

マグニチュードとは何か



Agenda

マグニチュードとは何か

- はじめに
- Part 1: カントールの「無限の大きさ」
- Part 2: オイラーの「変わらぬ大きさ」
- Part 3: レンスターの「生物多様性の大きさ」

はじめに



「マグニチュードとは何か」 9/27 マルレクへのお誘い

今週末の9/27開催のマルレクへのお誘いです。

今月のマルレクは、「マグニチュードとは何か」というテーマで開催します。

「マグニチュード」 -- 地震の規模の大きさを示す尺度としては、日常的に使われている言葉です。今回は、地震には関係のない話です。ただ、「マグニチュード」が「大きさ」を表すという点では、話はつながっています。

今回のセミナーのテーマの「マグニチュード」論というのは、「大きさ」について考える新しい数学理論です。

「大きさ」を対象にした数学

私たちの周りには、「大きさ」を持つものが、たくさん存在しています。マグニチュード論が対象として考えようとしているのは、こうしたものの「大きさ」です。

身長・体重・子供の数・収入・コロナワクチンを打った回数の「大きさ」の意味は明確です。一方、「幸せ」や「美しさ」や「正しさ」の「大きさ」は、数字で表現することはできず、比喩的にしか語れません。

数学的な「大きさ」とは、まずは、「数えることや測ることで与えられる数字で表現される量」と考えていいと思います。

ただ、これだけでは数学の対象としては当たり前すぎて、あまり深みのある数学が生まれそうにはなさそうです。

5分で振り返る「大きさ」の数学史

ただ、それは量や空間を扱う数学が多様に発展している、現代の数学観を無意識のうち反映しているのかもしれませんが。

数学の歴史を振り返ってみると、その飛躍の節々で、「大きさ」についての意識が変化・発展してきていることがわかります。

- 数学的認識が人類に生まれた40,000年ほど前は、その主要な関心は、共同体の人口や耕地の面積など、具体的に数え測ることができる大きさを持つものでした。
- 紀元前3世紀のユークリッドは、幾何学的な点を「大きさを持たない」ものとして定義しました。
- 数としてのゼロの導入は、4世紀のインドだと言われています。だいぶ後のことです。
- 17世紀後半のニュートンやライプニッツの微積分学は、「無限に小さな大きさ」を考えることで可能になりました。
- 18世紀のオイラーは、形や大きさによらず「変わらない大きさ」が存在することを発見します。（「オイラーの標数」）

- 19世紀のエミー・ネーターは、「変わらない大きさ」=「不変量」(物理学での「保存量」)が「対称性」と結びついていることを発見します。
- 19世紀のカントールは、無限に数え続ける方法を考え、それとは独立に、個数の概念を無限のものにまで拡大することに成功しました。同時に、この無限の大きさの階層が、無限に続くことを証明しました。

新しい「大きさ」が生まれるということ

重要なことは、歴史の中で、新しい「大きさ」の概念が生まれることがあるということです。それは、社会の変化、特に新しい技術の登場と強く結びついています。

18世紀の産業革命を牽引した技術に蒸気機関があります。蒸気機関の熱効率の向上を目指す技術的探求は、19世紀、熱力学という新しい科学と「エントロピー」という大きさの概念を新しく生み出しました。

20世紀の情報通信技術の飛躍的発展は、情報科学という新しい科学を成立させ、「エントロピー」という新しい大きさを発見しました。

二つの「エントロピー」概念とそれをつなぐもの

この二つのエントロピー概念は、名前は同じですが、その生誕の場所も誕生の起源も全く異なるものです。

20世紀のエントロピーの発見者シャノンに、「エントロピー」という名前の採用を勧めたのは、フォン・ノイマンだと言われています。ノイマンは、二つの「大きさ」が同じ数式を満たすことに気づいていました。

新しい「大きさ」が生まれることがあること、また、新しい「大きさ」の数学的研究が、予想外の広がりを見せることがあることを、エントロピーの例は示しています。

エントロピーと情報量という概念が生まれたことで、我々は我々が持つ情報の「大きさ」について話すことができるようになりました。

注意して欲しいのは、bit という単位は、我々が普通に考える情報の単位ではなく、情報が失われていくことの尺度であるエントロピーの単位に他ならないということです。

ただ大丈夫だと思います。我々は、新しい情報を生み出し、それを維持・記憶するためには、外部からのエネルギーが必要であることを、経験的に知っています。

二つのエントロピー論の結びつきは、現代の情報化の社会で、理論的にも実践的にももっとも成功した「大きさ」の理論の一つです。

マグニチュードは、生成AIと大規模言語モデルの時代に発見された新しい「大きさ」の概念

今回のセミナーのテーマである「マグニチュード」についても、同じことが言えると僕は考えています。

それは、蒸気機関やインターネットの時代ではなく、生成AIと大規模言語モデルの時代に発見された新しい「大きさ」の概念です。時代の大きな変革期には新しい「大きさ」が登場するのかもしれませんが。

それは、なぜ、生成AIと大規模言語モデルが、あれほどまで見事に言葉の意味を理解できるのかという問題に結びついています。現在ではまだ完全には解明されていないこの問題の解決に、マグニチュード論が貢献する可能性があるのです。

ただ、今回のセミナーは、直接、マグニチュード論と大規模言語モデルの関係を議論したものではありません。

丸山は、「LLMの言語の意味理解能力の獲得と驚異的な言語運用能力の実現という現実の進行を目の当たりにして、それを説明しようとする問題意識と理論が次々に生まれています。...この夏以降しばらくの間、「LLMの理論モデルの新しい展開」という共通テーマで、複数のセミナーを連続して開催しようと思っています。」

今回と次回のセミナーは、その第一ラウンドで、ターゲットにしようと思っているのは、僕が注目している Tai-Danae Bradleyの次の論文です。

今回のセミナーは、この論文を読むための準備としての意味を持っています。

1. Bradleyらの意味の距離空間モデルと Magnitude概念の導入

Bradleyは、現在のLLMの働きを反映しているテキストの確率論的モデルに、再び enriched categoryの手法を適用して、新しいMagnitude概念をベースとした意味の距離空間モデルを構築し、そこが意味解釈の舞台として望ましい性質を持っていることを示しました。

The Magnitude of Categories of Texts Enriched by
Language Models

<https://arxiv.org/pdf/2501.06662>

今回のセミナーで扱うコンテンツ

今回のセミナー「マグニチュードとは何か」で扱うコンテンツは、次のものです。基本的には、現代の数学的マグニチュード論に先行した議論を取り上げています。その分、わかりやすいものになっているとおもいます。

- カントールの「無限の大きさ」
- オイラーの「変わらぬ大きさ」の発見
- レンスターの「生物多様性の大きさ」

マグニチュード論については、触れていないことがまだまだ残されています。それらについては、次回のセミナーで取り上げます。





Part 1

コントロールの「無限の大きさ」

Part 1 Agenda

カントールの「無限の大きさ」

- 「数える」と「個数」
- 無限を数える – カントールの順序数
- 無限の個数 – カントールの基数論

A landscape photograph capturing a sunset over the ocean. The sun is a bright, glowing orb in the upper center, casting a shimmering path of light across the water's surface. The sky is filled with soft, wispy clouds in shades of blue and orange. In the foreground, a dense field of tall, green grasses with feathery, light-colored seed heads dominates the view. The horizon line is visible in the distance, with a faint outline of land or mountains under the twilight sky.

