

HoTT入門

ー 数理学とカテゴリー論 ー

トピック #01

カテゴリーを、まずは直観的に理解する



カテゴリーはプロセスを記述する モルフィズムとオブジェクト

Due to John Baez : "**Symmetric Monoidal Categories: a Rosetta Stone**"

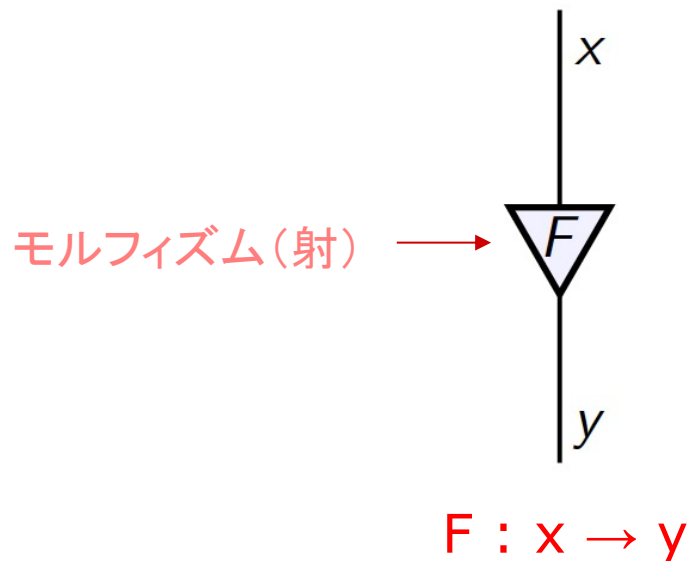
<https://johncarlosbaez.wordpress.com/2021/05/28/symmetric-monoidal-categories-a-rosetta-stone/>



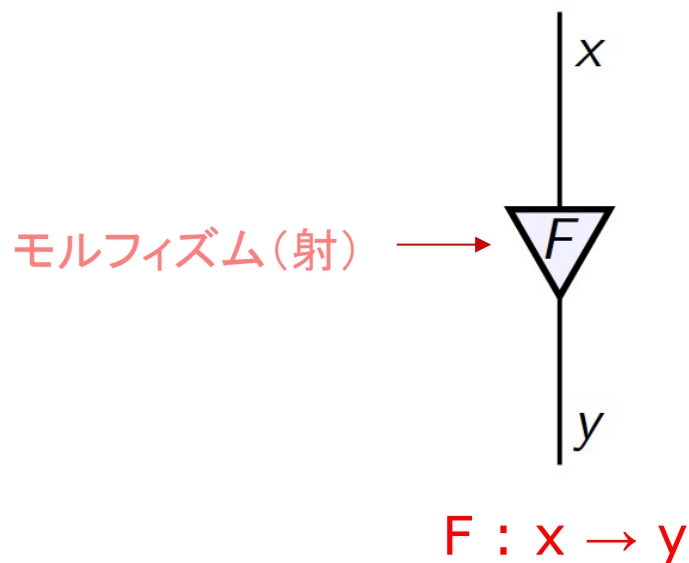
カテゴリーは、プロセス F を記述するものである。
プロセスの入力を x , 出力を y とする時、 $F : x \rightarrow y$ と表す。
 F をモルフィズム(射)と呼ぶ。



カテゴリーは、プロセス F を記述するものである。
プロセスの入力を x , 出力を y とする時、 $F : x \rightarrow y$ と表す。
 F をモルフィズム(射)と呼ぶ。このプロセスを次の図形で表す。



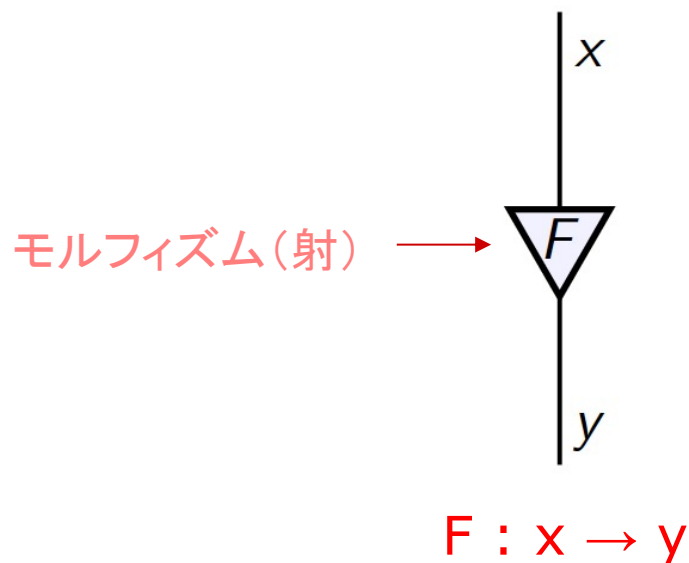
カテゴリーは、プロセス F を記述するものである。
プロセスの入力を x , 出力を y とする時、 $F : x \rightarrow y$ と表す。
 F をモルフィズム(射)と呼ぶ。このプロセスを次の図形で表す。



