論理学入門 I

命題論理の演繹ルール

Agenda
Part I 論理式と推論ルール

- □ 単純な論理式とその値
- □ 論理式の意味と「判断」について
- □ 論理式はどのような形をしているか？
- □ A ⊢ Bという論理的帰結の判断と
  判断から判断への推論ルール

Agenda

Part II　Sequent Calculus

- □ Sequent Calculusと「証明」
- □ Sequent Calculusの演繹ルール
- □ Sequent Calculusでの証明例

Part III　Natural Deduction

- □ Natural Deduction
- □ 対話形証明システムとしてのCoq
- □ CoqとNatural Deduction

単純な論理式とその値

基本的な論理記号と
それから構成される論理式

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を簡単に振り返っておこう。つぎのようになる。

論理記号	論理式の意味
A ∧ B	A かつ B
A ∨ B	A または B
A → B	A ならば B
~A	A ではない
∀xP(x)	全てのxについてP(x)が成り立つ
∃xP(x)	あるxが存在してP(x)が成り立つ

命題論理

ここでは、主要に「命題論理」について述べる。

アトミックな論理式から構成される論理式の値

論理式は、真または偽の値をとる。それを真理値と言う。

アトミックな論理式とは、内部に論理記号を含まない論理式である。

A					~A
真					偽
真					偽
偽					真
偽					真

アトミックな論理式から構成される論理式の値

論理式は、真または偽の値をとる。それを真理値と言う。

アトミックな論理式とは、内部に論理記号を含まない論理式である。

A	B				
真	真				
真	偽				
偽	真				
偽	偽				

アトミックな論理式から構成される論理式の値

論理式は、真または偽の値をとる。それを真理値と言う。

アトミックな論理式とは、内部に論理記号を含まない論理式である。

A	B	A ∧ B			
真	真	真			
真	偽	偽			
偽	真	偽			
偽	偽	偽			

アトミックな論理式から構成される論理式の値

論理式は、真または偽の値をとる。それを真理値と言う。

アトミックな論理式とは、内部に論理記号を含まない論理式である。

A	B		A ∨ B		
真	真		真		
真	偽		真		
偽	真		真		
偽	偽		偽		

アトミックな論理式から構成される論理式の値

論理式は、真または偽の値をとる。それを真理値と言う。

アトミックな論理式とは、内部に論理記号を含まない論理式である。

A	B			A → B	
真	真			真	
真	偽			偽	
偽	真			真	
偽	偽			真	

アトミックな論理式から構成される論理式の値

論理式は、真または偽の値をとる。それを真理値と言う。

アトミックな論理式とは、内部に論理記号を含まない論理式である。

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A → B	~A
真	真	真	真	真	偽
真	偽	偽	真	偽	偽
偽	真	偽	真	真	真
偽	偽	偽	偽	真	真

同値な論理式

論理式Xを構成する全てのアトミックな論理式に、どのような真・偽の値を割り当てても、同じ真偽の割り当てについて、論理式Yが論理式Xと同じ値をとる時、二つの論理式X,Yを「同値」という。

同値な論理式の例

$$A \equiv A$$

$$A \equiv \sim\sim A$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$$

A → B ≡ ~A ∨ B の真理表での証明

A	B			
真	真			
真	偽			
偽	真			
偽	偽			

A→ B ≡ ~A ∨ B の真理表での証明

A	B	A → B		
真	真	真		
真	偽	偽		
偽	真	真		
偽	偽	真		

$A \to B \equiv \sim A \lor B$ の真理表での証明

A	B	A → B	~A	
真	真	真	偽	
真	偽	偽	偽	
偽	真	真	真	
偽	偽	真	真	

A → B ≡ ~A ∨ B の真理表での証明

A	B	A → B	~A	~A ∨ B
真	真	真	偽	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

A → B ≡ ~A ∨ B の真理表での証明

A	B	A → B	~A	~A ∨ B
真	真	真	偽	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

$A \to B \equiv {\sim}A \lor B$ の真理表での証明

A	B	$A \to B$	${\sim}A$	${\sim}A \lor B$
真	真	真	偽	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

同じ値をとる

恒真式 Tautology

論理式を構成する全てのアトミックな論理式に、どのような真・偽の値を割り当てても、論理式が真の値をとる時、その論理式を「恒真式」という。

恒真式の例

$$A \rightarrow A$$

$$A \wedge B \rightarrow A$$

$$A \wedge B \rightarrow B$$

$$A \rightarrow A \vee B$$

$$B \rightarrow A \vee B$$

$$A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

A → (A → B) → B は恒真式である

A	B			
真	真			
真	偽			
偽	真			
偽	偽			

$A \to (A \to B) \to B$ は恒真式である

A	B	A → B		
真	真	真		
真	偽	偽		
偽	真	真		
偽	偽	真		

A → (A → B) → B は恒真式である

A	B	A → B	(A → B) → B	
真	真	真	真	
真	偽	偽	真	
偽	真	真	真	
偽	偽	真	偽	

$A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B$ は恒真式である

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	$A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B$
真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	真
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	偽	真

$A \to (A \to B) \to B$ は恒真式である

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$A \to (A \to B) \to B$
真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	真
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	偽	真

常に真である

論理式の意味と「判断」について

「Aは真である」の意味

例えば、ある論理式で表される「命題Aが真である」ということの意味を考えてみよう。

- 「Aは真である」 ということは、
- 「私は「Aは真である」ことを知っている」ということである。
- ただ、その前に、知っていることがある。
- それは、「私は「Aは論理式である」ことを知っている」ということである。

判断と命題

- 「Aは真である」 あるいは「Aは論理式である」といった言明を「判断」と呼ぶ。
- 「判断」の概念は、常に、「命題」の概念に先立つ。
- 「判断」における論理的帰結の概念は、「命題」における含意より先に、説明されなければならない。

論理式の表現・構成についての判断の構造

私は A が論理式である ことを知っている

論理式の表現･構成についての判断の構造

私は $\boxed{A}$ が論理式である ことを知っている

表現

論理式の表現･構成についての判断の構造

判断

私は A が論理式である ことを知っている

表現

判断の形式

論理式の表現･構成についての判断の構造

明証的な判断

判断

私は A が論理式であることを知っている

表現

判断の形式

論理式の正しさについての
判断の構造

私は A が真である ことを知っている

論理式の正しさについての判断の構造

私は $\boxed{A}$ が真である ことを知っている

論理式

論理式の正しさについての判断の構造

判断

私は A が真である ことを知っている

論理式

判断の形式

論理式の正しさについての判断の構造

明証的な判断

判断

私は A が真である ことを知っている

論理式

判断の形式

証明とは何か？

- 証明とは、判断を明証なものにするもの。
- 証明すること＝知ること＝理解して把握すること
- 知るようになる＝知識を得ること
- 証明と知識は、同じもの

判断の推論ルールの表現

- 論理学者は、横棒(**inference line**)が好きである。
- 「判断２」が「判断１」から推論できることを次のように表す。判断１が成り立つ時、かつその時に限り、判断2も成り立つと推論できることになる。

$$\frac{\text{判断１}}{\text{判断２}}$$

inference line

- こうした表現を用いて、論理式の構成ルールや、論理式の推論ルール（これを演繹ルールという）を表現することができる。

論理式はどのような形をしているか？

論理式の構成ルール -- Formation Rule

複雑な論理式は、単純な論理式から単純なルールで構成される。

次のルールは、「Aが命題であり」、かつ、「Bも命題である」なら、「(A ∧ B)も命題である」ということを主張している。

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge\mathbf{F})$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}\qquad B\ \text{は命題である}}{(A\wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge\mathrm{F})$$

ほとんど自明だと思うが、このルールの読み方を説明しよう。

それぞれのルールは「横棒」の上の部分と、「横棒」の下の部分に分かれている。この「横棒」は、「横棒」の上の部分の判断が正しいとき、「横棒」の下の部分の判断も正しいということを表しています。