「数える」と「個数」





宇宙を埋め尽くす砂の数は？

A vast desert landscape with rolling sand dunes under a clear sky. The dunes are golden-brown and have a fine, rippled texture. The foreground shows a large dune with a distinct ripple pattern, while the background features more distant, smoother dunes. The sky is a pale, clear blue.

宇宙を埋め尽くす砂の数は？

10^{51} 個より少ない
アルキメデス

.....

砂粒の大きさに関しては、以下の仮定を立てた。

1. 1個のケシ粒の体積は、1万個の砂粒の体積よりも大きくはない
2. 1個のケシ粒の直径は、1/40ディジットよりも小さくはない
2. は自身の観測を元に、砂粒の大きさを小さめに見積もるように仮定したものである。

これらの仮定から、直径1ディジットの球を満たす砂粒の個数は、6億4千万より少なく、故に10億 (10^9) より少ないことを導いた。

また、1スタディオン(スタディアの単数形)は1万ディジットよりも小さいことを用い、直径1スタディオンの球を満たす砂粒の個数は、十万の第3級の数 (10^{21}) よりも少ないとした。

上記の宇宙の大きさの見積もりと合わせ、宇宙球を満たす砂粒の個数は、千の第7級の数 (10^{51}) よりも少ないと結論した。

モンスター群は巨大である

モンスター群の位数(要素の数)は、次のようになります。

808,017,424,794,512,875,
886,459,904,961,710,757,
005,754,368,000,000,000

$$= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \\ \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

$$\approx 8 \times 10^{53}$$

モンスター群 M は、有限単純群の分類において、26個の「散在型 Sporadic」単純群の中で最大のものとして定義されます。



野鳥の数を数える



by 日本野鳥の会

まず、道に沿って、森の中を歩き、

たとえば左右25メートルの範囲内で目撃した野鳥の数を数えます。

次に、調査した範囲の面積と森全体の面積から、野鳥の数を割り出します。

さらに、鳥と観察者が出会う確率(遭遇率)と、出会った鳥が観察者に発見される確率(発見率)も考えて微調整します。

これを式で表すと、

総数 = 発見率 ÷ (遭遇率 × 発見率 × 面積率) ということになります。

この画像の鳥の数は、この方法では数えられない！

「数える」には、いくつかの前提・特徴がある

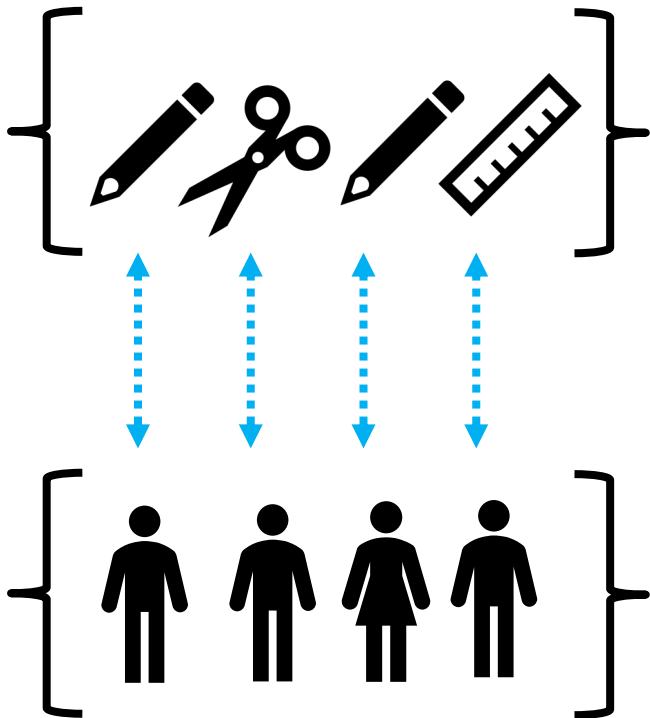
- 前提：数える範囲が明確（例えば「箱」の中にある）で、かつ、その数が、数える間に変化しないこと。
- 数えられる「もの」の具体的な形状・性質は、数えることには影響を与えない。数えるときに、それらは捨象される。
- どれを先に数えるか、同じことだが、数える順番は、数えることには影響を与えない。
- ただ、すでに数えたものと、まだ数えていないものとの区別は必要である。数えるというのは、対象をすでに数えたものとまだ数えていないものに二分することなしには実行できない。
- 最初に数えたとき1と数え、次に2と数え、順次、それを続ける。
数えることは、自然数の順番に対応している。

「個数」について考える

- 数えることと「個数」とは、もともとは結びついていたが、そのうちに、数えることとは独立にでも、「個数」は存在するという考え方が、一般的になる。
- 先のアルキメデスの宇宙を埋める砂の数や、日本野鳥の会のカウンティングは、実際には、数えていない。数えなくても、あるいは、数えられなくても、「個数」は存在すると思われる。
- 超ミクロな世界の量子物理学でも、様々な「量子数」の保存法則というのは、基本的なものだ。最終的には、自然数の間の関係式として物理法則が記述される可能性はある。
- ただ、そういう不変性が根本原理かどうかは、僕には、わからない。