x, y をオブジェクトと呼ぶ



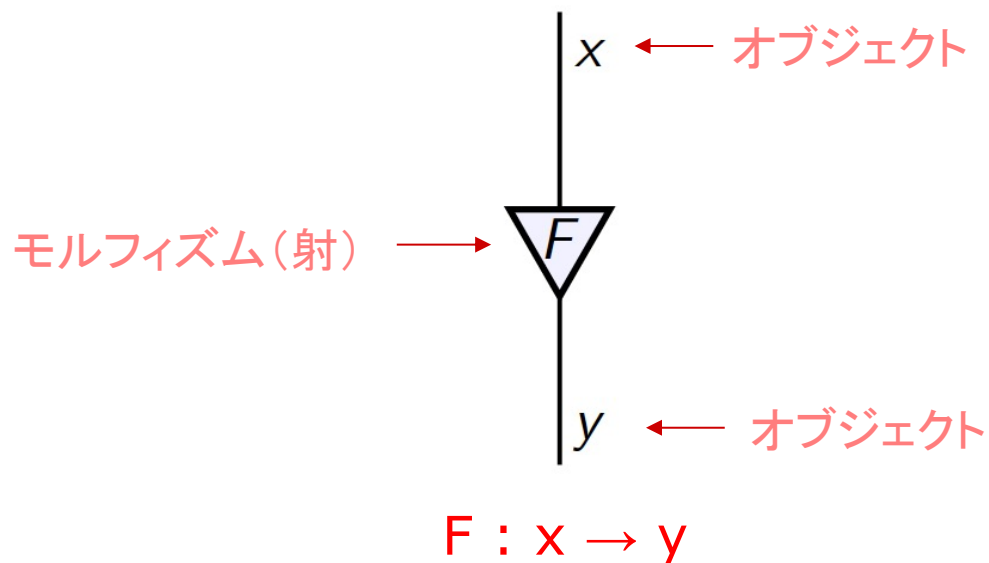
カテゴリーは、プロセス F を記述するものである。
プロセスの入力を x , 出力を y とする時、 $F : x \rightarrow y$ と表す。
 F をモルフィズム(射)と呼ぶ。このプロセスを次の図形で表す。



x, y をオブジェクトと呼ぶ



カテゴリーは、プロセス F を記述するものである。
プロセスの入力を x , 出力を y とする時、 $F : x \rightarrow y$ と表す。
 F をモルフィズム(射)と呼ぶ。このプロセスを次の図形で表す。



x, y をオブジェクトと呼ぶ

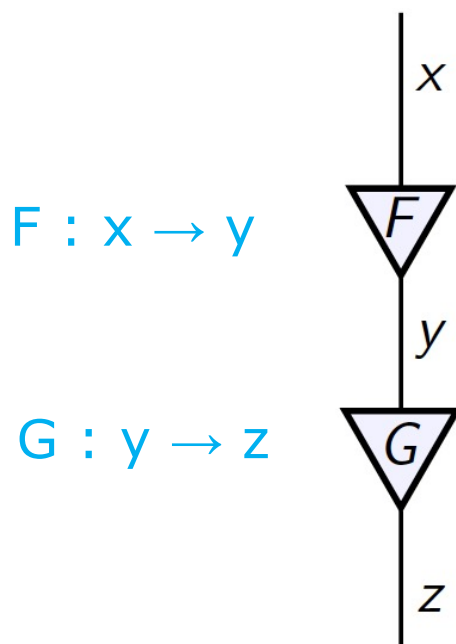


二つのプロセスの結合 (1)