横棒の右に書かれている (∧ F) という記号は、“∧ Formation Rule”を省略したもので、この論理式の構成ルールが、論理記号“∧”を用いた、論理式の構成ルールであることを示している。

次の命題の構成ルールは自然なものである

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \land B)\ \text{は命題である}} \ (\land F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \to B)\ \text{は命題である}} \ (\to F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \lor B)\ \text{は命題である}} \ (\lor F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}}{(\sim A)\ \text{は命題である}} \ (\sim F)$$

次の命題の構成ルールも自然なものである

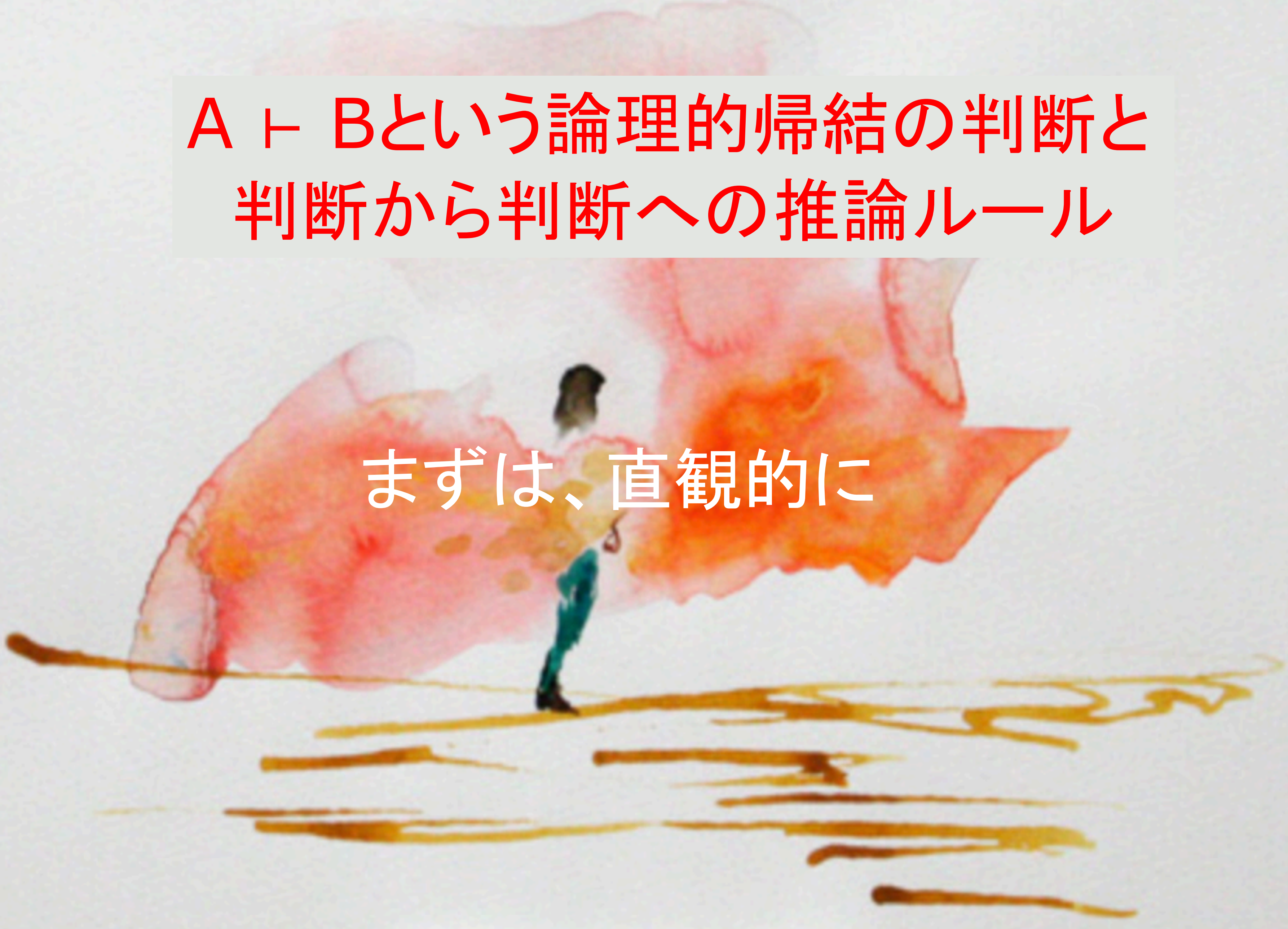
$$\frac{x\ \text{は変数である}\qquad P\ \text{は命題である}}{(\forall x.\ P)\ \text{は命題である}}\ (\forall\mathbf{F})$$

$$\frac{x\ \text{は変数である}\qquad P\ \text{は命題である}}{(\exists x.\ P)\ \text{は命題である}}\ (\exists\mathbf{F})$$

横棒の上にあるのが単純な論理式で、横棒の下にあるのが複雑な論理式である。このルールを繰り返し適用して、単純な論理式から複雑な論理式が構成される。

大事なことは、形の整った論理式は、すべてこのルールによって構成されたものだということである。

$A \vdash B$という論理的帰結の判断と判断から判断への推論ルール



まずは、直観的に

「論理式Aは論理式Bを導く」という論理的帰結の判断 A ⊢ B

これまで、「Aは真である」「Aは論理式である」という二つの判断を見てきた。ここでは、「論理式Aは論理式Bを導く」という新しい判断を考える。それを次のように表すことにする。

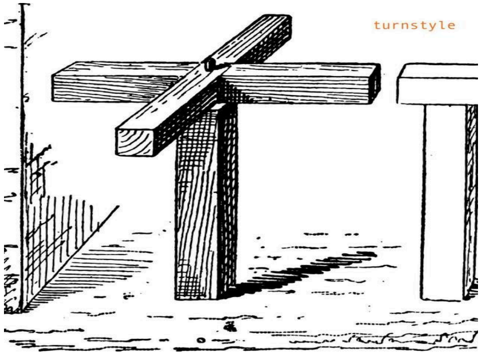
$$A \vdash B$$

⊢記号の左側のAを、この導出の「前提」

⊢記号の右側のBを、この導出の「帰結」

⊢記号を「導出記号」と呼ぼう。

英語ではこの記号をターンスタイル(turnstyle)という。



$A \vdash B$という判断と
$\vdash A \to B$ という判断

$\vdash A$ という判断を考えてみよう。

判断の前提部分がないのだから、「なんの前提もなしにAが導かれる」と考えていい。それは、Aは論理的に導出できると言うことである。あるいは、Aは論理的に真であると考えていい。

$A \vdash B$という判断と$\vdash A \to B$ という判断は、よく似ている。

$A \vdash B$という判断は、前提Aから帰結Bが導かれることを主張し、$A \to B$ という論理式は、AがBを含意する(imply)ことを意味するので、$\vdash A \to B$ という判断は、AがBを含意するという論理式は真であることを主張する

$A \vdash B$という論理的帰結の判断と $\vdash A \to B$ という含意の判断を結びつける

ここで、$A \vdash B$という判断と $\vdash A \to B$ という判断を、横棒 (**inference line**)を使って、推論ルールとして結びつける。

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \to B}$$

この図式は、$\vdash A \to B$ という論理式の含意についての判断が、$A \vdash B$という論理的含意の判断から推論できることを主張している。

$A \vdash B$	判断のレベルでの論理的帰結の表現
$A \to B$	論理式のレベルでの含意の表現
$\dfrac{A \vdash B}{\vdash A \to B}$	判断と判断の推論ルールの表現 (これを演繹ルールと呼ぶ)

A ⊢ Bという論理的帰結の判断の拡張

A ⊢ Bという論理的帰結の判断は、⊢記号の両側に、一つの論理式しかない形なのだが、それを任意個の論理式の集合を許すように拡張しよう。

$$A1, A2, A3, \ldots An \vdash B1, B2, B3, \ldots Bm$$

という判断を考える。基本的には、⊢記号の左側のいずれかの論理式の組み合わせを前提として、⊢記号の右側のいずれかの論理式が論理的帰結として導かれるという判断を表す。

