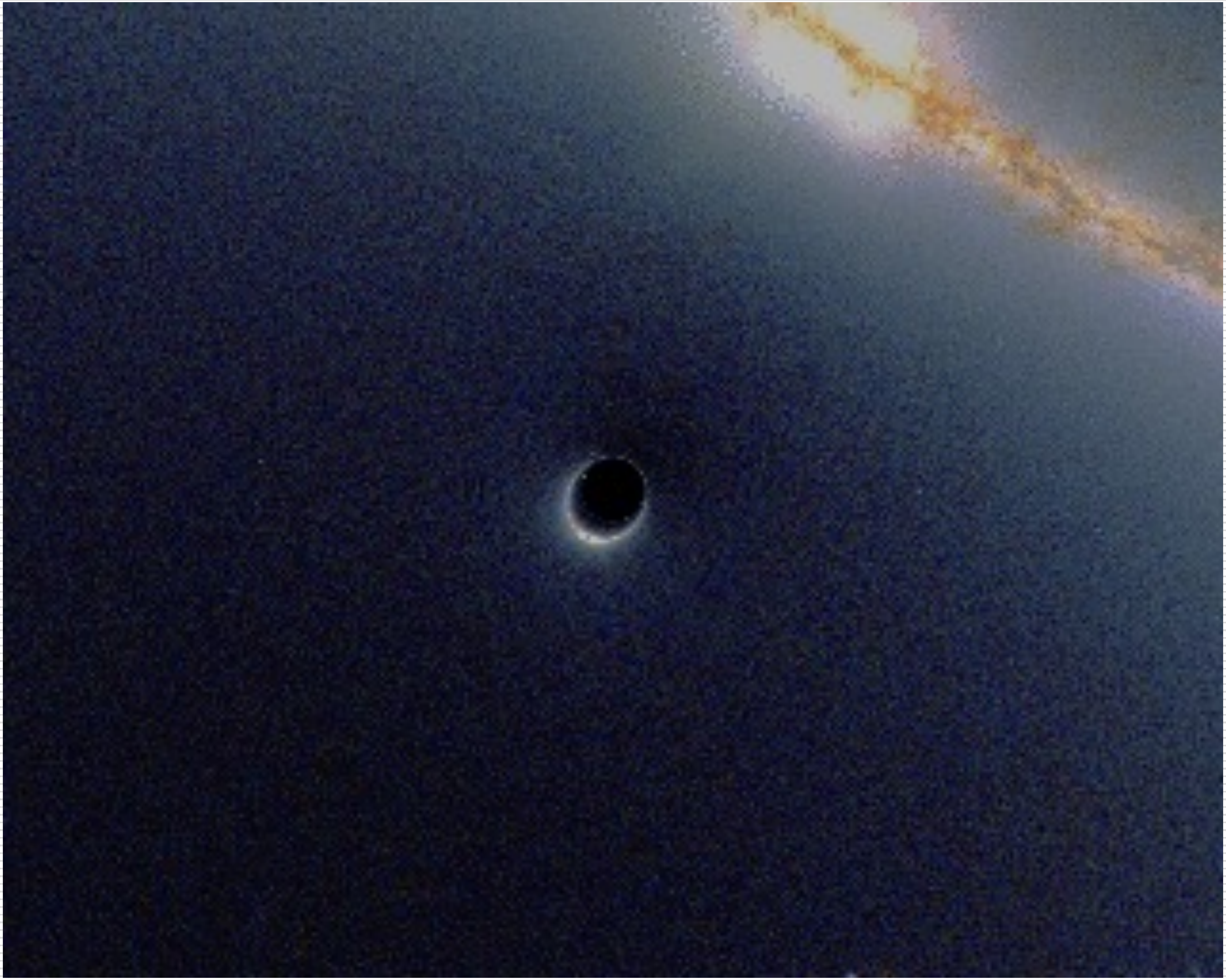
2015年9月14日　重力波初検出

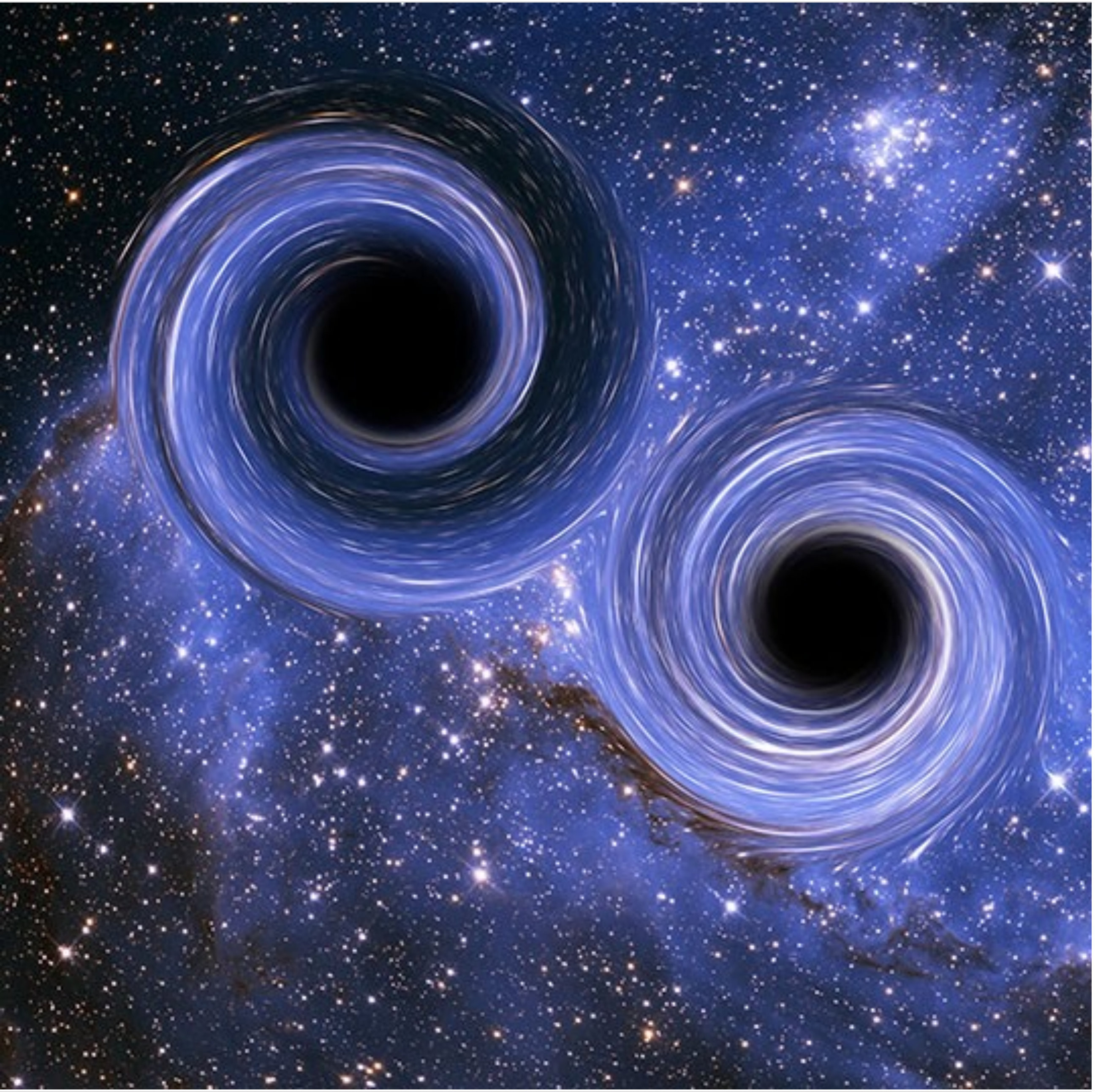
The supermassive black hole at the core of supergiant elliptical galaxy Messier 87, with a mass about 7 billion times that of the Sun,

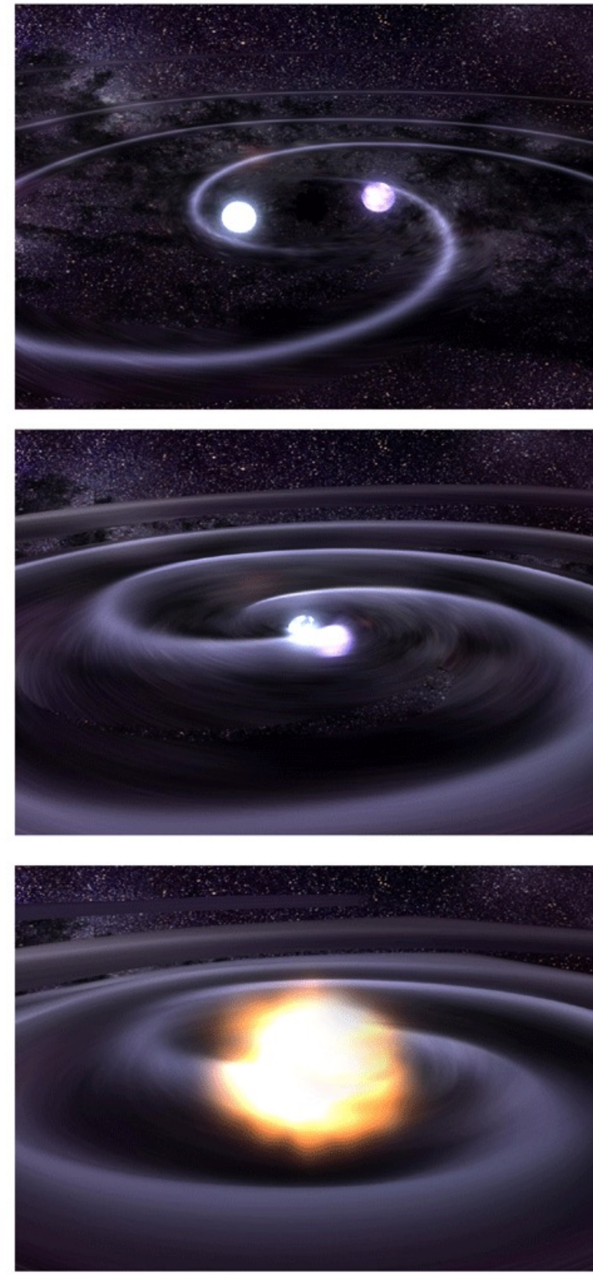
The first false-colour image in radio waves released by the Event Horizon Telescope (10 April 2019)



Simulated view of a black hole in front of the Large Magellanic Cloud.

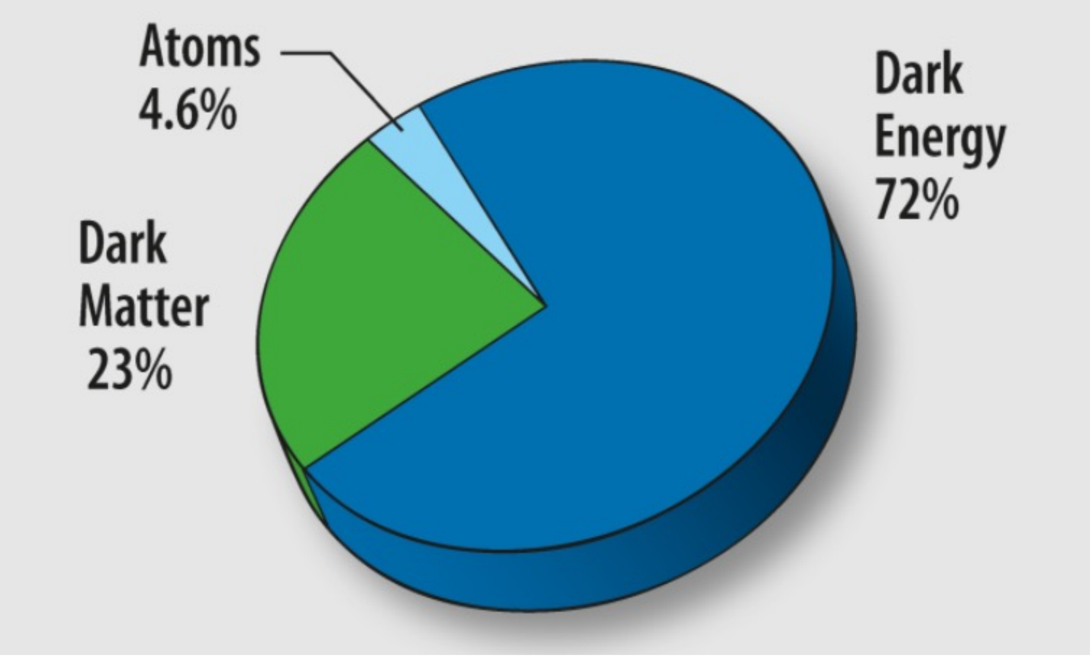




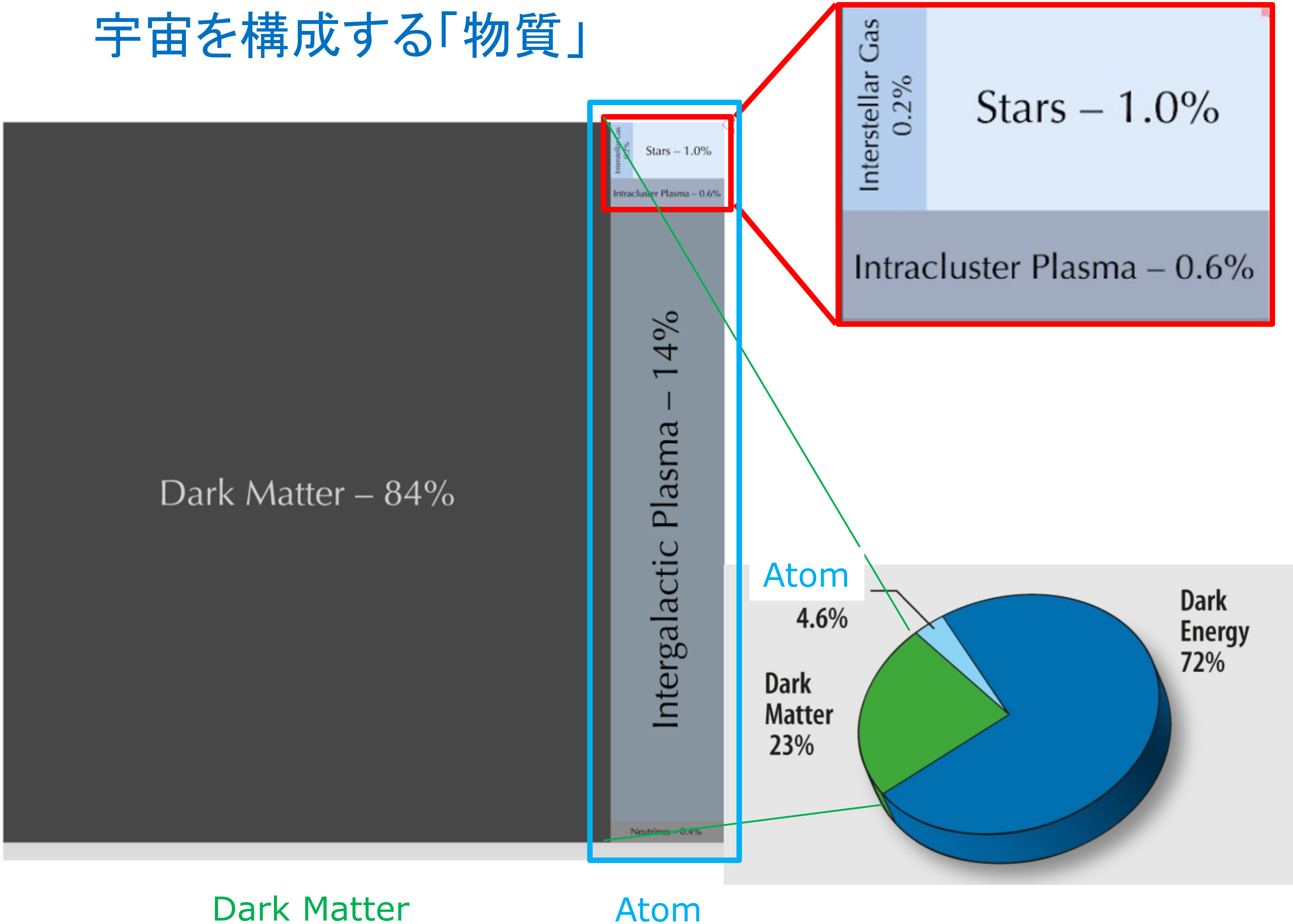


ダーク・エネルギーとダーク・マター

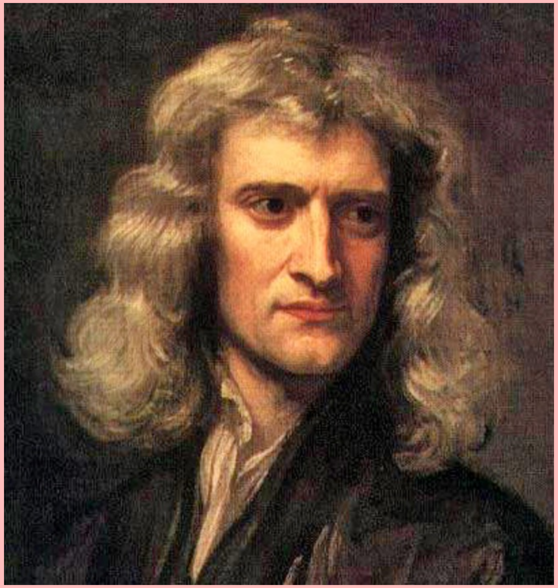
宇宙の「膨張」も、アインシュタインにとっては意外な発見だったが、その後も、宇宙の構成については、意外な発見が相次ぐ。ダーク・エネルギーとダーク・マターの発見である。

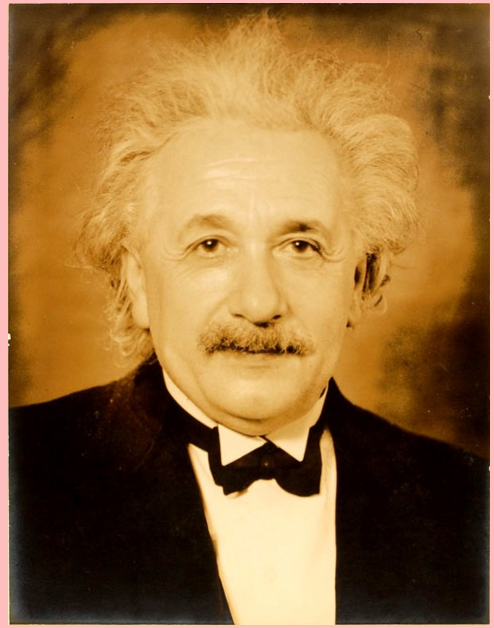


宇宙を構成する「物質」

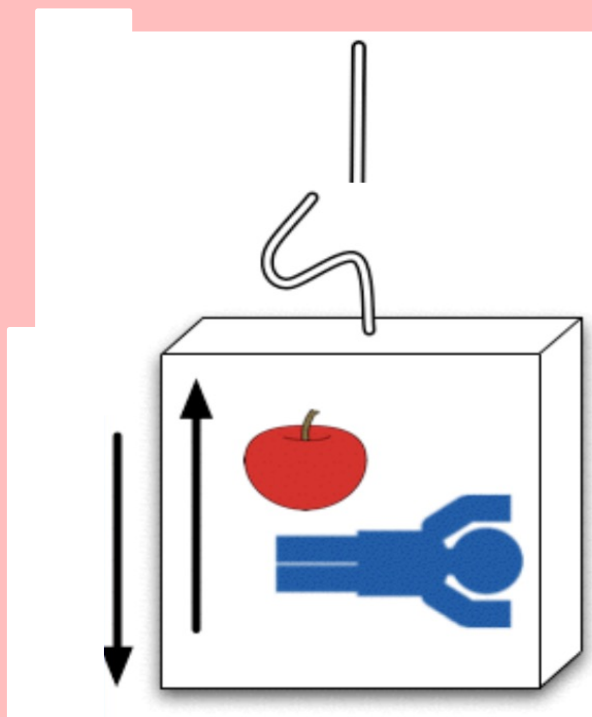

Interstellar Gas 0.2%
Stars – 1.0%
Intracluster Plasma – 0.6%
Dark Matter – 84%
Intergalactic Plasma – 14%
Atom
4.6%
Dark Matter 23%
Dark Energy 72%
Dark Matter
Atom

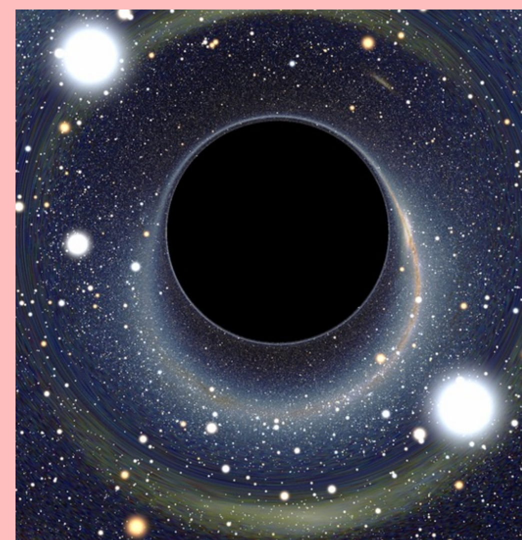

ブラックホールのエントロピー



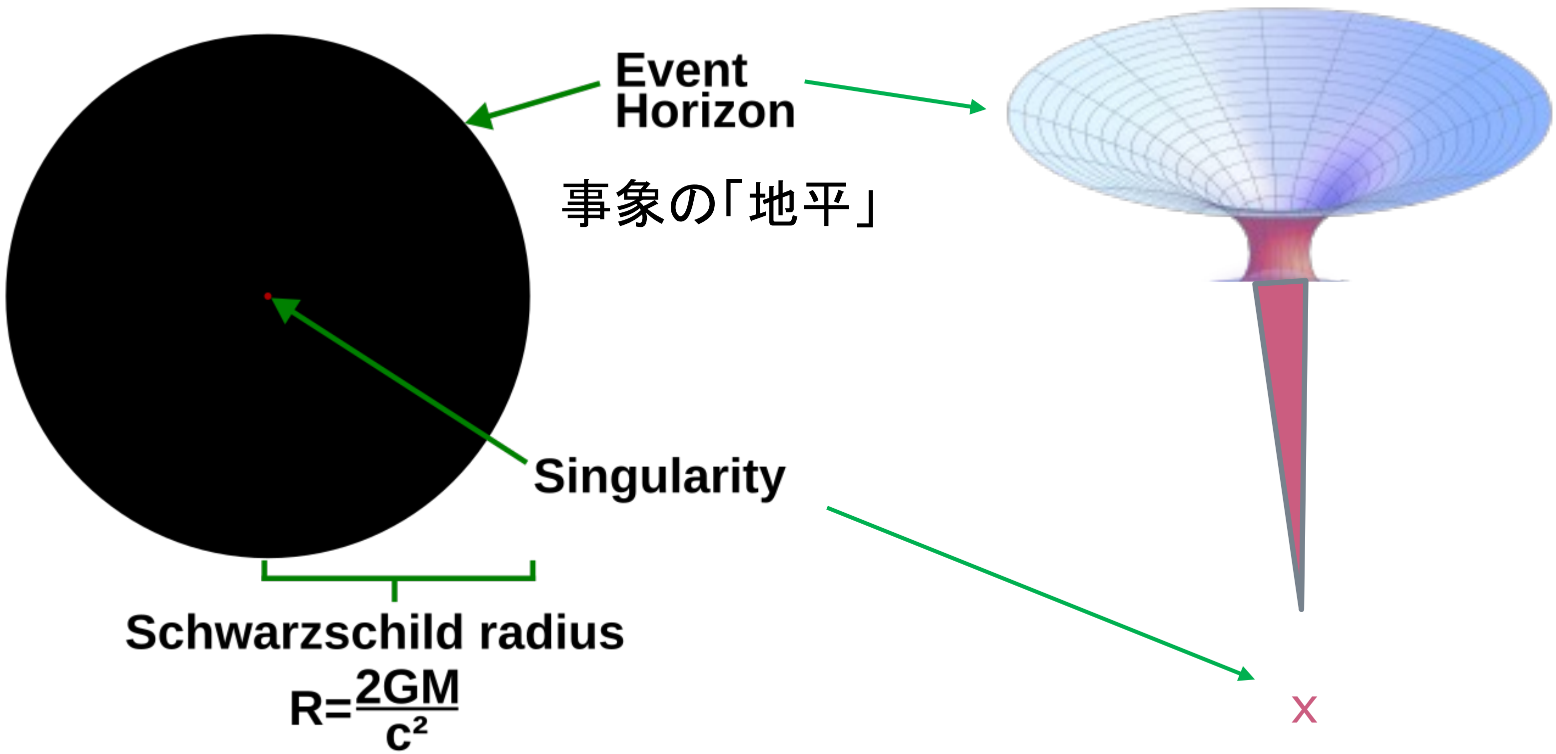


思考実験の舞台

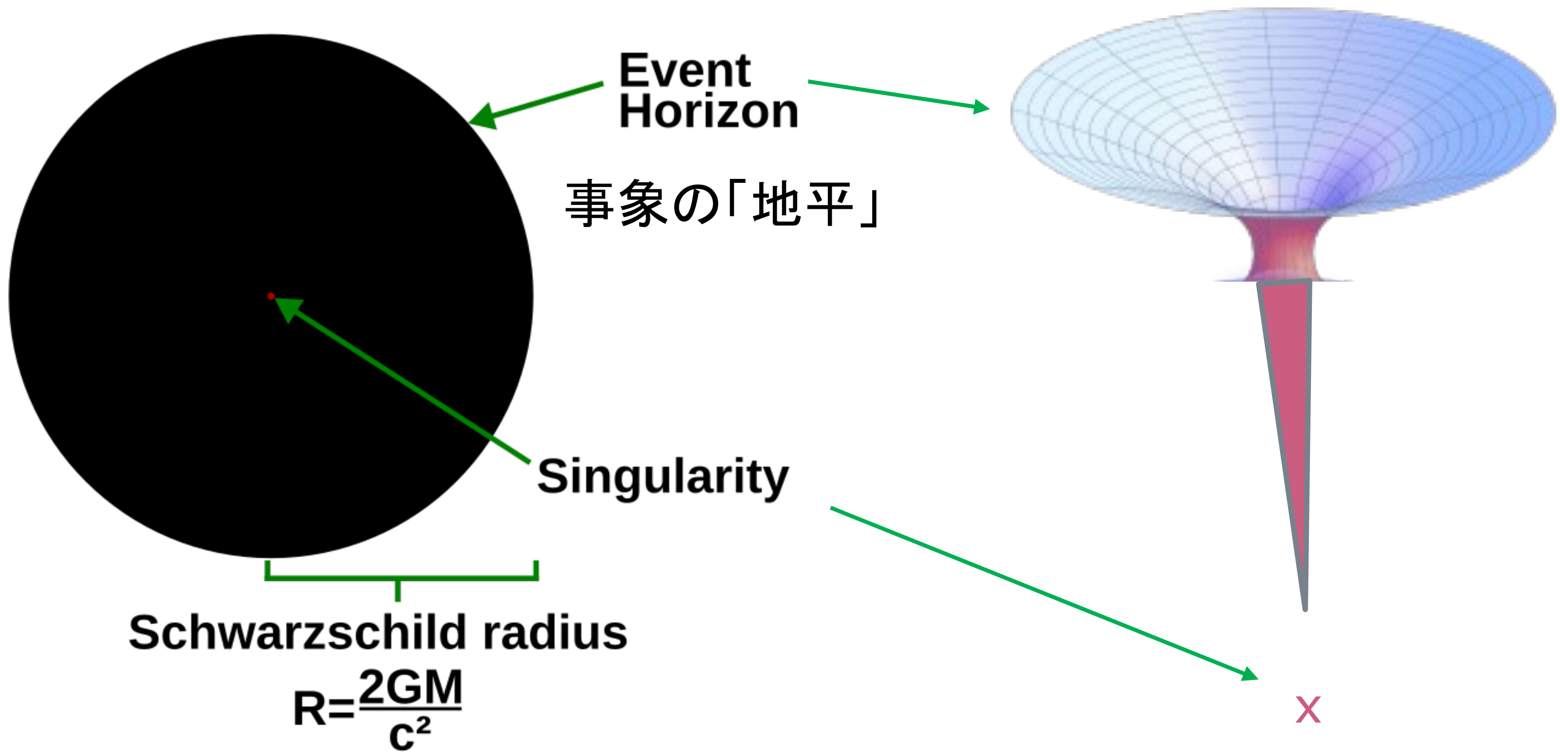




ブラックホールの「地平」とは、その一線を超えると、なにものも（光でさえ！）ブラックホールから脱出できなくなる、ブラックホールを周辺の時空とをへだてる「境界」のことである。

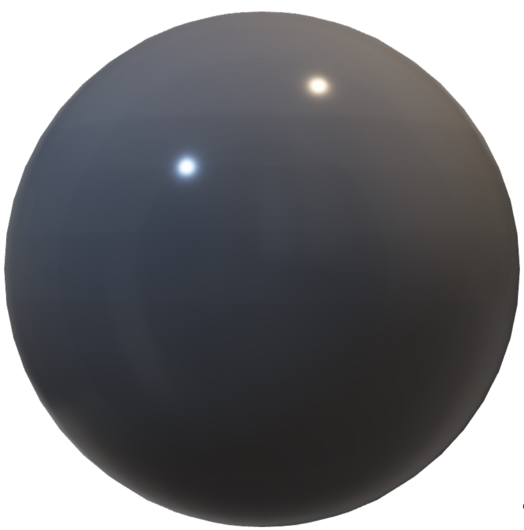


ブラックホールは、観測可能な物理量としては、質量・電荷・角運動量の三つしか持たないと信じられてきた。ブラックホールは、極めて単純な構造の存在で、上の三つの物理量でその特徴を完全に記述できると。それを、物理学者のウィーラーは、「ブラックホールには毛がない」と表現した。（「毛は、三本しかない」という意味）



1973年　ブラックホールのエントロピー

1973年、ベッケンシュタインは、これを覆す発見をする。彼は、ブラックホールが、先の三つの物理量の他に、エントロピー を持つこと、しかも、そのエントロピー S_{BH}が、ブラックホールの「地平」の表面─積Aに比例することを発見する。この比例定数は、ホーキングが 1/4 であることを見出す。



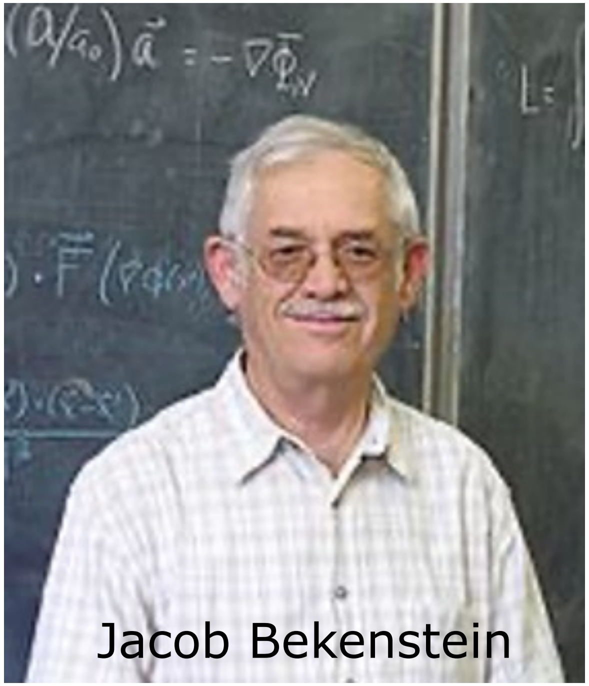
ブラックホールのエントロピー

$$S_{BH} = \frac{A}{4}$$

球の表面積 A=4πr^2

Area則

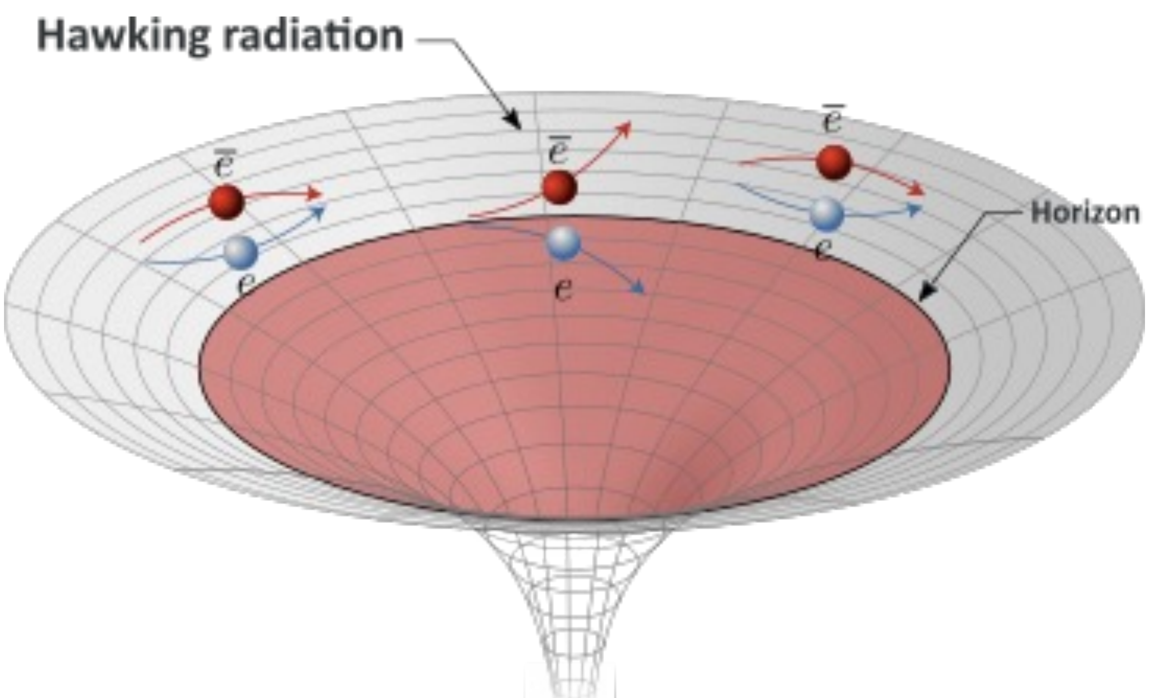
通常、ある空間のエントロピーは、その空間の体積に比例する。ブラックホールのエントロピーが、ブラックホールの体積（質量）ではなく、その地平の面積に比例すると言うのは、少し意外に思われるかもしれない。こうしたタイプの物理法則を「エリア則に従う」という。



Jacob Bekenstein

1974年　ホーキング
ブラックホール輻射とブラックホールの蒸発

1974年、ホーキングはブラックホールの地平周辺で対発生した粒子の一方がブラックホールに落ち込み、他方がそこから抜け出すと、ブラックホールから粒子が飛び出すように見えることに気づく。ブラックホールは、それによってエネルギーを失って、じょじょに蒸発していく。



ブラックホールは、「温度」も持つ

この輻射により、ブラックホールは、温度も持つことになる。ホーキングは、その温度も導出した。ブラックホールは質量*M* が小さければ小さいほど高温であるといえる。とはいえその温度は、例えば太陽の数倍の質量を持つブラックホールの場合、100万分の1 K 程度となり、通常の恒星質量クラスのブラックホールでは宇宙背景放射の温度（3 K）よりもずっと低い。

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 GMk}$$

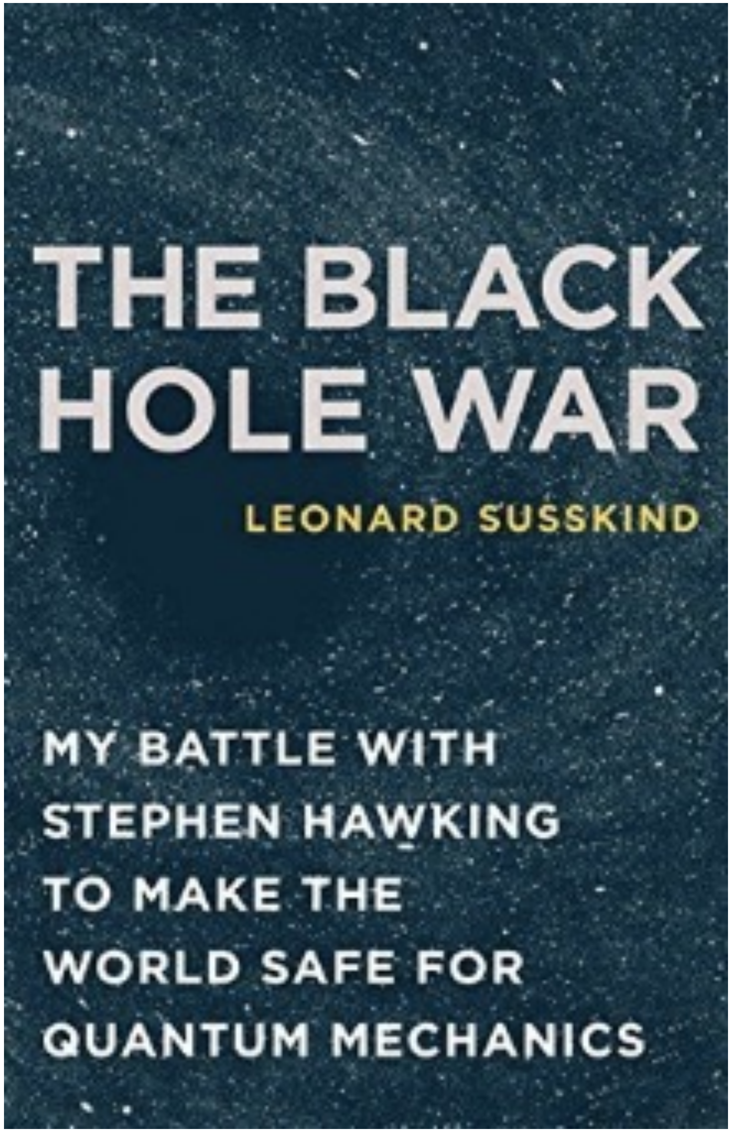
ブラックホールでの情報の消失？

ホーキングは、ブラックホールに落ち込んだ量子の持つ情報は、永久に失われると考えた。

量子論では、量子の状態はユニタリ変換に従って決定論的に変化し、かつ、その変化は、時間の反転のもとで可逆的である。現在の量子の状態から、未来の量子の状態も。過去の量子の状態も、予想することができる。要するに、量子の持つ情報は保存される。