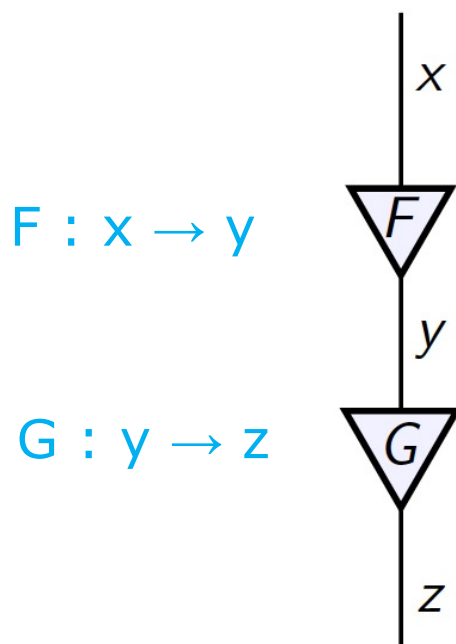
モルフィズムの「合成」



二つのプロセスがあって、最初のプロセスの出力が第二のプロセスの入力に等しい時、次のように二つのプロセスを結合できる。



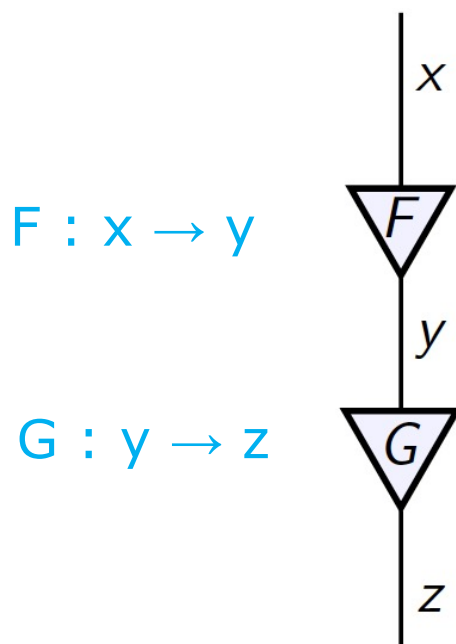
二つのプロセスがあって、最初のプロセスの出力が第二のプロセスの入力に等しい時、次のように二つのプロセスを結合できる。



これを、モルフィズム $F : x \rightarrow y$ とモルフィズム $G : y \rightarrow z$ の「合成」と呼び、 $G \circ F : x \rightarrow z$ と表す。



二つのプロセスがあって、最初のプロセスの出力が第二のプロセスの入力に等しい時、次のように二つのプロセスを結合できる。



$$G \circ F : x \rightarrow z$$

これを、モルフィズム $F : x \rightarrow y$ とモルフィズム $G : y \rightarrow z$ の「合成」と呼び、 $G \circ F : x \rightarrow z$ と表す。

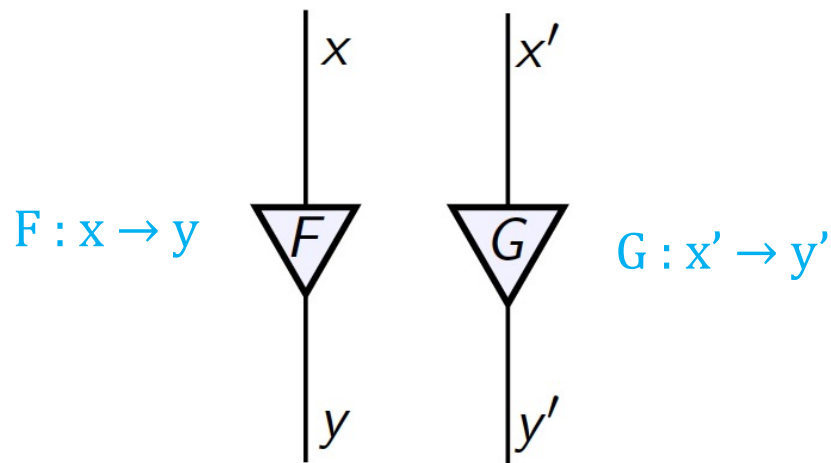


二つのプロセスの結合 (2)