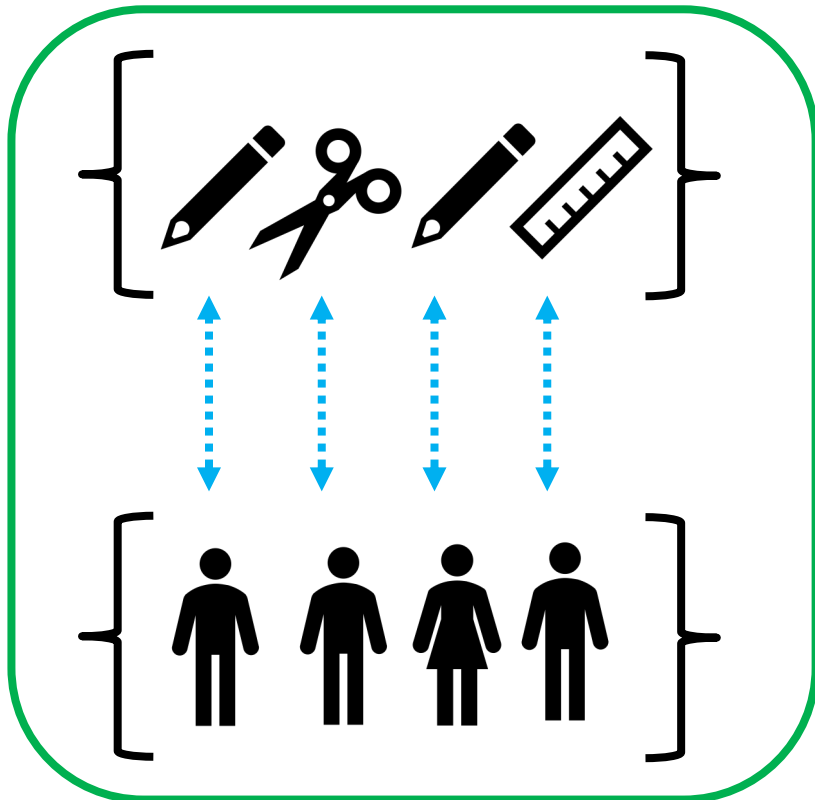
「数える」とは独立な「個数」の定義

二つの集合の要素が、「一対一対応」がつく時、
二つの集合の要素の個数は、等しいとする。



「数える」とは独立な「個数」の定義

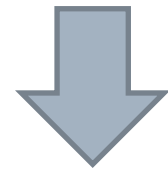
二つの集合の要素が、「一対一対応」がつく時、
二つの集合の要素の個数は、等しいとする。



集合の要素の数が有限の時、両者の
定義は一致する。ただし、問題は
無限集合の要素の数を考えた時に
起きる。



{ 1, 2, 3, 4 }



個数 4

抽象的な「個数」の話になる前に

次回のセッションから、集合の要素の個数についての、カントールの議論を紹介しようと思うのですが、話が抽象的になる前に、一つのことを確認しておきたいと思います。

それは、先に、「数える」ことの特徴として挙げた次のことに関係しています。

- 数えられる「もの」の具体的な形状・性質は、数えることには影響を与えない。数えるときに、それらは捨象される。

実は、日本語では、「個数」や「量」を表現するのに、数を表す語の後ろにある言葉を付けてどのような事物の数量であるかを示すのが一般的です。

日本語の助数詞

日本語の文法では、それを「助数詞」と言います。

人間の数は、4個ではなく4人と言います。動物なら4匹ですね。細長いものなら4本、平たくて厚みがないものは4枚とか4面と言います。4個と数えていいのは点の数ですね。

日本語のほか、中国語・韓国語など東アジア・東南アジアの多くの言語、またアメリカ大陸先住民の言語などにも「助数詞」はあるようです。

日本語の助数詞は多様性に富んでおり、一説には約500種類もあるそうです。<https://ja.wikipedia.org/wiki/助数詞> から、あ行の言葉の助数詞の例を挙げておきます。

- 灯り - 1灯(とう)
- アリ - 1頭(とう)
- 安打 - 1本(ほん)
- 行燈 - 1張(はり)
- 家 - 1戸(こ)、1軒(けん)、1棟(むね、とう)
- イカ - 食品の場合は1杯(はい)、生物の場合は1匹(ひき)
- 筏 - 1枚(まい)
- 衣桁 - 1架(か)
- 遺骨 - 1体(たい)、1柱(はしら)
- 囲碁の対局 - 1局(きょく)、1番(ばん)
- 椅子 - 1脚(きやく)
- 井戸 - 1本(ほん)、1基(き)
- 衣類 - 1着(ちゃく)
- 印籠 - 1具(ぐ)
- ウサギ - 1羽(わ)
- 牛 - 1頭(とう)
- 謡い物・語り物 の一段落 - 1関(けつ)。一関(ひとくさり)とも
- 宴 - 1席(せき)、1献(こん)
- 団扇 - 1柄(へい)
- うどん - 麺を指す場合は1玉(たま)。1杯(はい)
- 映画 - 1巻(かん)、1齣(こま/シーン)、1本(ほん)
- 枝 - 1枝(えだ)
- エビ - 1頭(かしら)、1尾(び)
- 烏帽子 - 1頭(かしら)
- 襟 - 1掛(かけ)
- 演能 - 1番(ばん)
- お年玉 - 1封(ふう)
- 鬼 - 1匹・疋(ひき)
- 斧 - 1挺(ちょう)
- 帯 - 1筋(すじ)、1条(じょう)

オイラーの図形の捉え方

数助詞を持つというのは、西欧語にはない一部の言語の特殊な特徴のように思われたかもしれませんが、それはそうかもしれません。

ただ、4個の点と、4本の線と、4面の面といった時、4という数字は共通なのですが、この数字は同じ量を表しているのでしょうか？


カントールの集合の要素の個数の捉え方を見た後で、オイラーの図形の特徴の捉え方を見ていく予定なのですが、彼は、たとえば、三角形を、3個の点と3本の線と1個の面(三角形自身)からなるものと考えます。

3個の点と3本の線というときの3は同じ量を表しているのでしょうか？

確かに、それは同じ「個数」を表しています。ただ、一方は点の個数で、もう一方は線の個数です。表しているものの性質は違うのです。

実は、3個と3本は、違う量を表すという、オイラーにさかのぼる認識は、マグニチュード論の誕生に大きく関わることになります。

それについては、また別のセッションで。



無限を数える - カントールの順序数

カントールの集合論

集合論は、19世紀後半に、ドイツの数学者ゲオルグ・カントールが創り出した数学の一分野です。2018年が、カントール没後100年にあたりました。

それまでの数学が、微分や積分や無限級数や幾何学的図形や物理的な運動を対象にしていたのに対して、集合論が対象とするのは、より抽象的な「集合」そのものです。その意味では、集合論の登場は、現代数学の一つの特徴である「抽象化」の歴史的な第一歩とっていいと思います。

ただ、集合論の基本的考え方は、決して抽象的なものではありません。それは、極めて具体的な、「集める」「数える」といった操作を基礎にしています。

集合とは、いろいろなものを集めてできたものに、一つのまとまりを与えることです。逆に、いろんなもの(これを「要素」といいます)は、この集合に「属する」と考えます。

集合について大事な特徴の一つは、我々は、集合の要素の数を数えることができるということです。

こうした考えは自然なもので、小学生に初めて足し算を教えるときには、この集合のモデルを使っています。「赤い石が三つのかたまりと、青い石が五つのかたまりを、一緒にすると、石はいくつ？数えてみましょう。」

ただ、無限個の要素を持つ集合を考え始めると、急に問題が難しくなります。

集合論の創始者のカントールが考えた一番難しい問題の一つは、次のようなものでした。

「連続的な線は、点を集めたものである。
それでは、この線分の上に、点は何個あるのか数えてみよう。」

こうして、集合論は、主に、無限と連続というものを数学的に考える数学として出発します。ただ、その前途は、平坦なものではありませんでした。

順序数と基数

カントールの集合論では、無限の系列が二種類登場します。一つは、「順序数」と呼ばれるもので、もう一つは、「基数」と呼ばれるものです。

以前のセッションで、集合の要素を「数える」とことと、集合の要素の「個数」は、当然ですが、密接に関係しているという話をしました。ただ、概念として二つは異なるものです。