ブラックホールでは、量子の情報は消失するというホーキングの主張は、量子論への新たな挑戦であった。

2008年 by Susskind



サスキンドの計算
ホログラフィー原理

今、ブラックホールに、フォトン（光の粒子）が一個落ち込んだとする。このフォトンは、1bitの情報を持っているとする。

（本当は、フォトン一個は、無数の情報を持ちうるのだが。フォトンの波長を、ブラックホールの地平の半径と同じ程度に広いものにすれば、フォトンの輪郭はぼやけ、それが持つ情報を小さなものにできる）

この時、ブラックホールのエネルギーは、どれほど増えるだろうか？　それは、ブラックホールに落ち込んだ、1bitの情報を運ぶフォトンのエネルギーだけ増える。その量は計算できる。

エネルギーは質量に等しいので、この時、ブラックホールの質量が、どれだけ増えるかがわかる。

ブラックホールの地平の半径Rは、ブラックホールの質量Mで決まる。半径がわかれば、その地平の面積の変化を計算できる。

1bitの情報を持つフォトン一個が、ブラックホールに落ち込むと、ブラックホールの質量は、10^{-45}キログラム増えるという。小数点のゼロの下にゼロが45個並ぶ数だから、普通なら、無視しても構わない変化だ。

この時、地平の半径は、10^{-72}メーター伸びるという。さっきの変化より、もっともっと小さい。普通なら、無視しても構わない変化だ。

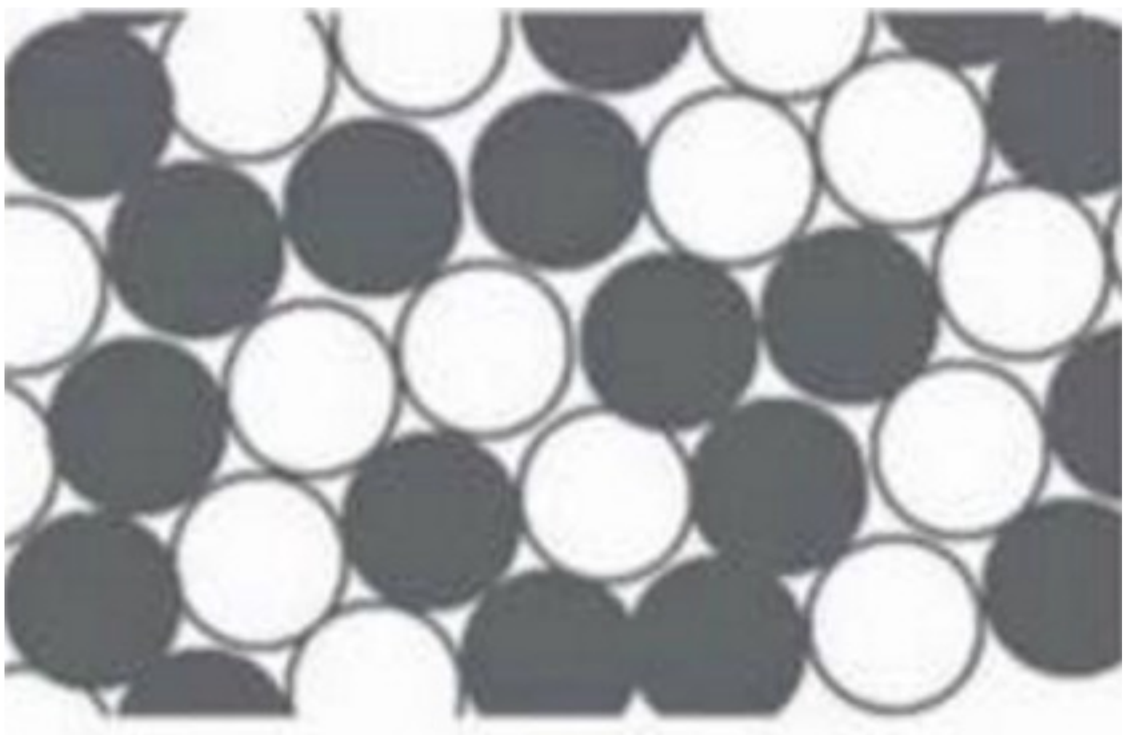
この時、地平の面積は、10^{-70}メーター広くなる。これも、無視して構わない変化だ。

サスキンドは、ここであることに気づく。10^{-70}というのは、プランクの長さ h= 10^{-35}の二乗じゃないか？

そこで、ブラックホールの質量を、いろいろ変えて計算すると、驚くべきことに、どんな質量のブラックホールでも、1bitの情報を持つフォトンが飛び込むと、その地平の面積は h^2 プランク長の二乗分だけ広がるのである！（一部、脚色あり。）

イメージとしては、こういうこと。

ブラックホールの地平が、h x h のマス目で、びっしり埋められているとする。ここに、1bitの情報をもったフォトンが、飛び込むと、新しいマス目が、他を押しのけて一つ増えるということ。なんか、格好いい発見である。



1. 1ビットの情報を追加すると、ブラックホールのエネルギーは、どれくらい増加するのか？　それは、1ビットを運ぶフォトン一つのエネルギーに等しい。
2. 次に、このビットの追加で、ブラックホールの質量は、どう変わるのか？　ここでは、有名なアインシュタインの $E = mc^2$ の式を使う。
3. 質量の変化がわかれば、シュワッルツシルド半径R_sの変化がわかる。

$$R_s = 2MG/c^2$$

4. 最後に、ブラックホールの地平の面積は、次の式で与えられる。

$$\text{地平の面積} = 4\pi {R_s}^2$$

1ビットのフォトンの波長は、ブラックホールの中で、その位置が不確定になるように十分長い波長を持たなければならない。その波長は R_sに等しい。アインシュタイン・プランクの式で、振動数 νの光のエネルギーEは、$E = h\nu$ 、 $\nu R_s = c$だから（波の速さ＝振動数 x 波長）、そのフォトンのエネルギーは、次の式で表される。

$$E = hc/R_s$$

$E = mc^2$だから、このエネルギーが与えられた時の質量の変化は、エネルギーをc^2で割ったもの。

$$\text{質量の変化} = h/R_s c$$

太陽と同じくらいの質量のブラックホールのシュワルツシルド半径 R_sは、3,000メーター程度。光のスピード $c = 3x10^8$メーター。プランクの定数 $h = 6.6x10^{-34}$だから、1ビットの情報が、太陽程度の質量を持つブラックホールに落ちた時の質量の変化は、とても小さい。

$$\text{質量の増加} = 10^{-45}\text{キログラム}$$

先の質量と半径の関係を使えば、

$$R_s\text{の増加} = 2MG/c^2 = 2(h/R_s c)G/c^2 = 2hG/(R_s c^3)$$

これは、10^{-72}メーターの変化。
この時の面積の増加は、10^{-70} 平方メーター。

ブラックホールのエントロピーは、bitで計測すれば、プランクの面積単位で計測した地平の面積に比例する。

情報とは、面積である。

温度は、1bitの情報が追加された時の、システムのエネルギーの上昇である。

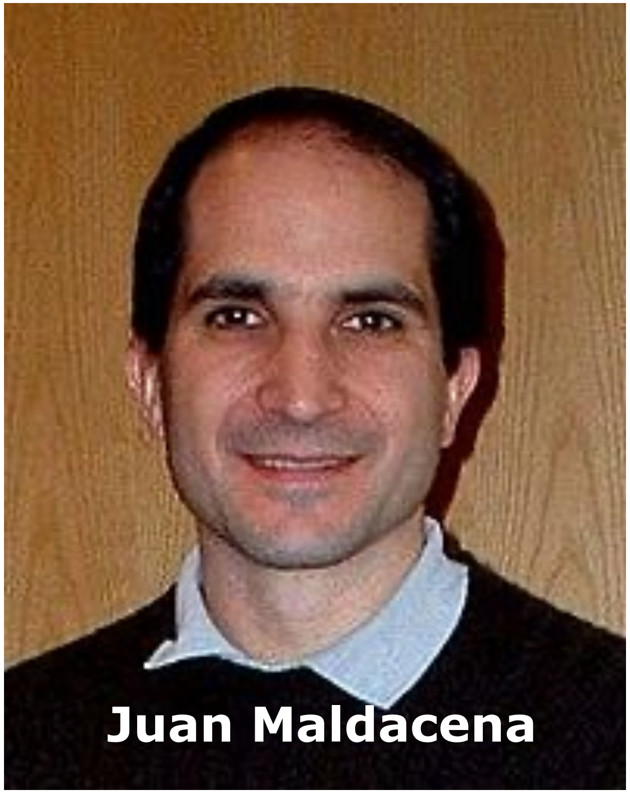
https://maruyama097.blogspot.com/2017/09/blog-post_16.html

ホログラフィー原理

「ある空間Mの重力理論は、その境界 ∂Mにおける、重力を含まない場の理論と等価である。」

‘t Hooft , Susskind

AdS/CFT 対応
1997年



新しい情報 / エネルギー観

落ち込んだフォトンの情報は、地平の平面にへばりつくのだ。

これは、「ブラックホールのエントロピーは、地平の面積に比例する。」という、ベッケンシュタインの重要な発見を説明し、さらに詳しく言い換えたものだ。

「ブラックホールのエントロピーは、bitで計測すれば、プランクの面積単位で計測した地平の面積に比例する。」

「温度とは、1bitの情報が追加された時の、システムのエネルギーの上昇である。」

これは、19世紀のボルツマン、20世紀のシャノンを超える、おそらく、21世紀の科学を特徴付ける、新しい 情報 / エネルギー観である。

AdS/CFT 対応

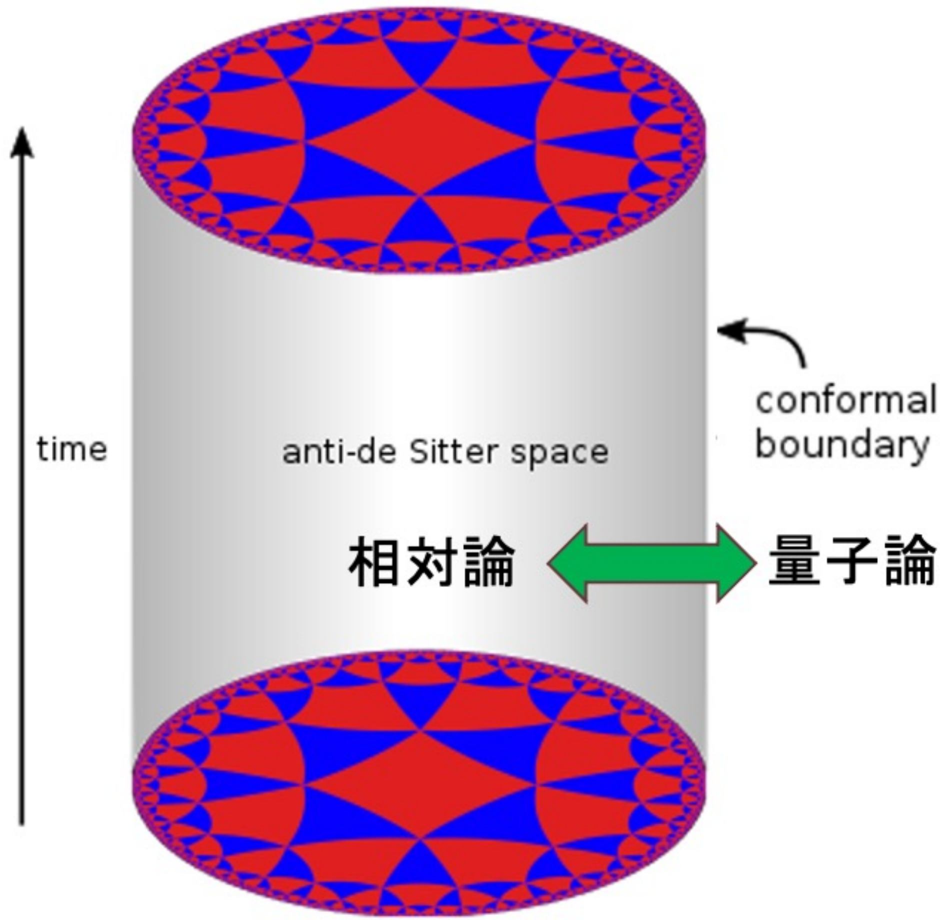
1997年 AdS/CFT対応

20世紀も終わりの1997年、マルデセーナは21世紀の物理学の扉を開く重要な発見をします。

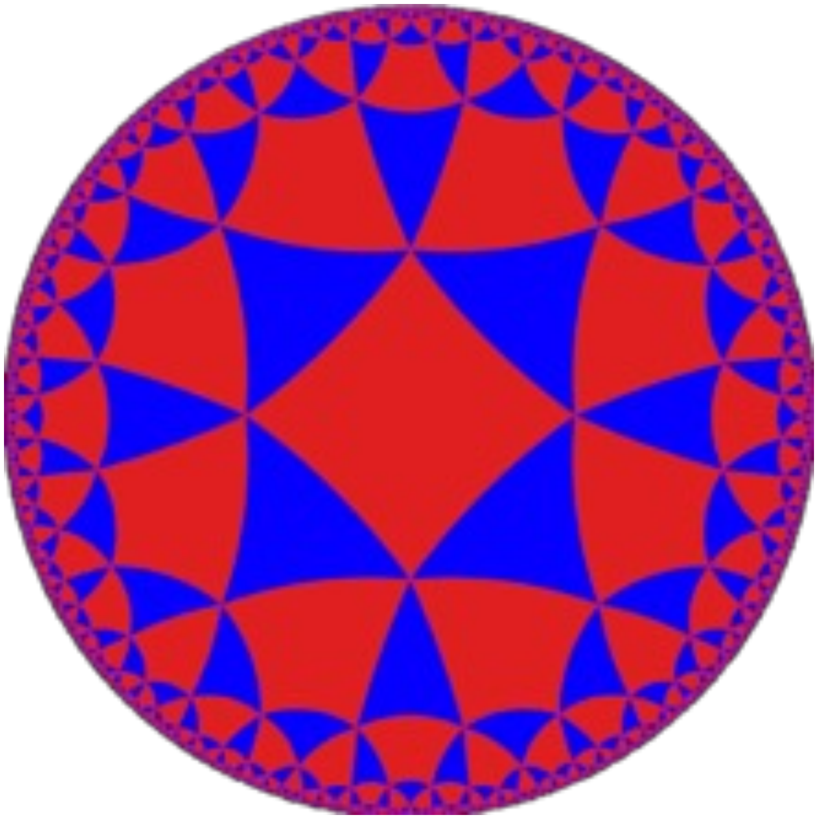
それは、d+1次元の時空を記述する重力理論AdS(Anti-de Sitter Space)と、d次元の場の量子理論CFT(Conformal Field Theory)が「対応」していることの発見です。この対応を「AdS/CFT対応」と言います。

この「対応」では、重力理論が d+1次元で量子論がd次元なので、相対論（重力理論）と量子論の次元が一つずれていることに注意してください。スープの入った缶詰で例えて言えば、相対論は缶のない中身のスープの理論で、量子論はスープのないスープをつつむ缶の理論だと言うことになります。

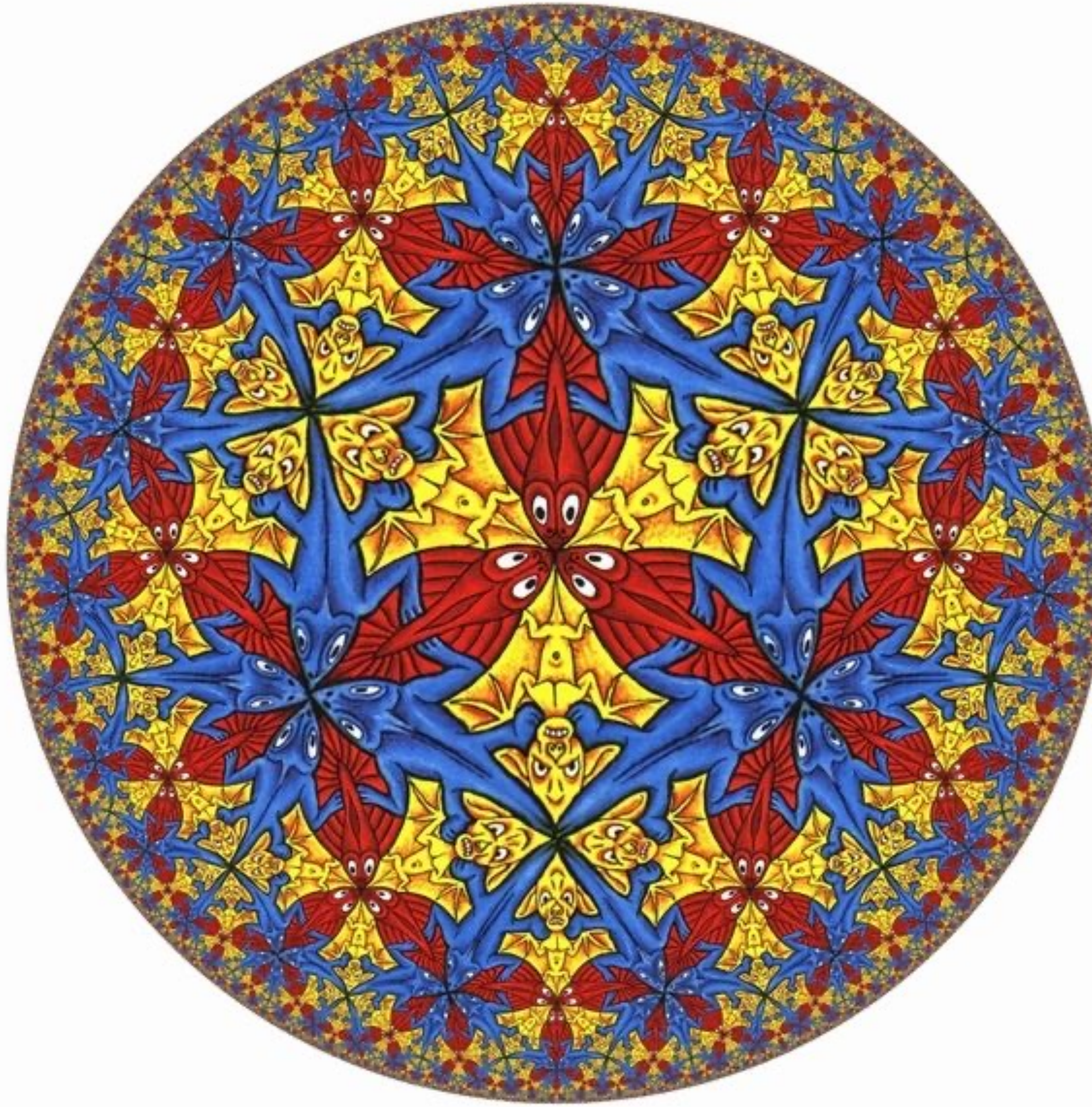
AdS/CFT対応

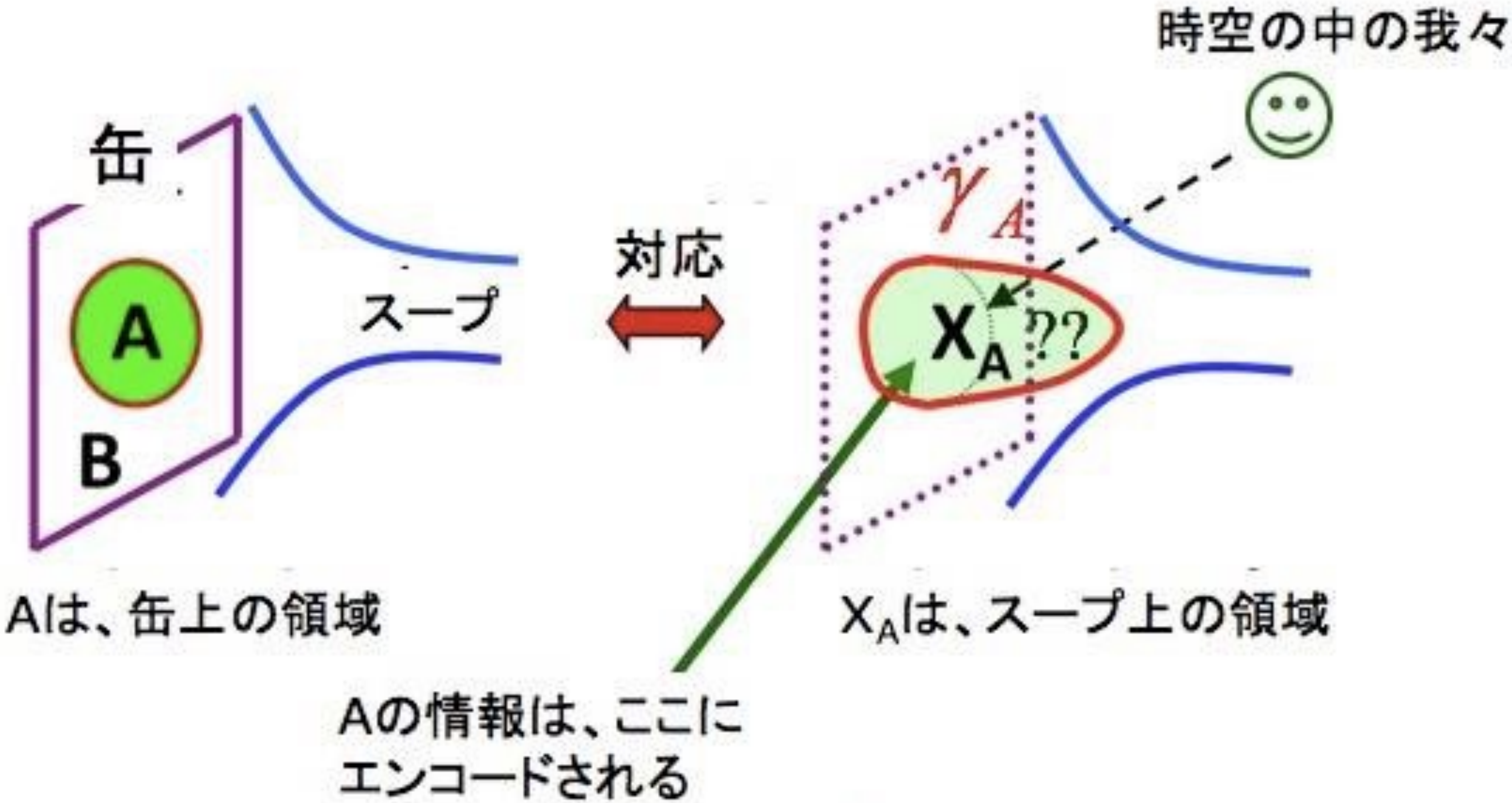

time
anti-de Sitter space
conformal
boundary
相対論
量子論


Campbell's
CONDENSED
TOMATO
SOUP




85




時空の中の我々
缶
A
B
スープ
対応
γ_A
X_A
??
Aは、缶上の領域
X_Aは、スープ上の領域
Aの情報は、ここに
エンコードされる

このことは、20世紀の多くの物理学者の努力にもかかわらず、相対論と量子論の「統一」の試みが成功しなかった理由を、ある意味で説明する。

二つの理論は、棲んでいる世界の次元が違うのだ。
ブリキの缶の外側をいくらなぞっても、スープのことはわからないし、逆に、いくらスープを舐めても、缶のことはわからないのと同じである。

それにもかかわらず、重要なことは、二つの理論には「対応」が存在すると言うことである。マルデセーナの発見したのは、

「スープと缶は、無関係ではなく関係がある。」
「缶を調べれば、スープのことがわかり、スープを調べれば缶のことがわかる！」ということ。

それは、文字通り、相対論と量子論の二つの理論の「接点」の発見だった。重力理論（スープ）に「境界」を接して量子論（缶）が、棲んでいたのだから。これは、「境界」の重要性の発見でもあった。

「AdS/CFT対応」も、二次元の画像で三次元の立体像を投影するホログラムにたとえて、「ホログラフィー原理」と呼ぶことがある。
トフート、サスキンドの「ホログラフィー原理」の一般化である。


エンタングルメントのエントロピー

2006年　笠と高柳 エンタングルメントのエントロピー
“Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT”

マルデセーナの量子論と相対論（重力理論）の「対応」の発見をきっかけに、エンタングルメントの理解は、飛躍的に深まります。突破口を開いたのは、二人の日本人、笠真生と高柳匡だった。

「「時空」が、二つの部分 AとBに別れているとする。AとBの「境界部分」は、「時空」の「境界」なので、マルデセーナの理論にしたがって量子論で記述できるはず。」
「やってみたら、この「境界」は、なんと、量子論の「エンタングルメント」のエントロピーに対応するんだ！」

笠-高柳によるエンタングルメントがエントロピーを持つことの発見(2006年)は、先に見たベッケンシュタインのブラックホールがエントロピーを持つことの発見に匹敵する重要な発見だった。

2010年　Raamsdonk
“Building up spacetime with quantum entanglement”

笠-高柳の発見に刺激されて、ラムズダンクが続く。彼は、こう考える。（2010年）

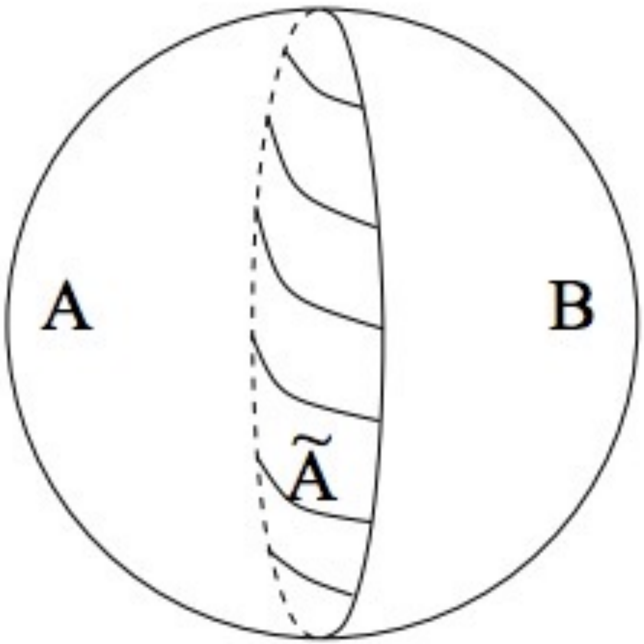
「二つの時空 A, B があったとする。二つの時空を、引き離してみる。そうすると、「境界面」の面積は減少する。これは、二つの時空が離れれば離れるほど、エンタングルメントのエントロピーが減ることを意味している。このエントロピーがゼロになった時、二つの時空は、引きちぎられる。」

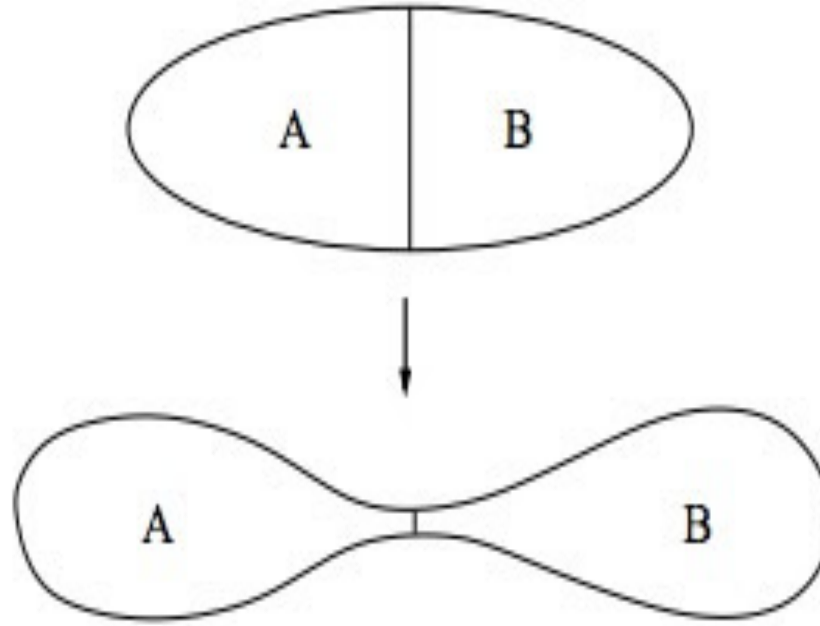
「そうだ！　逆に考えればいいんだ。時空を結びつけているのは、エンタングルメントなんだ。エンタングルメントのエントロピーが、時空を縫い合わせているんだ！」

ここでは、二つの量子の奇妙なもつれあいとして発見されたエンタングルメントが、時空を結び合わせる「原理」として、見直されている。。

笠-高柳

ラムズダンク

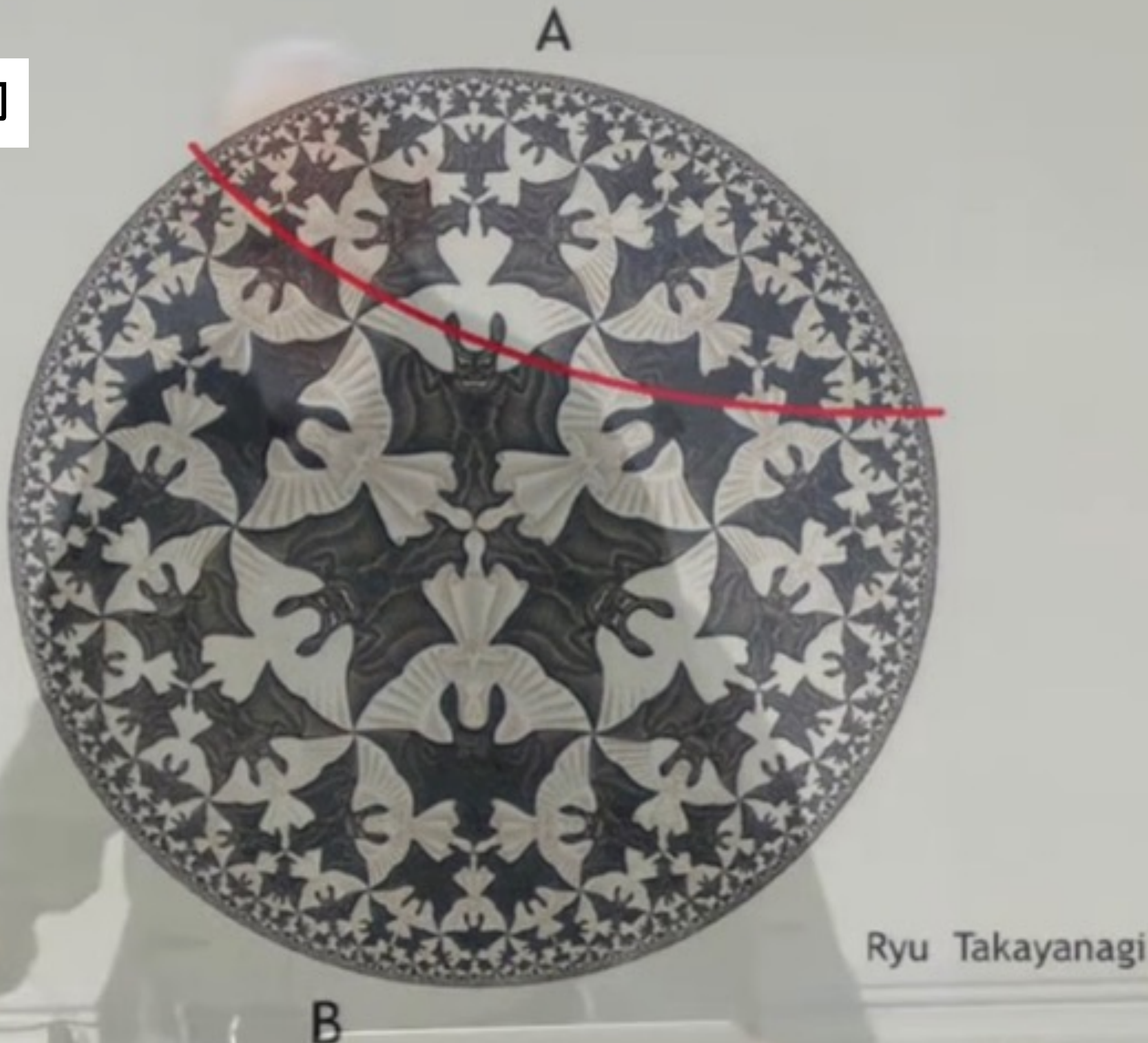




時空 A, Bの境界の量子論を考えるとエンタングルメントのエントロピーが出てくる

時空 A, Bを引き離すと、境界の面積、すなわち、エンタングルメントのエントロピーは減少する。

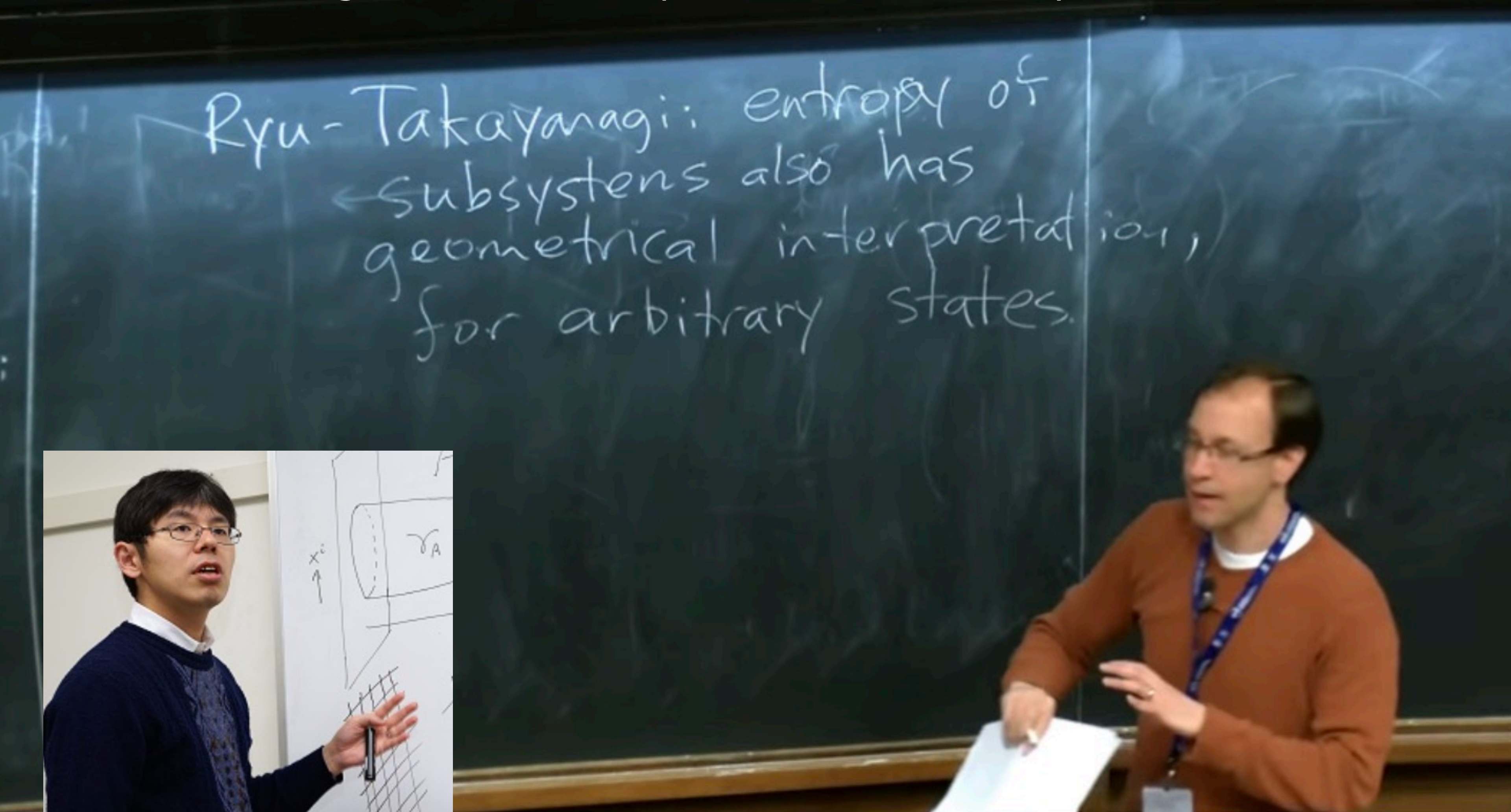
笠-高柳



ラムズダンク

Van Raamsdonk

Ryu-Takayanagi: entropy of subsystem also has geometrical interpretation for arbitrary state



Tadashi Takayanagi

Van Raamsdonk

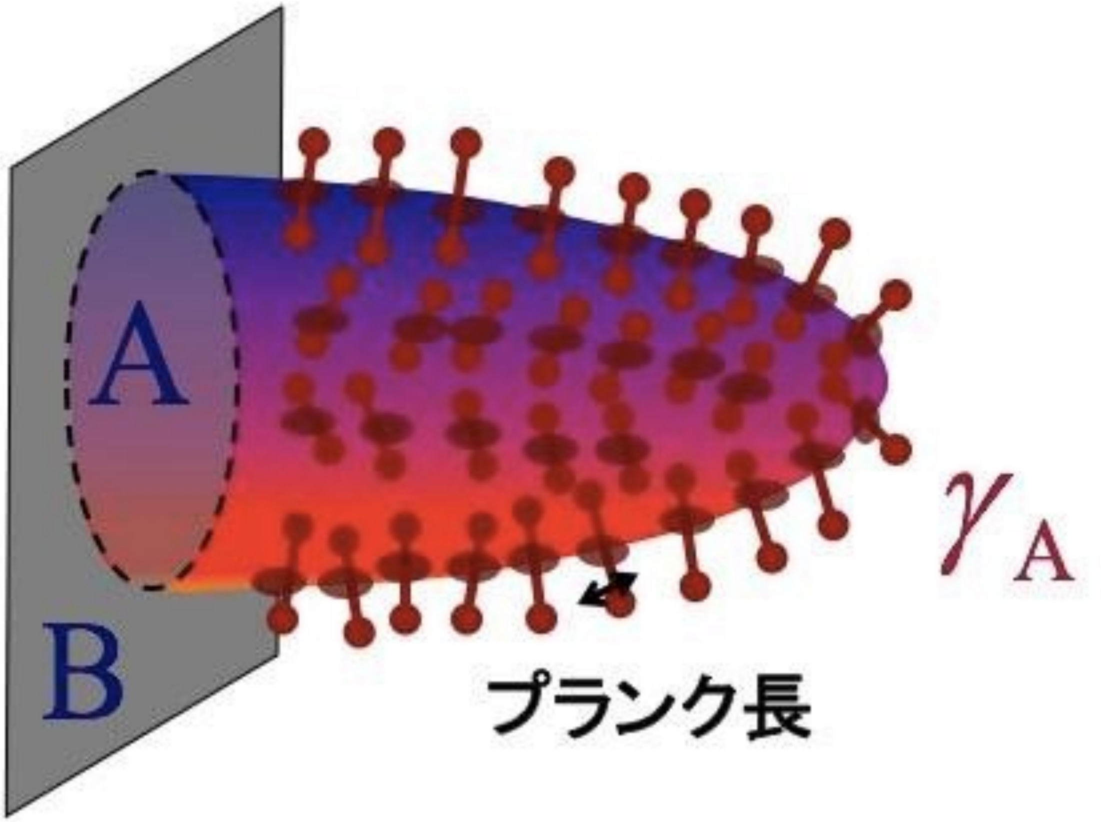
Ryu + Takayanagi: this result can be represented geometrically.