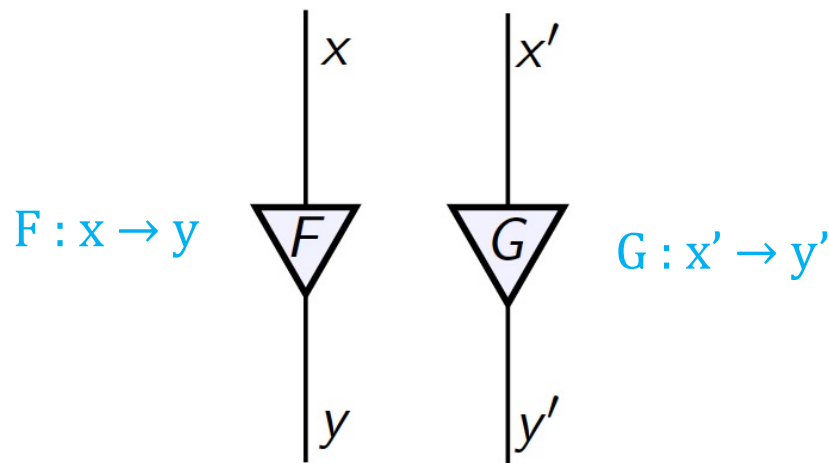
モルフィズムの「テンソル積」



二つのプロセスがあった時、次のように二つのプロセスを並列に走らせることができる。



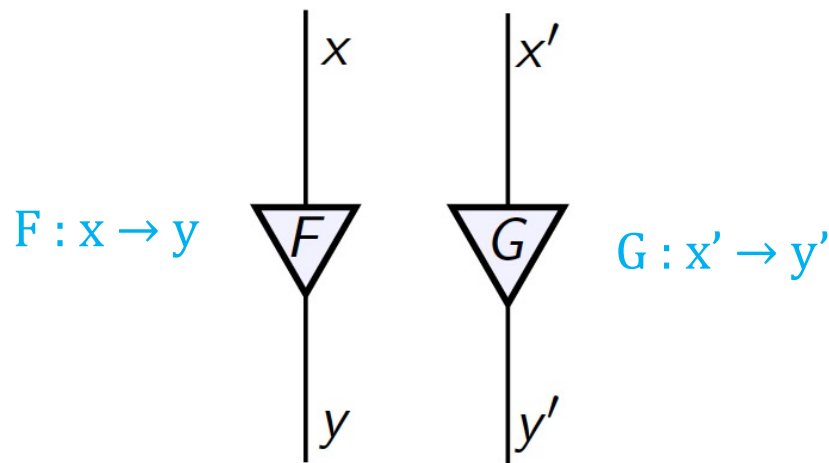
二つのプロセスがあった時、次のように二つのプロセスを並列に走らせることができる。



これを、モルフィズム $F : x \rightarrow y$ とモルフィズム $G : x' \rightarrow y'$ の「テンソル積」と呼び、 $F \otimes G : x \otimes x' \rightarrow y \otimes y'$ と表す。



二つのプロセスがあった時、次のように二つのプロセスを並列に走らせることができる。



$$F \otimes G : x \otimes x' \rightarrow y \otimes y'$$

これを、モルフィズム $F : x \rightarrow y$ とモルフィズム $G : x' \rightarrow y'$ の「**テンソル積**」と呼び、 $F \otimes G : x \otimes x' \rightarrow y \otimes y'$ と表す。



モルフィズムの「合成」と「テンソル積」 が満たすルール



モルフィズムの「合成」と「テンソル積」は、いくつかのルールを満たす。例えば、次の式が成り立つ。

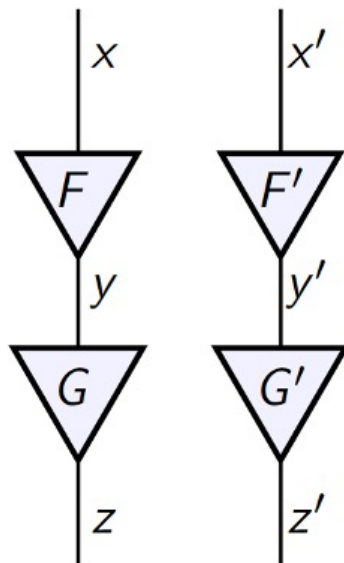
$$(G \circ F) \otimes (G' \circ F') = (G \otimes G') \circ (F \otimes F')$$