論理的には、次の判断と等しい。

$$A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge \ldots \wedge An \vdash B1 \vee B2 \vee B3 \vee \ldots \vee Bm$$

複数の論理式のあつまりの表現

つぎのような拡張された判断が与えられたとしよう。

この時、複数の論理式のあつまりを Γ, Δといったギリシャ文字の大文字で表す。例えば、

$$A1, A2, A3, \ldots, An \vdash B1, B2, B3, \ldots ,Bm$$

$$\Downarrow$$

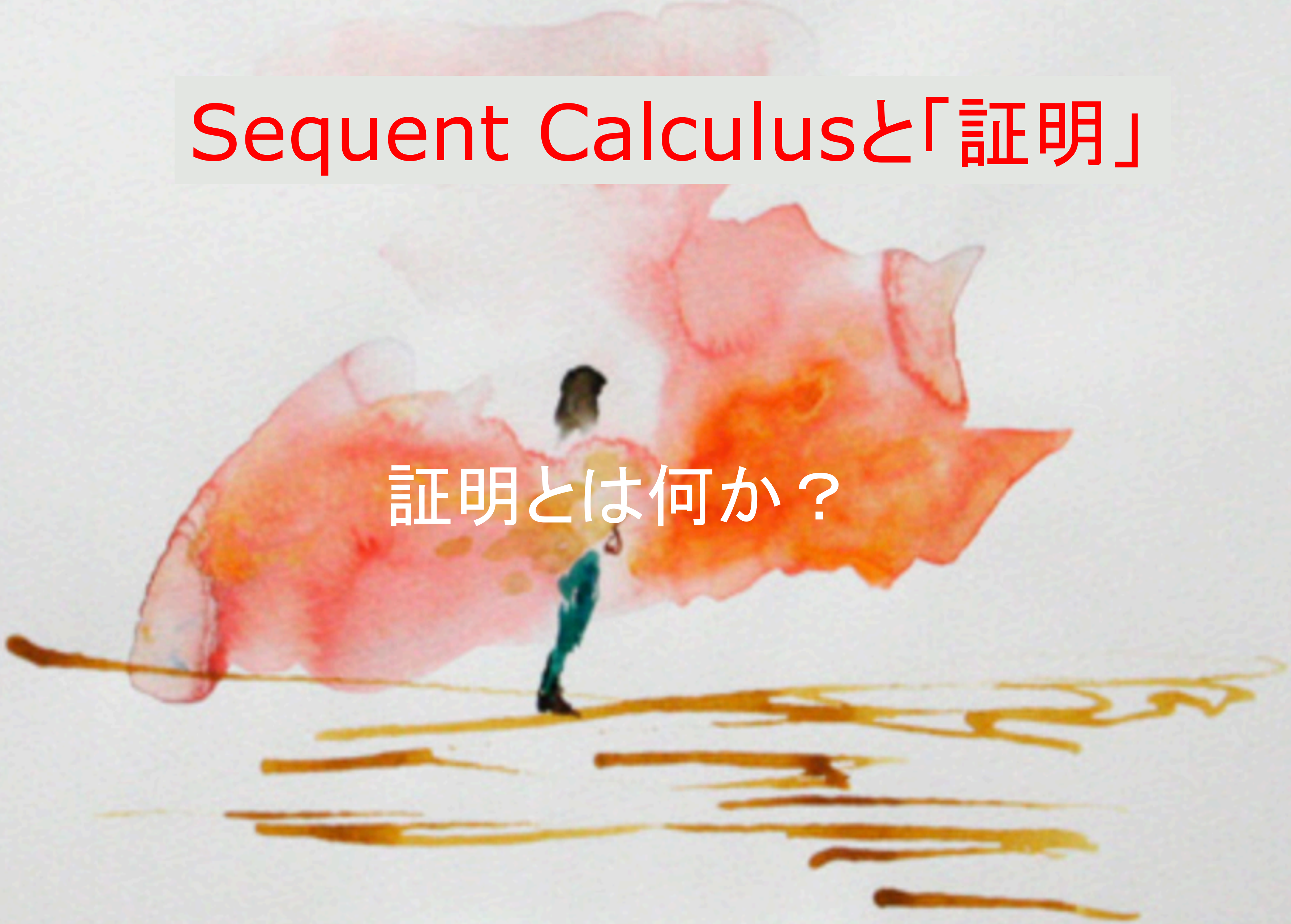
$$\underbrace{A1, A2, A3, \ldots,}_{\Gamma}\ An \vdash B1\underbrace{, B2, B3, \ldots ,Bm}_{\Delta}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma, An \vdash B1, \Delta$$

Sequent Calculusと「証明」

証明とは何か？



証明

証明とは、一般的には、次のようなプロセスを指す。

証明

- 「公理」から出発して、適用可能な「演繹ルール」を適用して、式を変形する。
- 「演繹ルール」の適用を繰り返し式を変形し、最終的に証明すべき論理式C を演繹する。

演繹ルールの逆向きの適用

「演繹ルールの逆向きの適用」とは、演繹ルールの推論ライン（横棒）の下段の判断が成立するためには、上段の判断が成立しなければならないと考えることである。

例えば、次のような演繹ルールは、上から下に、「$A \vdash B$ が成り立てば、$\vdash A \to B$が成り立つ」ことを主張しているのだが、

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \to B}$$

これを、下から上に、「 $\vdash A \to B$が成り立つためには、$A \vdash B$ が成り立っていなければならない」と考えるのを、「演繹ルールの逆向きの適用」という。

Sequent Calculusでの証明

今回取り上げるGentzenの Sequent Calculusという演繹システムでは、次のようにして、論理式Cを証明する。

証明

- 証明すべき論理式Cに対して、判断 ⊢ C から出発して、適用可能な「演繹ルール」を逆向きに適用する。
- 「演繹ルール」の逆向きの適用を繰り返して、最終的に全ての分岐で「公理」に到達するようにする。

Top Down と Bottom Up の証明

公理から始める証明はトップダウンの証明だが、Sequent Calculusでの証明は、ボトムアップである。

Sequent Calculusでの証明の例

$A \land B \to B \land A$

の証明

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash B \land A}{A \land B \vdash B \land A}}{\vdash A \land B \to B \land A}$$

Sequent Calculusでの証明の例

$$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$$

の証明

$$\dfrac{}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

「証明図」あるいは「証明樹」

こうして構成された、最上部に公理を持ち最下部に証明されるべき論理式Xを持つ演繹ルールの連鎖からなる図式を、「Xの証明図」という。

逆向きの推論で考えると、ある論理式を証明するためには、演繹ルールに従えば、二つの論理式を証明する必要が生まれる。こうした場合、推論は分岐して図式はツリー構造をなす。証明図を「証明樹」とも呼ぶ。