AdS時空（二次元）

区間Lと同じ境界を持つ最小の長さの曲線

$$\text{length} = \frac{c}{3}\ln\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$$

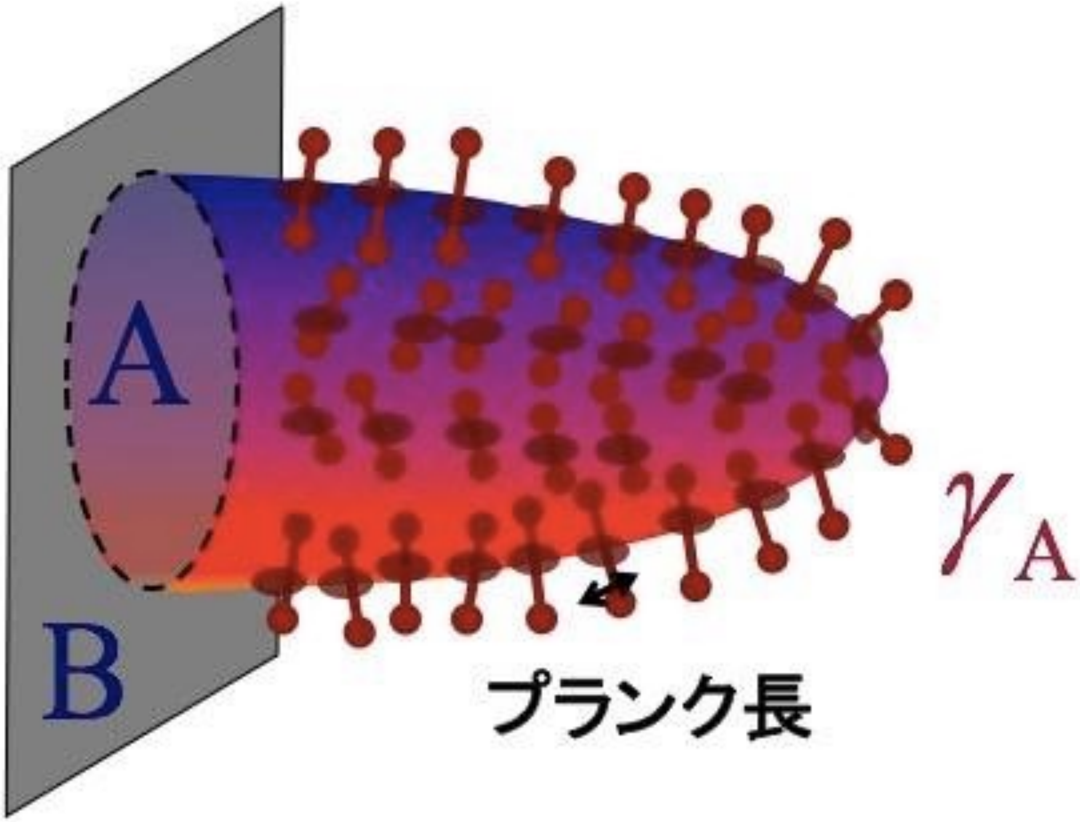
γ_A　AdS時空での面積を最小にする曲面（極小曲面）



$$S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \approx \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{l_{pl}^2}.$$

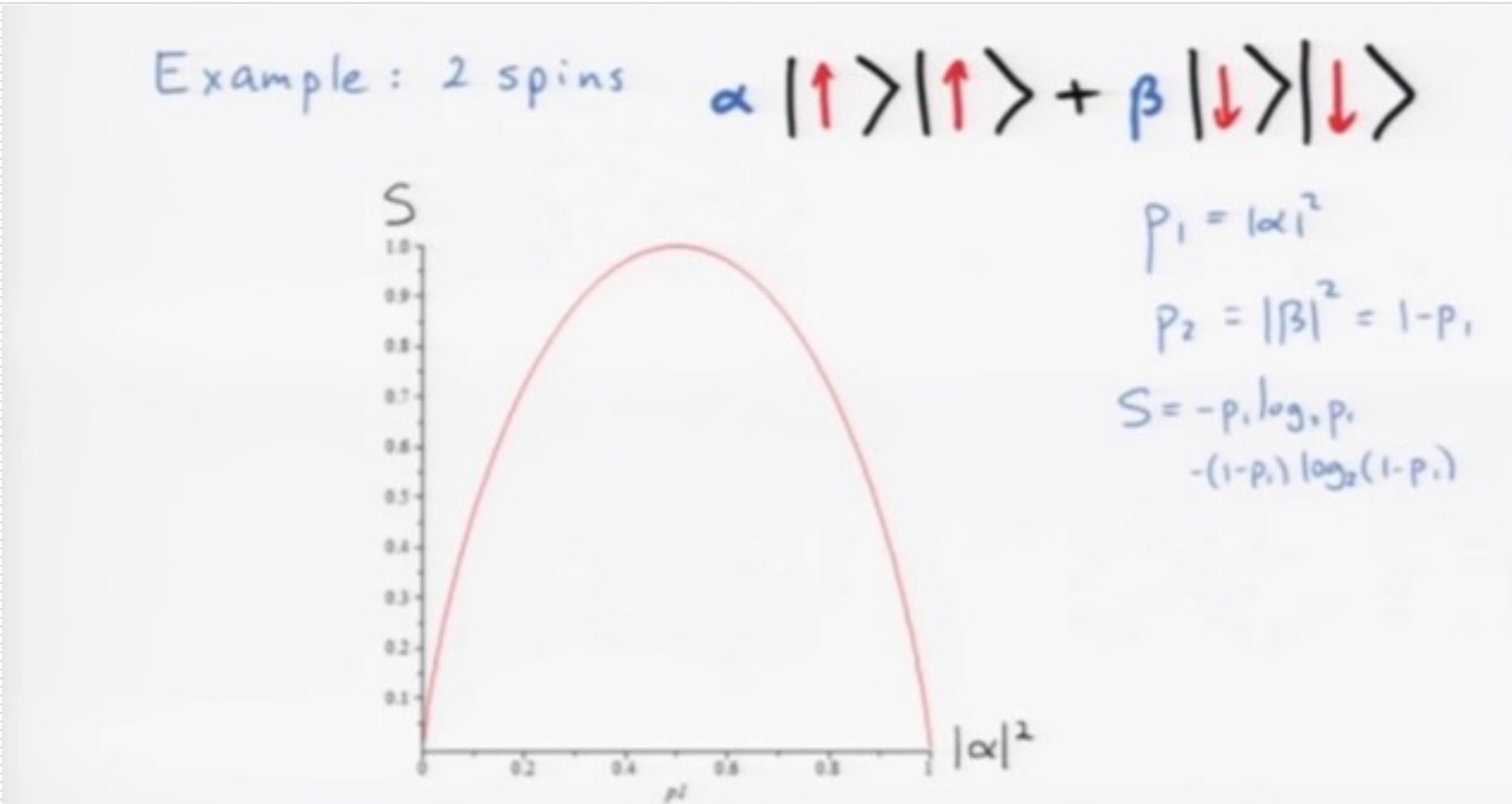
ブラックホールの表面積のかわりに、Aを境界とする
極小曲面の表面積を考えれば、それがAdS時空での
エントロピーを与える

重力理論の計量と、場の量子論のエンタングルメントが対応する



$$S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \approx \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{l_{pl}^2}.$$

場の理論Aでのエントロピーが与えられると、対応する重力理論での様々な曲面の面積が求められるので、最終的に時空の計量を決定できる。



エンタングルしている $|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ のエントロピー S

$P_1 = |\alpha|^2$ 、$P_2 = |\beta|^2 = 1 - P_1$

S = $-P_1 log_2 P_1 - (1 - P_1) log_2 (1 - P_1)$

Sが最大になるのは、$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき。 ⟹ EPRペア


ER=EPR 仮説

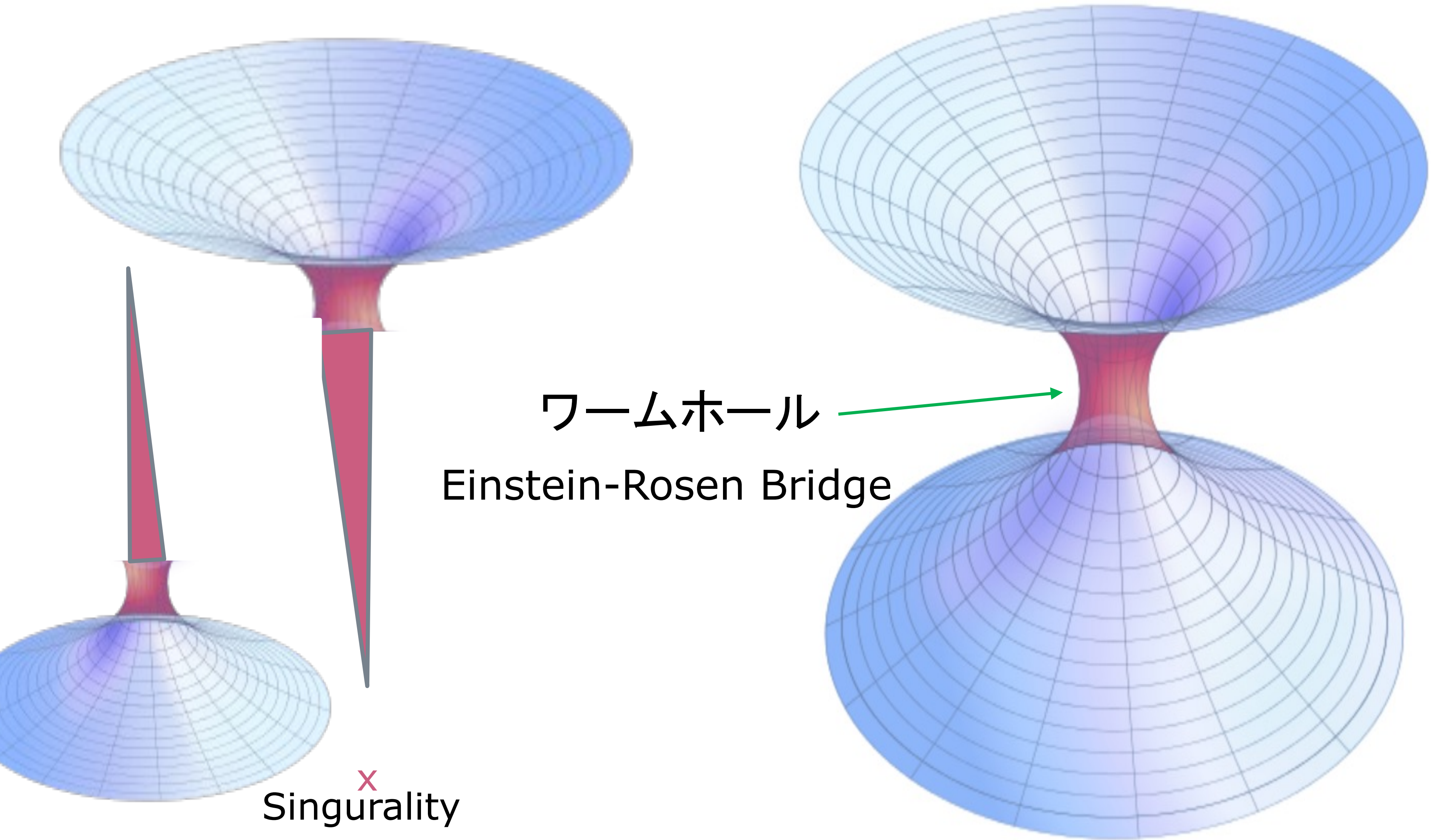
アインシュタインの1935年のもう一つの論文 “Einstein-Rosen Bridge”の存在

アインシュタインは、量子論の中に二つの量子の奇妙なもつれあった関係が存在することを発見して、それを「パラドックス」として提示した。三人の著者 Einstein, Podolsky, Rosenの頭文字をとって、「EPR論文」と呼ばれる。1935年の5月のことだった。

二ヶ月後の7月に、アインシュタインはローゼンとともに、“The Particle Problem in the General Theory of Relativity”「相対性の一般理論における粒子の問題」という論文を公開する。この論文を「ER論文」と呼ぶ。

このER論文は、二つのブラックホールを結ぶ「橋」が存在しうることを指摘した論文である。この「橋」は、“Einstein-Rosen Bridge” と呼ばれ、別名「ワームホール」とも呼ばれる。

二つのブラックホールを結ぶ「ワームホール」



1935年のアインシュタインの二つの論文は関連があるのか？

アインシュタインは、1935年に、「エンタングルメント」（ただし、パラドックスとして）と「ワームホール」を発見しているだ。同時期にアインシュタインによってなされた、この二つの発見に何か関連があるのだろうか？

本来は、80年前になされるべきこうした問いかけを、現代に蘇らせたのは、あのマルデセーナとブラックホール／量子重力の専門家のサスキンドだった。

ER＝EPR仮説

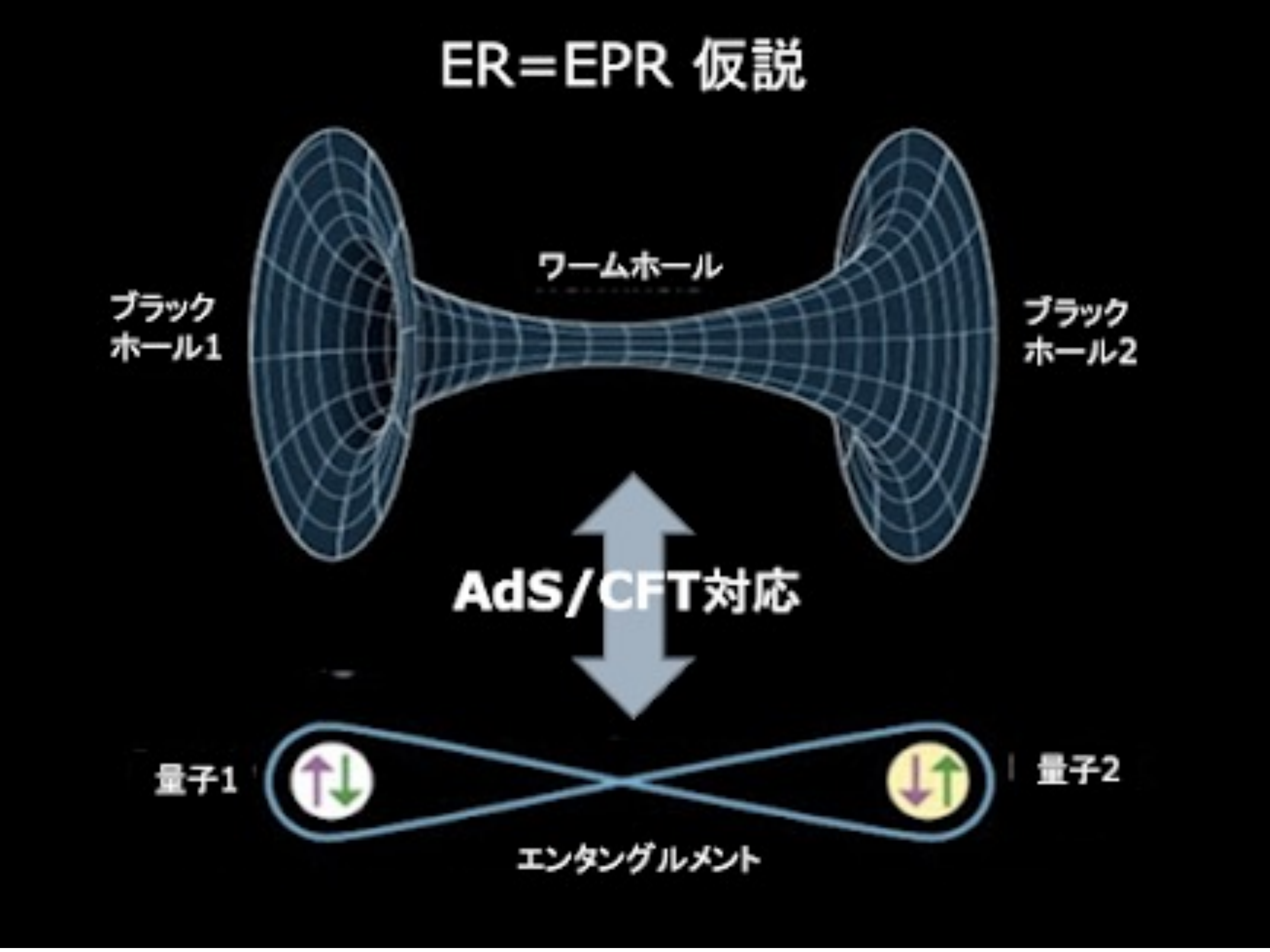
2013年の論文で、二人は、1935年にアインシュタインが発見した「エンタングルメント」と二つのブラックホールを結ぶ「ワームホール」は、スケールが全く違うのですが、同じものだという大胆な仮説を提示する。

「二つのブラックホールの間のワームホールは、二つのブラックホールのエンタングルメントによって生成される。」

ER＝EPR仮説

時空の性質を記述する相対論（重力理論）と量子の世界を記述する場の量子論に「対応」が存在することをマルデセーナが発見したことは、既に述べた。ただ、その対応が、具体的にどんなものかについては、述べてこなかった。

マルデセーナとサスキンドの主張は、AdS/CFT対応のもとで、相対論に現れる二つのブラックホールを結びつけるワームホールと、量子論に現れる二つの量子のエンタングルメントは、「対応」すると言うことである。こうした主張を、「ER ＝ EPR仮説」と呼ぶ。


ER=EPR 仮説
ワームホール
ブラック
ホール1
ブラック
ホール2
AdS/CFT対応
量子1
量子2
エンタングルメント

あまりにスケールが違うので、「対応する」「原理的には同じもの」と言われても、ちょっと頭がクラクラする。ただ、エンタングルメントは何千万年光年離れていても、その性質は維持されるし、また、量子サイズのブラックホールを考えることは可能である。

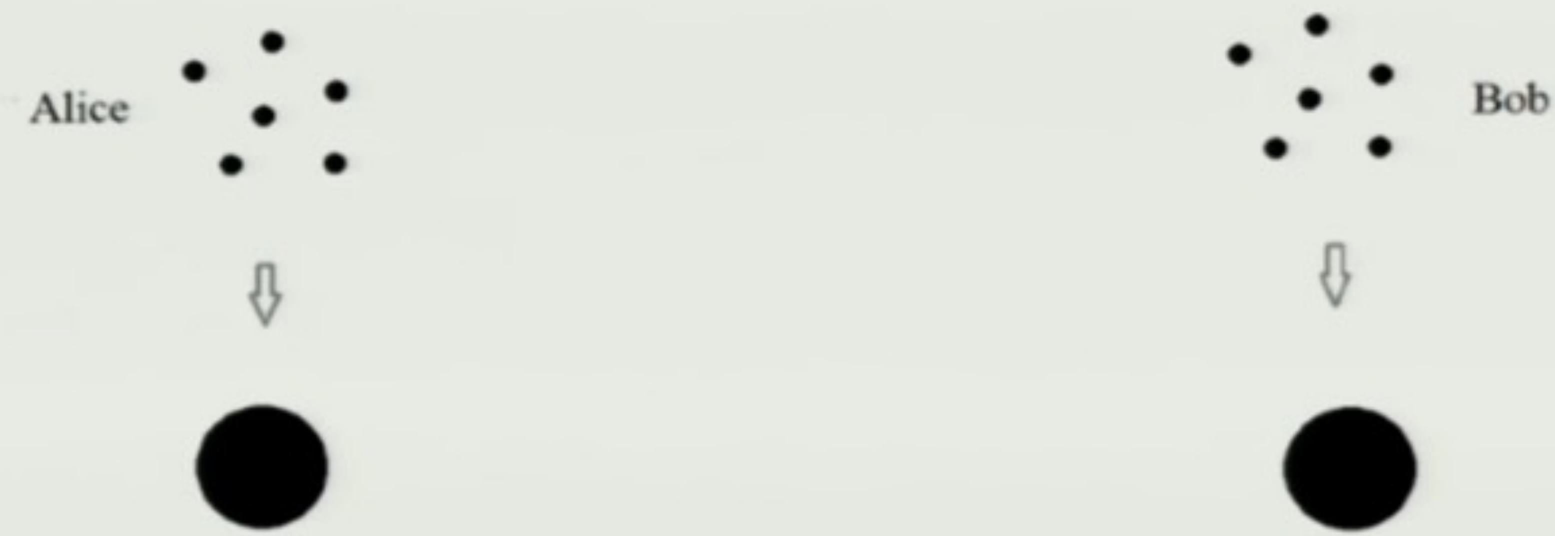
そもそも、「量子重力」というのは、量子レベルでの重力作用のことです。量子重力の研究を、「ER＝EPR仮説」を指針として進めようと言う方向を、多くの研究者は支持しているように思う。

恋人のAliceとBobが、突然数十億光年もの距離に
遠ざけられたとしよう。彼らには、数十億年の時間はない。
再び会うためには、どんなことが出来るだろう？

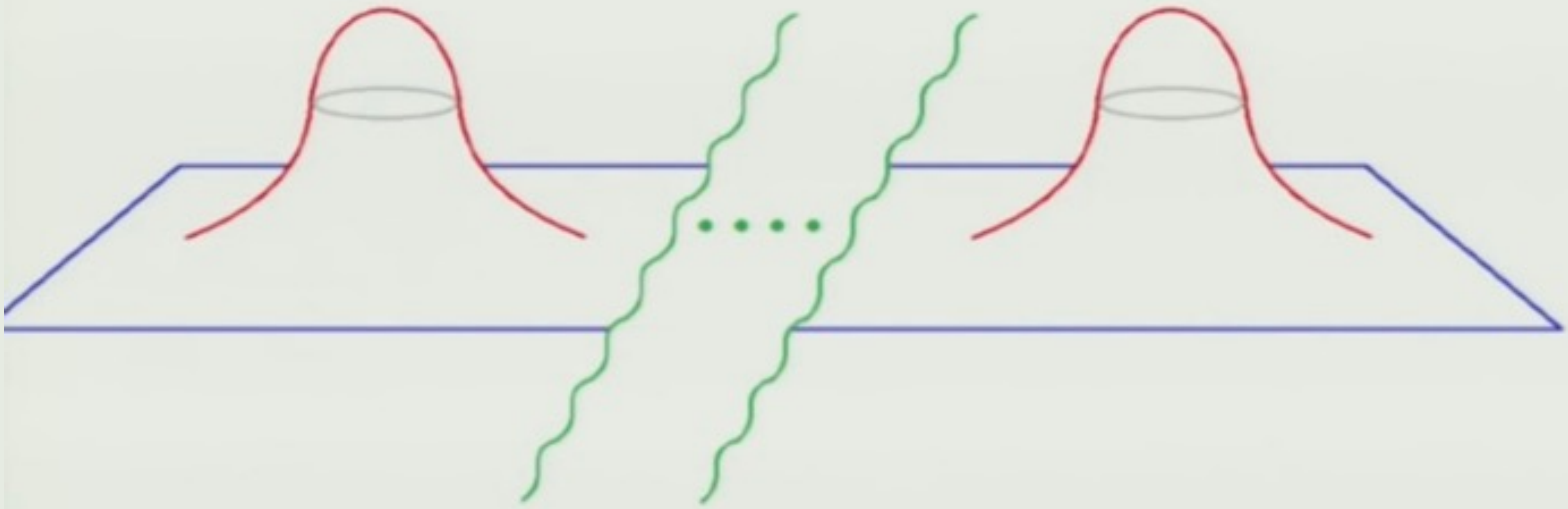
二人がブラックホールを作れるとしたらどうだろう？

二つのバージョンがある。

Version 1



AliceとBobは、独立にブラックホールを作る。

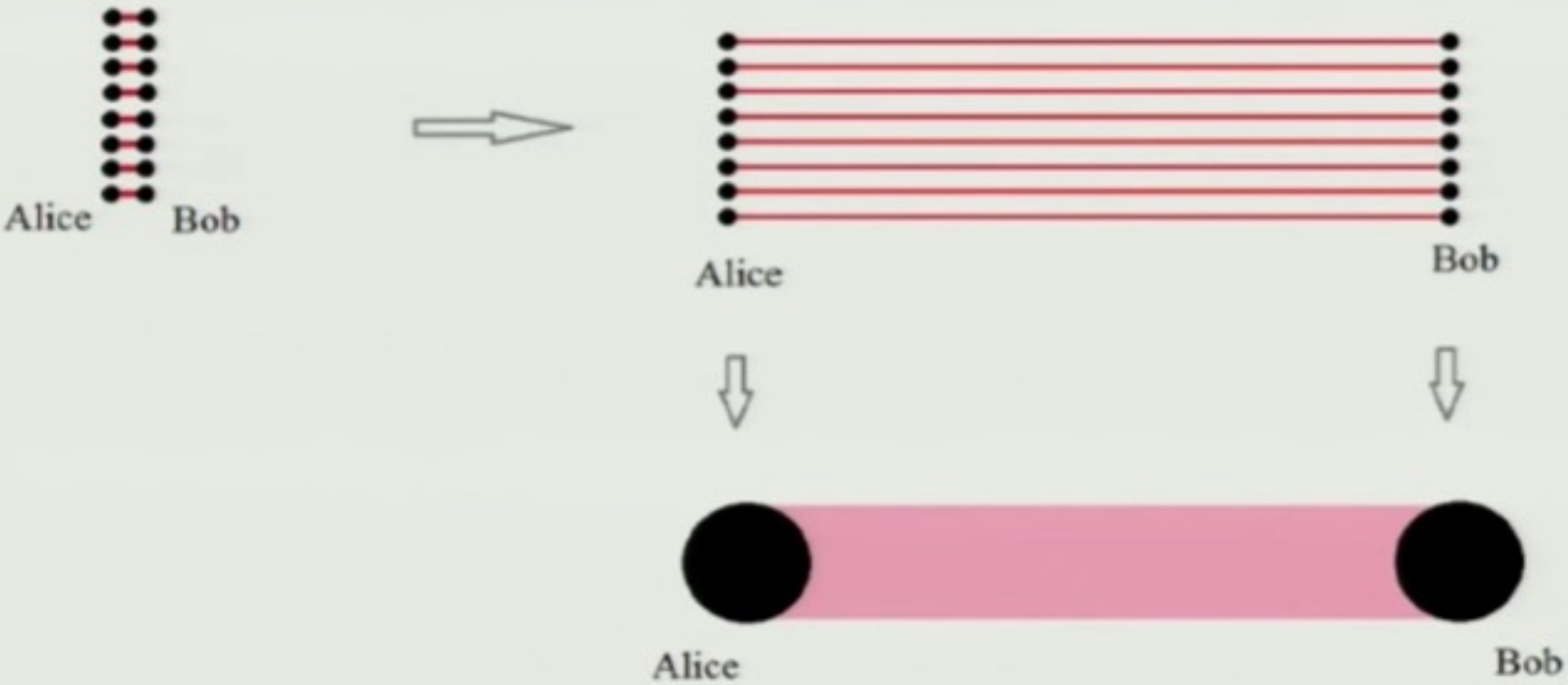


AliceとBobは、独立にブラックホールを作る。

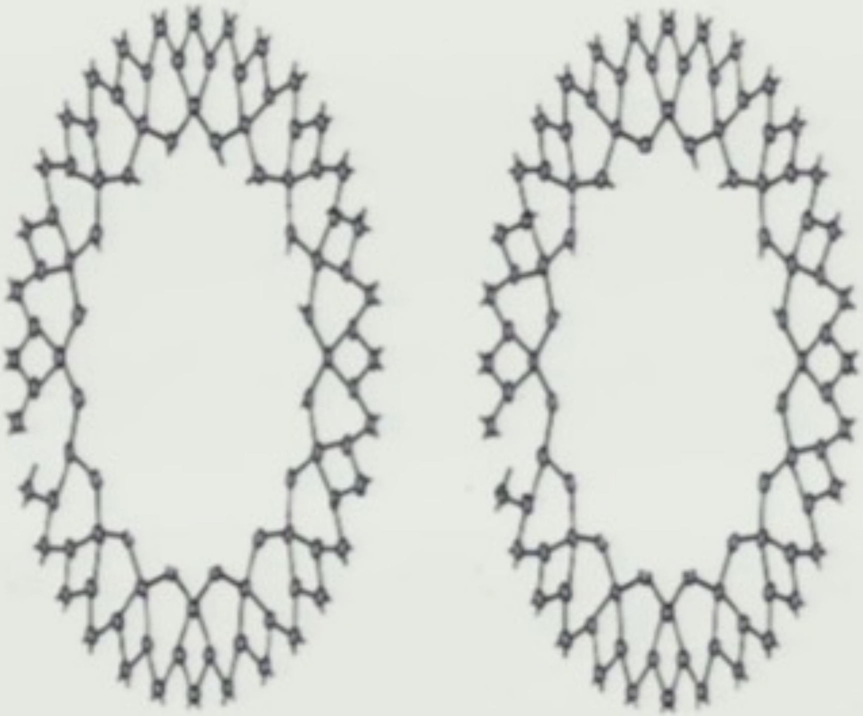
二人を隔てる距離は、埋まらない。

V2

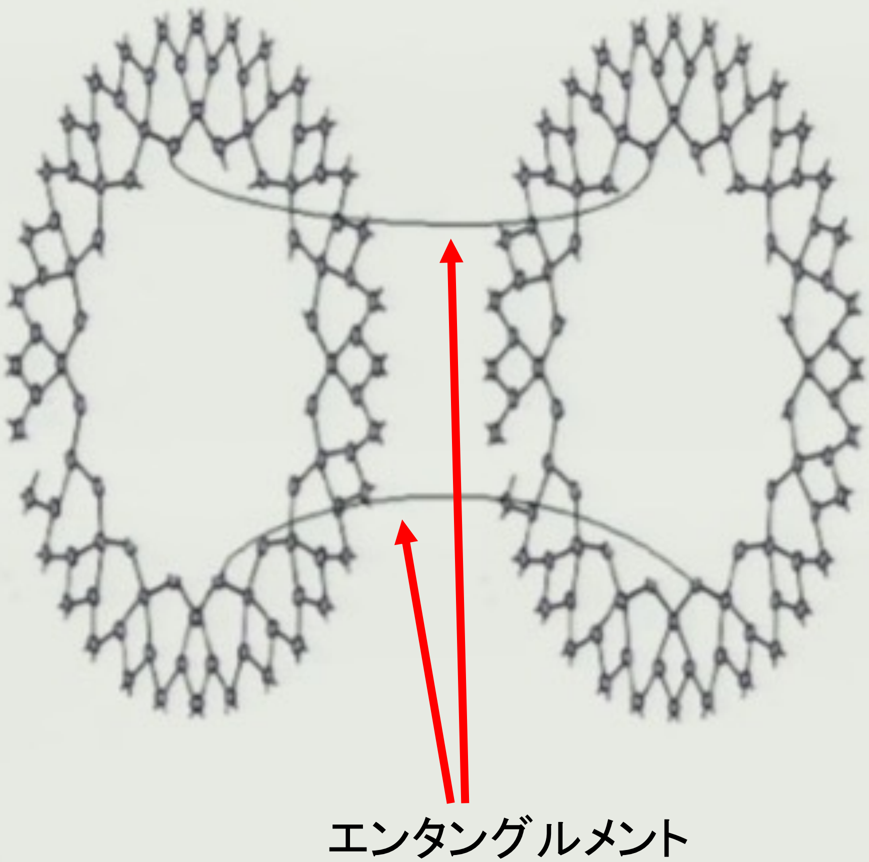
AliceとBobは、エンタングルした物質から
ブラックホールを作る。

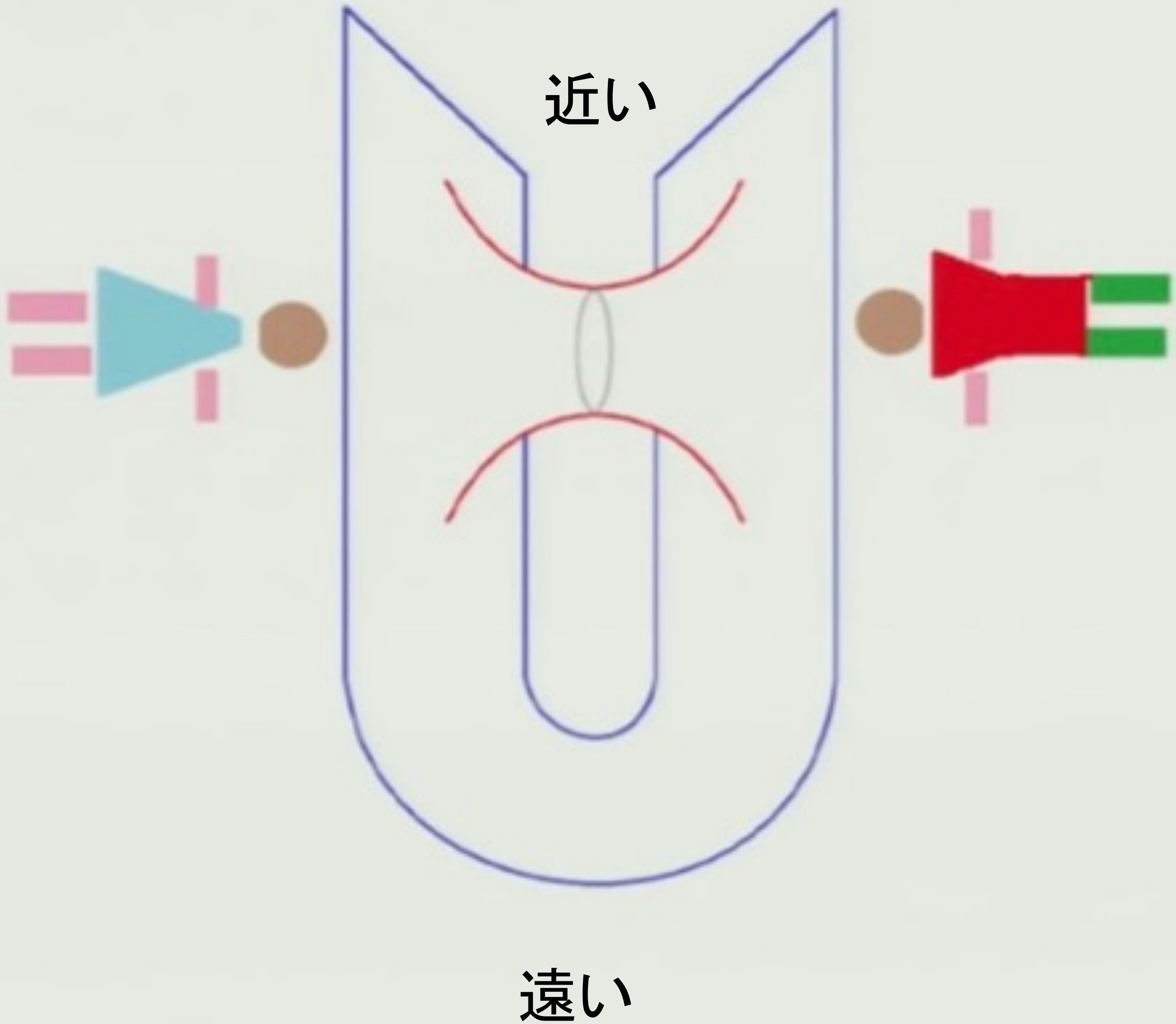


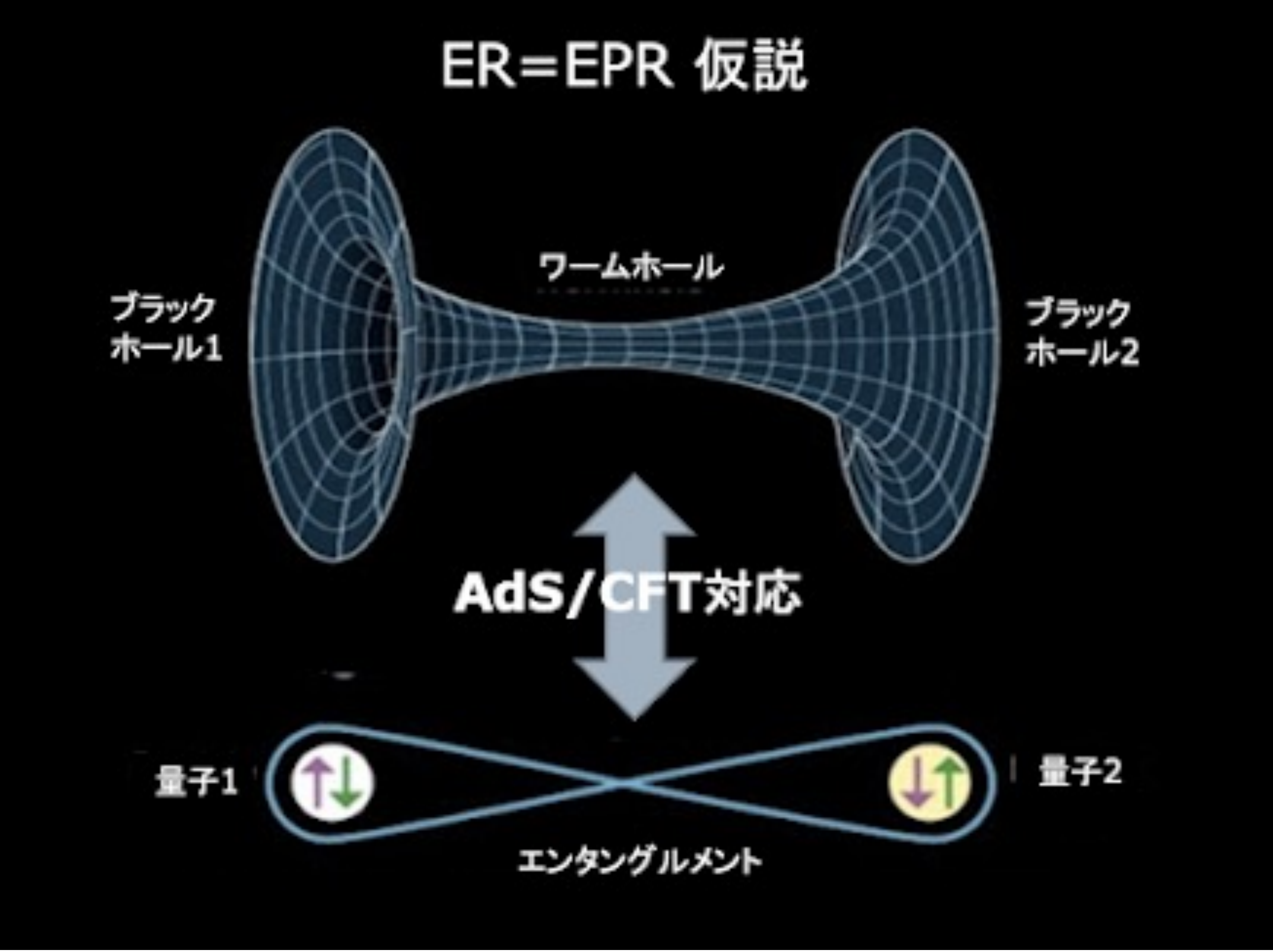
二つのブラックホールの時空の内部の状態は、独立しているが、
お互いは、お互いのコピーである。



二つのブラックホールの時空の内部の状態は、
互いにエンタングルしている。




近い
遠い


ER=EPR 仮説
ワームホール
ブラック
ホール1
ブラック
ホール2
AdS/CFT対応
量子1
量子2
エンタングルメント

Quantum mechanics allows nonlocal connectivity:
EPR entanglement

Gravity allows another kind of nonlocal connectivity—Einstein-Rosen Bridges.