モルフィズムの「合成」と「テンソル積」は、いくつかのルールを満たす。例えば、次の式が成り立つ。

$$(G \circ F) \otimes (G' \circ F') = (G \otimes G') \circ (F \otimes F')$$

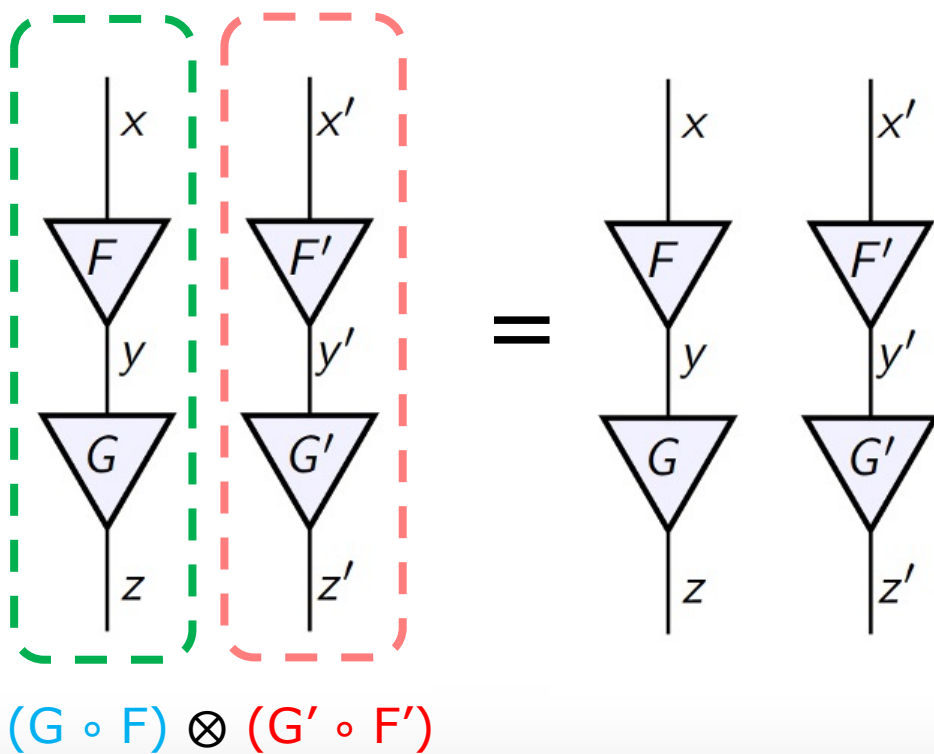
これは、次の図を見ればわかる。



モルフィズムの「合成」と「テンソル積」は、いくつかのルールを満たす。例えば、次の式が成り立つ。