証明樹としてみれば、証明されるべき命題が「根」になり、演繹ルールが「枝」となり、証明樹の全ての末端の「葉」が公理となる。

いったんボトムアップで証明図が完成すれば、それはトップダウンの証明としても読むことができる。

Sequent Calculusの演繹ルール

論理的推論は
どのように行われるか？

Sequent Calculusの公理

Sequent Calculusでの公理は、次の一種類だけである。

$$A \vdash A$$

Aは前提Aの論理的帰結である

ここにAは、論理記号を含まないアトミックな論理式である。

公理は、いかなる前段の判断を必要としない判断なので、そのことを強調する時には、次のように表す。

$$\frac{}{A \vdash A}$$

より一般的な形の公理は、次の形をしている

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

$\vdash A \rightarrow B$ を推論する演繹ルール

これは、先にみた。

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}$$

AがBを論理的に帰結するなら、AはBを含意する

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$$

$\vdash A \land B$ を推論する演繹ルール

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \land B}$$

Aが真でBも真なら、A ∧ Bも真である

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}$$

$\vdash A \vee B$ を推論する演繹ルール

$$\frac{\vdash A, B}{\vdash A \vee B}$$

AまたはBが真なら、A ∨ Bも真である

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$A \land B \vdash C$ を推論する演繹ルール

$$\frac{A, B \vdash C}{A \land B \vdash C}$$

AとBがCを導くなら、$A \land B$ はCを導く

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}$$

$A \vee B \vdash C$ を推論する演繹ルール

$$\frac{A \vdash C \qquad B \vdash C}{A \vee B \vdash C}$$

AがCを導き、BがCを導くなら、A ∨ BはCを導く

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$A \to B \vdash C$ を推論する演繹ルール

$$\frac{\vdash A, C \qquad B \vdash C}{A \to B \vdash C}$$

AまたはCが真で、BがCを導くなら、A→BはCを導く

（これは少しわかりづらいかもしれない。）

（ $\vdash A, C$ は $\sim A \vdash C$ で、 $A \to B \equiv \sim A \vee B$である　）

$$\frac{\sim A \vdash C \qquad B \vdash C}{\sim A \vee B \vdash C}$$

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \ (\to 左)$$

否定の扱い

前提部分が空の $\vdash A$ を、「Aは真」とみなしていいことは先に述べた。それでは、帰結部分が空の $A\vdash$ は、どう解釈すればいいだろうか？帰結部の空の論理式を $\bot$ で表すことにしよう。

Aの否定 $\sim A$ をA $\to \bot$ で定義する。

この時、次の演繹が可能である。

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash \bot}{\vdash A \to \bot}}{\vdash \sim A}$$

すなわち、$A \vdash$は
$\vdash \sim A$を導くので、
「Aは偽」とみなせる

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A, \bot \qquad \bot \vdash \bot}{A \to \bot \vdash \bot}}{\sim A \vdash \bot}$$

より一般的な演繹ルールは、次の形をしている。

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sim A, \Delta} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \sim A \vdash \Delta}$$

Sequent Calculus 演繹ルールのまとめ

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ (公理)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ (\rightarrow左)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ (\rightarrow右)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge左)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\wedge右)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee左)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee右)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \sim A \vdash \Delta}\ (\sim左)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sim A, \Delta}\ (\sim右)$$

Sequent Calculusでの証明例

$A \to A$
の証明

$$\vdash A \to A$$

$A \to A$ の証明

$$\vdash A \to A$$

$A \rightarrow A$ の証明

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A}$$

$A \to A$
の証明

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \to A}$$

$A \rightarrow A$
の証明

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A}$$

証明終わり

$A \wedge B \to A$ の証明

$$\frac{}{\vdash A \wedge B \to A}$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\vdash A \land B \to A$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\dfrac{A \land B \vdash A}{\vdash A \land B \to A}$$

$A \wedge B \rightarrow A$ の証明

$$\frac{A \wedge B \vdash A}{\vdash A \wedge B \rightarrow A}$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash \boxed{A}}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}$$

$A \land B \to A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}$$

証明終わり

$A \to A \vee B$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B}}{\vdash A \to A \vee B}$$

$B \to A \lor B$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B \vdash A \lor \boxed{B}}}{\vdash B \boxed{\to} A \lor B}$$

$A \wedge B \to B \wedge A$ の証明

$$\vdash A \wedge B \to B \wedge A$$

$A \land B \to B \land A$ の証明

$$\vdash A \land B \to B \land A$$

$A \wedge B \to B \wedge A$ の証明

$$\dfrac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}$$

$A \land B \to B \land A$ の証明

$$\frac{A \land B \vdash B \land A}{\vdash A \land B \to B \land A}$$

A ∧ B → B ∧ A
の証明

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash B \wedge A}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}$$

$A \wedge B \to B \wedge A$
の証明

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash B \wedge A}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}$$

$A \wedge B \to B \wedge A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A, B \vdash B} \qquad \overline{A, B \vdash A}}{A, B \vdash B \wedge A}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}$$

$A \wedge B \to B \wedge A$ の証明

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash \boxed{B} \qquad A, B \vdash A}{A, B \vdash B \wedge A}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}
$$

$A \land B \to B \land A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B} \qquad A, B \vdash A}{A, B \vdash B \land A}}{A \land B \vdash B \land A}}{\vdash A \land B \to B \land A}$$

$A \land B \to B \land A$ の証明

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{B \vdash B}}{A, B \vdash B} \qquad A, B \vdash A}{A, B \vdash B \land A}}{A \land B \vdash B \land A}}{\vdash A \land B \to B \land A}
$$

$A \wedge B \to B \wedge A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B} \qquad A, B \vdash A}{A, B \vdash B \wedge A}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}$$

$A \land B \to B \land A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B} \qquad \dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A, B \vdash B \land A}}{A \land B \vdash B \land A}}{\vdash A \land B \to B \land A}$$

$A \wedge B \to B \wedge A$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B} \qquad \dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A, B \vdash B \wedge A}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}$$

$A \land B \to B \land A$ の証明

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B} \qquad \cfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A, B \vdash B \land A}}{A \land B \vdash B \land A}}{\vdash A \land B \to B \land A}$$

証明終了

A ∨ B → B ∨ A
の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A \to A}}{\vdash A \to B \lor A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{\vdash B \to B}}{\vdash B \to B \lor A}}{\vdash A \lor B \to B \lor A}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\dfrac{}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\dfrac{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\frac{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\cfrac{\cfrac{A \to B,\ A \vdash (B \to C) \to C}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to C,\ A \to B,\ A \vdash C}{A \to B,\ A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

→左

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \to C, A \to B, A \vdash C}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to C,\ A \vdash A,\ C \qquad\qquad B \to C,\ B,\ A \vdash C}{B \to C,\ A \to B,\ A \vdash C}}{A \to B,\ A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

→左

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to C, A \vdash A, C \qquad B \to C, B, A \vdash C}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A, C} \qquad \dfrac{}{C, A \vdash A, C}}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad B \to C, B, A \vdash C}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{
  \dfrac{A \vdash B, A, C \qquad C, A \vdash A, C}{B \to C, A \vdash A, C}
  \qquad
  B \to C, B, A \vdash C
}{
  \dfrac{B \to C, A \to B, A \vdash C}{
    \dfrac{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}{
      \dfrac{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
    }
  }
}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A, C}
      \qquad
      C, A \vdash A, C
    }{B \to C, A \vdash A, C}
    \qquad
    B \to C, B, A \vdash C
  }{
    \dfrac{
      \dfrac{B \to C, A \to B, A \vdash C}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}
    }{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}
  }
}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C} \qquad C, A \vdash A, C}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad B \to C, B, A \vdash C}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A, C} \qquad C, A \vdash A, C}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad B \to C, B, A \vdash C}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C}
      \qquad
      \dfrac{C \vdash C}{C, A \vdash A, C}
    }{B \to C, A \vdash A, C}
    \qquad
    B \to C, B, A \vdash C
  }{
    \dfrac{B \to C, A \to B, A \vdash C}{
      \dfrac{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}
    }
  }
}{}
$$

$$\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$$

$$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$$

の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C} \qquad \dfrac{\boxed{C \vdash C}}{C, A \vdash A, C}}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad B \to C, B, A \vdash C}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