アインシュタインの洞察の深さの再評価

こうした経過は、1935年の二つの論文に見られるアインシュタインの洞察の深さの再評価という意味を持っている。「ER＝EPR仮説」の中心人物のサスキンドは、アインシュタインへの敬意をこめて、また当時の量子論サイドの対応を批判をしつつ次のように書いている。

「当時の量子論に対する最後の批判で、アインシュタインは、とても深く、とても直感に反していてとても人を困惑させるが、それでも人をとても興奮させる、何かを指摘していたのだ。だから、その何かは、21世紀の始まりと共に、多くの理論物理学者を魅了するものとして帰ってきているのだ。エンタングルメントの発見という、アインシュタインの最後の偉大な発見に対して、ボーアが行った唯一の回答は、それを無視することだった。」

エンタングルする自然

かつて「パラドックス」として提示されたエンタングルメントは、いまや、「時空」を生み出す「原理」として物理の世界にしっかりと位置付けられようとしている。「エンタングルする自然」という自然観は、21世紀の自然観の大きな特徴である。

科学のドラマは、へたな「三文小説」より、ずっと面白い。

量子重力理論では、エンタングルメントとそのエントロピーが中心的な役割を果たす。そのことはまた、エンタングルメントのエントロピーを扱う量子情報理論と、エンタングルメントの複雑さを表す量子複雑性理論が必要なことを意味している。

それについては、別のシリーズで述べたいと思う。

Part IV

エンタングルメントの応用

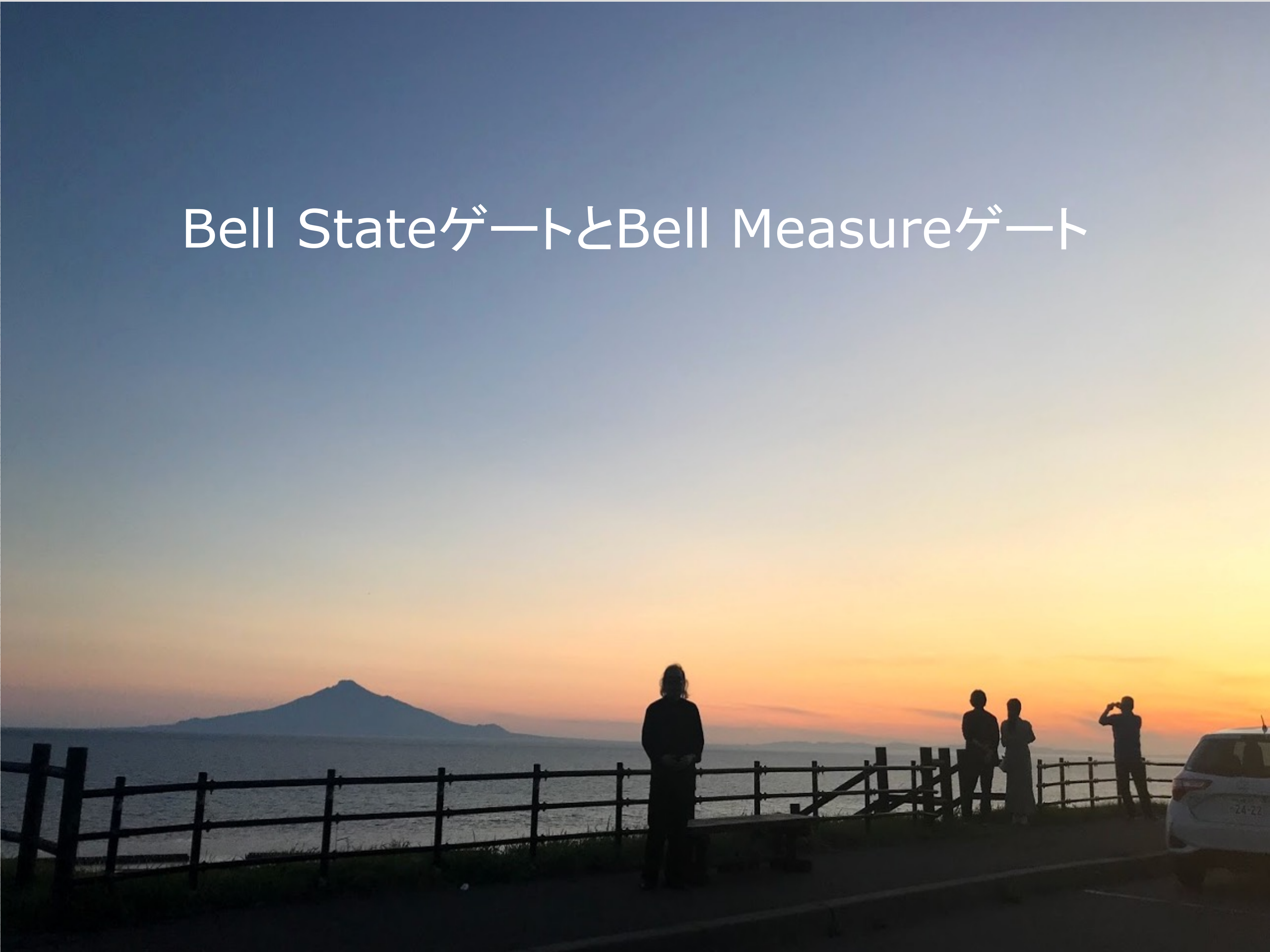
Agenda

エンタングルする自然
-- 「逆理」から「原理」へ --

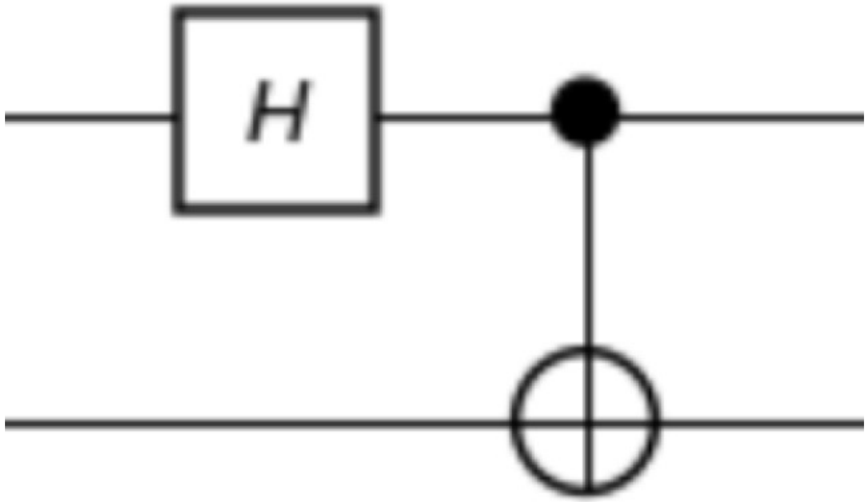
Part IV エンタングルメントの応用

- Superdense Coding
- 量子テレポーテーション
- Entanglement Swapping

Bell StateゲートとBell Measureゲート



Bell State ゲート



Bell State ゲート

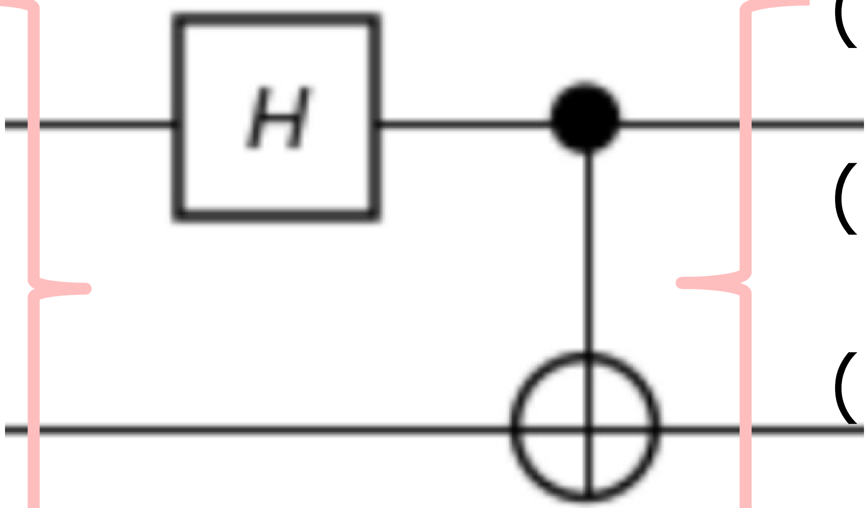
入力

$|00>$

$|01>$

$|10>$

$|11>$



出力

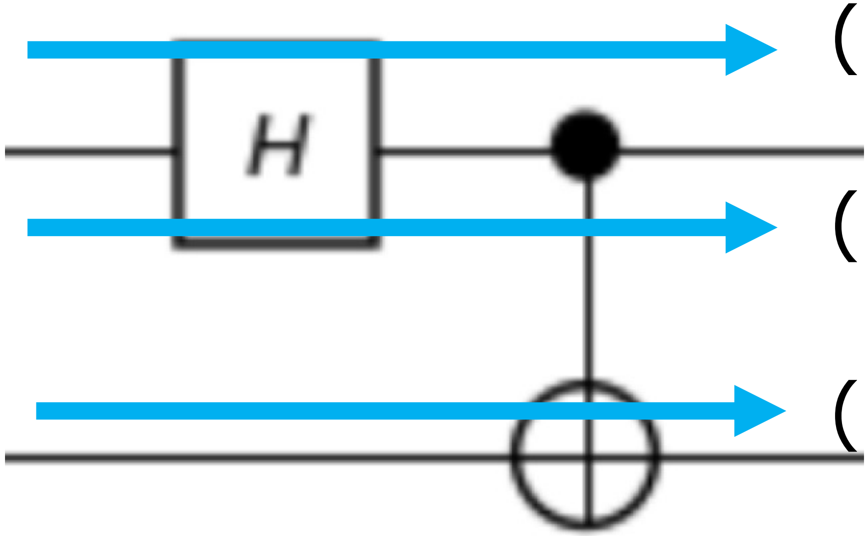
$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

$(|00>-|11>)/\sqrt{2}$

$(|01>+|10>)/\sqrt{2}$

$(|01>-|10>)/\sqrt{2}$

Bell State ゲート



Bell State ゲートの働き

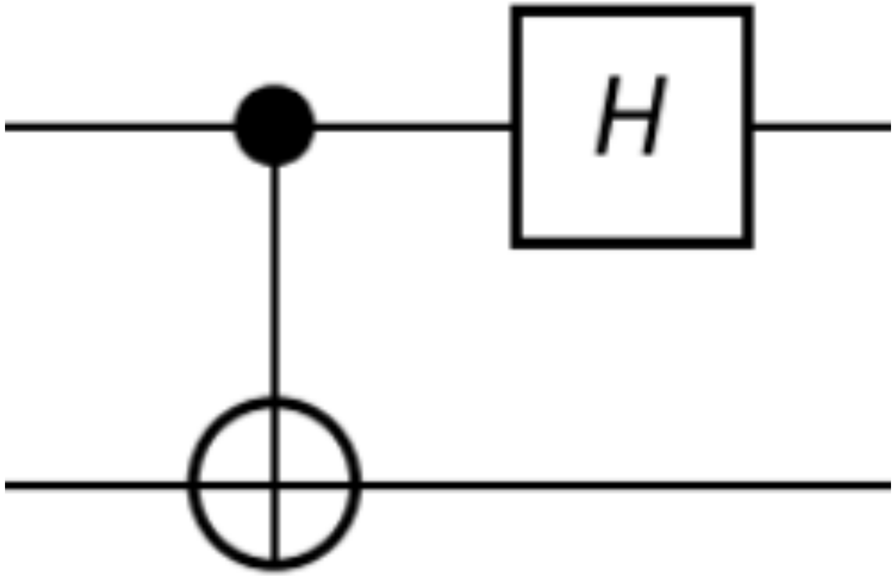
$$|00> \longrightarrow |\Phi^{+}>$$

$$|01> \longrightarrow |\Psi^{+}>$$

$$|10> \longrightarrow |\Phi^{-}>$$

$$|11> \longrightarrow |\Psi^{-}>$$

Bell Measure ゲート



Bell Measure ゲート

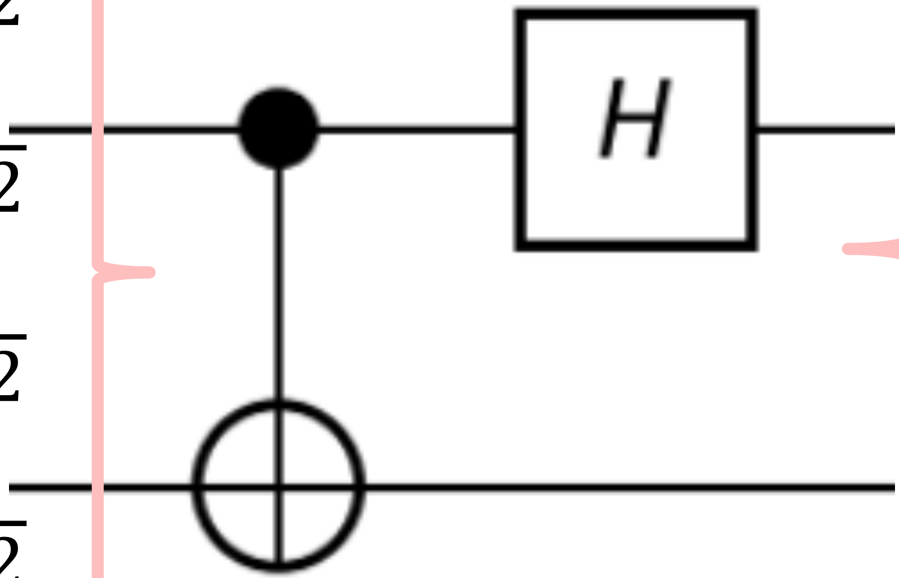
入力

$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

$(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2}$



出力

$|00\rangle$

$|01\rangle$

$|10\rangle$

$|11\rangle$

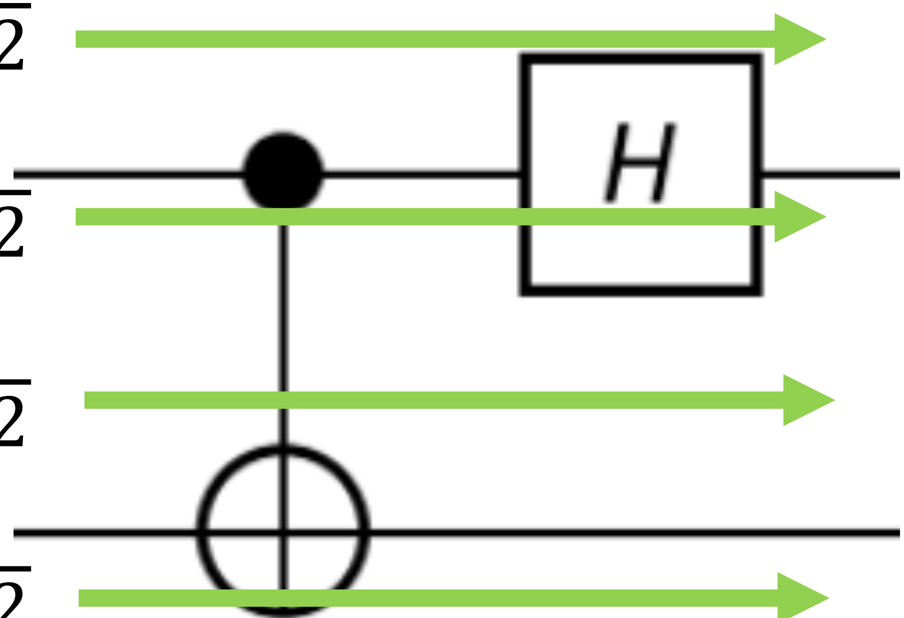
Bell Measure ゲート

$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

$(|00>-|11>)/\sqrt{2}$

$(|01>+|10>)/\sqrt{2}$

$(|01>-|10>)/\sqrt{2}$



$|00>$

$|01>$

$|10>$

$|11>$

Bell Measure ゲートの働き

$$|\Phi^+> \longrightarrow |00>$$

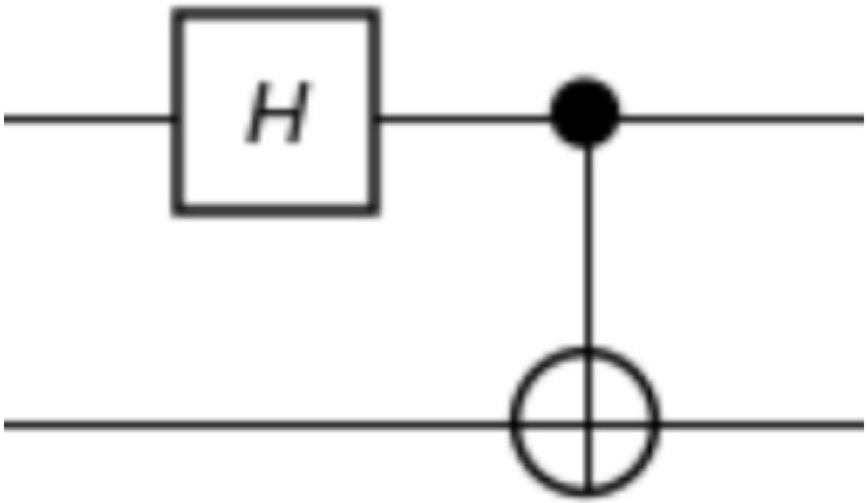
$$|\Psi^+> \longrightarrow |01>$$

$$|\Phi^-> \longrightarrow |10>$$

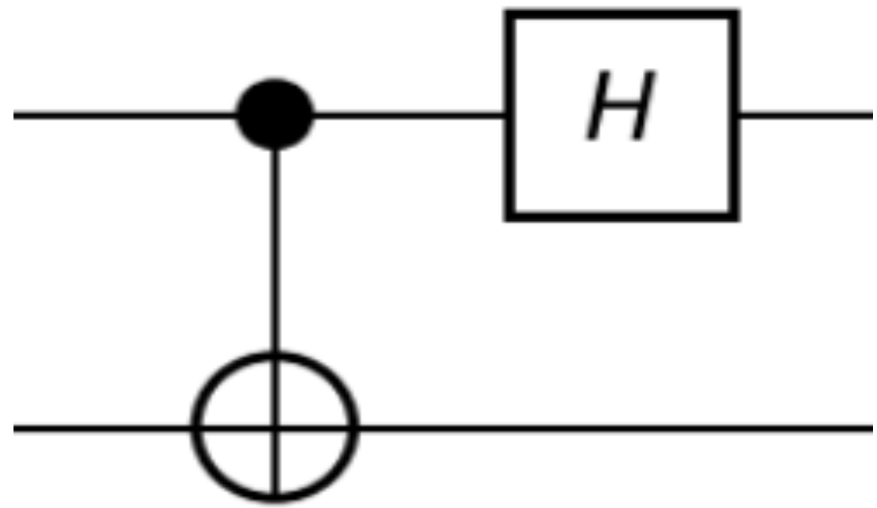
$$|\Psi^-> \longrightarrow |11>$$

Bell State Gateと Bell Measure Gate

Bell State Gate

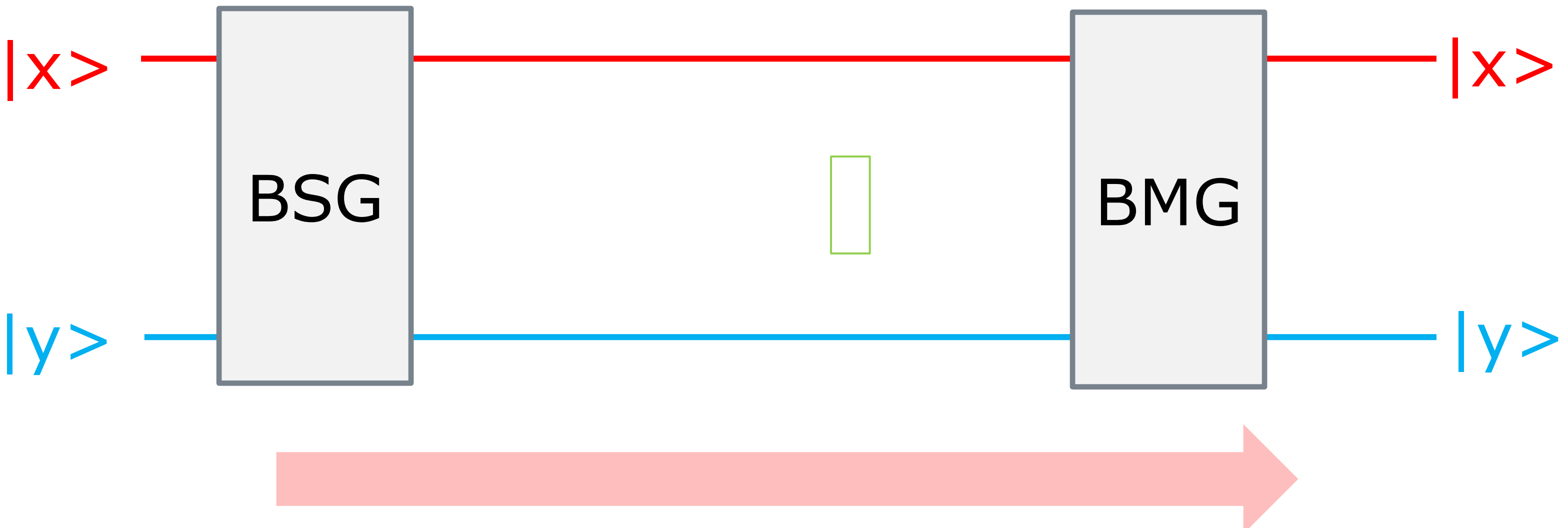


Bell Measure Gate



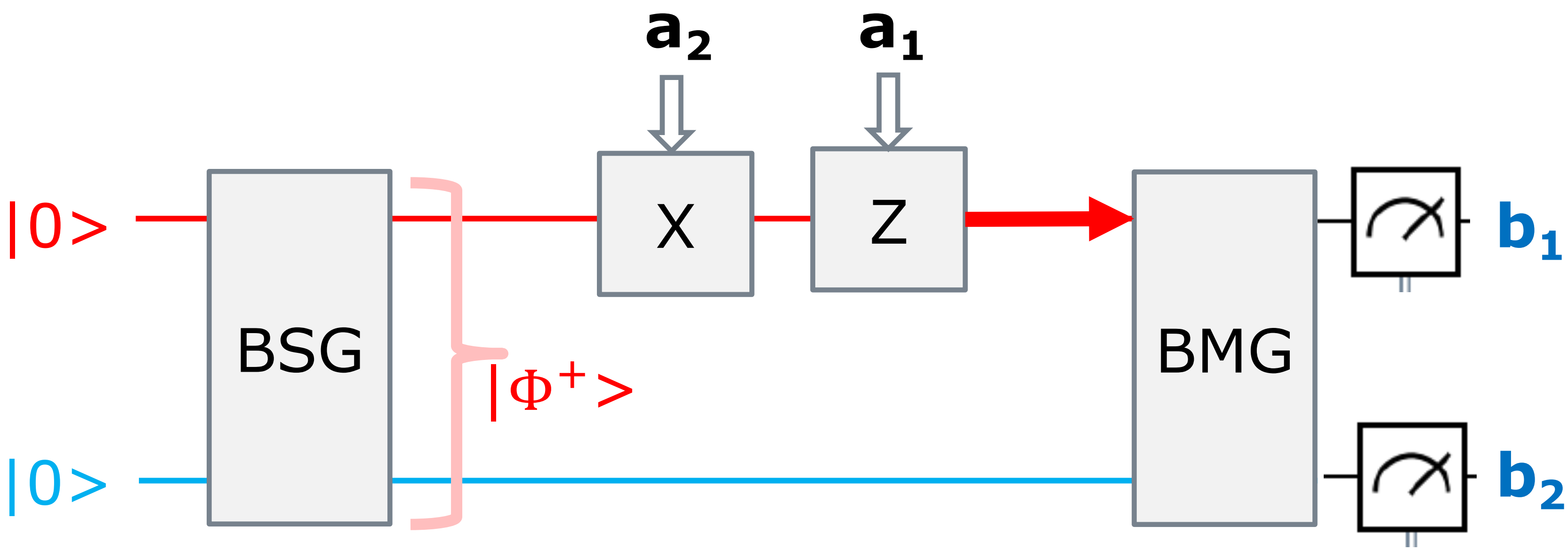
基本的な量子通信回路と
Bell State Gate / Bell Measure Gate