カントールの順序数と基数の区別は、基本的には、「数える」とことと「個数」の違いに対応していると考えられます。

このセッションでは、カントールの順序数の話をします。基数については、次回のセッションで紹介します。

あらためて「数える」を考える

先のセッションでは、「数える」が次のような特徴を持つと述べてきました。

- どれを先に数えるか、同じことだが、数える順番は、数えることには影響を与えない。
- ただ、すでに数えたものと、まだ数えていないものとの区別は必要である。数えるというのは、対象をすでに数えたものとまだ数えていないものに二分することなしには実行できない。
- 最初に数えたとき1と数え、次に2と数え、順次、それを続ける。数えることは、自然数の順番に対応している。

このどこを、改めて考えなおす直す必要があるのでしょうか？

有限なものの数え方

先の「数え」方は、自然数の順序 $\{1, 2, 3, \dots\}$ に一致するように、集合の要素を一つずつ取り出すという「数え」方です。

取り出す順番は数え方には影響しないと言いますが、取り出す順番はランダムでも、取り出されたものは自然数の順序 $\{1, 2, 3, \dots\}$ の一つに割り当てられ、結果としては、自然数の順序の中で順序を持つことになります。

この数え方は、ある自然数に一致するもの、すなわち、有限なものの数え方に他なりません。

有限をこえ、無限に数え続けること

カントールが考えたことは、有限な自然数の順序を超えて、無限に数え続けることは可能かという問題だと考えることができます。

彼は、数えることの基本的特徴を、数えるものにきちんとした順序を与えることだと考えました。それは、有限なものを数えることが、有限なものに自然数の順序を与えることであることの延長です。

まず、順序の持つ性質を考えるとところから始めましょう。

後半の展開は、John Baezの "Large Countable Ordinals" に多くを負っています。

<https://johncarlosbaez.wordpress.com/2016/06/29/large-countable-ordinals-part-1/>

(以前の資料を多く利用しているので、「である」調に変わります。)

半順序と全順序

ある集合Pの要素 x, y, z, \dots について、次の関係が成り立つ時、Pを \leq についての半順序集合という

1. $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$

2. $x \leq x$

前順序

3. $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$

半順序

4. すべての x, y について

$x \leq y$ あるいは $y \leq x$ が成り立つ

全順序

自然数・整数・有理数・実数は、普通の大小の順序について全順序である。(もちろん、半順序である) ただし、それにはとどまらない。

半順序の例

1. 数の大小の関係

$$1 \leq 2, 4.56 \leq 7.223, \dots$$

数の大小は、全順序である

2. $x \leq y$ を $x \subset y$ と考えた時の集合の包含関係

1. $x \subset y$ かつ $y \subset z$ なら $x \subset z$

2. $x \subset x$

3. $x \subset y$ かつ $y \subset x$ なら $x = y$

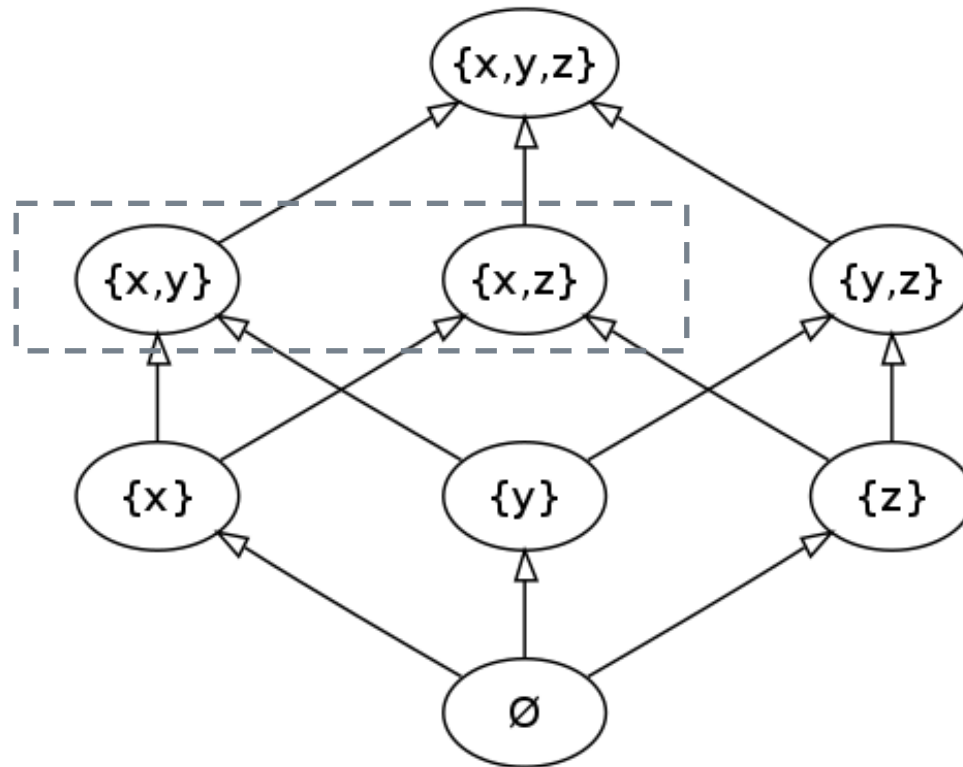
3. $x \leq y$ を「 x は y の先祖である」と考えた時の先祖関係