$$(G \circ F) \otimes (G' \circ F') = (G \otimes G') \circ (F \otimes F')$$

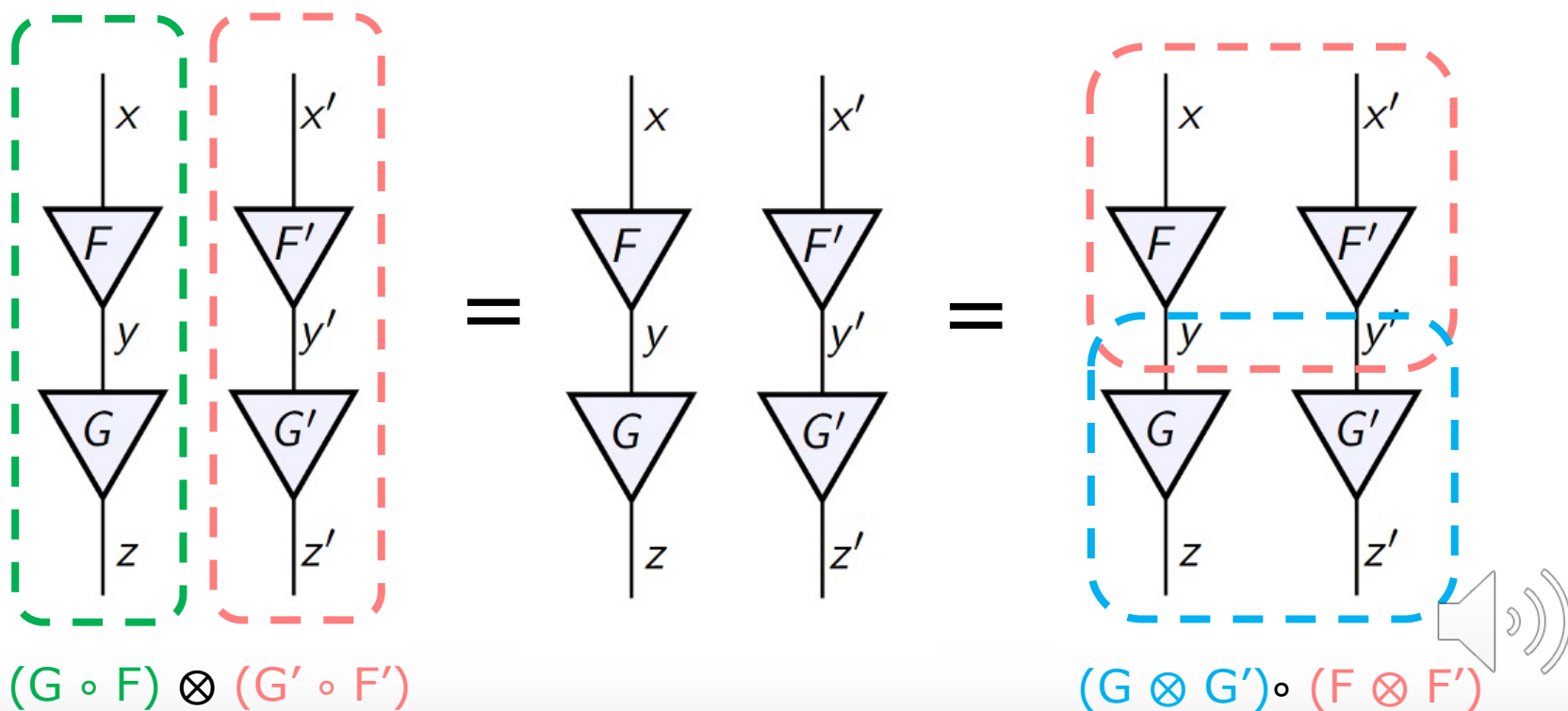
これは、次の図を見ればわかる。



モルフィズムの「合成」と「テンソル積」は、いくつかのルールを満たす。例えば、次の式が成り立つ。