→左

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A, C} \qquad \dfrac{C \vdash C}{C, A \vdash A, C}}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad B \to C, B, A \vdash C}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C} \qquad \dfrac{\boxed{C \vdash C}}{C, A \vdash A, C}}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad \dfrac{B, A \vdash B, C \qquad C, B, A \vdash C}{B \to C, B, A \vdash C}}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vdash A$}
\UnaryInfC{$A \vdash B, A, C$}
\AxiomC{$C \vdash C$}
\UnaryInfC{$C, A \vdash A, C$}
\BinaryInfC{$B \to C, A \vdash A, C$}
\AxiomC{$B, A \vdash B, C$}
\AxiomC{$C, B, A \vdash C$}
\BinaryInfC{$B \to C, B, A \vdash C$}
\BinaryInfC{$B \to C, A \to B, A \vdash C$}
\UnaryInfC{$A \to B, A \vdash (B \to C) \to C$}
\UnaryInfC{$A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C$}
\UnaryInfC{$\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$}
\end{prooftree}
$$

$$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$$

の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C} \quad \dfrac{\boxed{C \vdash C}}{C, A \vdash A, C}}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B, C} \quad C, B, A \vdash C}{B \to C, B, A \vdash C}}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C}
        \qquad
        \dfrac{\boxed{C \vdash C}}{C, A \vdash A, C}
      }{B \to C, A \vdash A, C}
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{\boxed{B \vdash B}}{B, A \vdash B, C}
        \qquad
        C, B, A \vdash C
      }{B \to C, B, A \vdash C}
    }{B \to C, A \to B, A \vdash C}
  }{\dfrac{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}
}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$
の証明

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A, C}
      \qquad
      \dfrac{C \vdash C}{C, A \vdash A, C}
    }{B \to C, A \vdash A, C}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B, C}
      \qquad
      C, B, A \vdash C
    }{B \to C, B, A \vdash C}
  }{
    \dfrac{B \to C, A \to B, A \vdash C}{
      \dfrac{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}
    }
  }
}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{\boxed{A \vdash A}}{A \vdash B, A, C}
          \quad
          \dfrac{\boxed{C \vdash C}}{C, A \vdash A, C}
        }{B \to C, A \vdash A, C}
        \quad
        \dfrac{
          \dfrac{\boxed{B \vdash B}}{B, A \vdash B, C}
          \quad
          \dfrac{C \vdash C}{C, B, A \vdash C}
        }{B \to C, B, A \vdash C}
      }{B \to C, A \to B, A \vdash C}
    }{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}
  }{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}
}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}
$$

$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$ の証明

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vdash A$}
\UnaryInfC{$A \vdash B, A, C$}
\AxiomC{$C \vdash C$}
\UnaryInfC{$C, A \vdash A, C$}
\BinaryInfC{$B \to C, A \vdash A, C$}
\AxiomC{$B \vdash B$}
\UnaryInfC{$B, A \vdash B, C$}
\AxiomC{$C \vdash C$}
\UnaryInfC{$C, B, A \vdash C$}
\BinaryInfC{$B \to C, B, A \vdash C$}
\BinaryInfC{$B \to C, A \to B, A \vdash C$}
\UnaryInfC{$A \to B, A \vdash (B \to C) \to C$}
\UnaryInfC{$A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C$}
\UnaryInfC{$\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$}
\end{prooftree}
$$

$$A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C$$

の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A, C} \quad \dfrac{C \vdash C}{C, A \vdash A, C}}{B \to C, A \vdash A, C} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B, C} \quad \dfrac{C \vdash C}{C, B, A \vdash C}}{B \to C, B, A \vdash C}}{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to B, A \vdash (B \to C) \to C}}{A \vdash (A \to B) \to (B \to C) \to C}}{\vdash A \to (A \to B) \to (B \to C) \to C}$$

証明終了

$A \to (A \to B) \to B$ の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A, B} \qquad \dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B}}{A \to B, A \vdash B}}{A \vdash (A \to B) \to B}}{\vdash A \to (A \to B) \to B}$$

→左

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

Sequent Calculus

Logitext
演習問題

http://logitext.mit.edu/logitext.fcgi/tutorial
にアクセスせよ

課題1

- このページの ⊢ を含む論理式の上にカーソルを重ねる。
- 文字が反転するところをクリックすると、逆向きの推論が一段行われる。⊢ をクリックすると、元に戻る。
- 証明可能な論理式であれば、公理で終わる証明が、全ての枝で行われれば、証明図全体が、緑色に反転する。
- 全てのSequentについて（命題論理だけ）、それを行え。
- 推論ルールのまとめの部分では、 ⊢ をクリックしてみよ。

課題2

- このページのExercisesの命題論理の3つの問題を、同じ要領で解け。

http://logitext.mit.edu/main
にアクセスせよ

課題3

- このページの ”some examples” の論理式(命題論理式は二つある)をクリックすると、新しいページがひらく。
- ここに表示された論理式について、先と同じ要領で、証明図を完成せよ。

課題4

- このページの入力フォームに、前節の「証明例」でみた論理式を入力せよ。
- フォームの”Prove”ボタンを押すと、新しいページが開く。
- ここに表示された論理式について、先と同じ要領で、証明図を完成せよ。

Natural Deduction

直観主義の論理的推論は
どのように行われるか？

演繹システム LKとLJ

これまで見てきた演繹システムは、GentzenのSequent Calculusのうち、古典論理に対応する LK というシステムである。

Gentzenは、Sequentの右辺の論理式の個数を 0個 または 1個に制限した LJ という演繹システムを提案し、それが直観主義論理に対応した演繹システムであることを示した。

LKのSequent:

$A1, A2, A3, \ldots, An \vdash B1, B2, B3, \ldots ,Bm$

LJのSequent:

$A1, A2, A3, \ldots, An \vdash \Delta$ （ただしΔは、0個または1個の論理式）

演繹システム Natural Deduction

Sequentの右辺の論理式の個数を1個に制限したものを、
Natural Deduction と呼ぶ。

LKのSequent:

$A1, A2, A3, \ldots, An \vdash B1, B2, B3, \ldots ,Bm$

LJのSequent:

$A1, A2, A3, \ldots, An \vdash \Delta$ （ただしΔは、0個または1個の論理式）

Natural DeductionのSequent:

$A1, A2, A3, \ldots, An \vdash B$

こうした定式化は、⊢記号を使わないGentzen-Prawitz の Natural Deductionの定式化とは異なっていることに注意。

Sequent Calculus LKの演繹ルールから Natural Deduction の演繹ルールを考える

ここで、Sequent Calculus LKの演繹ルールから、Natural Deduction の演繹ルールを考えてみよう。

基本的には、Sequent Calculus LKの演繹ルールの右辺の論理式の個数が一個になるように制限されたものが、Natural Deduction の演繹ルールとなる。

まず、Sequent Calculus LKの演繹ルールを確認して、右辺の論理式の個数の制限に引っかかるものをチェックする。

ついで、右辺の論理式の個数を1にしてみる。それでもうまくいかない場合は、別の方法を考えることにする。

Sequent Calculus
LK 演繹ルールの確認

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \quad (\text{公理})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \quad (\rightarrow\text{左})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \quad (\rightarrow\text{右})$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \quad (\wedge\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \quad (\wedge\text{右})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \quad (\vee\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad (\vee\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \quad (\neg\text{左})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \quad (\neg\text{右})$$

Sequent Calculus
LKの演繹ルールのチェック

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \text{(公理)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} (\to\text{左})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} (\to\text{右})$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} (\wedge\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} (\wedge\text{右})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} (\vee\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} (\vee\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} (\neg\text{左})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\neg\text{右})$$

右辺のΔを、消すか
単一の論理式Cにしてみる

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (公理)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ (\rightarrow左)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow右)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge左)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge右)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee左)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee右)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg左)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\neg右)$$

うまく変形できなかった場合の対応

∨右については、ルールを二つに分ける

✗ $$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee右)$$

⇓

✔ $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee右1)$$ ✔ $$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee右2)$$

これまで導かれた Natural Deductionの演繹ルール

否定の場合と $\to$左の場合の扱いは、少し面倒なところがあるので、あとでまとめて取り扱うことにする。

いくつかのルールが欠けているのだが、ここまでで導かれたNatural Deductionの演繹ルールを、次にまとめておこう。

Natural Deductionの演繹ルール（部分的）

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (公理)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to右)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \land B \vdash C}\ (\land左)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}\ (\land右)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \lor B \vdash C}\ (\lor左)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}\ (\lor右1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}\ (\lor右2)$$