4. $x \leq y$ を「 x は y の部分文字列」と考えた時の関係 正確には「前順序」である。

半順序だが全順序ではない例1

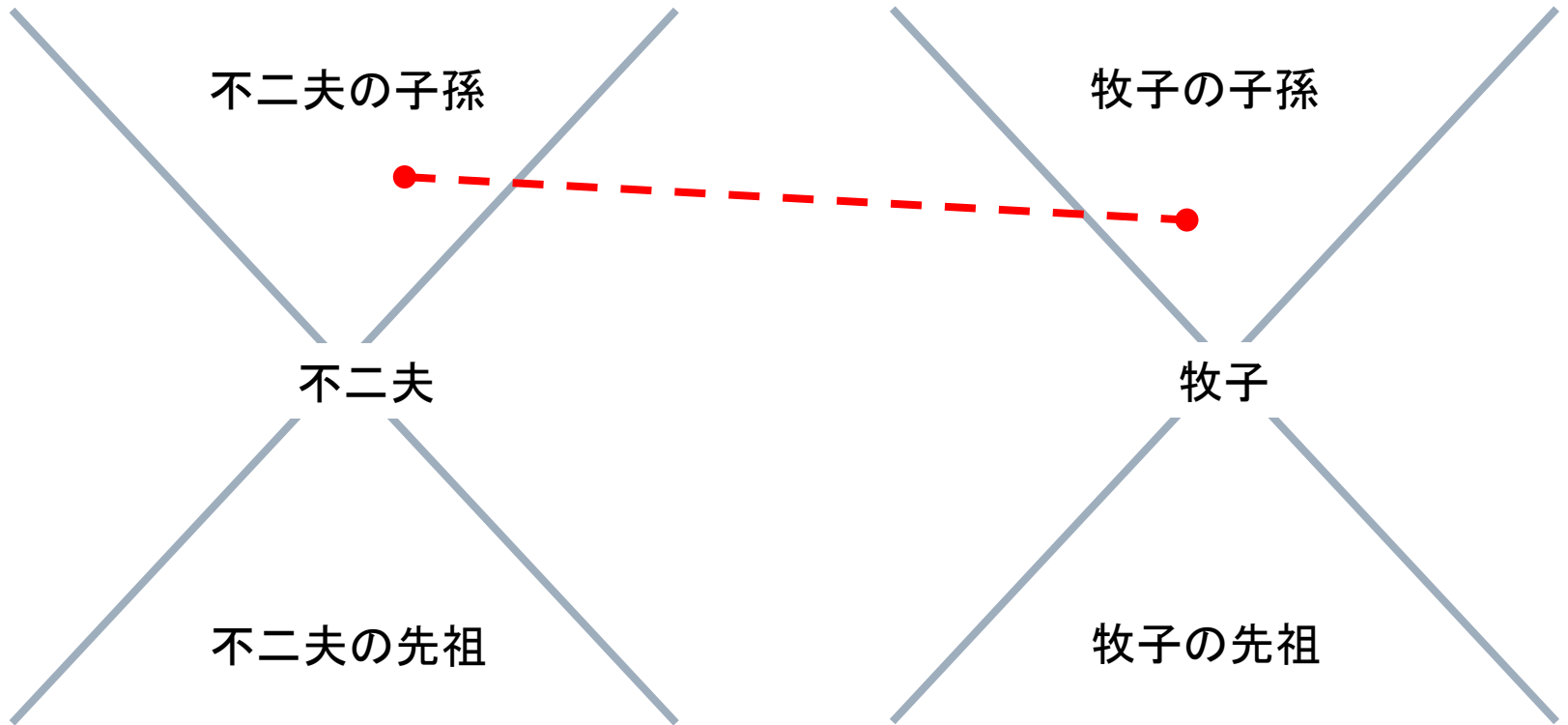
集合の包含関係は、全順序ではない。

次の図は、集合 $\{x, y, z\}$ の部分集合を全て書いたものだが、例えば、 $\{x, y\}$ と $\{x, z\}$ の間には包含関係はない。



半順序だが全順序ではない例2

先祖(子孫)関係は、全順序ではない。



Well-Orderd (整列性) と順序数

ある集合は、その要素に次のような順序 \leq が定義されている時、整列されているという。

1. $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$
2. $x \leq x$
3. $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$

半順序の条件

4. 全ての空でない部分集合は、この順序で最小の要素を持つ

順序数は、整列されている集合の大きさを表す。

整列集合の例

- 自然数全体の集合 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ は、通常的大小順序関係で、整列集合になる。
- 次の負数の集合は整列集合である。
 $\{-1, -1/2, -1/4, -1/8, -1/16, \dots, -1/2^n, \dots\}$
- 整数全体の集合 $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ は、通常的大小順序関係で、**整列集合にならない**。負の整数の全体からなる Z の部分集合は、**最小元をもたないから**。
- Z に次のような順序関係を導入すれば、 Z_1 は整列集合になる。
 $Z_1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$ 順序型 $\omega + \omega$
- Z に次のような順序関係を導入しても、 Z_2 は整列集合になる。
 $Z_2 = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$ 順序型 ω

整列定理 by Cantor

「全ての集合 X について、 X を整列集合にする整列順序が存在する」

順序数

ある順序数を、それより小さい全ての順序数の集合としてあらわす。(フォン・ノイマンによる定義)

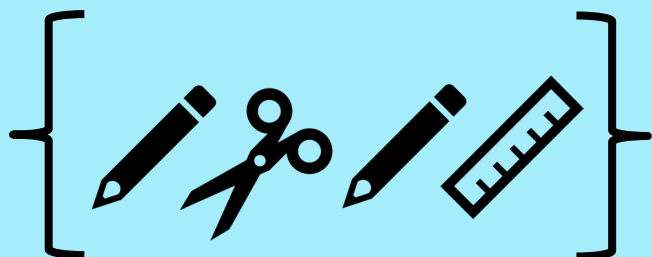
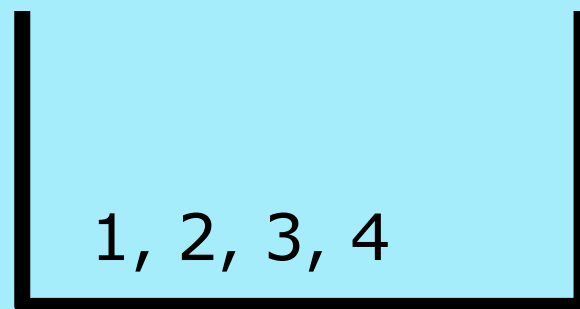
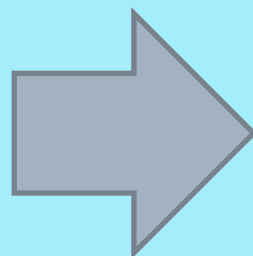
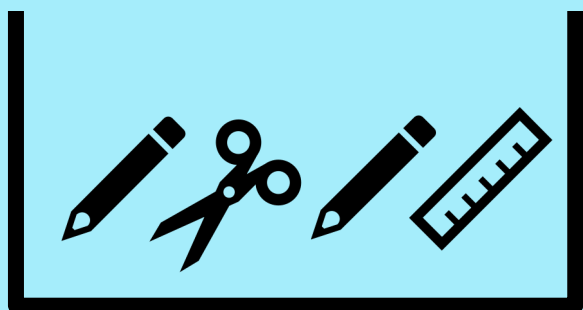
$$\begin{aligned} 0 &= \{\} && \phi \\ 1 &= \{0\} && 0 \\ 2 &= \{0, 1\} && 0 < 1 \\ 3 &= \{0, 1, 2\} && 0 < 1 < 2 \\ 4 &= \{0, 1, 2, 3\} && 0 < 1 < 2 < 3 \\ &\dots && \\ n &= \{0, 1, 2, \dots, n-1\} && 0 < 1 < 2 < \dots < n-2 < n-1 \end{aligned}$$

有限の順序数

- 順序数が有限の時、それは、ある自然数に一致する。
それはまた、その集合の要素の数(基数)とも一致する。
- 有限の時、
順序数 = 基数 = 順序数の要素の数 である

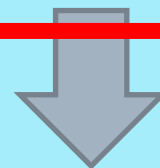
順序数の系列: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$

基数の系列: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$



数える

{ 1, 2, 3, 4 } 順序数
Ordinals



4 個
個数

基数
Cardinals

「ある順序数を、それより小さい全ての順序数の集合としてあらわす。」という定義は、0から始まっているが、先に「数えるを考える」でみたこの図での説明は、1から始まっている。そうした違いはあるが、両者は同じものである。