$$(G \circ F) \otimes (G' \circ F') = (G \otimes G') \circ (F \otimes F')$$

これは、次の図を見ればわかる。



Monoidal Category

いままで見てきた条件を満たすカテゴリーを
Monoidal Categoryとよぶ。



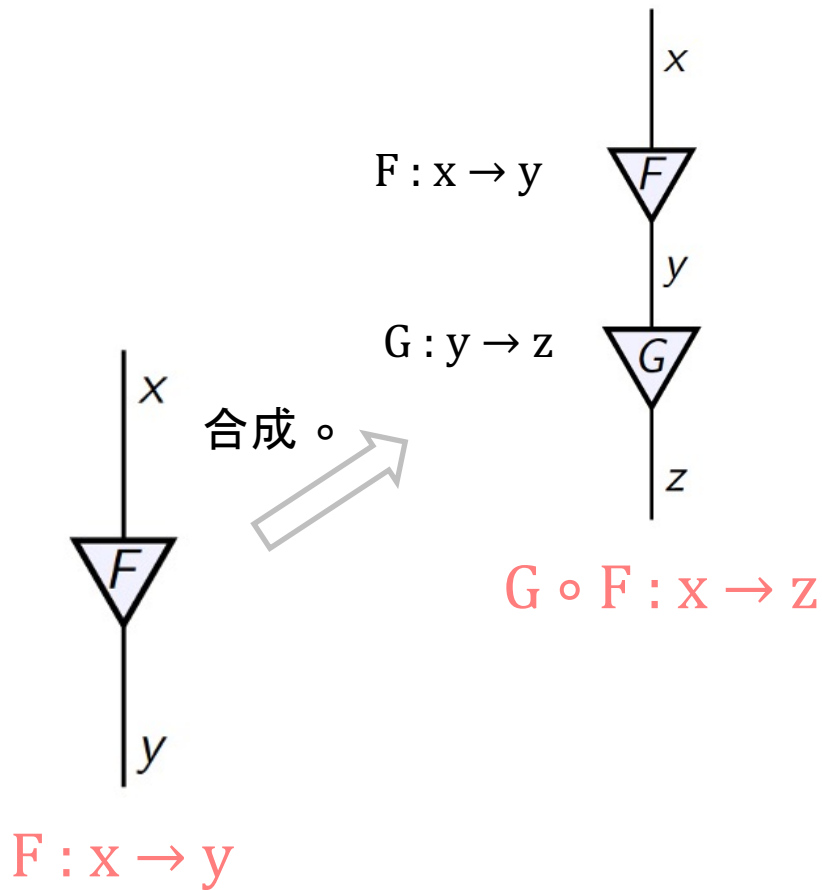
Monoidal Category