ノテーションが少し違うが（ falseは⊥ 、&は∧ である）、
先のルールに加えて次のようなルールが成り立つ。

$$\frac{}{\mathit{false}, \Gamma \vdash G}\ \mathit{false}\text{-L}$$

$$\frac{B, A, \Gamma \vdash G}{A\texttt{->}B, A, \Gamma \vdash G}\ \texttt{->}\text{-L}_1$$

$(A$ being atomic$)$

$$\frac{C\texttt{->}(D\texttt{->}B)\Gamma \vdash G}{(C\&D)\texttt{->}B, \Gamma \vdash G}\ \texttt{->}\text{-L}_2$$

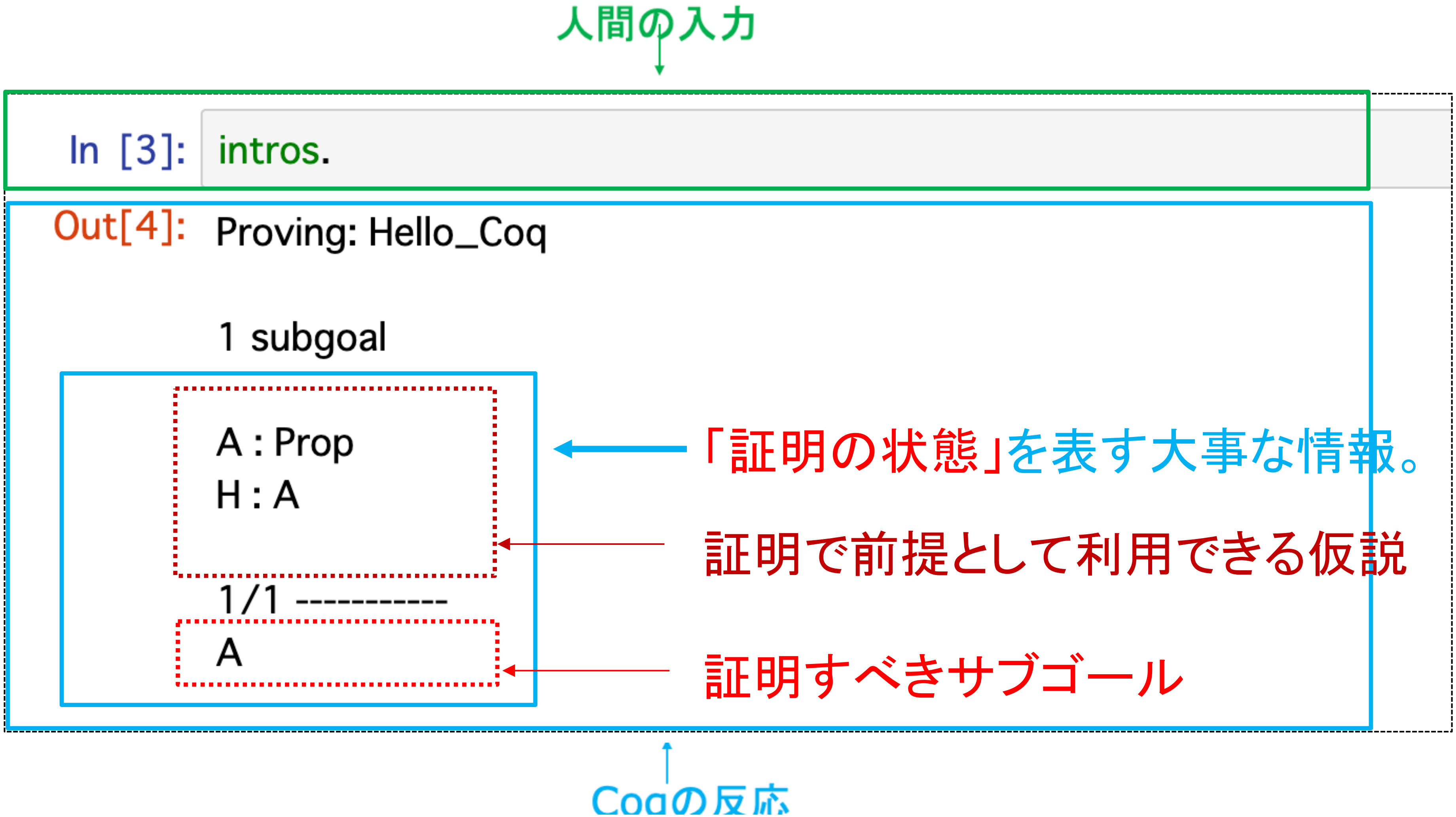
$$\frac{C\texttt{->}B, D\texttt{->}B, \Gamma \vdash G}{(C\vee D)\texttt{->}B\Gamma \vdash G}\ \texttt{->}\text{-L}_3$$

$$\frac{D\texttt{->}B, \Gamma \vdash C\texttt{->}D \quad B, \Gamma \vdash G}{(C\texttt{->}D)\texttt{->}B\Gamma \vdash G}\ \texttt{->}\text{-L}_4$$