ω : 有限な順序数全ての集合

- 全ての有限な順序数全ての集合 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ を考える。この集合を ω (omega) で表す。 ω は全ての自然数からなる無限集合である。

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- $0, 1, 2, 3, \dots < \omega$ である(どの自然数 n も ω より小さい)と考えれば、この ω の定義は、「ある順序数を、それより小さい全ての順序数の集合としてあらわす。」という順序数の定義に当てはまるので、 ω も順序数である。

- 今度は、 $\{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$ を考える。 $0, 1, 2, 3, \dots < \omega$ であるとすれば、この集合もある順序数に対応する。この順序数を $\omega+1$ で表す。

$$\omega+1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$$

ちょっと、ここで立ち止まろう

- $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ は、無限の要素を持っている。



この集合に終わりの要素はない。

- また、 $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$ の右辺のオメガには、直前の要素はない。



- ただし、 $0, 1, 2, 3, \dots < \omega$ とすれば、 $\omega + 1$ の要素すべてにきちんと順序が定義されている(整列されている)。だから、 $\omega + 1$ もまた、順序数である。

後継順序数と極限順序数／可算順序数

- ある順序数 α について、 $\beta=\alpha+1$ の形で表される順序数 β を、**後継順序数**という。「孤立点」
 - 自然数 1, 2, 3 等々、有限な順序数は、後継順序数である。
 - $\omega+1$ は、無限な順序数だが、後継順序数である。
 - $\omega+2$ は、無限な順序数だが、 $(\omega+1)+1$ で後継順序数である。
- ω は、直前の要素を持たず、 $\beta=\alpha+1$ の形では表されない。こうした順序数を、**極限順序数**という。「集積点」
- 順序数は、「数える」という操作と結びついている。それは、「順番に数える」という操作の無限への拡大である。ここで扱う順序数は、様々な無限の型をとるが、基本的にはすべて「可算 (Countable)」である。

順序数の和

- 順序数 α と順序数 β の和 $\alpha+\beta$ は、 α の後ろに β をつなげて、つなぎめのところで新しい順序関係を導入して、前後で一貫した順序が保たれるようにしたものと思えばいい。
- だから、 $\omega+1$ は、 $\{0,1,2,3, \dots, 0\}$ となる。同じ0が2度出てきているように見えるが、緑色の0は α に属し、赤色の0は β に属する。これを繋げて一つの順序にするには、 $0,1,2,3, \dots < 0$ とすれば良い。これは、0が ω だと思っていことを示す。
- 逆に、 $1+\omega$ は、 $\{0,0,1,2,3, \dots\}$ で、 $0 < 0$ という関係を導入すればいいのだが、この時、この順序関係は、 $\{0,1,2, \dots\}$ と同じものになる。よって $1+\omega=\omega$ である。
- こうして、 $1+\omega = \omega \neq \omega+1$ である。

順序数 $\omega + \omega$

- この調子で、どんどん順序数を数えていこう。

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$$

$$\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \dots$$

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots\}$$

- $\omega + \omega$ は、後継順序数の並びでない箇所が二箇所ある。この $\omega + \omega$ を、 ω^2 と表す。 ω が二つという意味である。

順序数の積

- 順序数 α と順序数 β の積 $\alpha\beta$ は、 α を β 個つなげたものと思えばいい。もちろん、つなぎめのところで新しい順序関係を導入して、前後で一貫した順序が保たれるようにする。
- 例) $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ だから
 $\omega 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
これを繋げて一つの順序にするには、 $0, 1, 2, 3, \dots < 0$ とすれば良い。これは、 0 が ω だと思っていことを示す。
だから、 $\omega 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots\}$
- $2\omega = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots [0, 1の繰り返し\omega回] \}$
ここで、 $1 < 0, 1 < 0, 1 < 0, \dots$ という順序を導入すればいい。
これは、結局、 $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ と同じ順序にできる。
だから、 $2\omega = \omega$
- $2\omega = \omega \neq \omega 2$

順序数 $\omega\omega (= \omega^2)$

- どんどん順序数を数え続ける。

$$\omega^2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots\}$$
$$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots$$

$\omega^3.$

$\omega^4.$

ω^5

\vdots

$\omega\omega$

$$\omega^2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots\}$$

ω^2 はどういう集合か？

- ω 巻からなる百科事典を考える。各巻が ω ページからなるとすると、この百科事典は、 ω^2 ページを持つ。
- ただ、この集合はイメージできるかもしれないが、順序の様子を見るにはわかりにくい。大事なことは、全体で一つの順序をなしていることだから。
- そこでこうする。この本のページは、すべて一つ前のページの1/2の厚さを持ち、かつ、各巻は一つ前の巻の1/2の厚さを持つとする。本当はページ数・巻数が大きくなるたびに、無限の値は大きくなるのだが、それでは、限られた紙面では表示できなくなる。進めば進むほど小さくなるように、「見える化」するのだ。

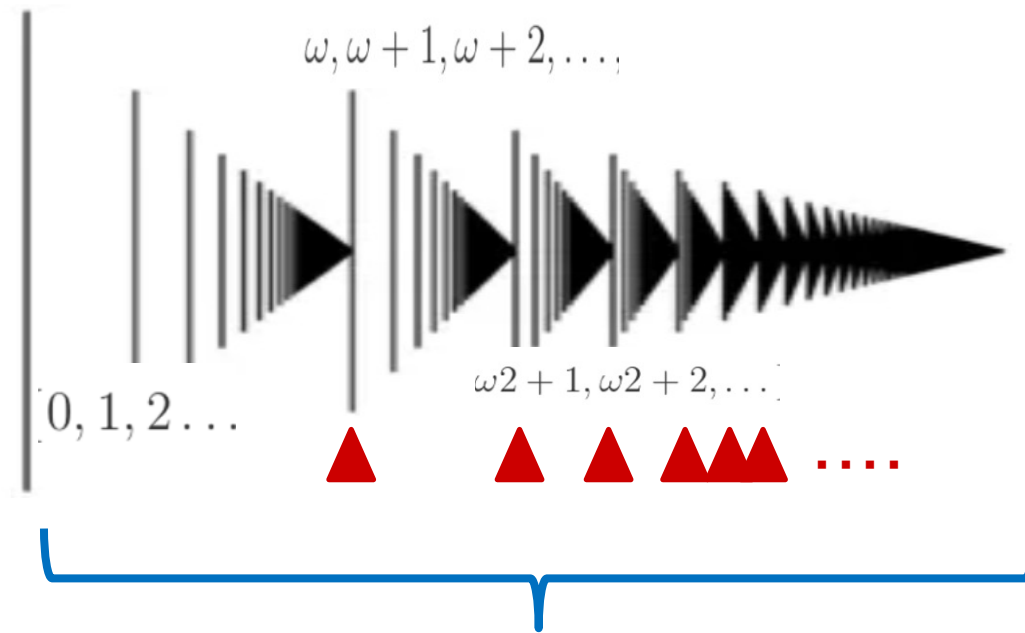
超限順序数を「見える化」するサイトがある！

David Madore:

<http://www.madore.org/~david/math/drawordinals.html#?v=oo2.1.&i=0&l=1>

ω^2 のイメージ

$\omega^2 =$



▶ が、 ω 個。▲ も ω 個。

順序数 ω^ω

まだまだ続く。

$$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots$$

$$\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \dots$$

$$\omega^2 + \omega^2 = \omega^2 2$$

$$\omega^2 3$$

$$\omega^2 4$$

⋮

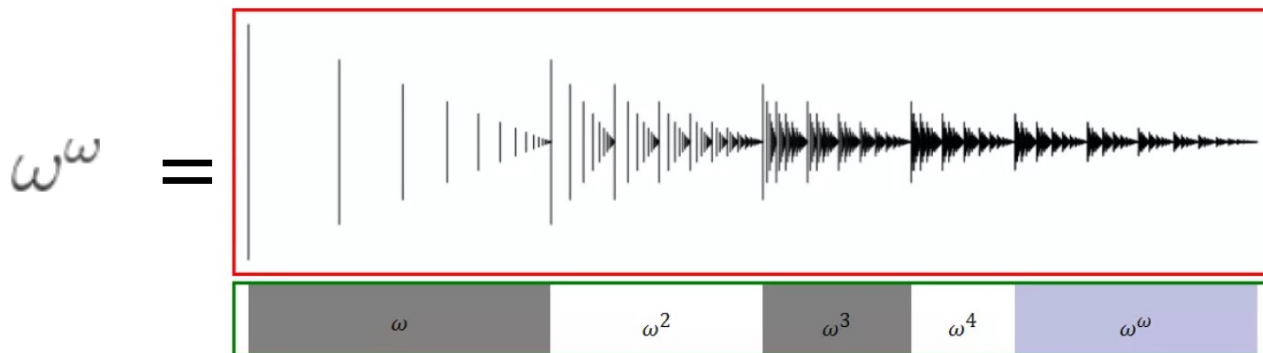
$$\omega^2 \omega = \omega^3$$

⋮

$$\omega^\omega$$

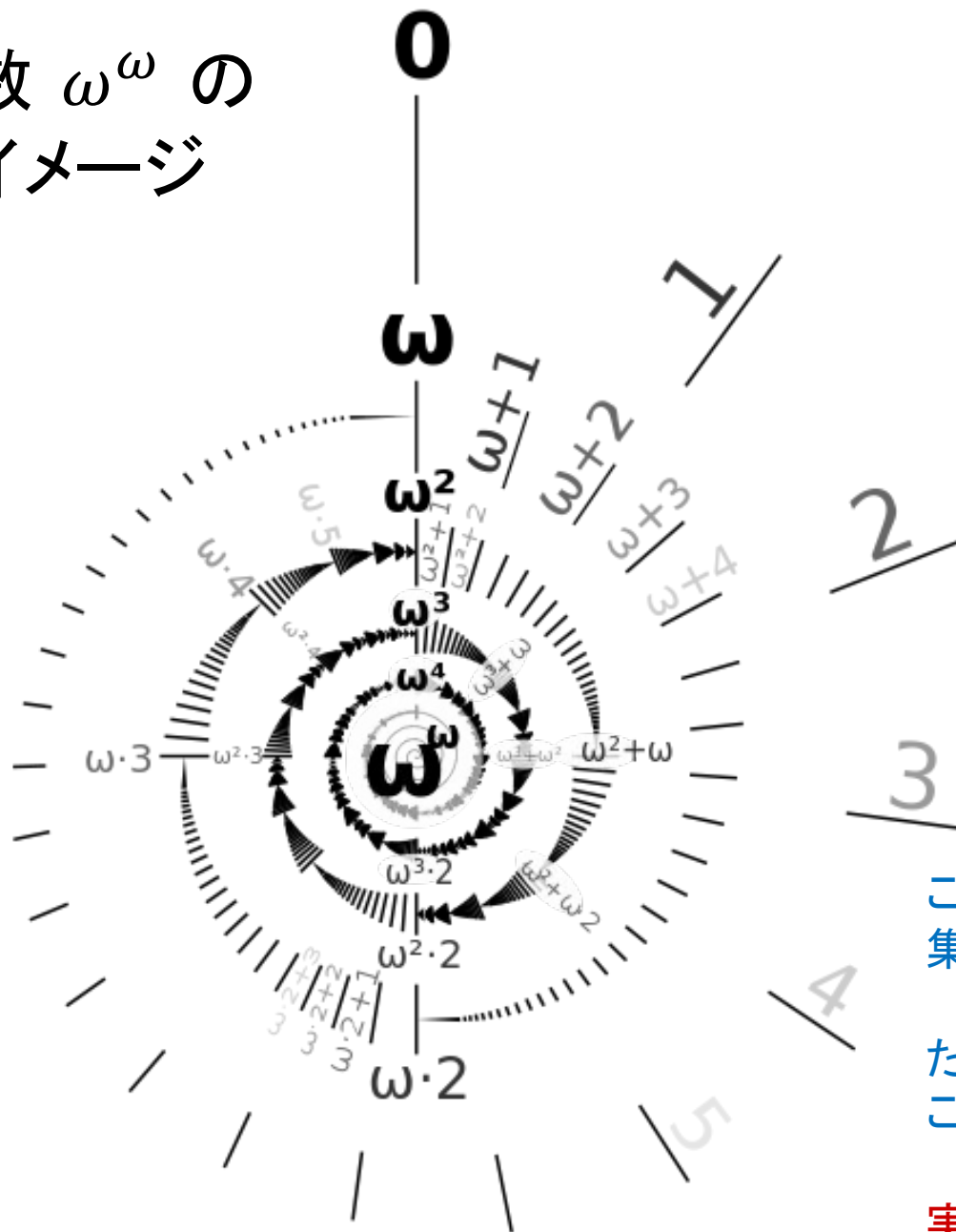
順序数 ω^ω のイメージ

- ω ページからなる本を考え、 ω 巻からなる百科事典を考え、 ω 種類の百科事典が入った入った本棚を考え、 ω 個の本棚が入ったフロアを考え、 ω 階のフロアからなる図書館を考え、 ω 個の図書館を持つ都市を考え、 ω 個の都市を持つ惑星を考え、 ω 個の惑星をもつ恒星系を考え、 ω 個の恒星系からなる銀河を考え、...こんなのはずっと続く。
- でも、このシステムで、ある本のある一ページを、具体的に指定しようと思ったら、有限個の自然数の指定で、このページに行き当たるから、この順序数は可算である！