Superdence Codingの基本的な考え方

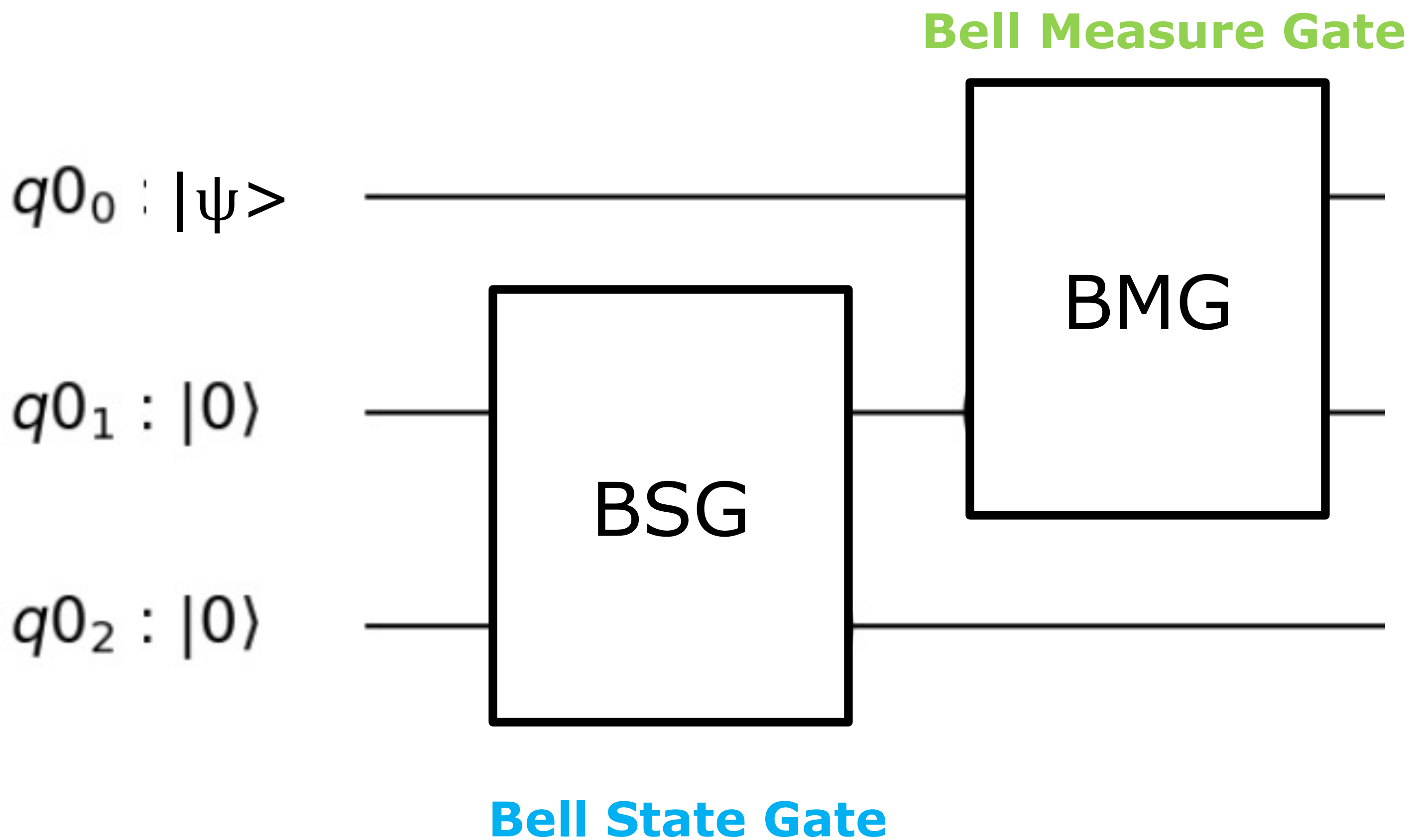


$$BSG \circ BMG = BMG \circ BSG = I$$

Superdense Coding回路

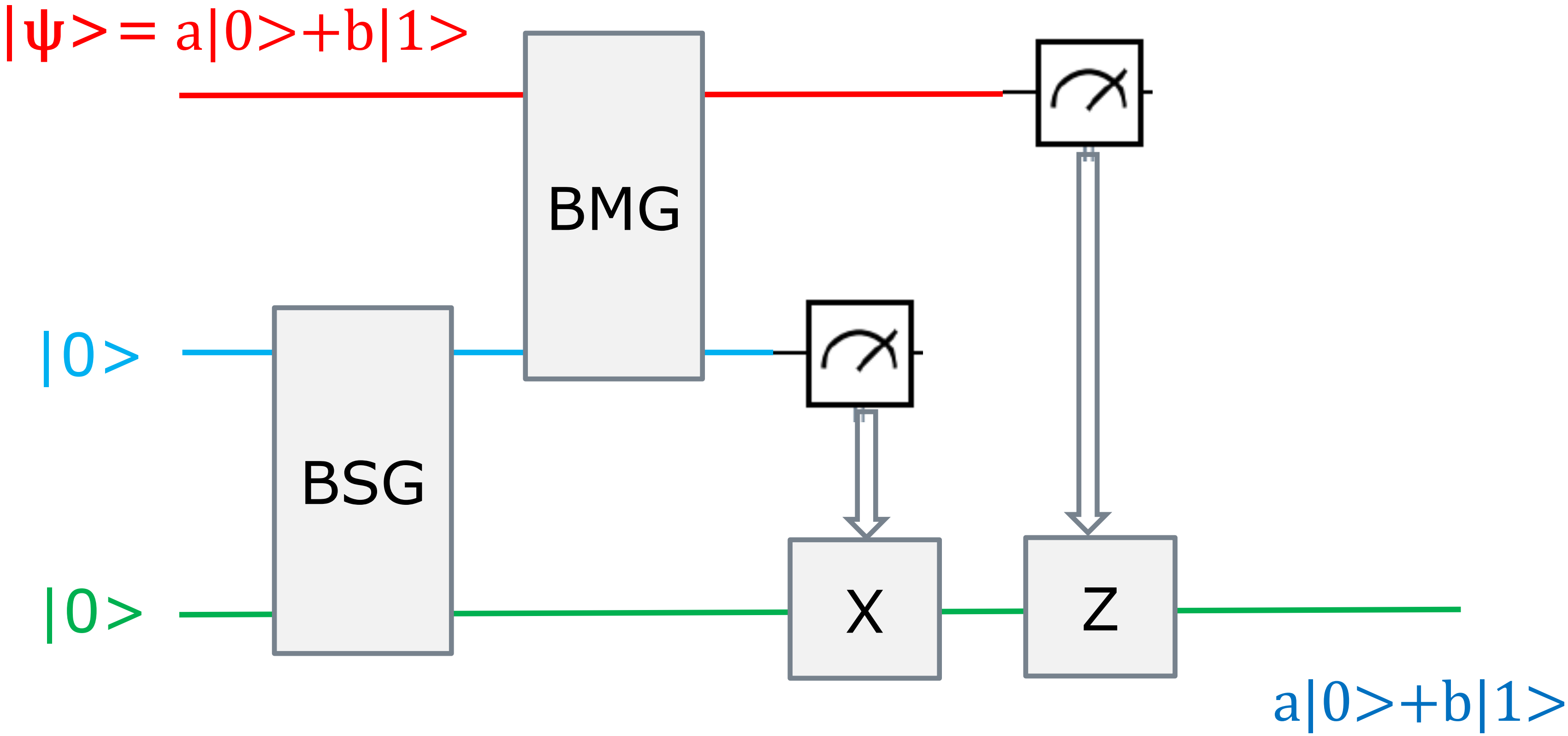


量子テレポーテーション回路は、
Bell State ゲートとBell Measure ゲートから構成される

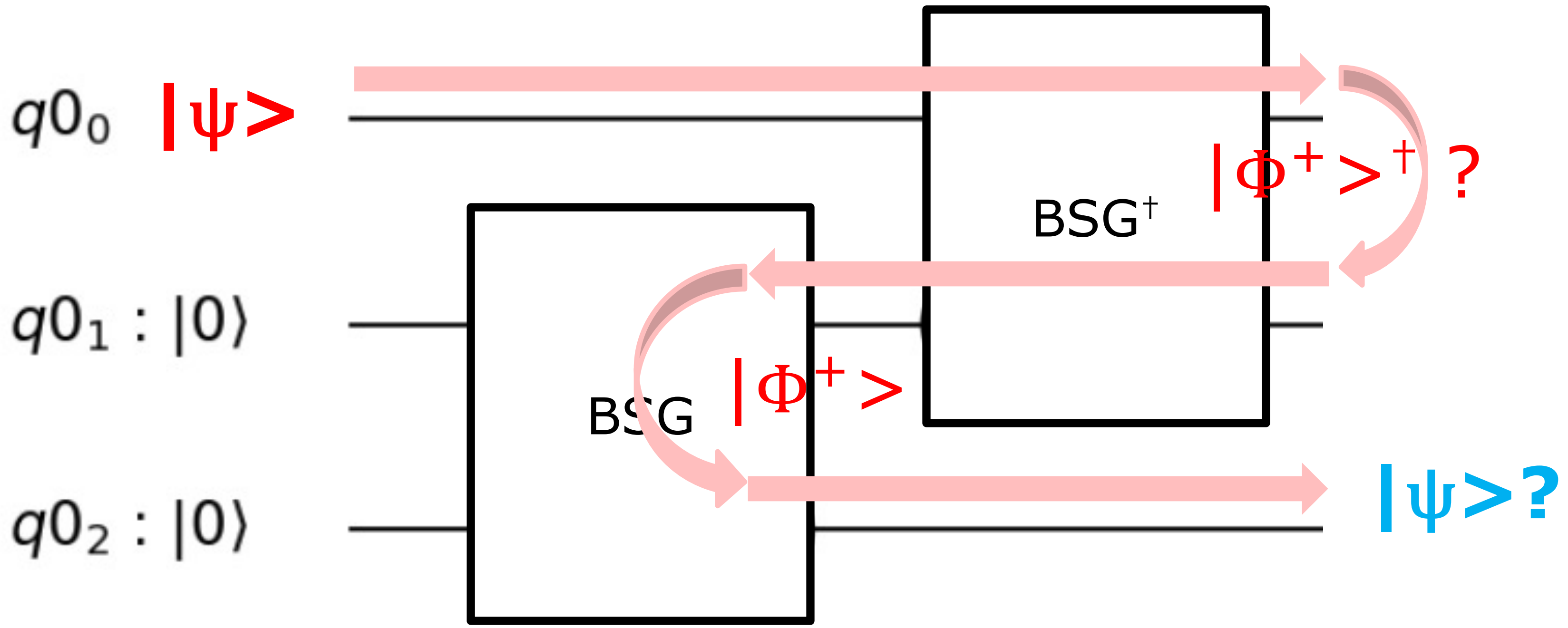


量子テレポーテーション回路の一部

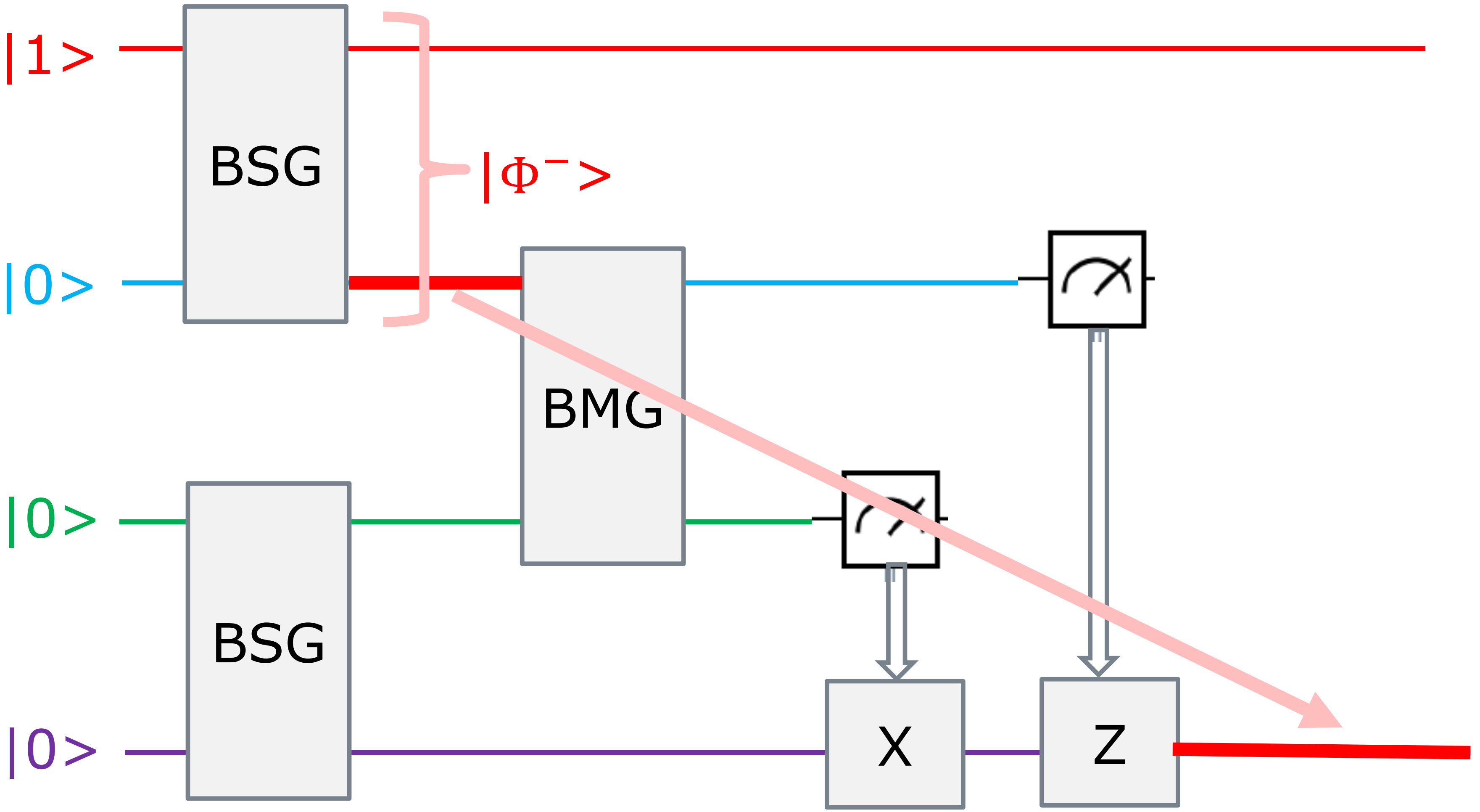
量子テレポーテーション回路



量子テレポーテーション回路の一部
String Diagram的解釈



Entanglement Swapping回路



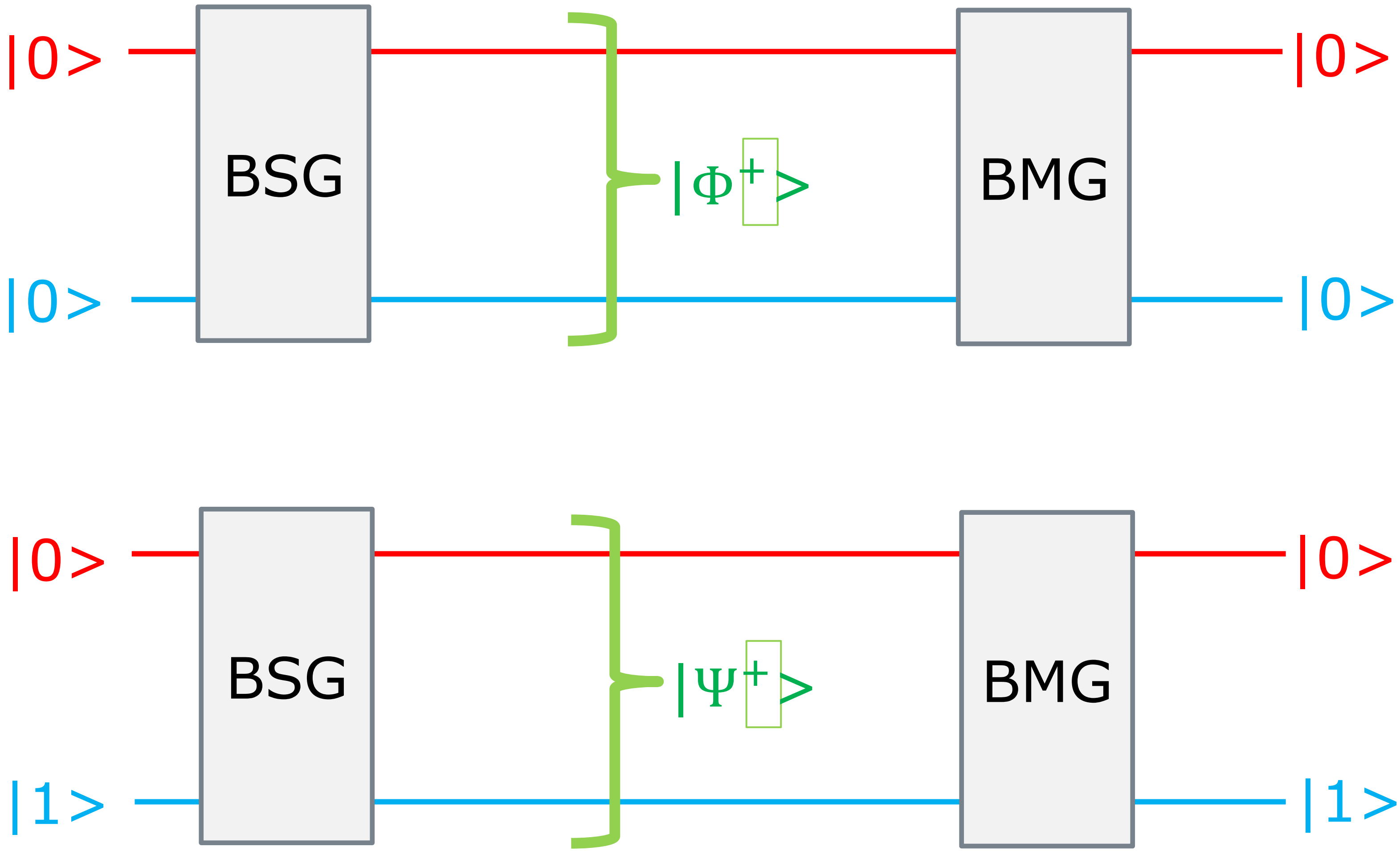
Superdense Coding

Superdense Coding

- Superdense Coding は、AからBに一個のqubitを送ることで、AからBに二個の古典ビットを送る。
- 量子テレポーテーションは、AからBに二個の古典ビットを送ることで、AからBに一個のqubitを送る。
- いずれの量子通信も、AとBのあいだでエンタングルメント状態の量子を共有する。
- 基本となる量子回路は、BSG（Bell State Gate）とBMG(Bell Measure Gate)である。

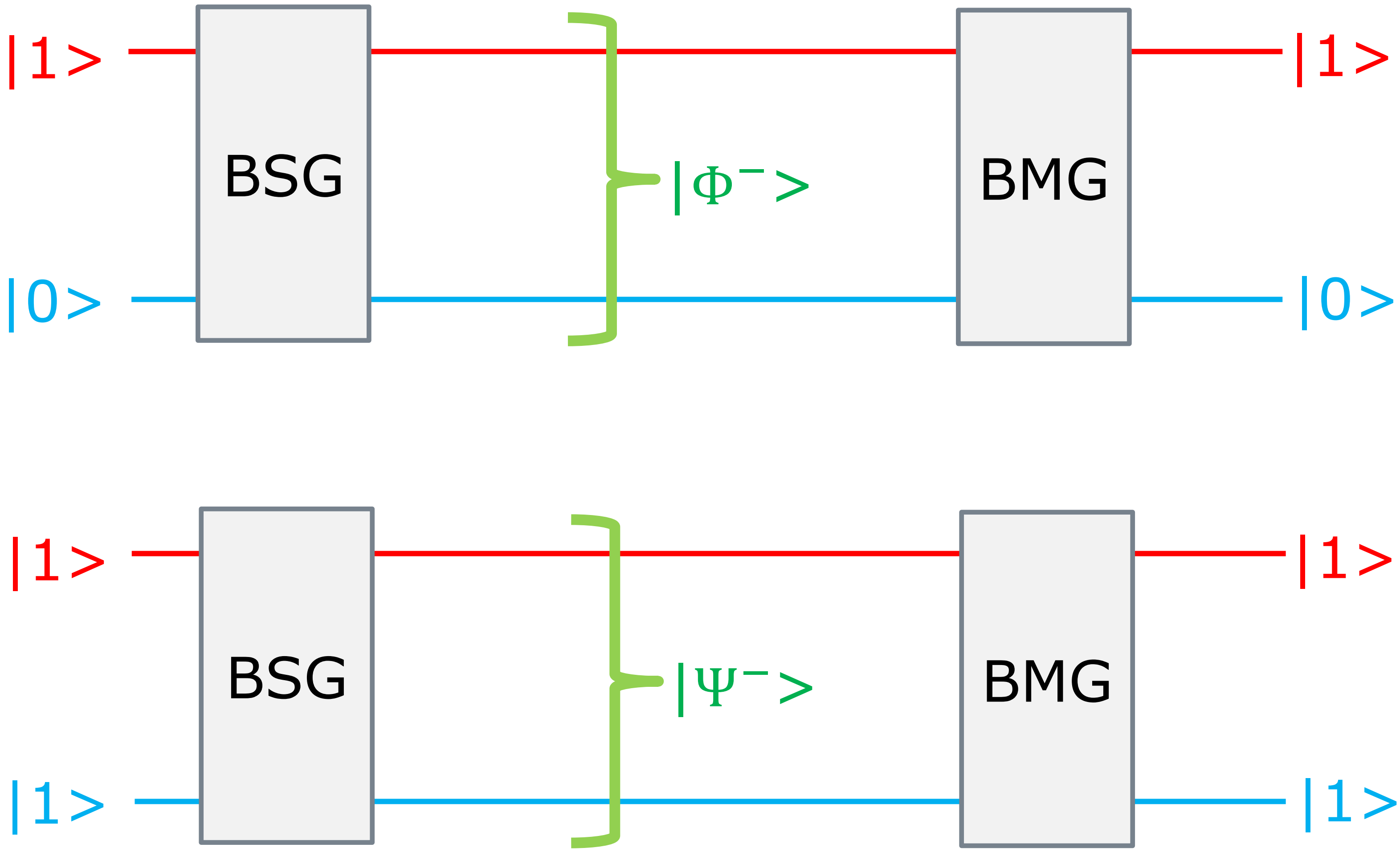
基本的な考え

BSG=BMG† かつ BMG=BSG†
BSG∘BMG=BMG∘BSG=I



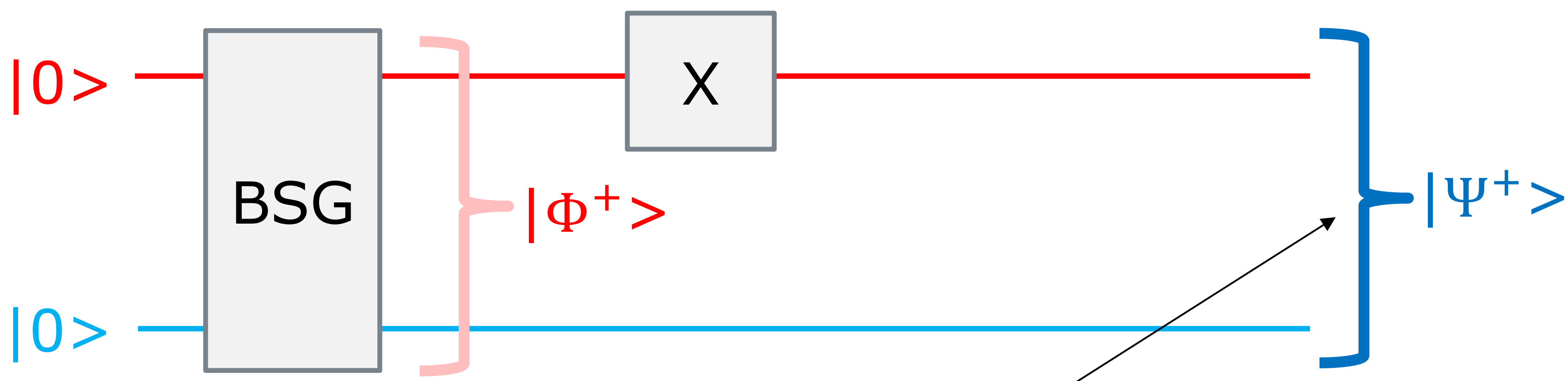
BSG=BMG† かつ BMG=BSG†

BSG∘BMG=BMG∘BSG=I



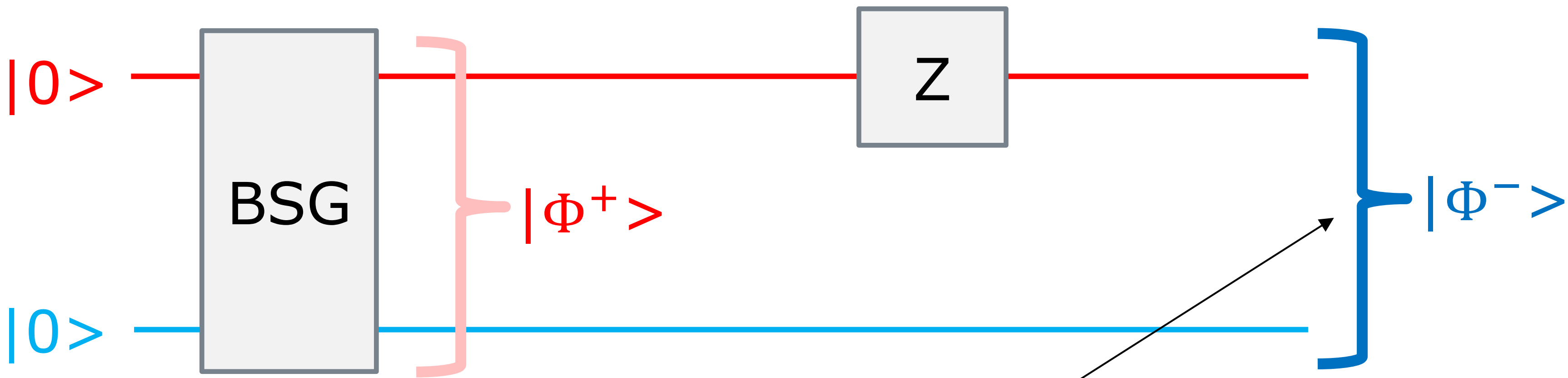
$|\Phi^+\rangle$から他のBell Stateを作る方法

$|\Phi^+\rangle$から$|\Psi^+\rangle$を作る



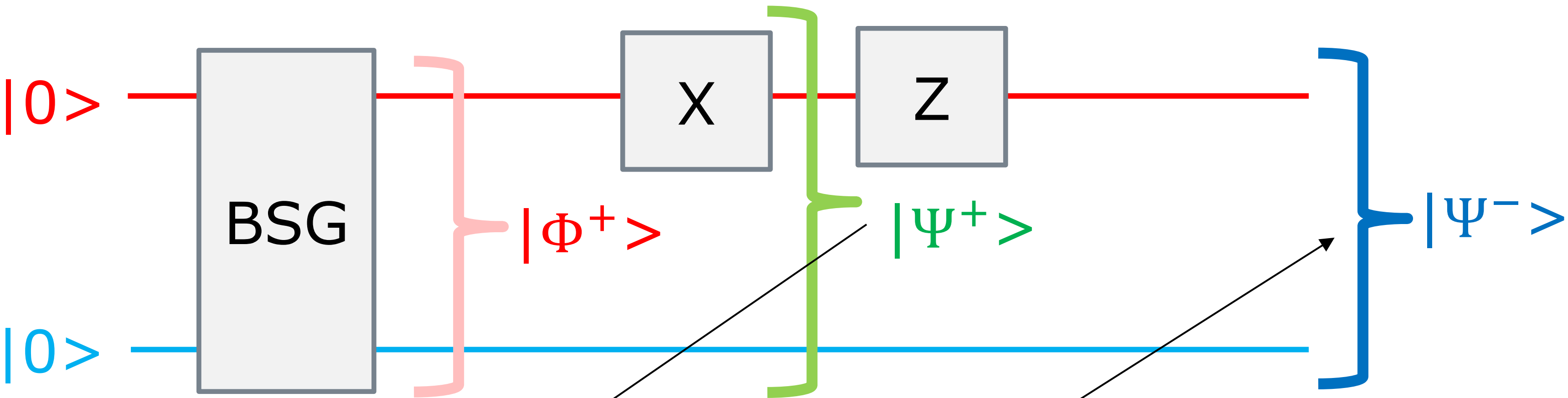
$$
\begin{aligned}
&(X \otimes I)|\Phi^+\rangle = (X \otimes I)(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (X|0\rangle \otimes I|0\rangle + X|1\rangle \otimes I|1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (|10\rangle+|01\rangle)/\sqrt{2} \\
&= |\Psi^+\rangle
\end{aligned}
$$

$|\Phi^+\rangle$から$|\Phi^-\rangle$を作る



$$
\begin{aligned}
(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (Z \otimes I)(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (Z|0\rangle \otimes I|0\rangle + Z|1\rangle \otimes I|1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2} \\
&= |\Phi^-\rangle
\end{aligned}
$$

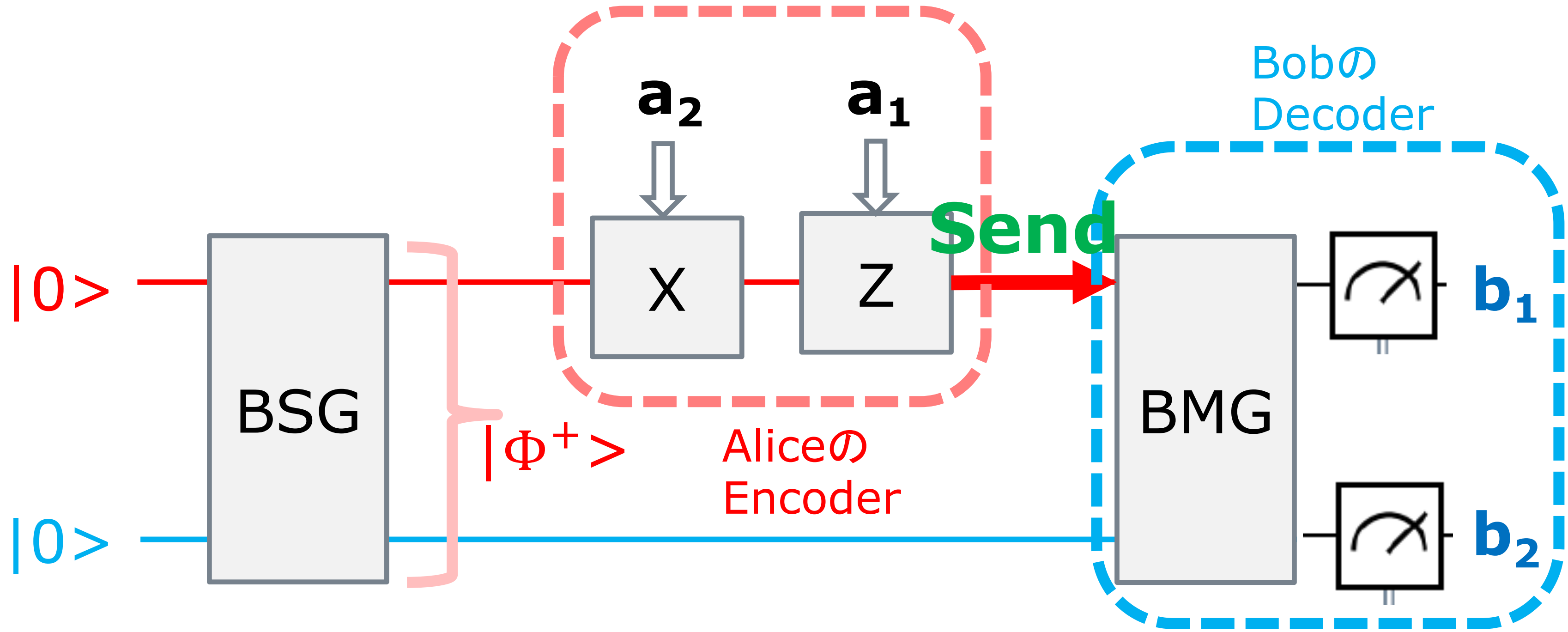
$|\Phi^+\rangle$から$|\Psi^-\rangle$を作る



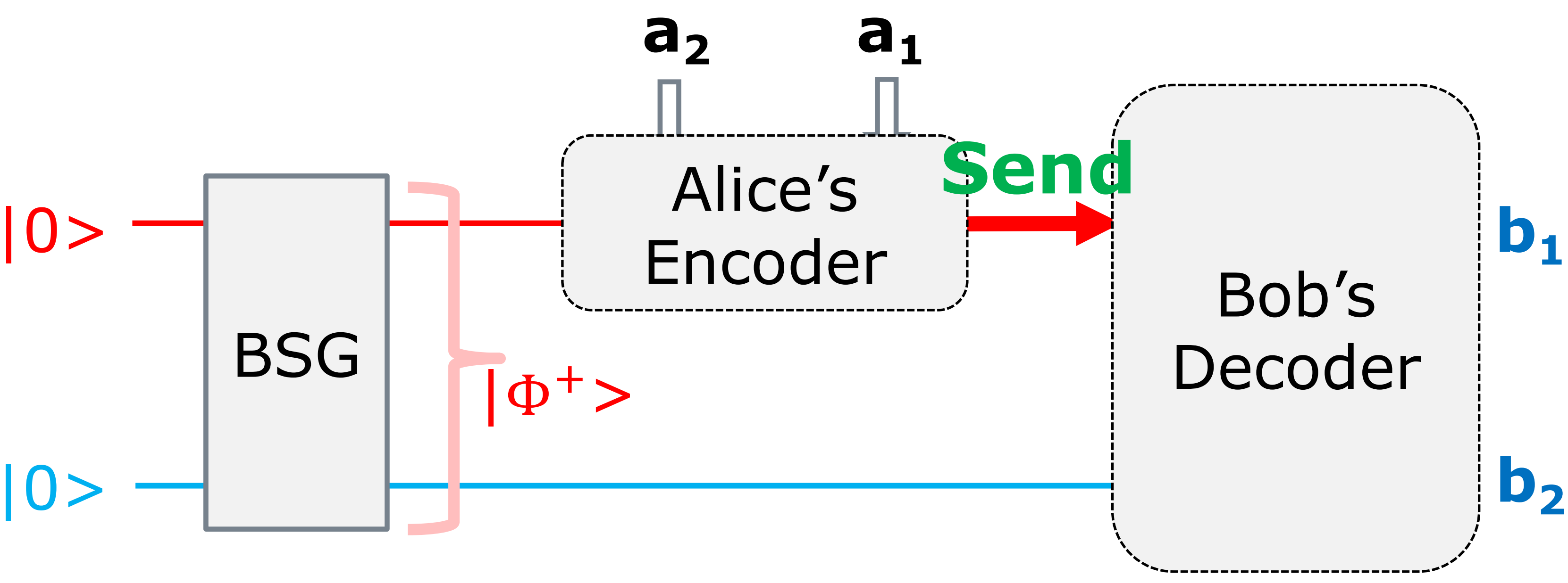
$$(Z \otimes I)|\Psi^+\rangle = (Z \otimes I)(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (Z|0\rangle \otimes I|1\rangle + Z|0\rangle \otimes I|0\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= |\Psi^-\rangle$$

Superdense Coding回路

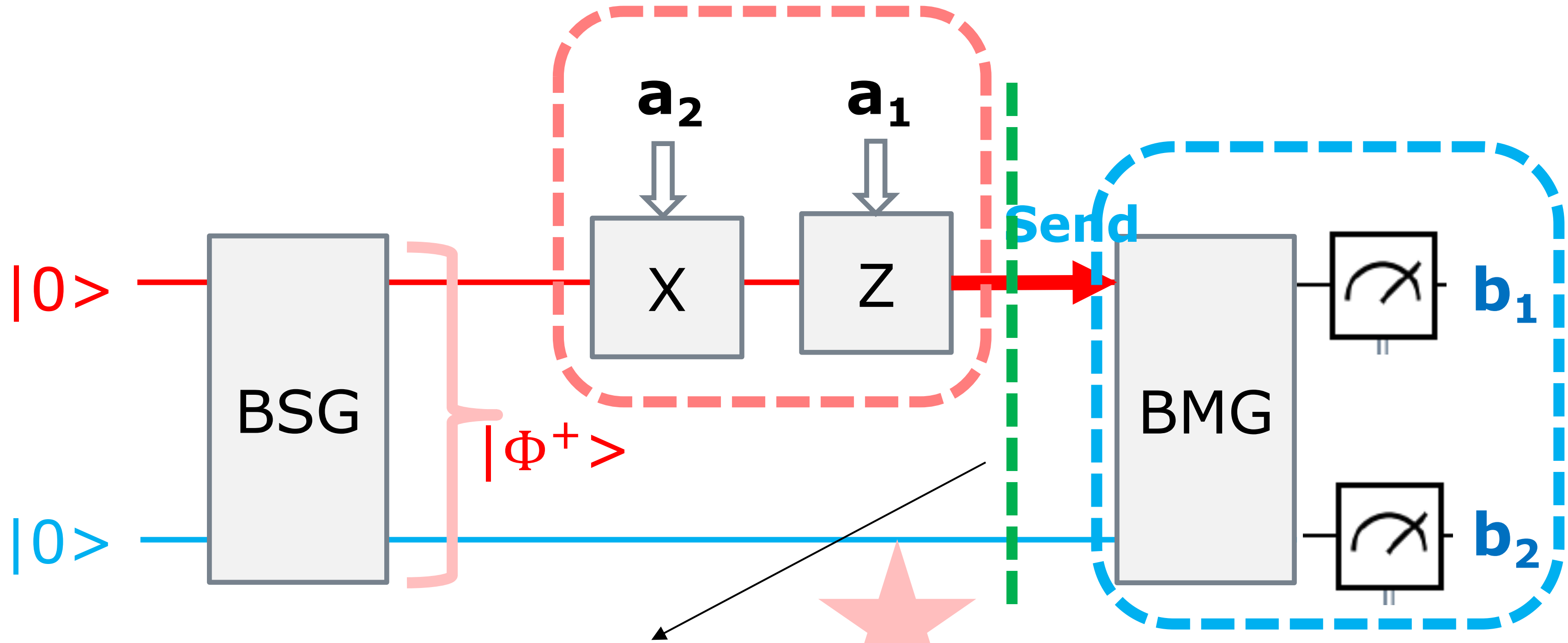
Superdense Coding回路



Superdense Coding回路

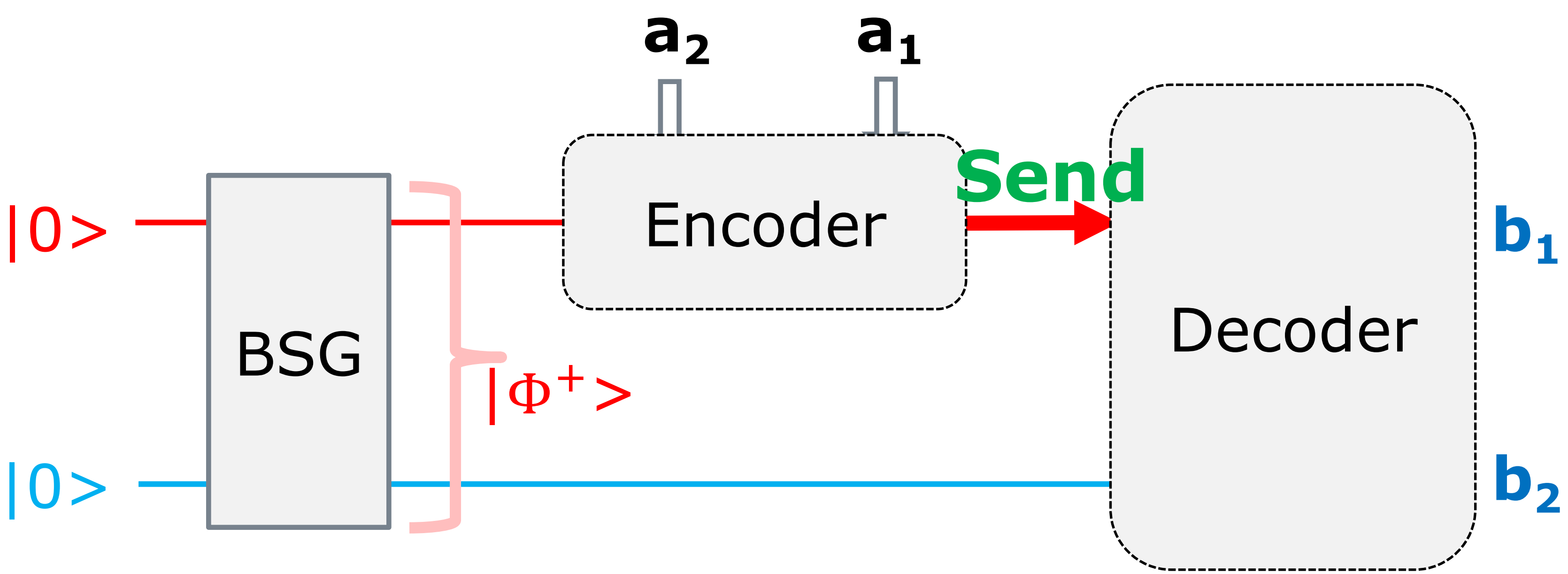


$BMG \circ BSG = I$



a_2a_1	Encoded		b_2b_1
0 0	$\|\Phi^+\rangle$	$BMG\|\Phi^+\rangle = \|00\rangle$	0 0
0 1	$\|\Phi^-\rangle$	$BMG\|\Phi^-\rangle = \|10\rangle$	0 1
1 0	$\|\Psi^+\rangle$	$BMG\|\Psi^+\rangle = \|01\rangle$	1 0
1 1	$\|\Psi^-\rangle$	$BMG\|\Psi^-\rangle = \|11\rangle$	1 1

AliceからBobにqubit を送ることで、Aliceの古典ビットa_2a_1 はBobのb_2b_1に送られる



a_2a_1	b_2b_1
0 0	0 0
0 1	0 1
1 0	1 0
1 1	1 1


量子テレポーテーション

量子テレポーテーション

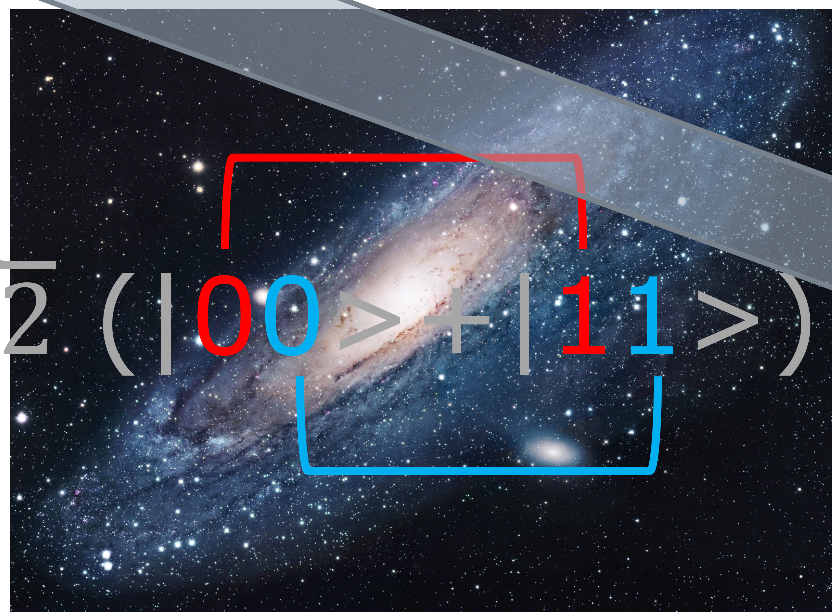
- AliceとBobは、ずいぶん昔にあっていたのだが、今は、遠くに離れて住んでいる。
- 一緒にいた時に、EPRペアを作って、別れる時に、それぞれがEPRペアの一つのqubitを持つようにした。
- 数年経ってから、Bobは遠くにいるのだが、Aliceのミッションは受け取ったqubit $|\psi>$をBobに送ることだった。
- 彼女は、qubitの状態を知らない。さらに、Bobには、古典的な手段でしか情報を送れない。
- この時、Aliceは、このミッションを遂行できるだろうか？

量子テレポーテーション

$|\Psi\rangle$

Alice

$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle+|11\rangle)$



$$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle+|11\rangle)$$

$|\Psi\rangle$?