対話形証明システムとしてのCoq

Coqは人間に何を伝えるか？

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



Coqが大事な情報として人間に伝えた「証明の状態」は、

仮説部 ＋ サブゴール

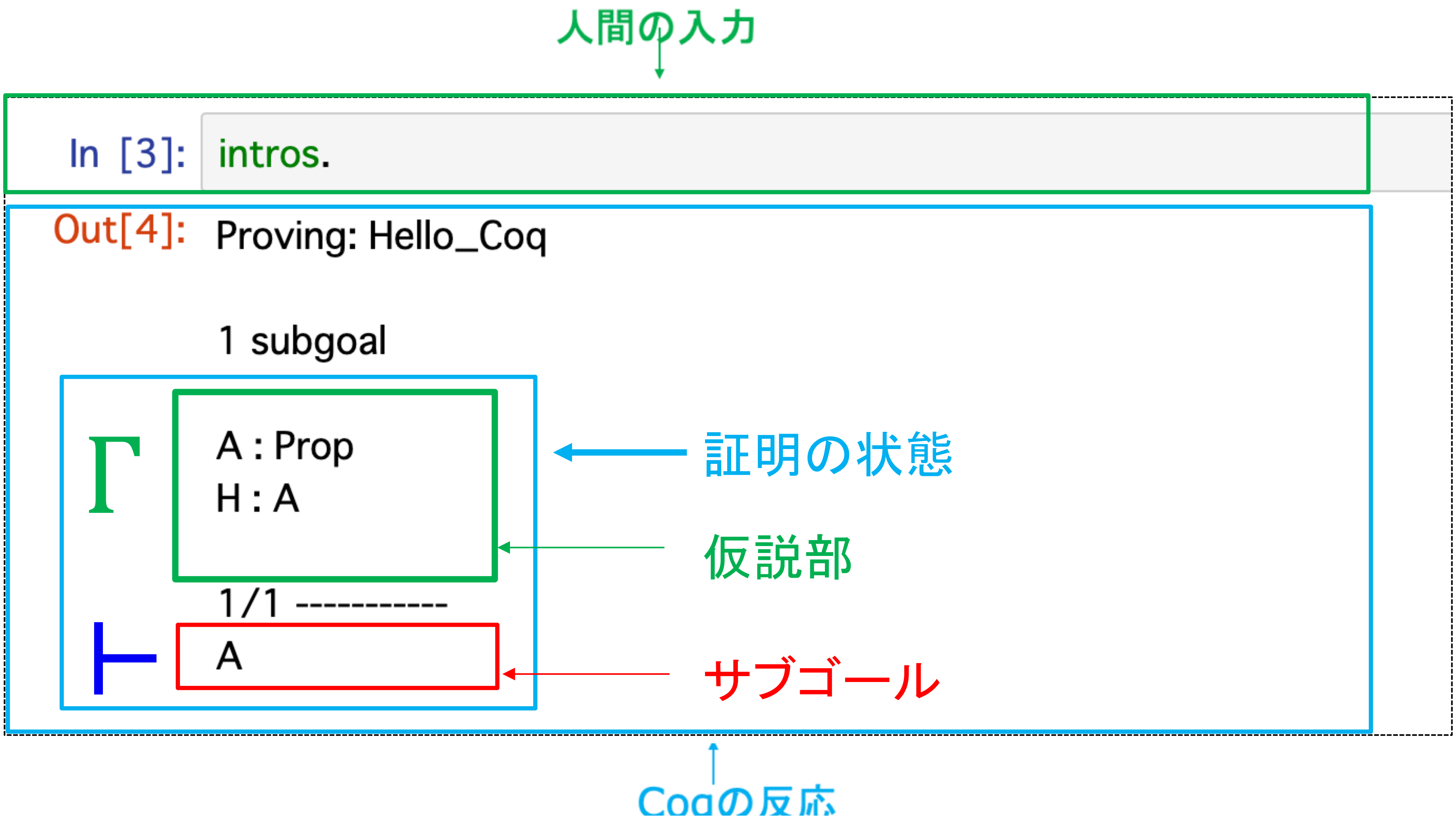
の形をしていました。

これは、演繹ルールの各段に現れる

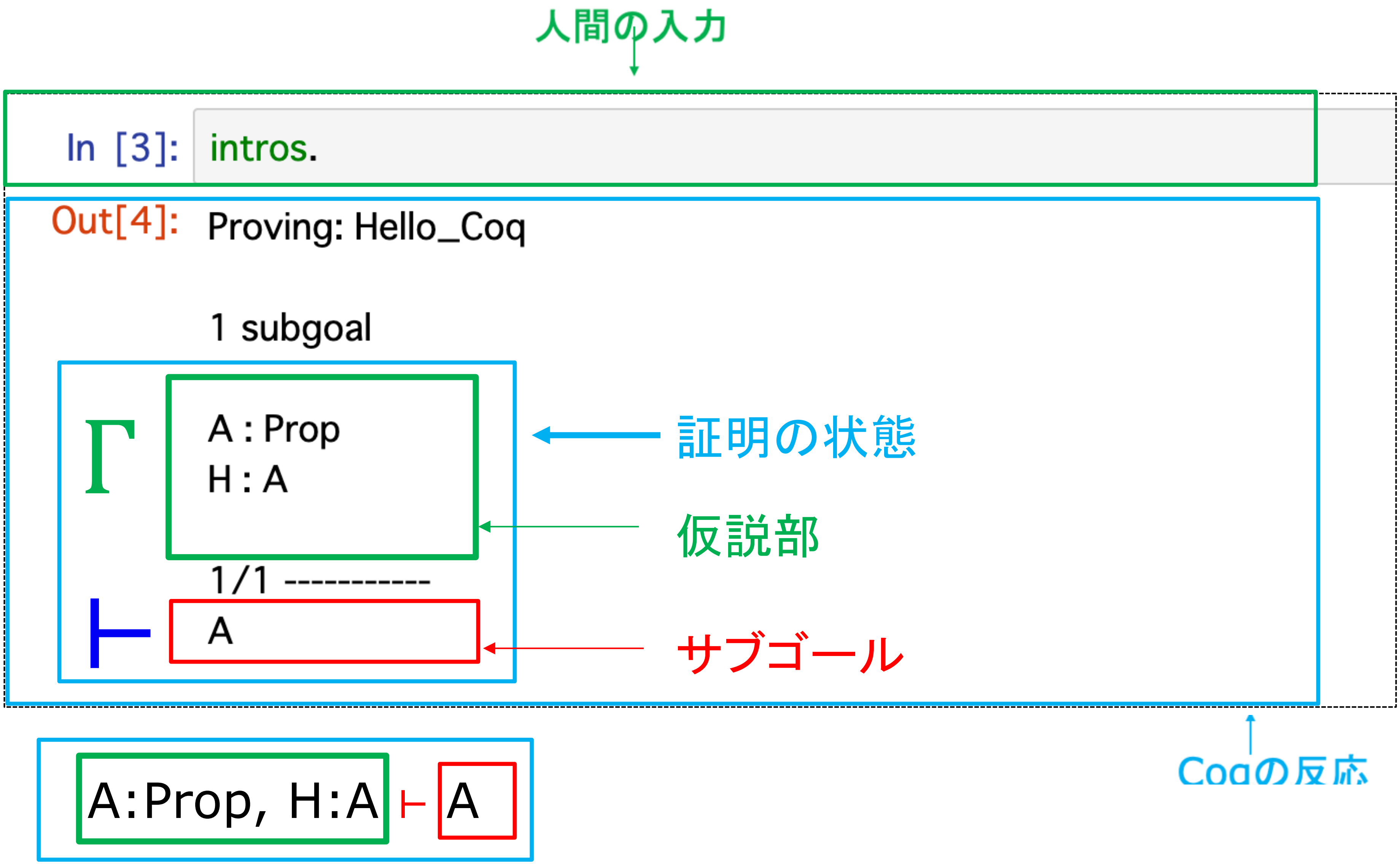
$\Gamma \vdash$ 命題

を表現しているのです。

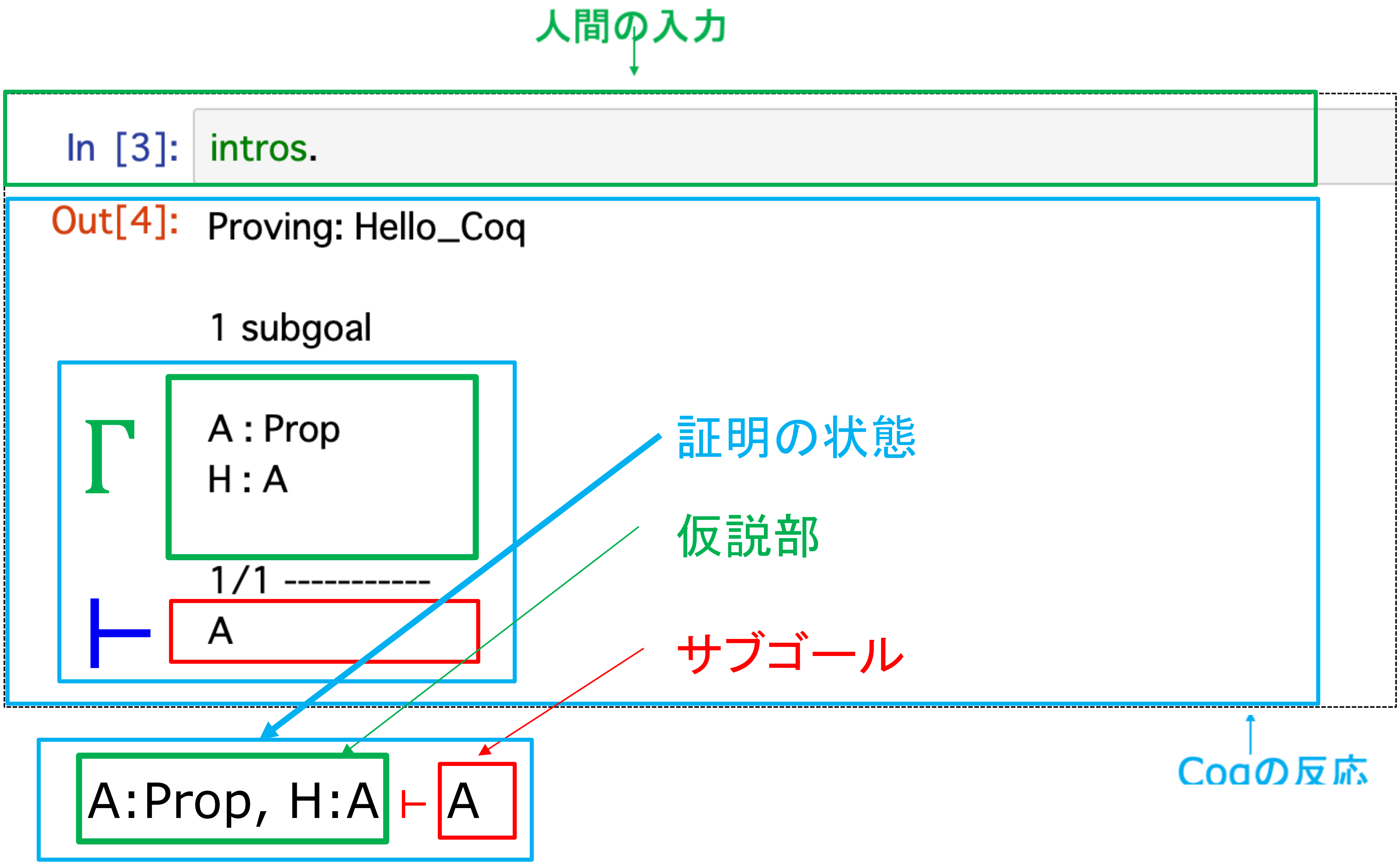
Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