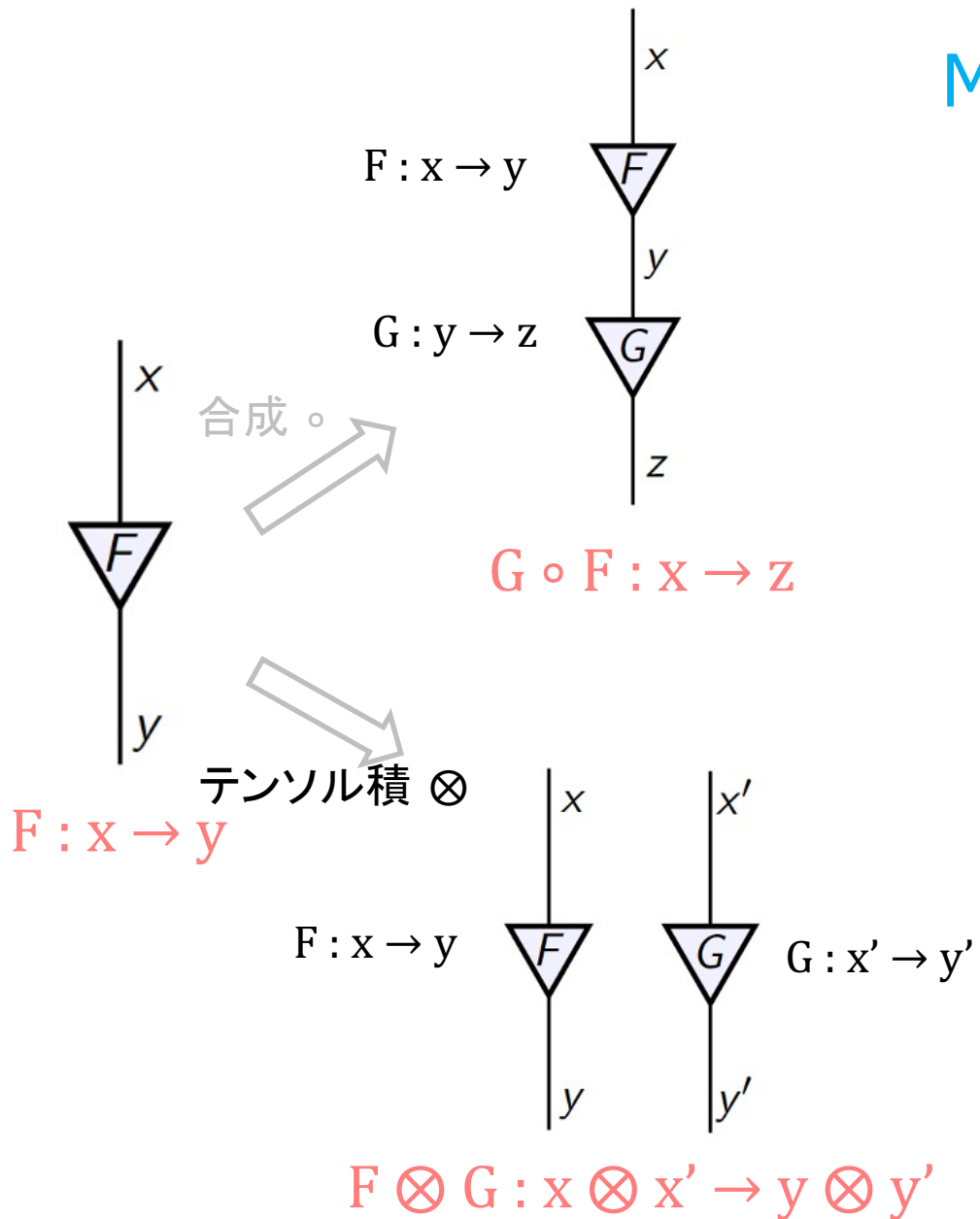
$$F : x \rightarrow y$$



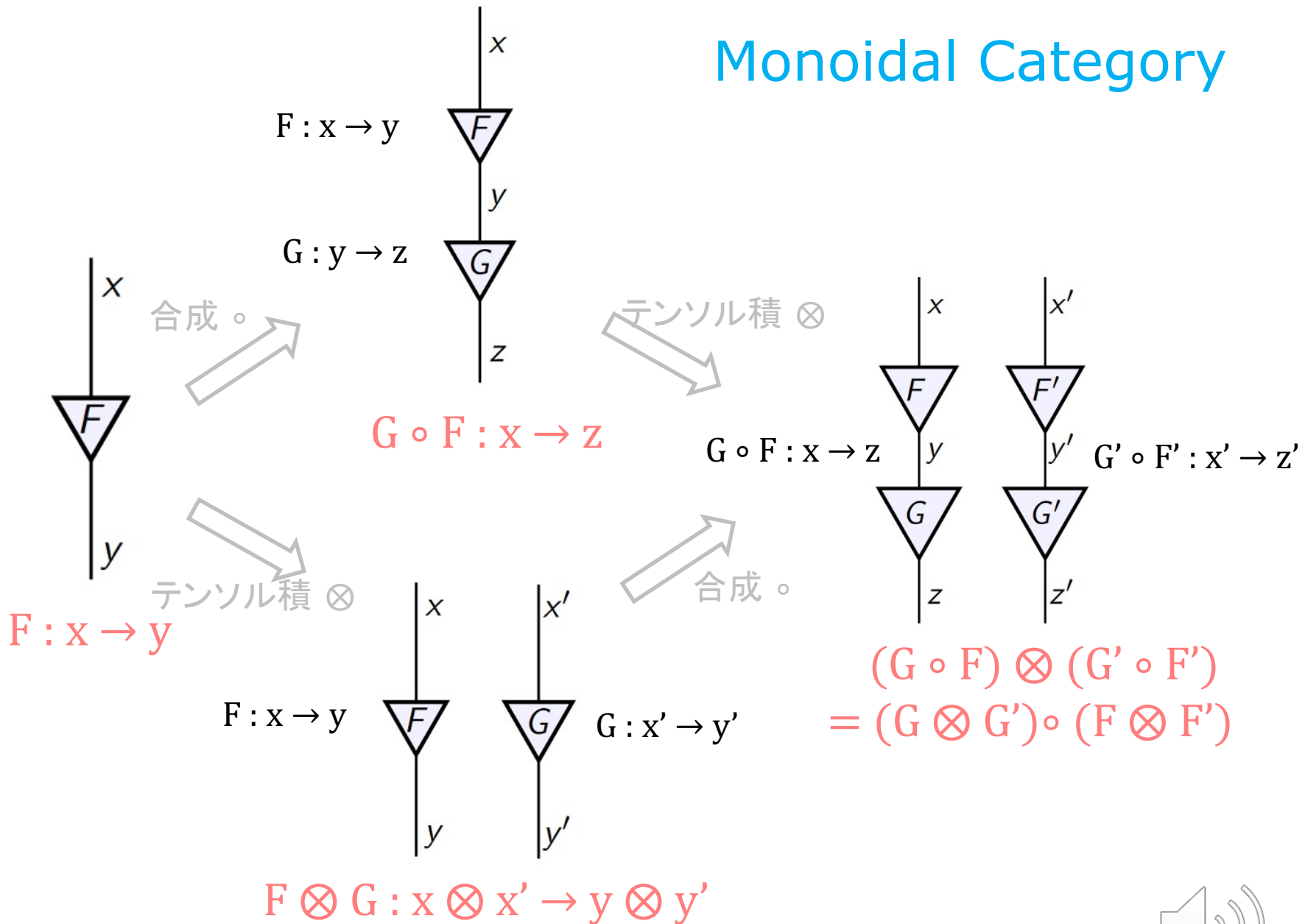
Monoidal Category



Monoidal Category



Monoidal Category



Symmetric Monoidal Category