Bob

$1/\sqrt{2}\,(|00\rangle+|11\rangle)$

量子テレポーテーションが可能とすること

- Aliceは、Bobに送らなければならない そのqubit |Ψ⟩ の状態を知らない。知ろうとして、それを観測すれば、その状態は失われてしまう。
- たとえ彼女が|Ψ⟩の状態を知っていたとしても、 |Ψ⟩の状態を正確に記述するには、無限の量の古典情報が必要になる。それをBobに伝えるには無限の時間が必要になる。

- 量子テレポーテーションは、エンタングルしたEPRペアを利用して、ほんの少しの古典的コミュニケーションの手間だけで、AliceがBobに |Ψ⟩ の状態を送ることを可能にする。

量子テレポーテーション Aliceが行うこと

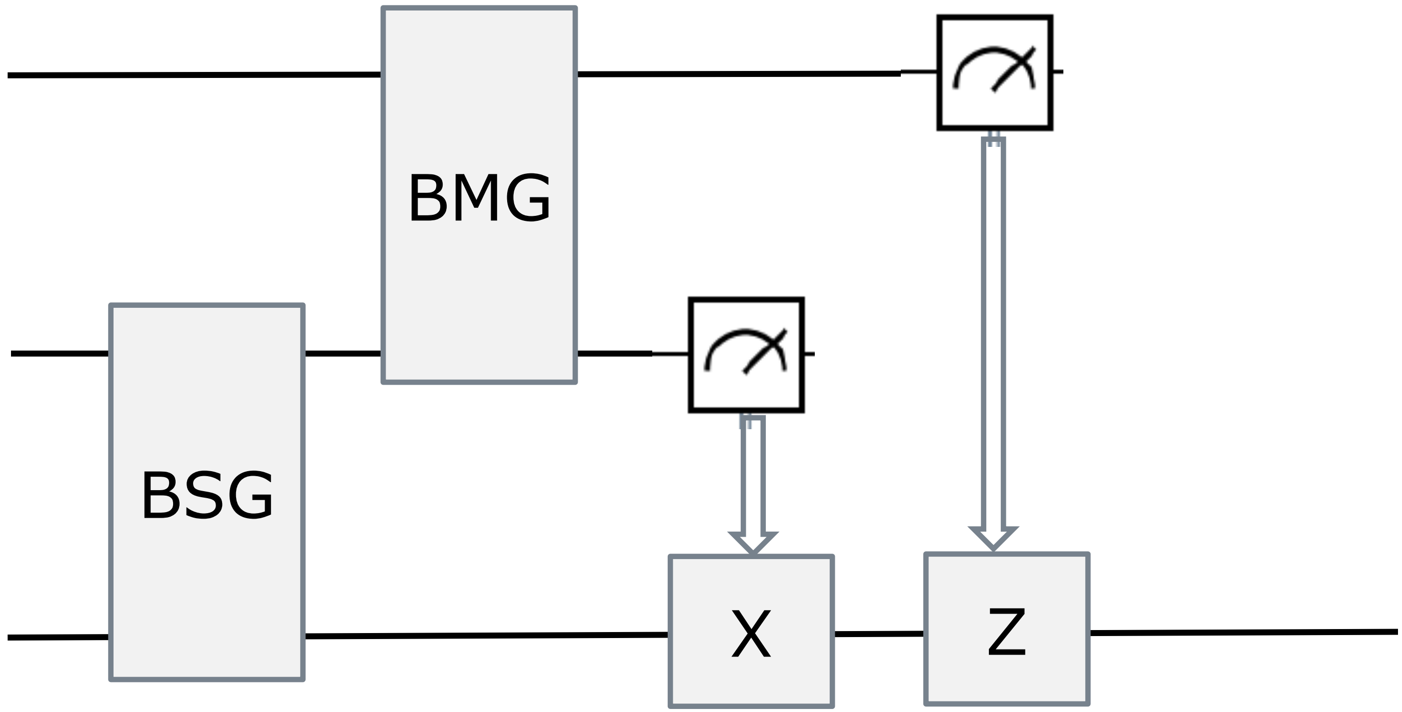
- Aliceは、彼女の持つEPRペアの片方に作用して、彼女が持つ二つのqubitを測定して、四つの可能な古典的結果 00, 01, 10, 11 を得る。
- 彼女は、この情報を、古典的な手段でBobに送る。
- Aliceの古典的なメッセージに基づいて、Bobは四つのうち一つの操作を選んで彼のEPRペアの片方に適応する。
- 驚くべきことに、それだけで、Bobはオリジナルの状態 $|\Psi\rangle$ を復元できるのである。

量子テレポーテーション
Bobが行うこと

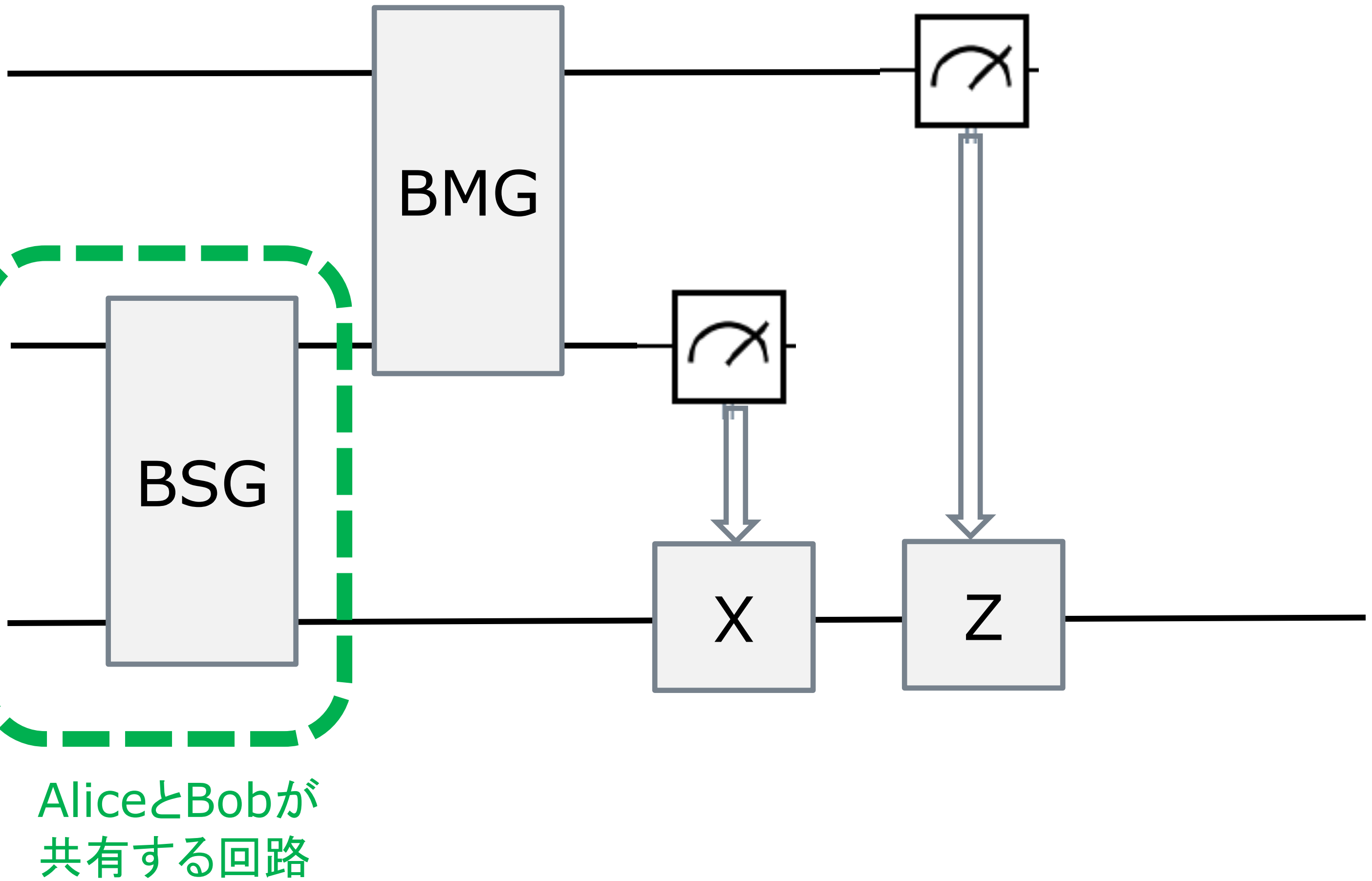
- Aliceの出力の測定に従って、Bobのqubitは四つの可能な状態をとることがわかる。
- もちろん、どの状態にあるかを知るためには、BobはAliceの測定の結果を知らされていなければならない。この事実によって、情報の伝達が光より速くなることは避けられることになる。
- いったんBobが測定の結果を知れば、Bobはその状態を、適当な量子ゲートを適応して「修正」して|Ψ⟩を復活できる。
- 例えば、測定の結果が00であれば、Bobは何もする必要はない。測定が01の時には、Xゲートを適用すればいい。10ならZゲートを適用すればいい。もし、11ならば、最初にXゲートを、続いてZゲートを適用すればいい。

量子テレポーテーション回路の概観

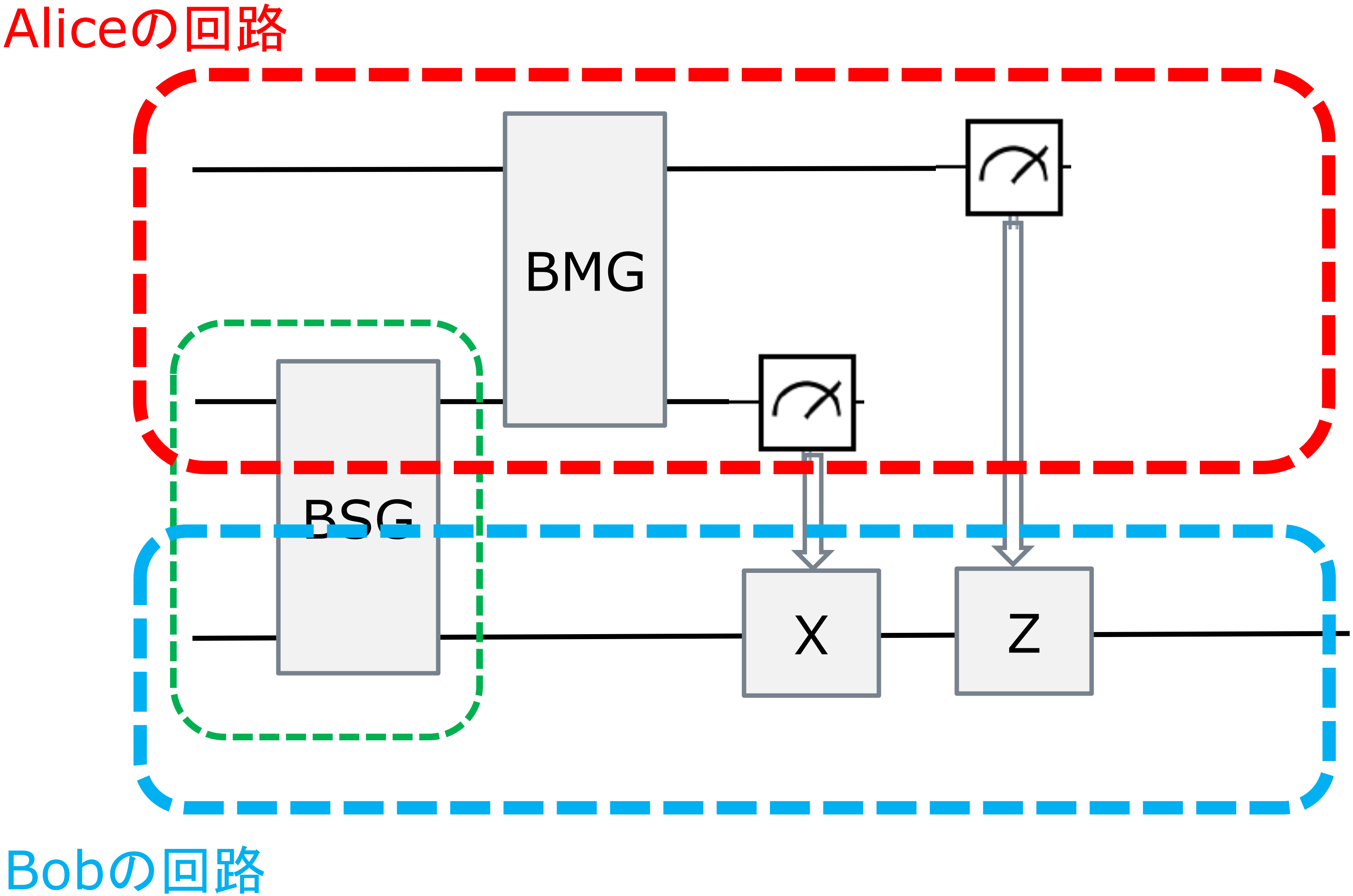
量子テレポーテーション回路



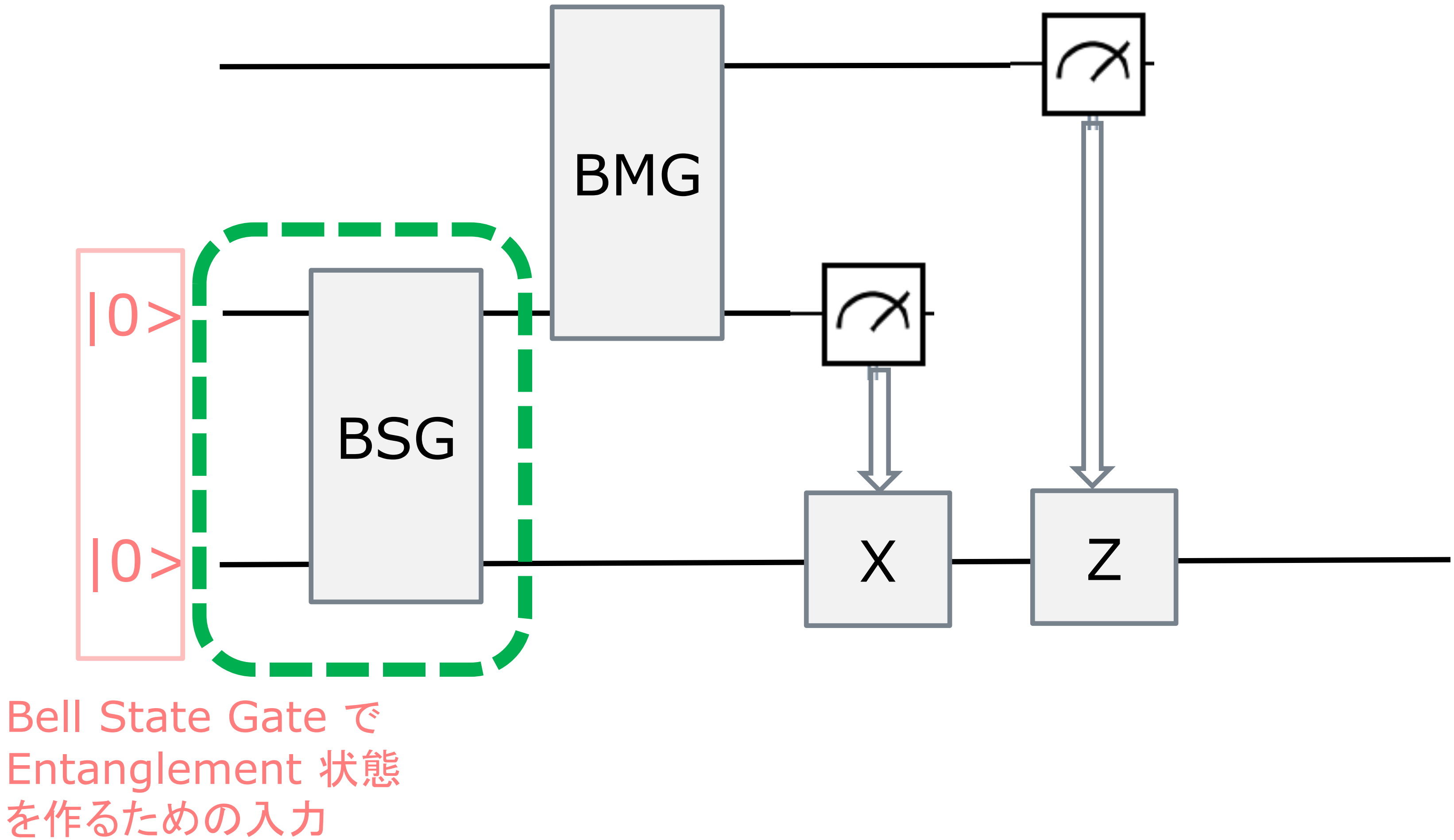
量子テレポーテーション回路



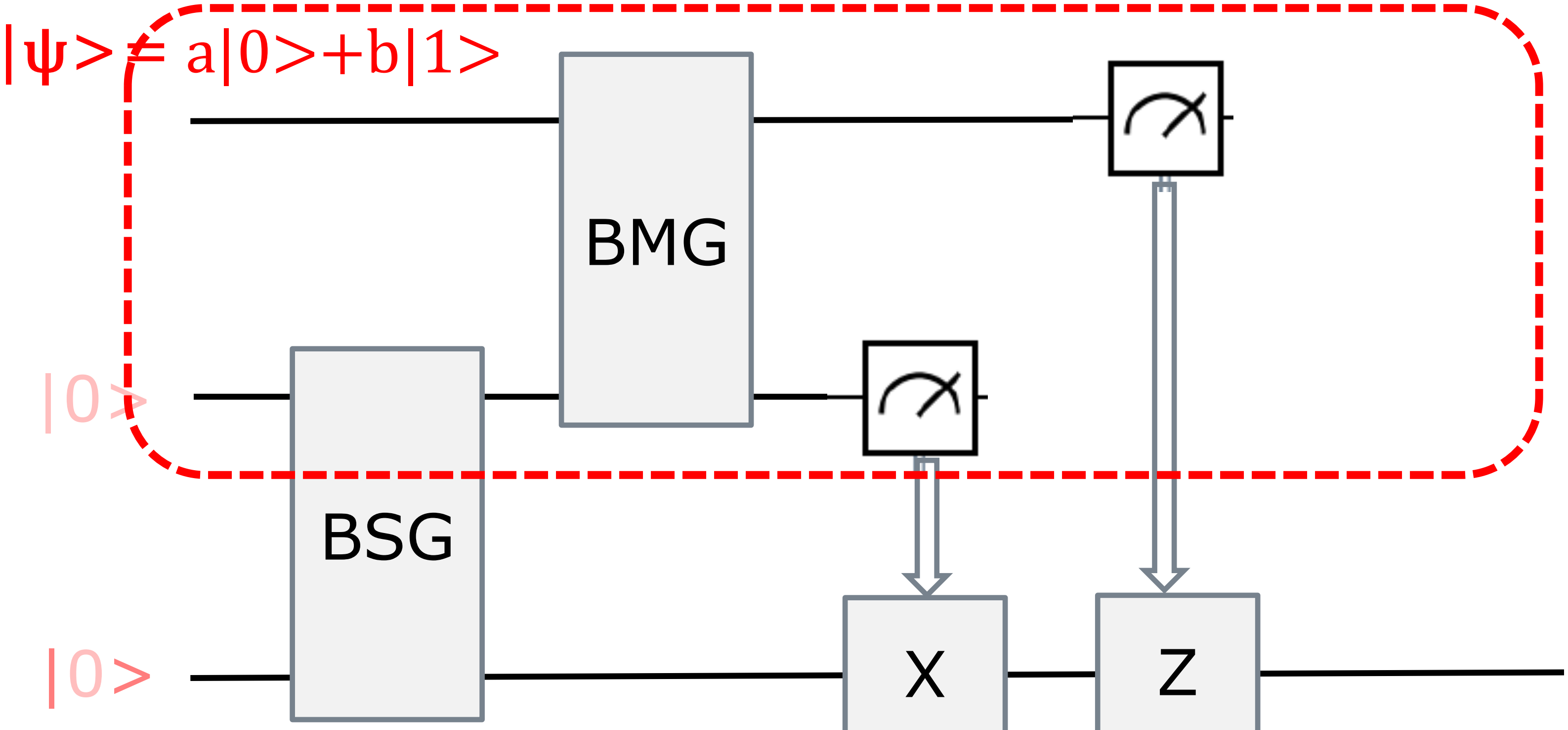
量子テレポーテーション回路



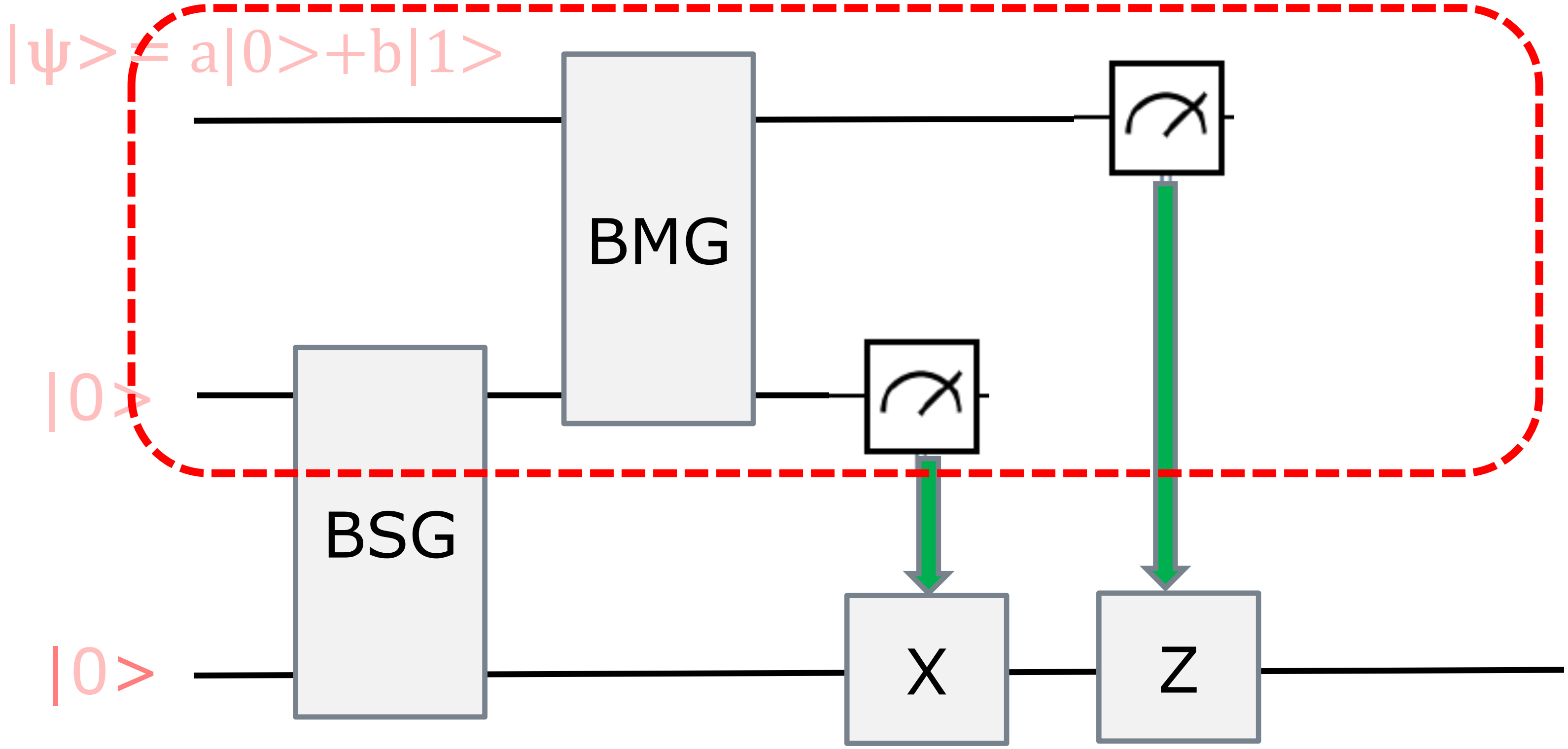
量子テレポーテーション回路への入力
エンタングルメント状態を作る



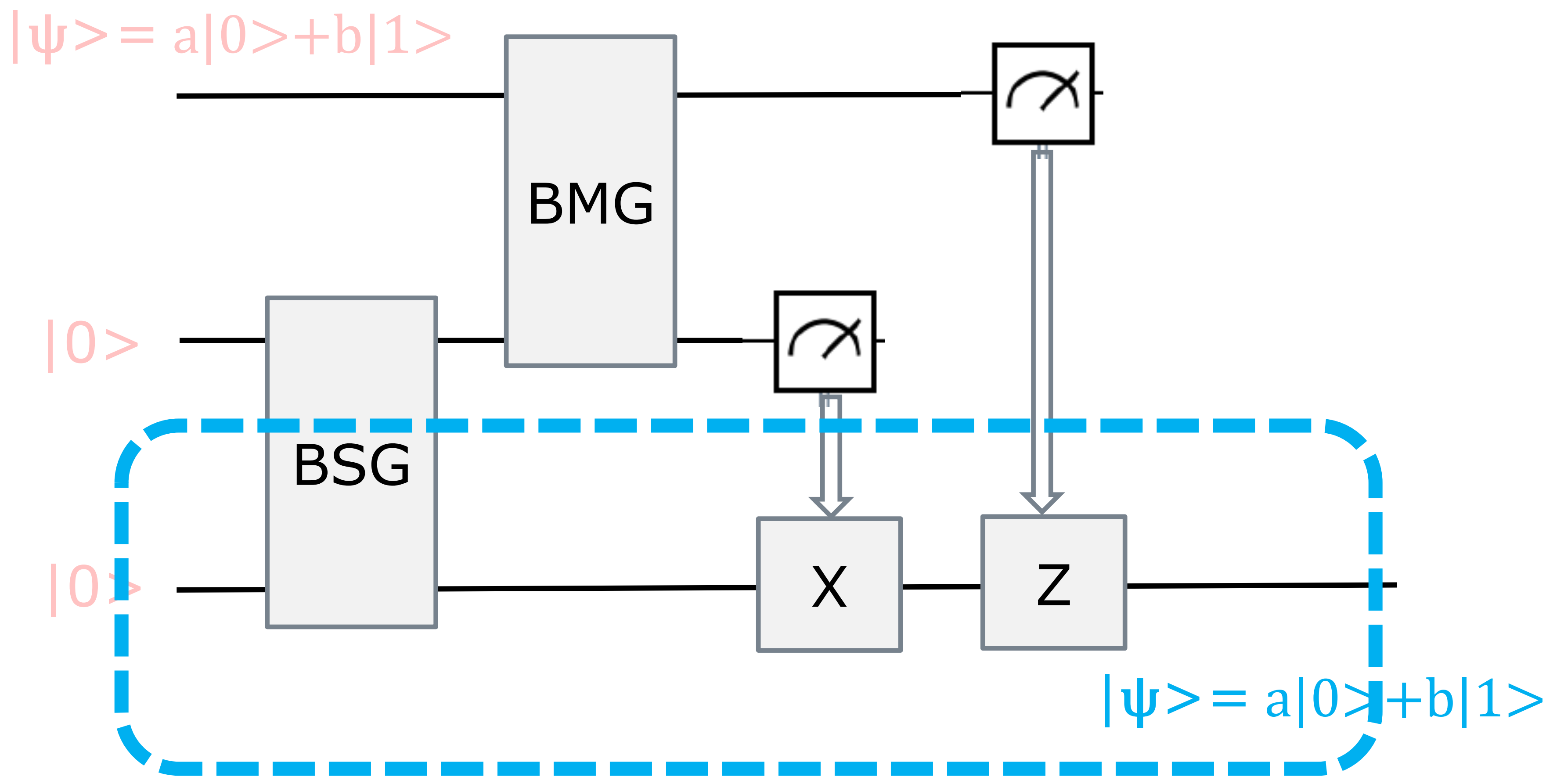
量子テレポーテーション回路へのAliceの入力



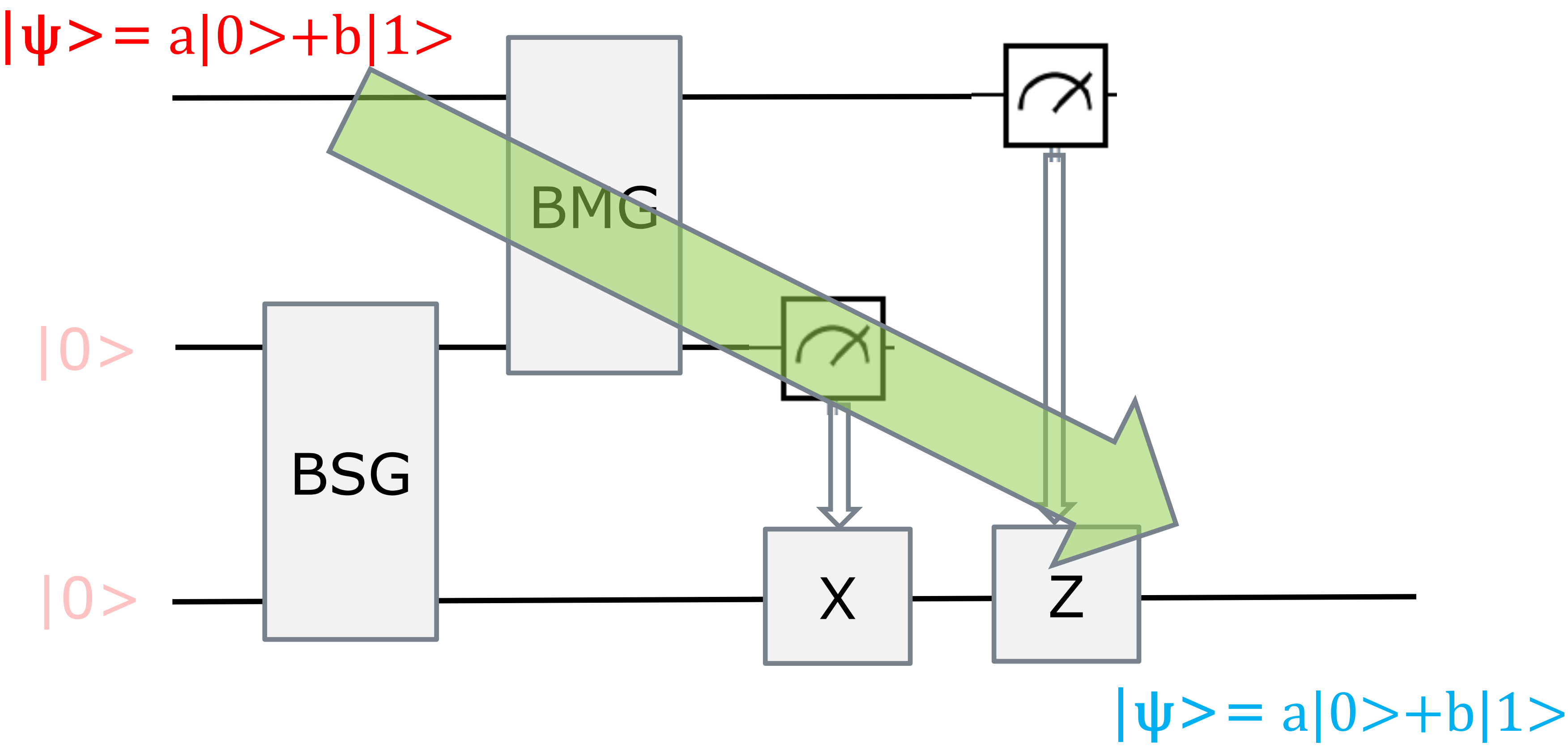
Aliceは、観測結果をBobに送る



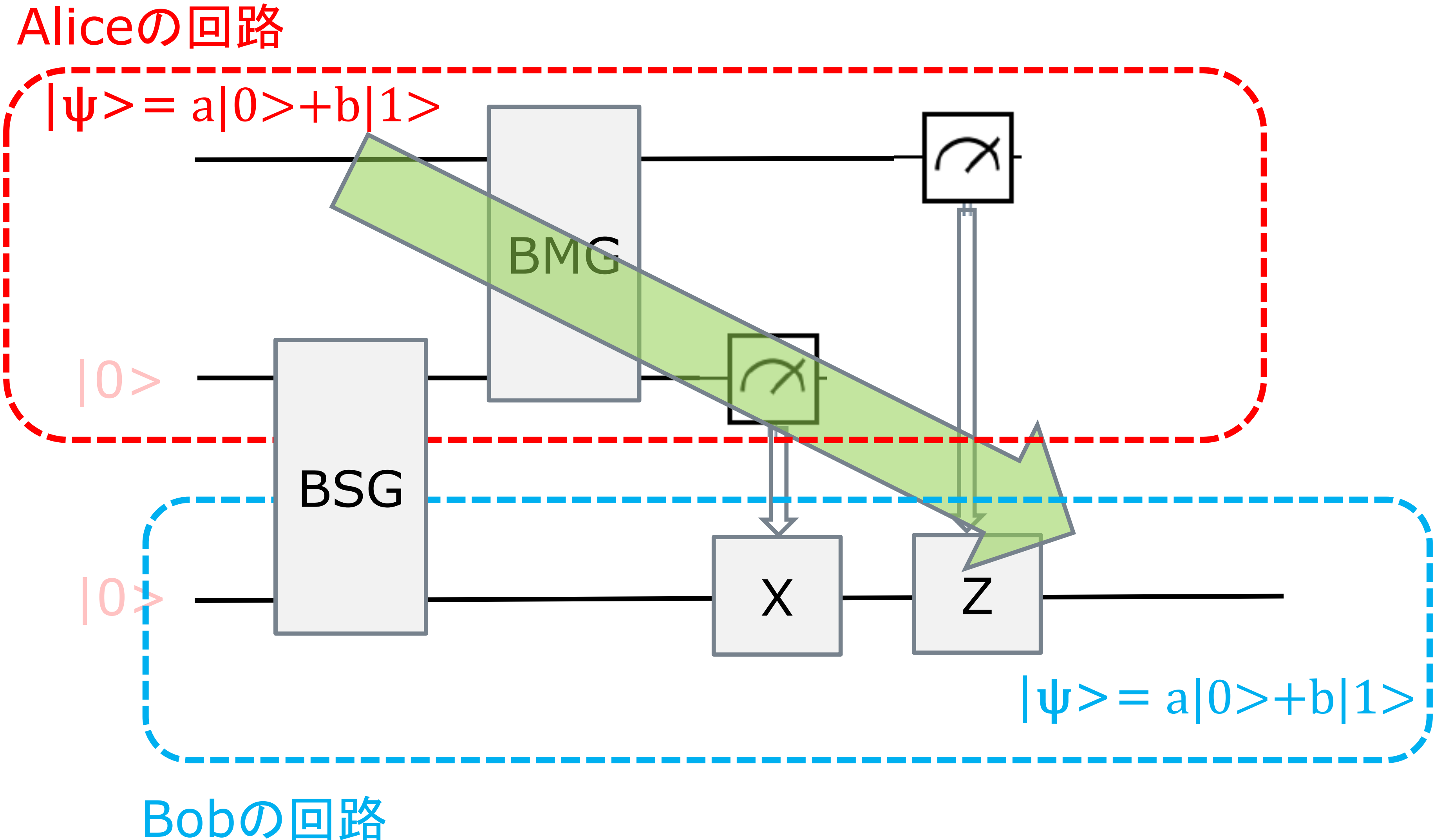
Bobの回路の出力



量子テレポーテーション回路が行ったこと



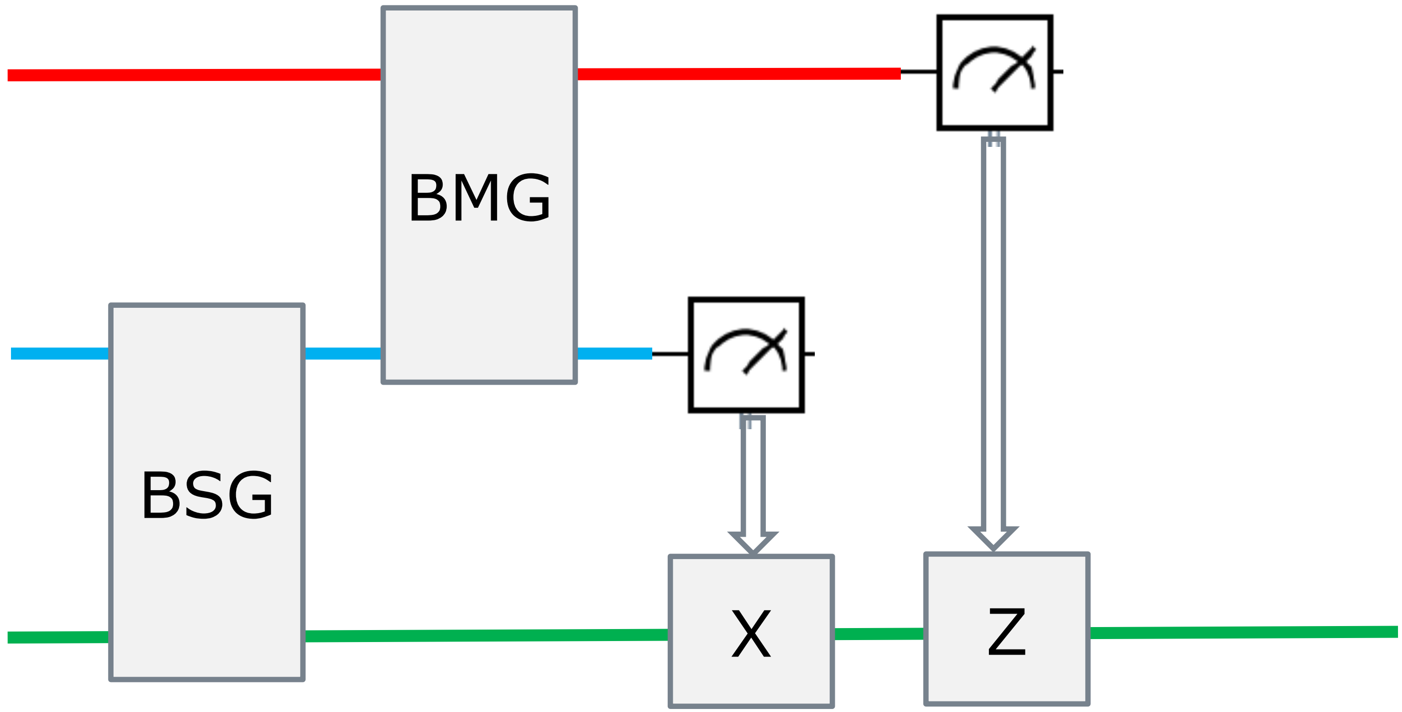
量子テレポーテーション回路が行ったこと



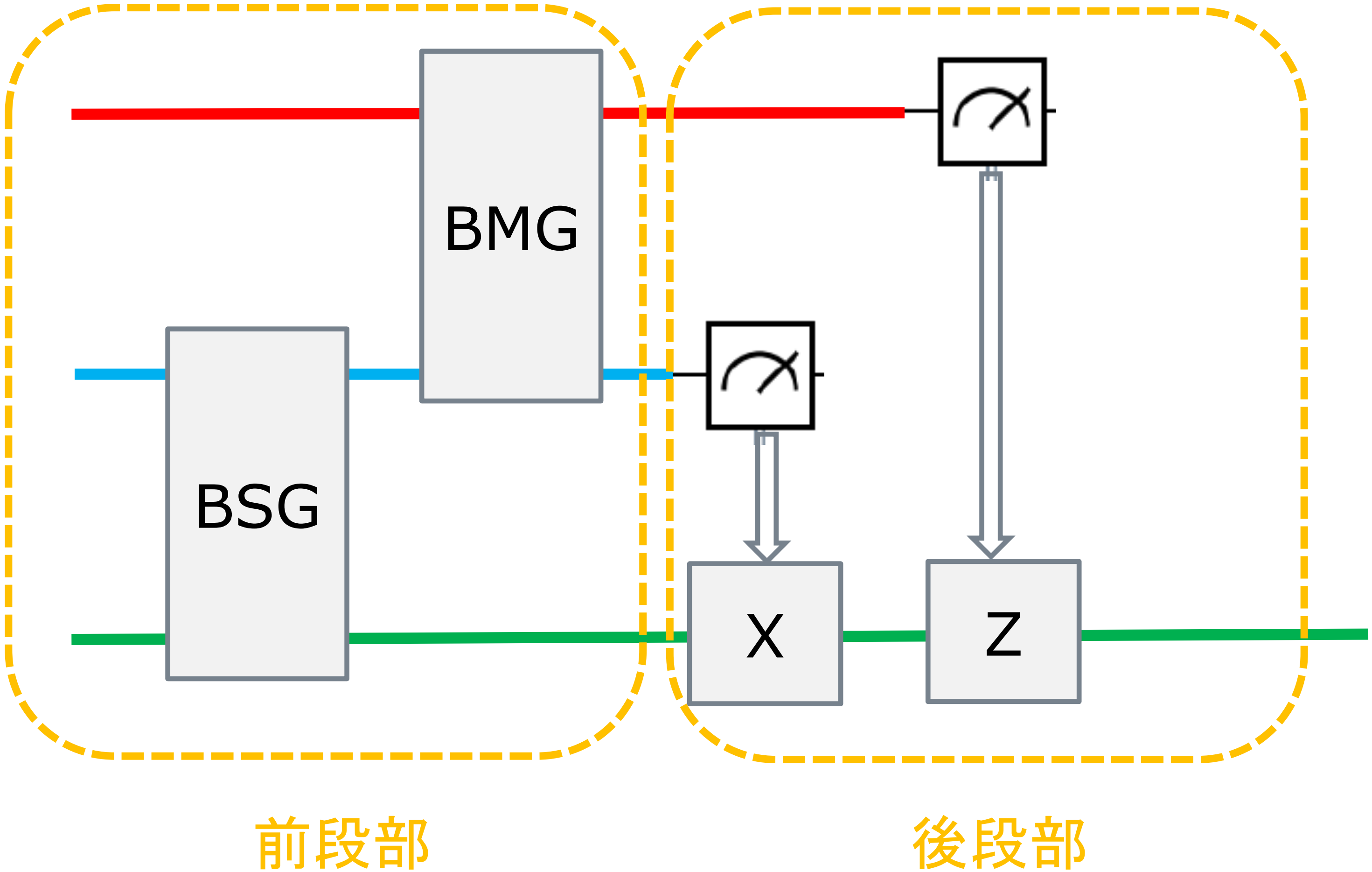
AliceとBobは、いくら離れていてもいい

実際に計算するための準備

計算を分かりやすくするために
レジスターごとに、色をつけておこう



回路を前段部と後段部にわけて計算する



最も基本的な2-qubittsの
エンタングルメント状態をBell Stateと呼ぶ

- 最も基本的な2-qubittsのエンタングルメント状態をBell Stateと呼ぶ。次の四つがある。

$$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^+\rangle$$

$$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^-\rangle$$

$$(|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^+\rangle$$

$$(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^-\rangle$$

Bell Stateを出力するゲート
Bell State Gate

- Bell Stateを出力するゲートをBell State Gateと呼ぶ。
  Bell State Gate を**BSG**で表すと、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{BSG}|00> = (|00>+|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^+>$$

$$\mathbf{BSG}|01> = (|01>+|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^+>$$

$$\mathbf{BSG}|10> = (|00>-|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^->$$

$$\mathbf{BSG}|11> = (|01>-|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^->$$