この例での「証明の状態」は、

仮説部　A : Prop, H : A

サブゴール　A

でした。

これは、演繹ルールの各段に現れる表現に直すと

$$A : \mathrm{Prop},\ H : A \vdash A$$

ということになります。

$$\Gamma \vdash \text{命題}$$

の形をしています。

Coqが与える「証明の状態」は、証明を進める上で、どの演繹ルールを選択すべきかについて多くの情報を与えます。

次の章で、このことをみていきたいと思います。

Coqと
Natural Deduction

演繹ルールと
Coqのtactc

tactic **intros** と

演繹ルール →右

$$\text{intros} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \quad \to\text{右}$$

intros は、サブゴールが **A-> B** の形をしているときに適用できます。

intros

```
Out[3]: Proving: my_first_proof''

        1 subgoal

        1/1 -----------
        forall A : Prop, A -> A

        ✔ Cell evaluated.
        Rollback cell   ☑ Auto rollback
```

サブゴール

intros は、サブゴールが **A-> B** の形をしているときに適用できます。

intros

Out[3]:
```
Proving: my_first_proof''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A
```

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell　Auto rollback

In [3]:
```
intros.
```

introsのターゲットのサブゴール

適用される演繹ルール

intros　$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}}$$ → 左

intros

Out[3]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [3]: intros.

このtacticのターゲットのサブゴール

Out[4]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

A : Prop
H : A

1/1 -----------
A

仮説部分の変化

$$\frac{\boxed{\Gamma, A} \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}}$$

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

intros

Out[3]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

```
1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A
```

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

In [3]:
```
intros.
```

このtacticのターゲットのサブゴール

Out[4]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

```
A : Prop
H : A
```

仮説部分の変化

```
1/1 -----------
A
```

サブゴールの変化

$$\frac{\Gamma, A \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash A \to B}$$

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

tactic introsの適用の結果
先の状態は、次のように変わります

Out[4]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

A : Prop
H : A

新しい仮説部分

1/1 ----------
A

新しいサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

tactic **split**と

演繹ルール ∧右

$$\textbf{split}\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \wedge B}}\qquad \uparrow\ \wedge\text{右}$$

split は、サブゴールが **A ∧ B** の形をしているときに適用できます。

split

```
Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

1/1 -----------
B /\ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback
```

仮説部

サブゴール

split は、サブゴールが **A ∧ B** の形をしているときに適用できます。

Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

```
A, B : Prop
H : A
H0 : B
```

仮説部

```
1/1 -----------
B /\ A
```

✔ Cell evaluated.

サブゴール

Rollback cell Auto rollback

split

適用される演繹ルール

$$\text{split}\quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}}$$

∧ 左

split

```
Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

1/1 -----------
B /\ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback
```

仮説部

サブゴール

```
In [131]: split.
```

splitのターゲットのサブゴール

split

```
Out[131]: Proving: and_comm'

          1 subgoal

          A, B : Prop
          H : A
          H0 : B

          1/1 -----------
          B /\ A
          ✔ Cell evaluated.
          Rollback cell  Auto rollback
```

仮説部

サブゴール

```
In [131]: split.
```

splitのターゲットのサブゴール

```
Out[132]: Proving: and_comm'

          2 subgoals

          A, B : Prop
          H : A
          H0 : B

          1/2 -----------
          B
          2/2 -----------
          A

          ✔ Cell evaluated.
          Rollback cell  Auto rollback
```

仮説部変化なし

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}\ \land\mathrm{I}$$

split

split

```
Out[131]: Proving: and_comm'

          1 subgoal

          A, B : Prop
          H : A
          H0 : B

          1/1 -----------
          B /\ A
          ✔ Cell evaluated.
          Rollback cell   Auto rollback
```

仮説部

サブゴール

```
In [131]: split.
```

splitのターゲットのサブゴール

```
Out[132]: Proving: and_comm'

          2 subgoals

          A, B : Prop
          H : A
          H0 : B

          1/2 -----------
          B
          2/2 -----------
          A
          ✔ Cell evaluated.
          Rollback cell   Auto rollback
```

仮説部変化なし

サブゴールの変化

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A} \qquad \Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash A \land B}\ \land\mathrm{I}$$

split

tactic splitの適用の結果
先の状態は、次のように変わります

```
Out[132]: Proving: and_comm'

2 subgoals

A, B : Prop
H : A
H0 : B
1/2 -----------
B
2/2 -----------
A
```

新しい仮説部(変化なし)

新しい二つのサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

tactic **left, right**と
演繹ルール ∨右1, ∨右2

left $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}}$ ∨右1

right $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}}$ ∨右2

left, right は、サブゴールが **A ∨ B** の形をしているときに適用できます。

left

```
In [75]:  intros .
Out[76]:  Proving: or1'

          1 subgoal

          A, B : Prop
          H : A

          1/1 -----------
          A \/ B

          ✔ Cell evaluated.
          Rollback cell   ☑ Auto rollback
```

仮説部

サブゴール

left, right は、サブゴールが **A ∨ B** の形をしているときに適用できます。

left

```
In [75]: intros .
Out[76]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.
Rollback cell  ☑ Auto rollback
```

仮説部

サブゴール

適用される演繹ルール

$$\textbf{left} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \quad \vee \ 左$$

left

In [75]:
```
intros .
```

Out[76]:

Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.

サブゴール

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [76]:
```
left.
```

leftのターゲットのサブゴール

left

In [75]: `intros .`

Out[76]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部

1/1 -----------
A \/ B

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [76]: `left.`

leftのターゲットのサブゴール

Out[77]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部変化なし

1/1 -----------
A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

$$\textbf{left}\quad \frac{\boxed{\Gamma} \vdash A}{\boxed{\Gamma} \vdash \boxed{A \lor B}}\ \lor\mathrm{IL}$$

left

In [75]:
```
intros .
```
Out[76]:

Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部

1/1 -----------
$\boxed{A \lor B}$

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [76]:
```
left.
```

leftのターゲットのサブゴール

Out[77]:

Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部変化なし

1/1 -----------
A

サブゴールの変化

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

$$\textbf{left} \quad \frac{\Gamma \vdash \boxed{A}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \ \lor IL$$

tactic leftの適用の結果
先の状態は、次のように変わります

Out[77]:

```
Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1 ----------
A
```

新しい仮説部（変化なし）

新しいサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

right

Out[88]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

仮説部

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [88]: right.

rightのターゲットのサブゴール

Out[89]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

仮説部変化なし

1/1 -----------
B

サブゴールの変化

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \lor\mathrm{IR}$$

right

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [89]: trivial.

right

Out[88]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

仮説部

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [88]: right.

rightのターゲットのサブゴール

Out[89]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

仮説部変化なし

1/1 -----------
B

サブゴールの変化

$$\text{right}\quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}}\ \vee IR$$

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [89]: trivial.