2-qubits の計算基底に対する Bell Measure ゲートの働き

$$\mathbf{BMG}|00> = (|00>+|10>)\,/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{BMG}|01> = (|01>+|11>)\,/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{BMG}|10> = (|01>-|11>)\,/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{BMG}|11> = (|00>-|10>)\,/\sqrt{2}$$

Bell Stateに対する
Bell Measure Gateの働き

$$\mathrm{BMG}|\Phi^{+}> = \mathrm{BMG}\,(|00>+|11>)\,/\sqrt{2} = |00>$$

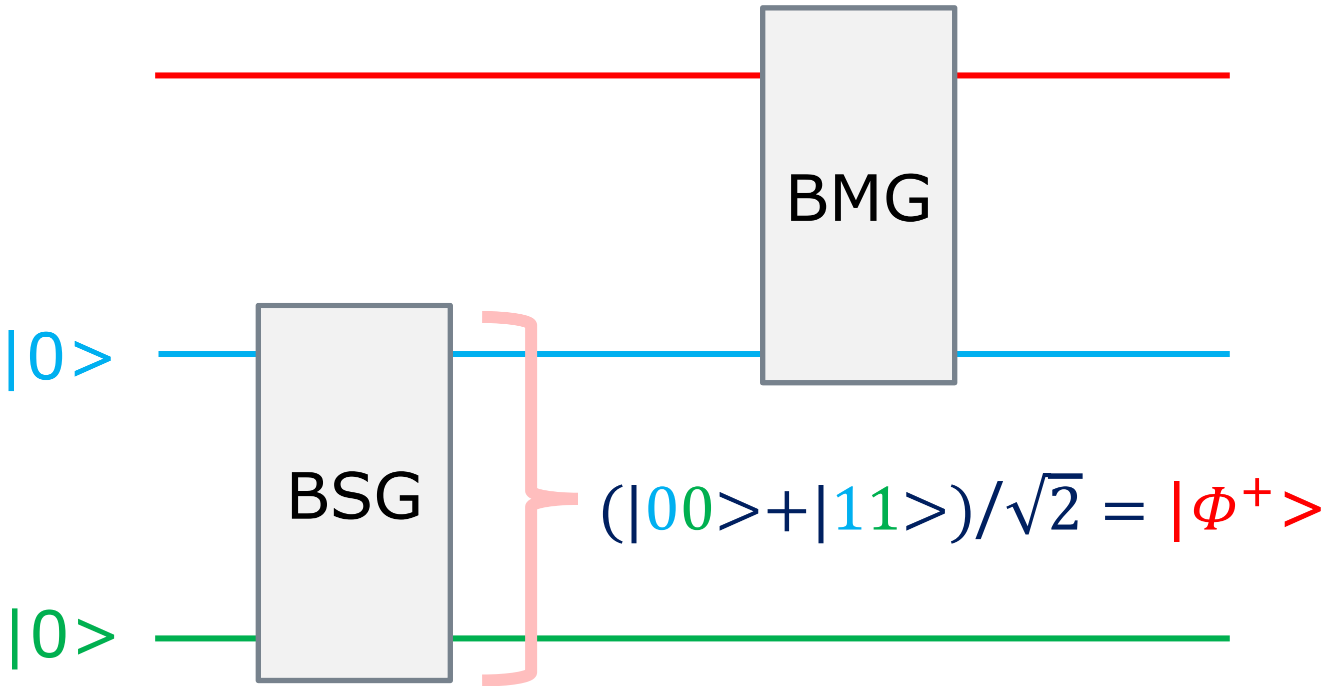
$$\mathrm{BMG}|\Psi^{+}> = \mathrm{BMG}\,(|01>+|10>)\,/\sqrt{2} = |01>$$

$$\mathrm{BMG}|\Phi^{-}> = \mathrm{BMG}\,(|00>-|11>)\,/\sqrt{2} = |10>$$

$$\mathrm{BMG}|\Psi^{-}> = \mathrm{BMG}\,(|01>-|10>)\,/\sqrt{2} = |11>$$

量子テレポーテーション回路の前段部を計算する

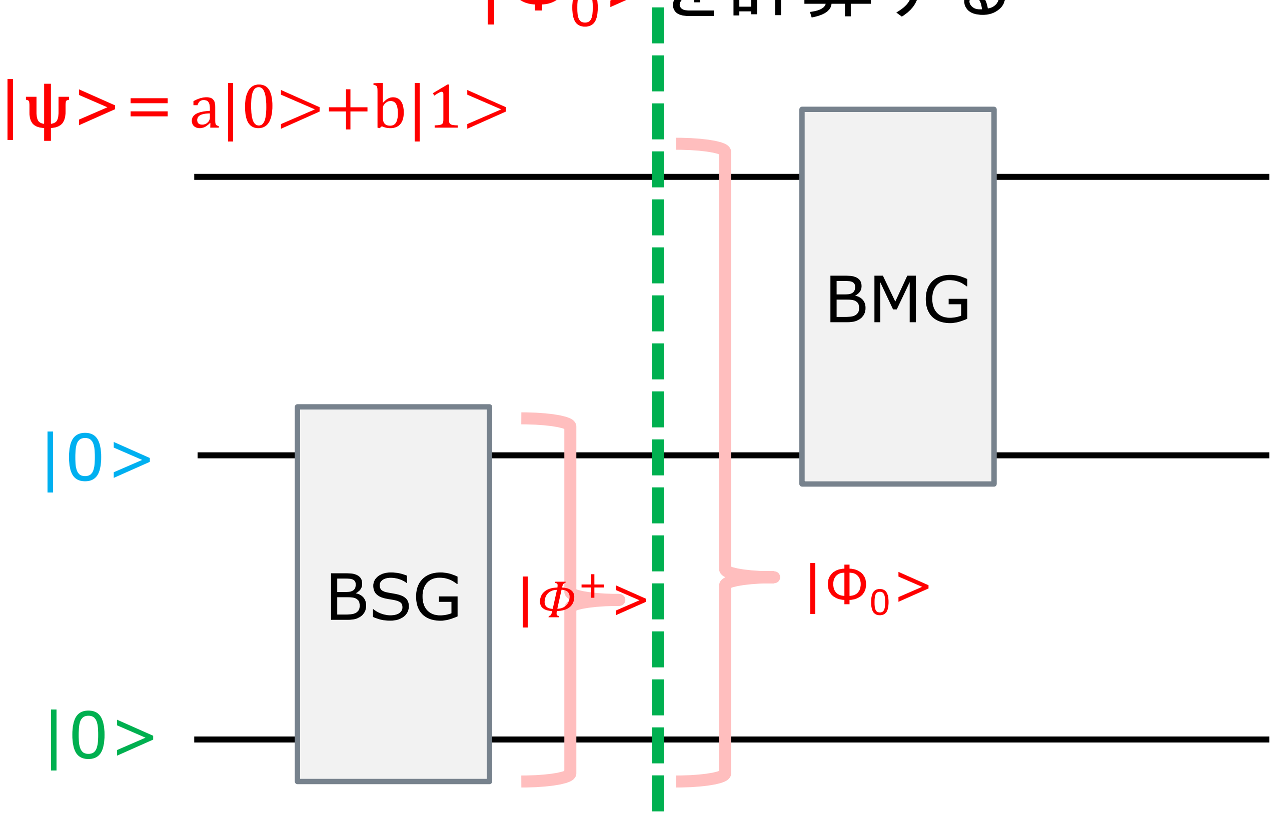
量子テレポーテーション回路の前段部 1
エンタングルメント状態を作る



BSG|00>=(|00>+|11>)/$\sqrt{2}$ エンタングルメント

量子テレポーテーション回路の前段部 2

$|\Phi_0>$を計算する



$$|\Phi_0> = |\psi>\otimes|\Phi^+>$$

$|\Phi_0>$を計算する

$|\psi>= a|0>+b|1>$, $|\Phi^+>= (|00>+|11>)/\sqrt{2}$ だから、

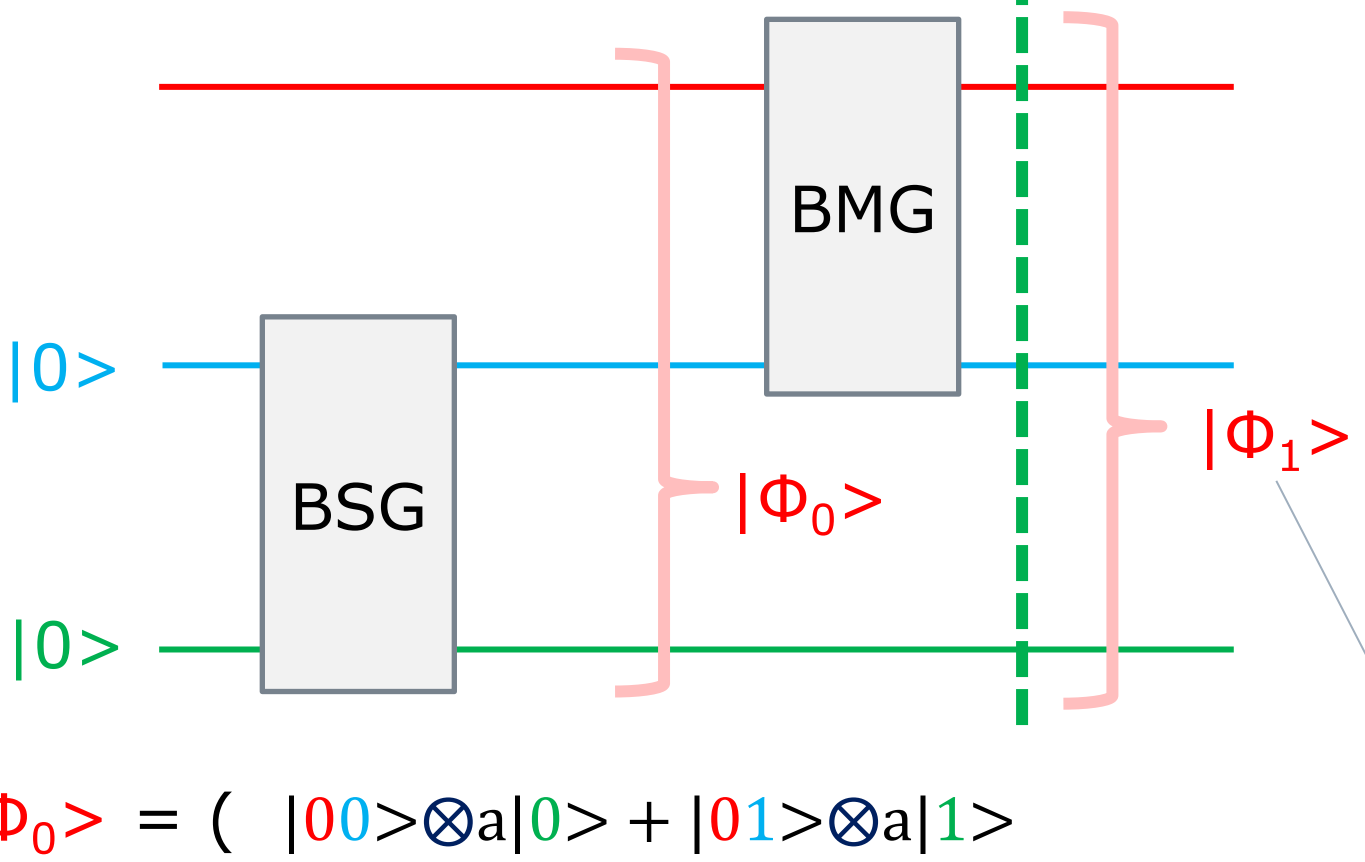
$$|\Phi_0> = |\psi>\otimes|\Phi^+>$$
$$= (a|0>+b|1>)\otimes(|00>+|11>)/\sqrt{2}$$
$$= (a|000> + a|011> + b|100> + b|111>)/\sqrt{2}$$

$$= \boxed{(|00>\otimes a|0> + |01>\otimes a|1> + |10>\otimes b|0> + |11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}}$$

★

量子テレポーテーション回路の前段部 3

$|\Phi_0>$から$|\Phi_1>$を計算する



$$|\Phi_0> = (\ |00>\otimes a|0> + |01>\otimes a|1> + |10>\otimes b|0> + |11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$は、$|\Phi_0>$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$|\Phi_0>$から$|\Phi_1>$を計算する

$$|\Phi_0> \ = (\quad |00>\otimes a|0> + |01>\otimes a|1>$$
$$+ |10>\otimes b|0> + |11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$は、$|\Phi_0>$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$$|\Phi_1> \ = (BMG\,|00>\otimes a|0> + BMG|01>\otimes a|1>$$
$$+ BMG|10>\otimes b|0> + BMG|11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$を計算する

$BMG|00> = (|00>+|10>)/\sqrt{2}$
$BMG|01> = (|01>+|11>)/\sqrt{2}$
$BMG|10> = (|01>-|11>)/\sqrt{2}$
$BMG|11> = (|00>-|10>)/\sqrt{2}$
であるから、

$$|\Phi_1> = (BMG|00>\otimes a|0> + BMG|01>\otimes a|1> + BMG|10>\otimes b|0> + BMG|11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$$= ((|00> + |10>) \otimes a|0> + (|01> + |11>) \otimes a|1> + (|01> - |11>) \otimes b|0> + (|00> - |10>) \otimes b|1>)/2$$

$$= (|00> (a|0> + b|1>) + |01> (a|1> + b|0>) + |10> (a|0> - b|1>) + |11> (a|1> - b|0>))/2$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> \ = (|00> (a|0> + b|1>) + |01> (a|1> + b|0>) + |10> (a|0> - b|1>) + |11> (a|1> - b|0>)) /2$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> \;=\; (|00> \boxed{(a|0> + b|1>)} + |01> \boxed{(a|1> + b|0>})$$
$$+\; |10> \boxed{(a|0> - b|1>)} + |11> \boxed{(a|1> - b|0>}) /2$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> \;=\; \Big(|00> \boxed{(a|0> + b|1>)} + |01> \boxed{(a|1> + b|0>)} + |10> \boxed{(a|0> - b|1>)} + |11> \boxed{(a|1> - b|0>)}\Big)/2$$

a|0>+b|1>

b|0>+a|1>

a|0>−b|1>

−b|0>+a|1>

$|\Phi_1\rangle$を変形する

$$|\Phi_1\rangle = (|00\rangle \boxed{(a|0\rangle + b|1\rangle)} + |01\rangle \boxed{(a|1\rangle + b|0\rangle)}$$
$$+ |10\rangle \boxed{(a|0\rangle - b|1\rangle)} + |11\rangle \boxed{(a|1\rangle - b|0\rangle)})/2$$

$$\begin{tikzcd}
a|0\rangle+b|1\rangle \arrow[r, "X"] \arrow[d, "Z"'] & b|0\rangle+a|1\rangle \\
a|0\rangle-b|1\rangle \arrow[r, "X"] & -b|0\rangle+a|1\rangle
\end{tikzcd}$$

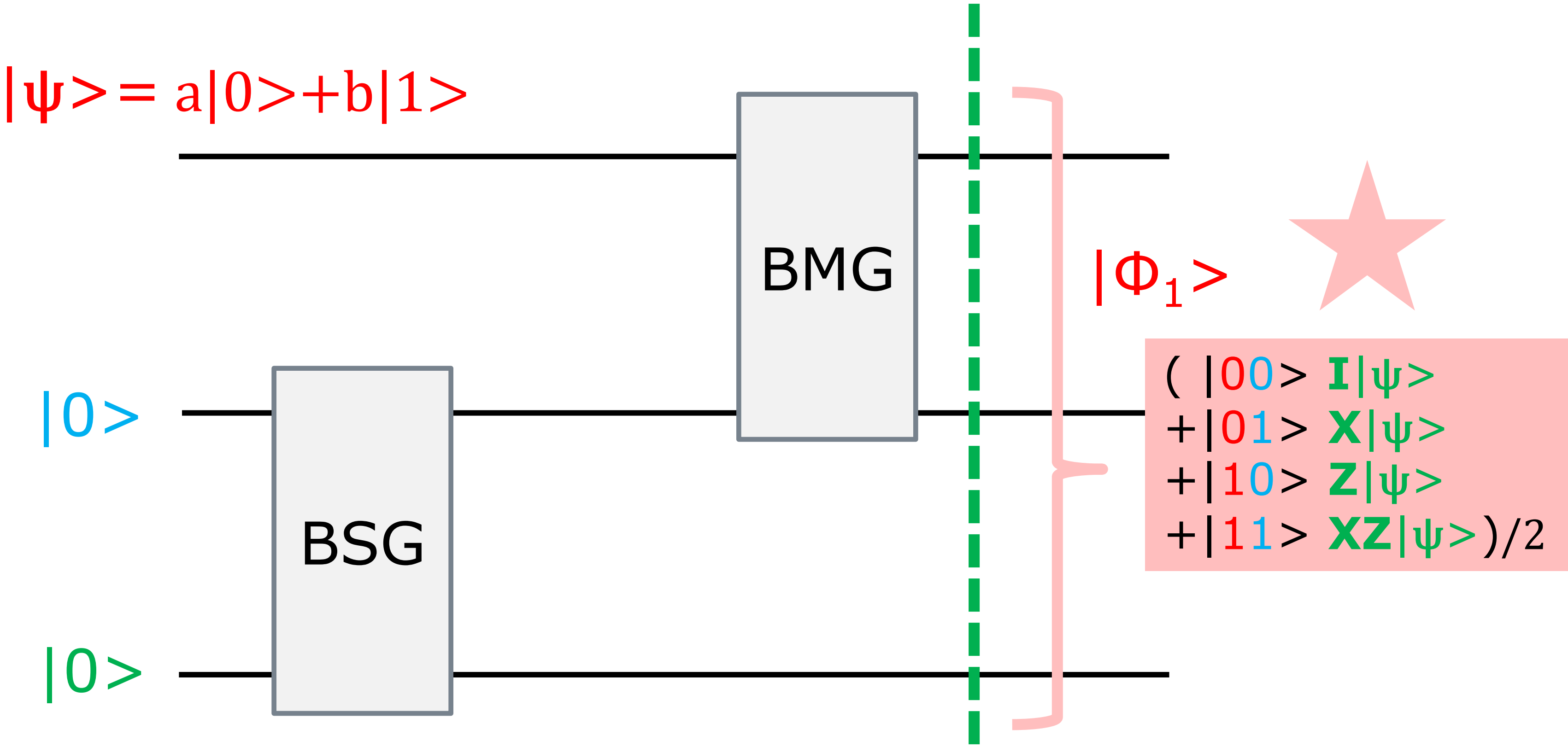
$|\Phi_1\rangle$を変形する

$$
\begin{aligned}
|\Phi_1\rangle = \big(&|00\rangle (a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle (a|1\rangle + b|0\rangle) \\
&+ |10\rangle (a|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle (a|1\rangle - b|0\rangle)\big)/2
\end{aligned}
$$

$$
= \boxed{\begin{aligned}
\big(&|00\rangle\, \mathbf{I}(a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle\, \mathbf{X}(a|0\rangle + b|1\rangle) \\
&+ |10\rangle\, \mathbf{Z}(a|0\rangle + b|1\rangle) + |11\rangle\, \mathbf{XZ}(a|0\rangle + b|1\rangle)\big)/2
\end{aligned}}
$$

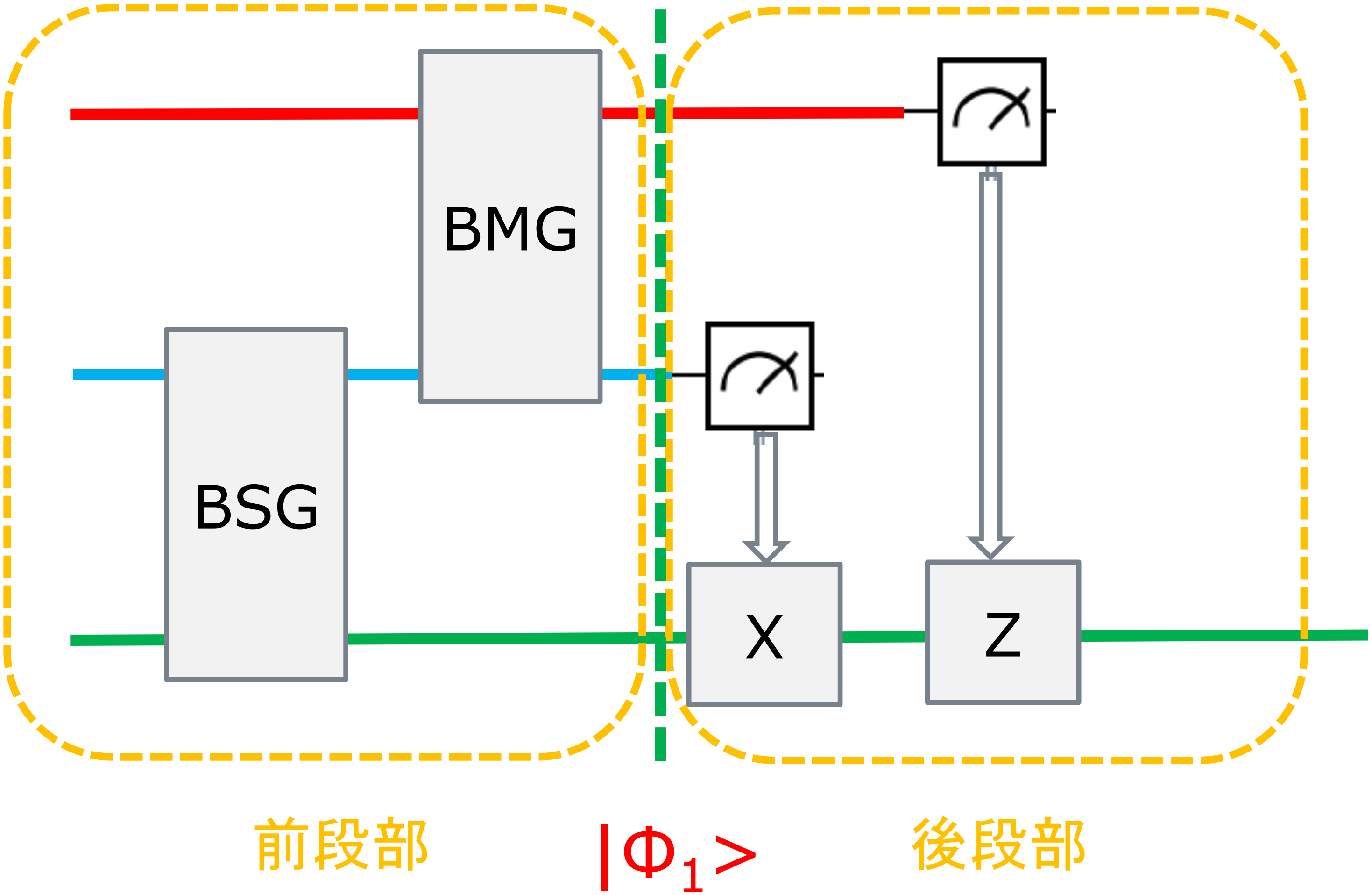
$$
\begin{tikzcd}
a|0\rangle+b|1\rangle \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, "\mathbf{Z}"'] & b|0\rangle+a|1\rangle \\
a|0\rangle-b|1\rangle \arrow[r, "\mathbf{X}"] & -b|0\rangle+a|1\rangle
\end{tikzcd}
$$

量子テレポーテーション回路の前段部



量子テレポーテーション回路の
後段部を計算する

回路を前段部と後段部にわけて計算する

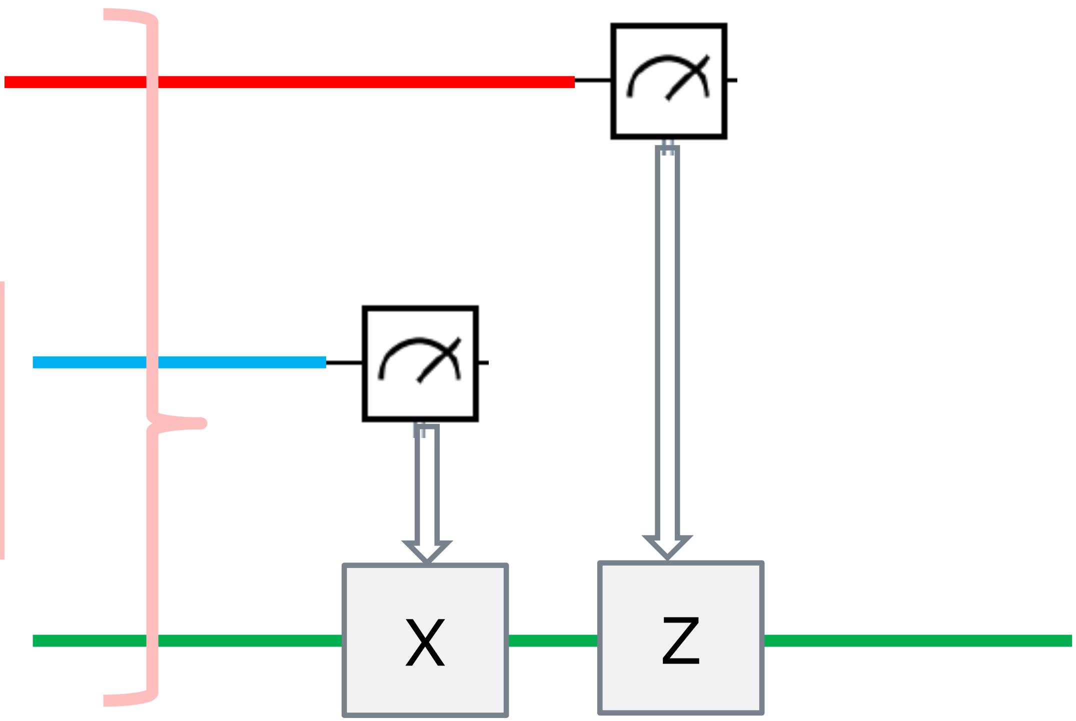


回路の後段部

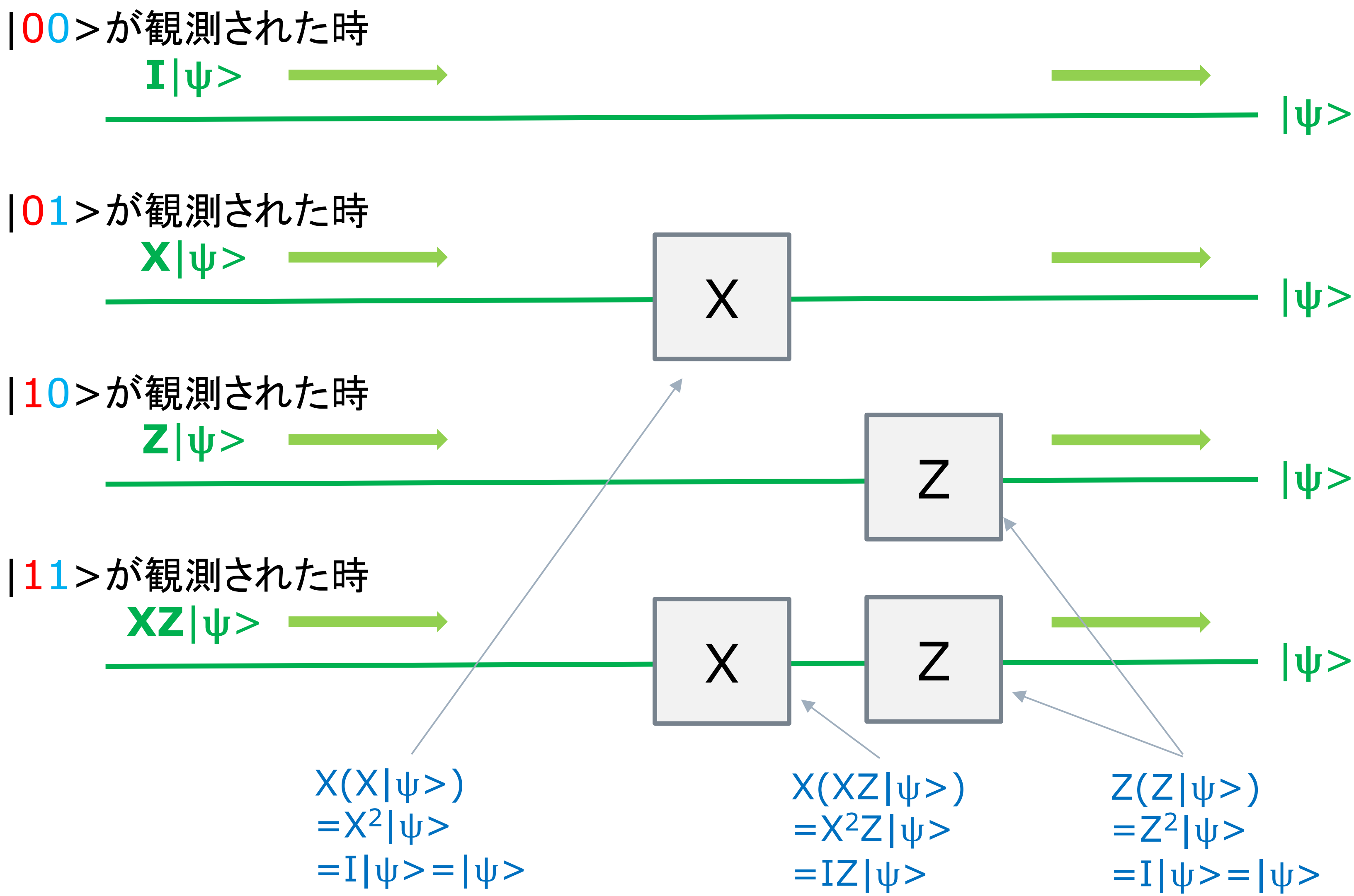
前段部から引き継いだ
回路の状態

$|\Phi_1\rangle$

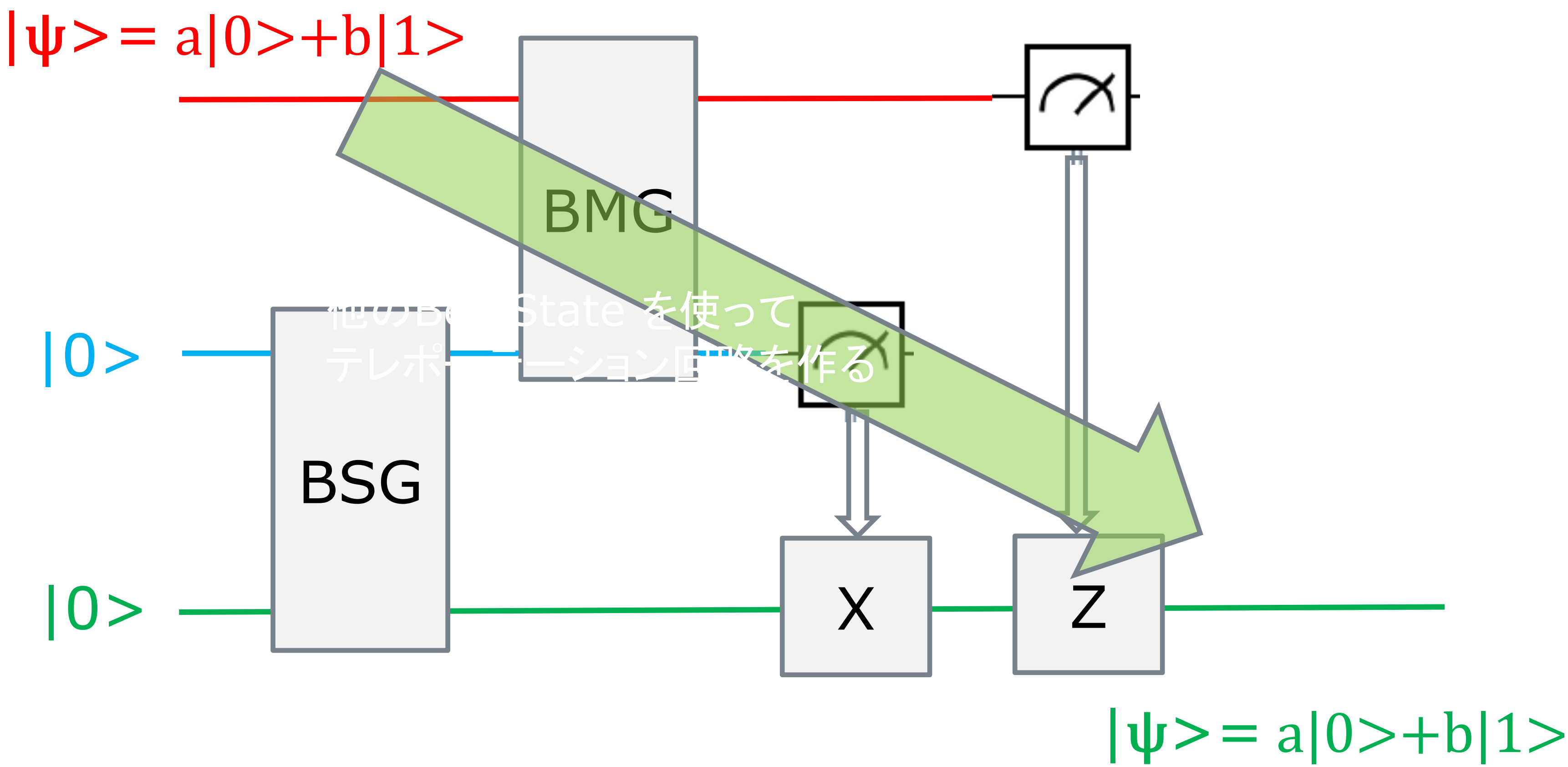
$$
\begin{aligned}
(\ &|00\rangle\ \mathbf{I}|\psi\rangle \\
+&|01\rangle\ \mathbf{X}|\psi\rangle \\
+&|10\rangle\ \mathbf{Z}|\psi\rangle \\
+&|11\rangle\ \mathbf{XZ}|\psi\rangle)/2
\end{aligned}
$$



$X^2 = Z^2 = I$ を使うとどの場合でも、|ψ>が出力されることがわかる

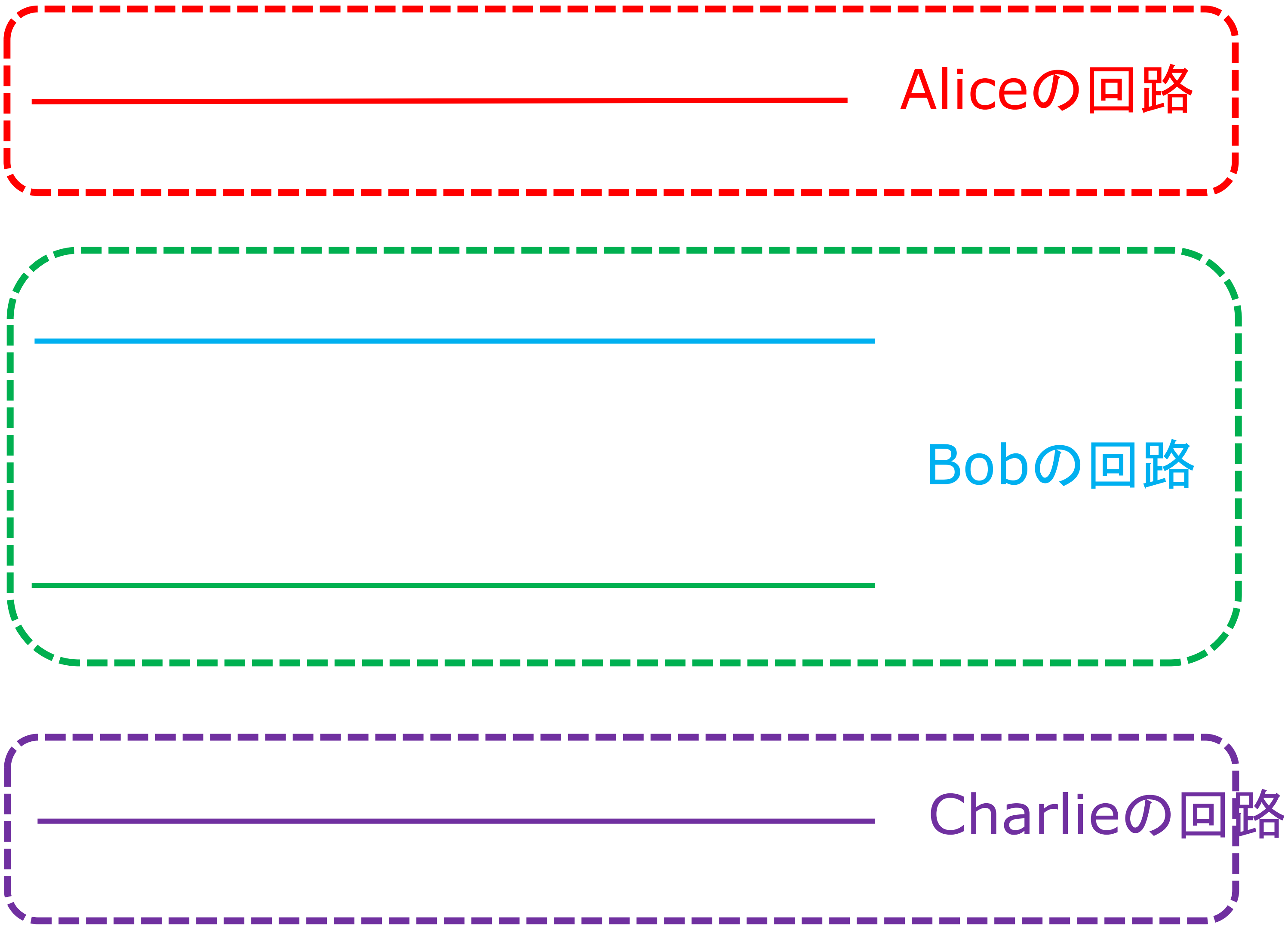


量子テレポーテーション回路

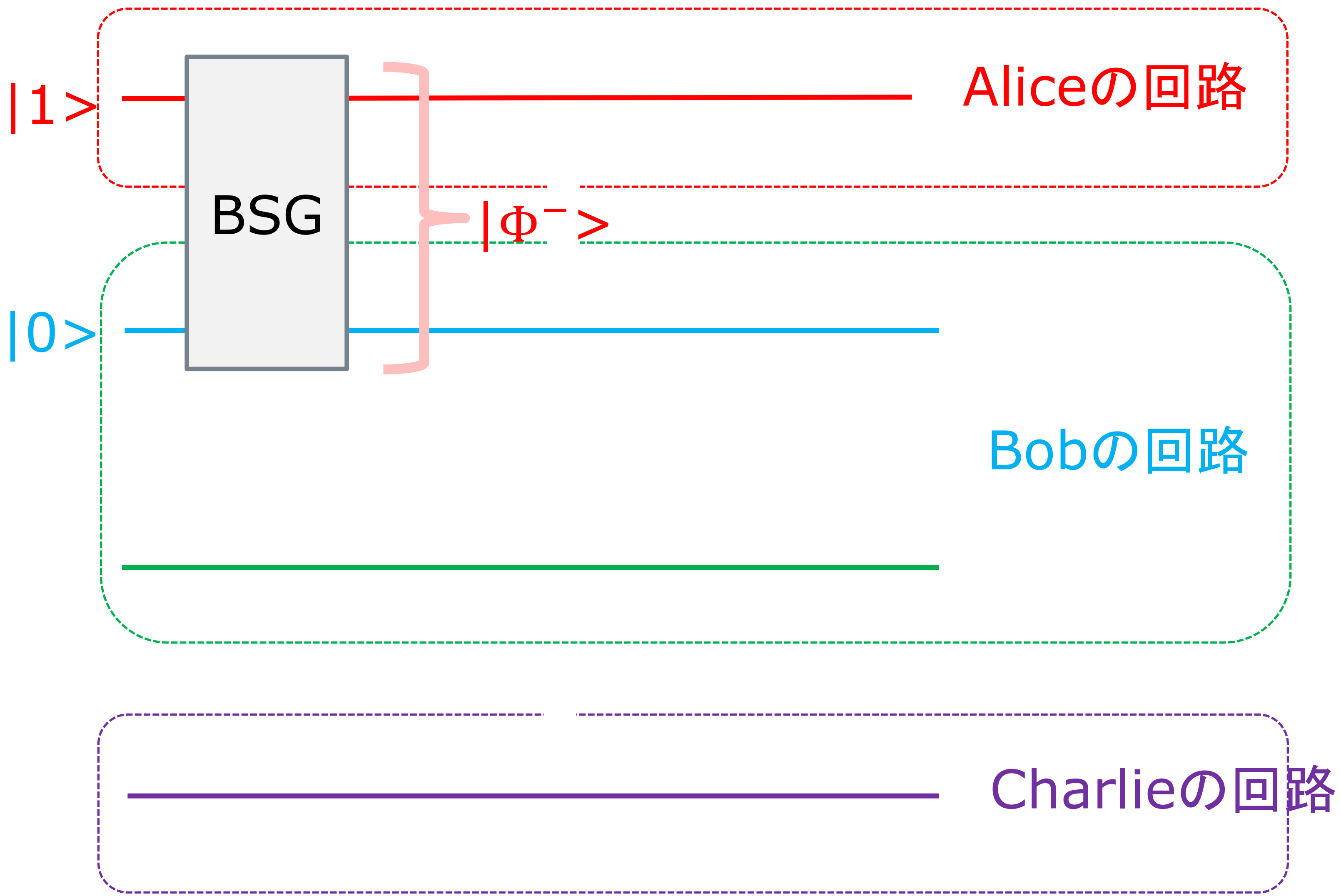


Entanglement Swapping

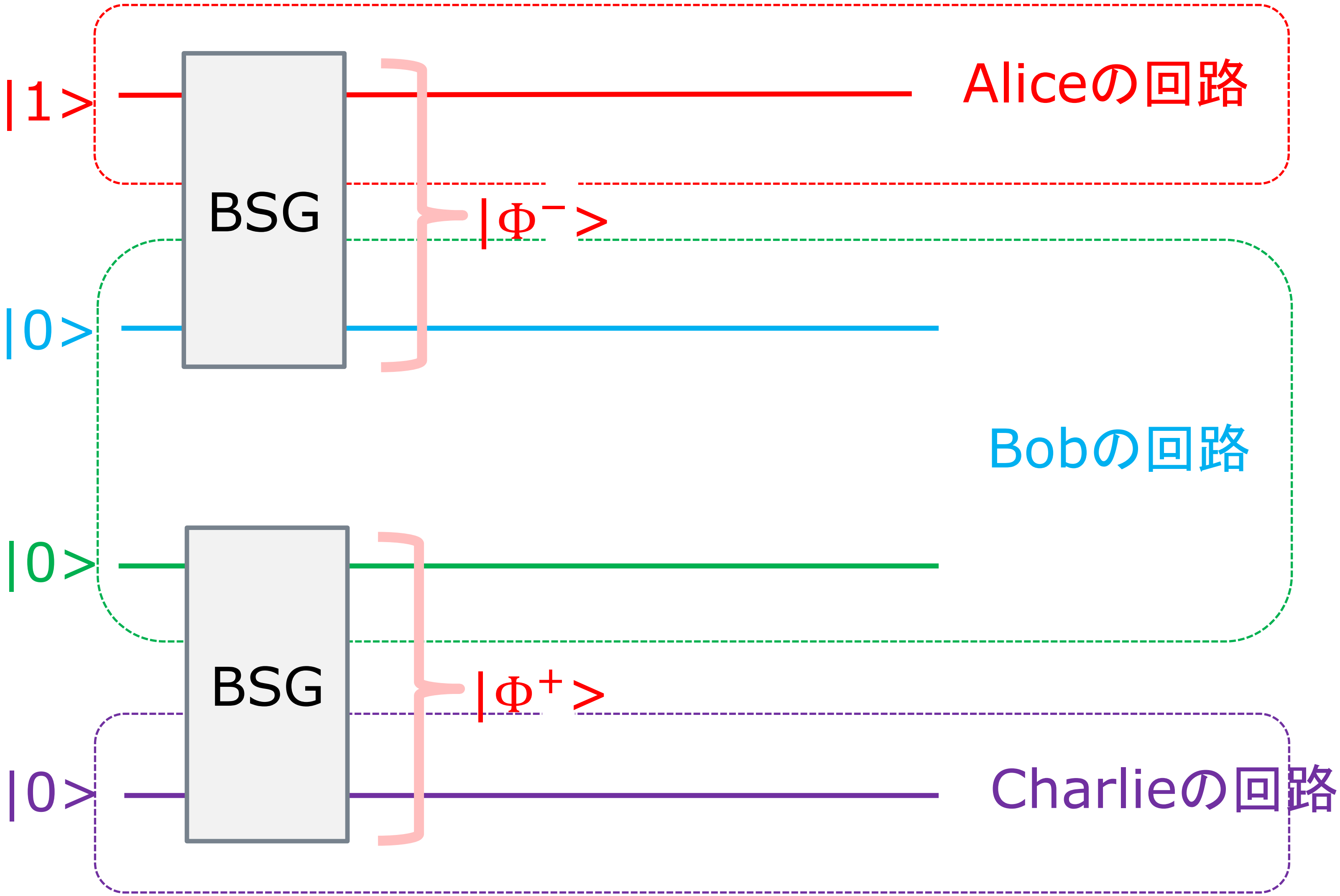
AliceとBobとCharlieが
次のような回路を持っているとしよう



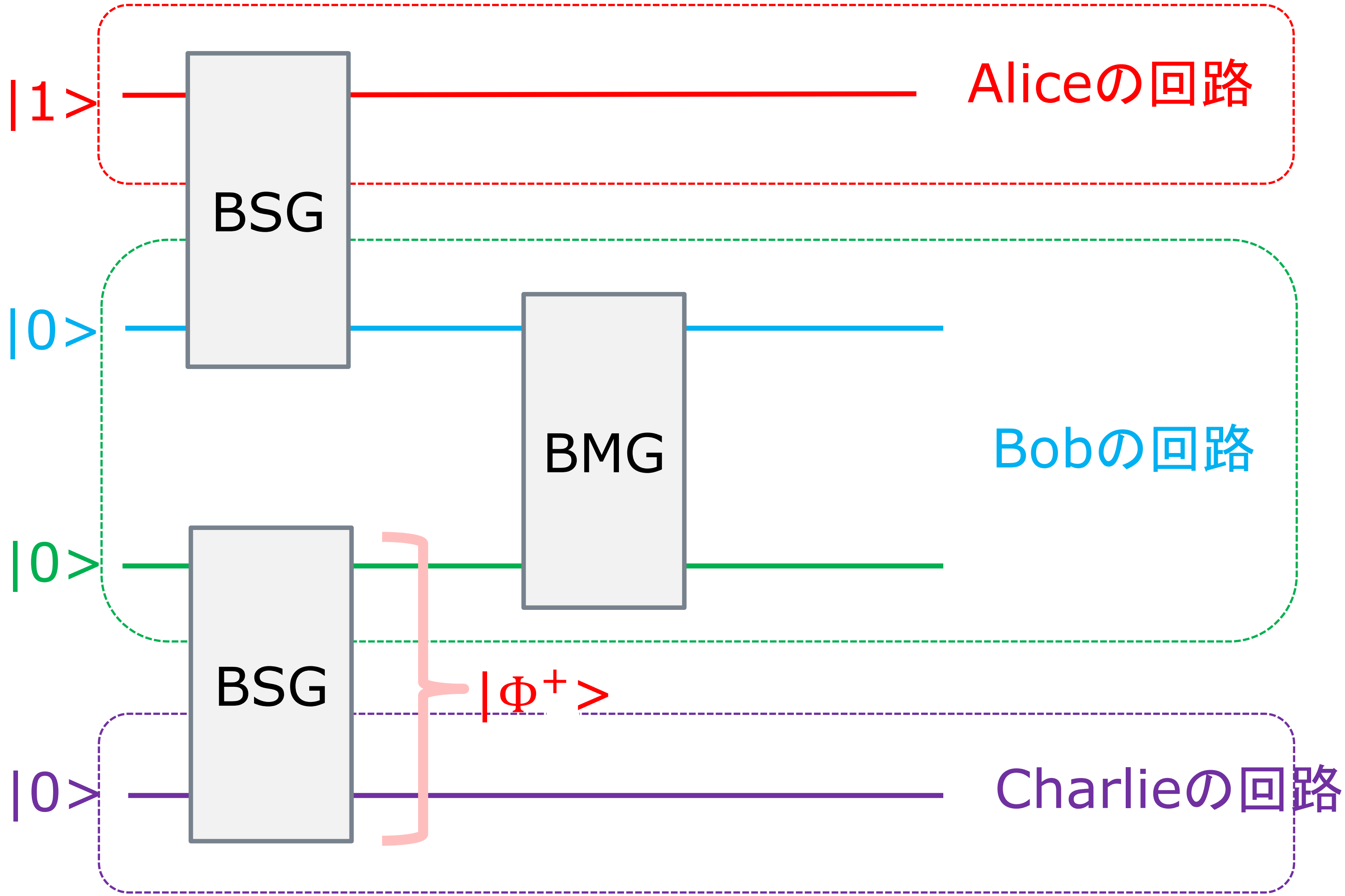
まず、AliceとBobは、Bell State $|\Phi^{-}>$で、
エンタングルしているとする



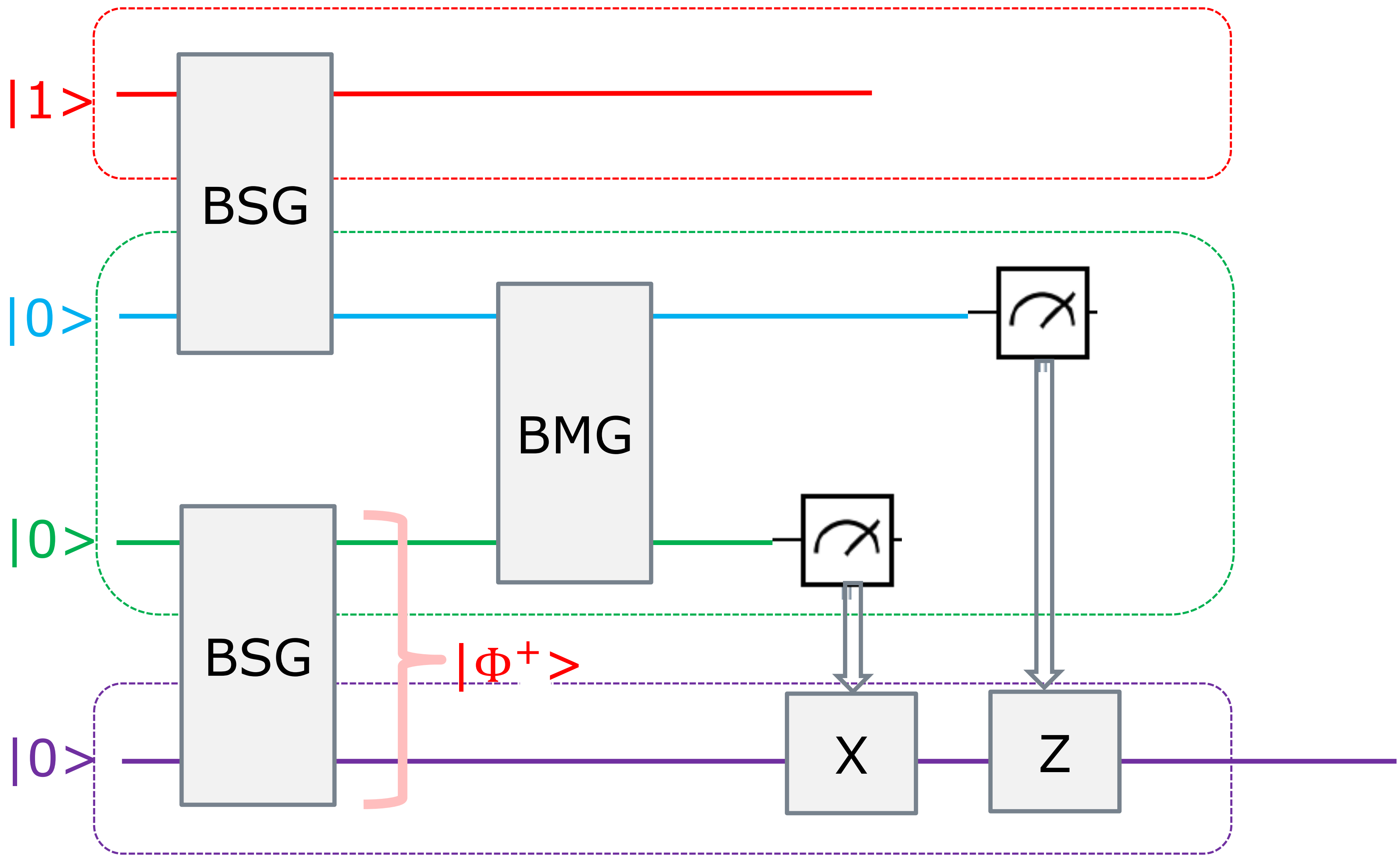
次に、BobとCharlieは、Bell State $|\Phi^+>$で
エンタングルしているとする



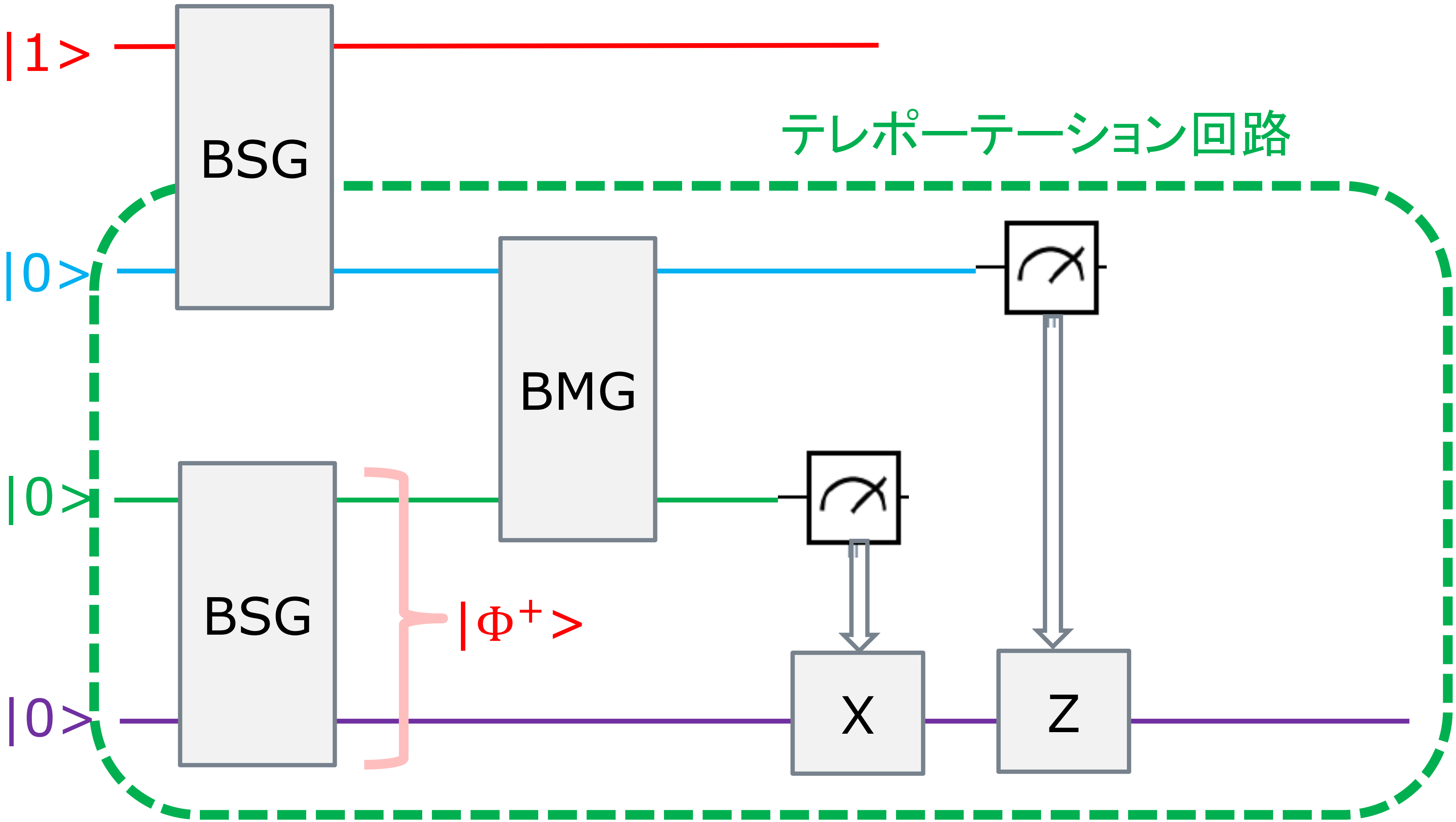
この時、Bobは、|Φ⁺>を利用して
テレポーテーション回路を作ることが出来る
前段部



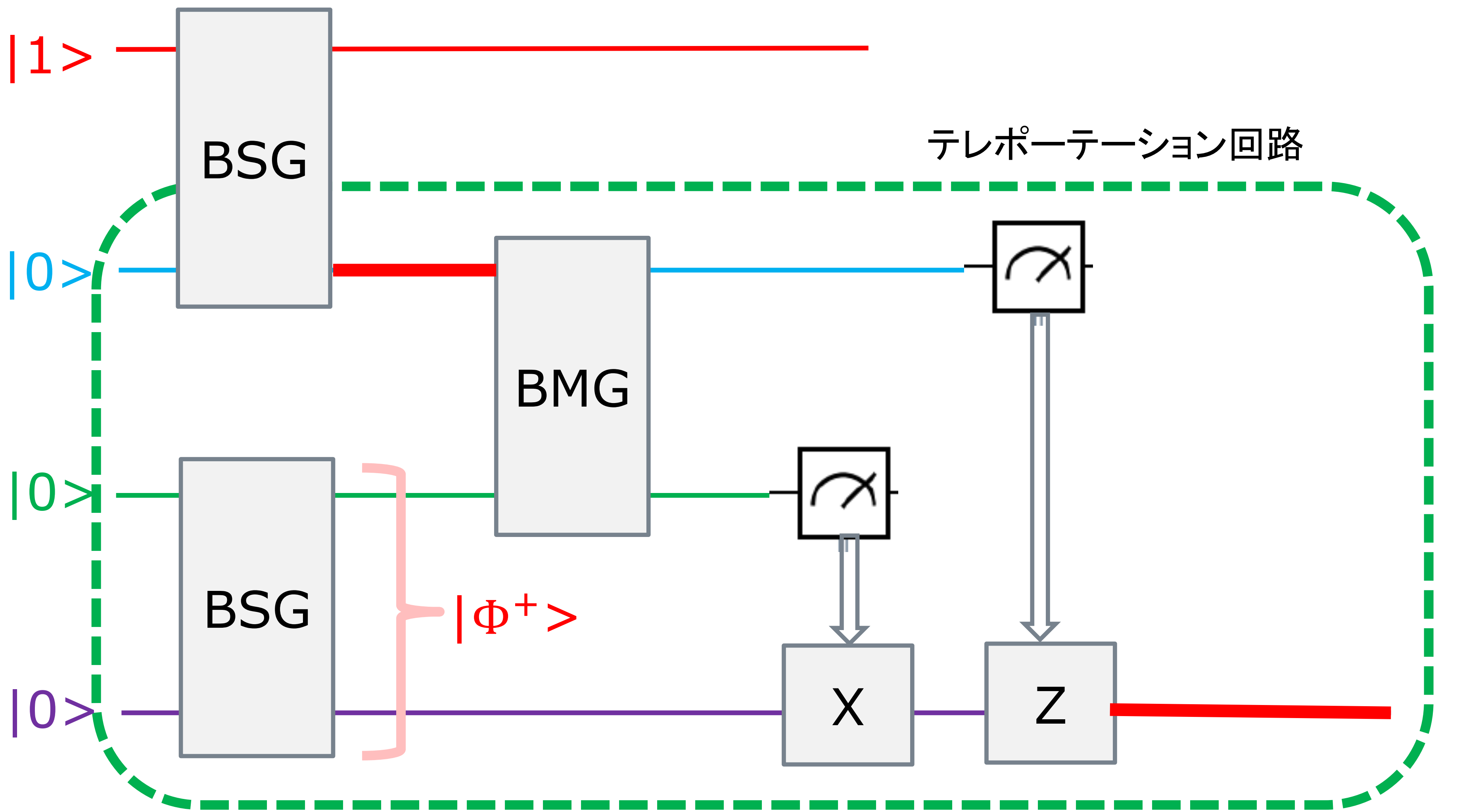
この時、Bobは、|Φ⁺>を利用してテレポーテーション回路を作ることが出来る
後段部



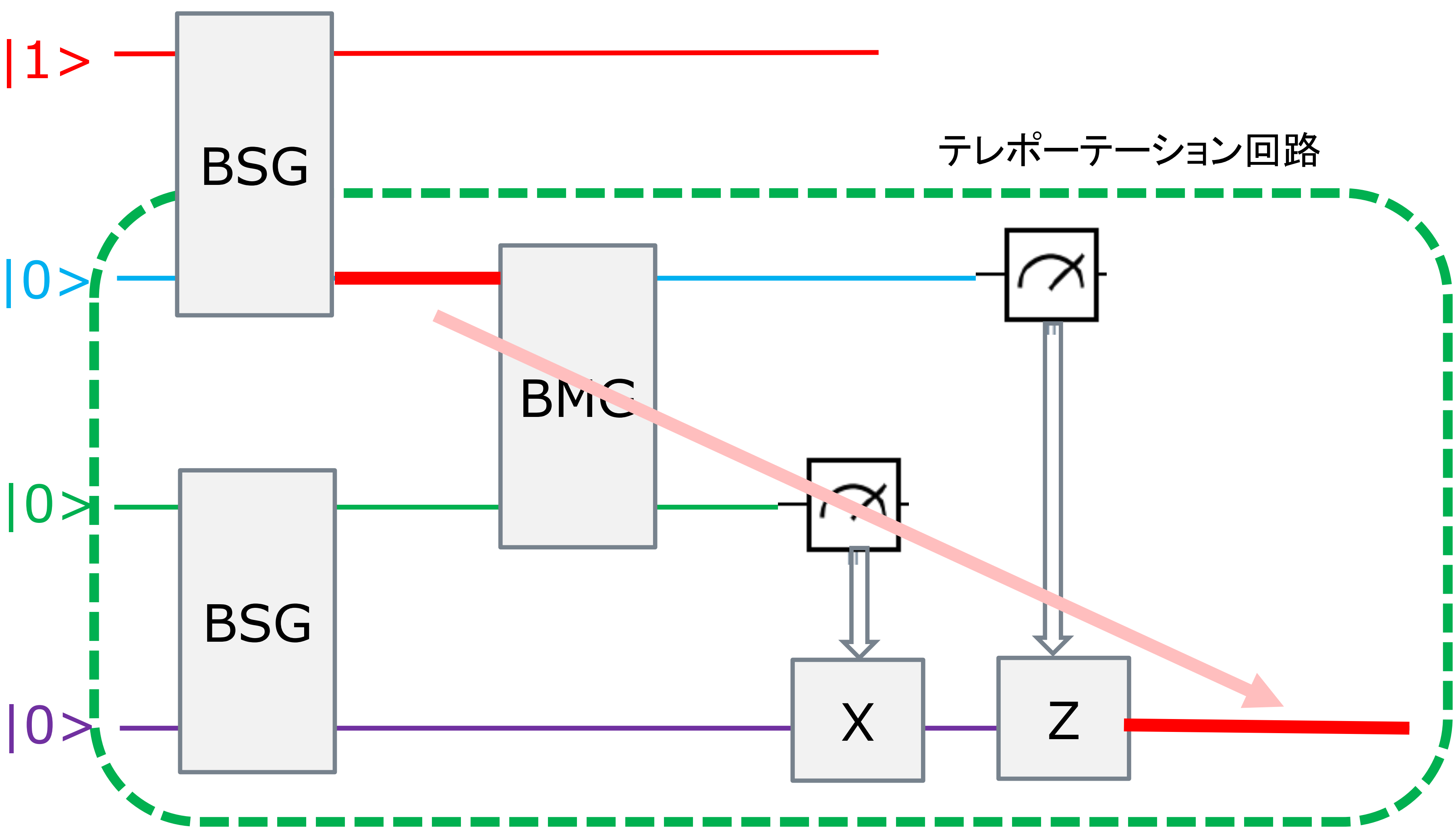
このテレポーテーション回路は、
第二ラインのqubitを第四ラインに送る



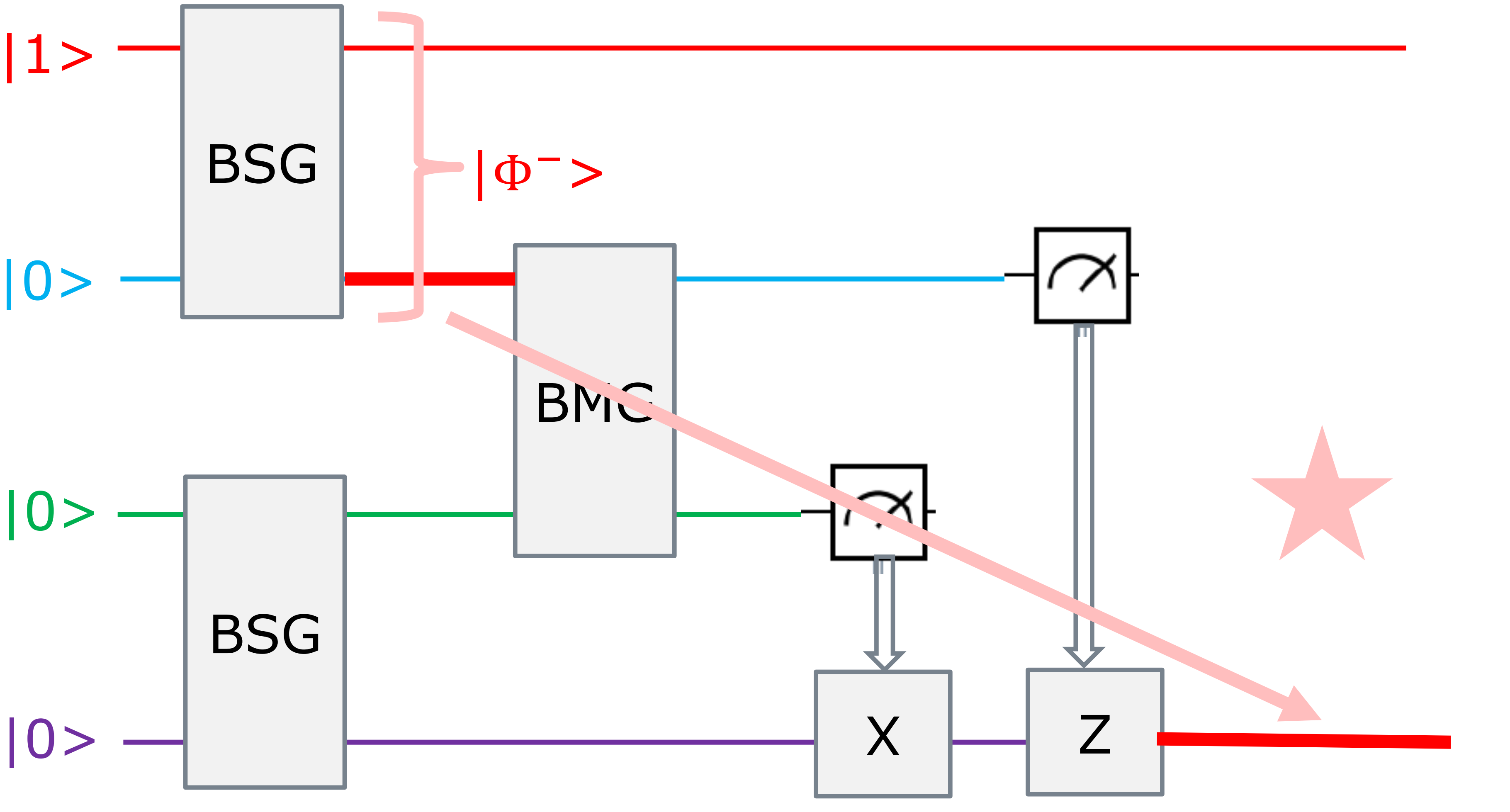
テレポーテーション回路は、
図の赤線部分の状態を転送する



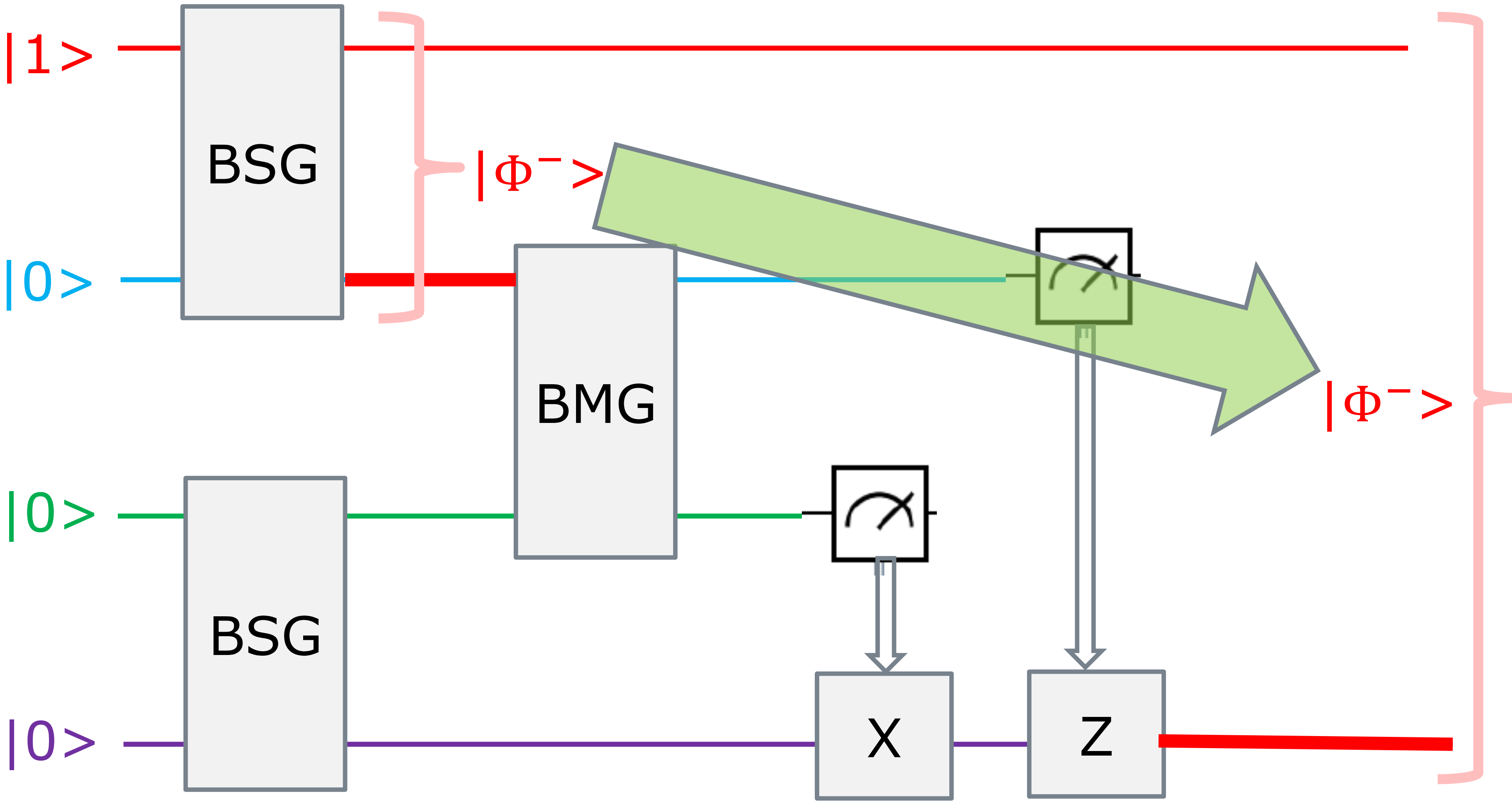
テレポーテーション回路は、Bobの回路からCharlieの回路に図の赤線部分の状態を転送する



Aliceと図の赤線部分の関係は、
|Φ⁻> のエンタングルメント状態である



その状態は、Charlieに移った。
AliceとCharlieは、エンタングルメント状態になる。



Entanglement Swappingの奇妙さ

- 最初は、エンタングルメント状態にあったのは、AliceとBobの間と、BobとCharlieの間である。AliceとCharlieはエンタングルメント状態にはない。
- Bobは自分の回路上で、第二ラインと第三ライン上で、観測を行って、その結果をCharlieに送る。Charlieは、その情報で、第四ラインのqubitを操作する。これは、BobとCharlieとの間の量子テレポーテーションである。
- ところが、これらの観測・通信・ゲート操作とは関係のなかった、Aliceが、Charlieとエンタングルメント状態に入る。
- 観測・qubit操作によって、もとの Alice-Bob, Bob-Charlie のエンタングルメント状態は、なくなってしまう。