順序数 ω^ω の別のイメージ



これは、なかなか秀逸。
集積点が直線上に並ぶ。

ただし、 ω^ω までなのだが。
これで終わりではない。

実は、まだまだ続く。

まだ、終わらない！

$$\omega^\omega.$$

$$\omega^\omega + 1$$

$$\omega^\omega 2, \dots, \omega^\omega 3, \dots, \omega^\omega 4, \dots$$

$$\omega^\omega \omega = \omega^{\omega+1}$$

$$\omega^\omega \omega^2, \dots, \omega^\omega \omega^3, \dots, \omega^\omega \omega^4, \dots$$

$$\omega^\omega \omega^\omega = \omega^{\omega+\omega} = \omega^{\omega 2}$$

$$\omega^{\omega 3}, \dots, \omega^{\omega 4}, \dots, \omega^{\omega 5}, \dots$$

$$\omega^{\omega \omega} = \omega^{\omega^2}$$

$$\omega^{\omega^3}, \dots, \omega^{\omega^4}, \dots, \omega^{\omega^5}, \dots$$

$$\omega^{\omega^\omega}$$

まだ、終わらない！

ω^{ω}

$$\omega^{\omega} + 1, \omega^{\omega} + 2, \dots$$

$$\omega^{\omega} + \omega, \dots, \omega^{\omega} + \omega 2, \dots, \omega^{\omega} + \omega 3, \dots$$

$$\omega^{\omega} + \omega^2, \dots, \omega^{\omega} + \omega^3, \dots$$

$$\omega^{\omega} + \omega^{\omega}$$

$$\omega^{\omega} + \omega^{\omega} = \omega^{\omega} 2$$

$$\omega^{\omega} 3, \dots, \omega^{\omega} 4, \dots, \omega^{\omega} 5, \dots$$

$$\omega^{\omega} \omega = \omega^{\omega+1}$$

そろそろやめたい

$$\omega^{\omega+\omega}, \dots, \omega^{\omega+\omega^2}, \dots, \omega^{\omega+\omega^3}, \dots$$

$$\omega^{\omega+\omega^2}, \dots, \omega^{\omega+\omega^3}, \dots, \omega^{\omega+\omega^4}, \dots$$

$$\omega^{\omega+\omega} = \omega^{\omega \cdot 2}$$

$$\omega^{\omega^3}, \dots, \omega^{\omega^4}, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} = \omega^{\omega+1}$$

$$\omega^{\omega^{\omega+2}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega+3}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega+4}}, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}}, \dots$$

$\epsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}$

ω個

イプシロン・ゼロ

$$\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$$

べき乗についてのfixed point

Cantor Normal Form

Theorem. Every ordinal α can be uniquely written as

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \cdots + \omega^{\beta_k} c_k$$

where k is a natural number, c_1, c_2, \dots, c_k are positive integers, and $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k \geq 0$ are ordinals.

$$\omega^{\omega^{\omega^{1+1} + \omega + 1}} + \omega^{\omega^{\omega} + \omega^{\omega}} + \omega^{\omega + 1 + 1} + \omega + 1$$

こんなのが、何か役に立つのであろうか？
そういう疑問を持った人が多いと思うが、
次のゲンツェンの仕事は、ひとつの回答になる。

ゲンツェンの数論の無矛盾性証明

- 1936年、ゲンツェンは、 ϵ_0 までの超限帰納法を利用して、ペアノ数論の無矛盾性を証明した。
- ゲーデルの不完全性定理で、数論の無矛盾性証明は不可能だと思っている人が多いのだが、それはその体系の内部ではできないということ。
- ϵ_0 までの超限帰納法は、ペアノ数論の内部には含まれていない。しかし、それは、「自然」な想定である。
- 残念なことに、ゲンツェンは、若くして亡くなっている。



Gerhard Karl Erich Gentzen,
1909年11月24日 - 1945年8月4日

A landscape photograph showing a sunset over a field of tall grasses. The sun is low on the horizon, casting a golden glow over the scene. The sky is filled with soft, wispy clouds. In the background, the ocean stretches to the horizon, with a faint silhouette of land visible in the distance. The foreground is dominated by lush green grasses with light-colored seed heads.

無限の個数 – カントールの基数論

数の二つの系列

順序数と基数について

カントールの集合論では、無限の系列が二種類登場します。一つは、「順序数」と呼ばれるもので、もう一つは、「基数」と呼ばれるものです。順序数は対象を「順番に数える」ことに対応し、基数は対象の「個数」に対応します。

ただ、この順序数と基数の区別は、カントールの集合論で初めて導入されたわけではありません。この区別は、英語等の印欧語では、ごく普通の日常的な区別です。

英文法の授業で、次のようなこと習いませんでしたか？
first, second, third , ... といった順序を表す数詞を「序数」と呼び、one, two, three, ... といった数量を表す数詞を「基数」と呼び、両者は、異なる系列に属すると。

英文法では、順序を表す first, second, third , ... といった序数詞の文法範疇を ordinal numeral といい、数量を表す one, two, three, ... といった基数詞の文法範疇を cardinal numeral と言います。文法用語なのでラテン語が入っていますが、普通の英語に訳すと、それぞれ ordinal number, cardinal numberになります。

これは、カントールの「順序数 = ordinal number」、「基数 = cardinal number」という用語と全く同じものです。

カントールの順序数と基数の区別は、何も特別なものではなく。印欧語の世界では、ごく普通の日常的区別なのです。

日本語の場合

なぜそんなことを言うかというと、日本語の場合（多分、東アジア系の言語の場合）、序数詞と基数詞の区別は、それほど明確でないからです。

その代わりに、以前にも紹介しましたが、日本語には「助数詞」という数詞の後ろについて数詞の表す数字の性質を説明する特別なことばがあります。

例えば、「3人」、「2枚」、「1本」の、「人」「枚」「本」は助数詞で、「3人」の3は「人間」の数であること、「2枚」の2は「平たいもの」の数であること、「1本」の1は「まっすぐな、あるいは線状のもの」の数であることを表します。

日本語では、この助数詞の助けによって、「序数」と「基数」の区別以上の数の区別が行なわれているとっていいのかもしれませんが。

日本語では「序数」をどのように表現できるのでしょうか？多分、 n を数字として、「 n 番目」「 n 回目」「 n 巡目」のように表せます。「番」も「回」も「巡」も助数詞ですので、あるいは、 n +助数詞+「目」が、序数化の中心的な役割を担っているのかもしれませんが。

ここでも、日本語の序数にあたるものは、英語の序数に比べて、数字についての豊かな質的情報を持ちうるということがわかります。

もっとも、言語による数的表現の差異や優劣を論じるのが、今回のセミナーの目的ではありません。ただ、今回のセミナーのテーマである「マグニチュード論」は、対象に応じて様々な質を持つ「大きさ」の共通の数学的構造と表現を探求するものです。これまでの議論のいくつかは、マグニチュード論に関係を持ちます。

今回のセッションのテーマ カントールの無限集合の基数論

少し、議論がわき道に逸れたのですが、今回のセッションでは、カントールの無限集合の基数の理論を紹介したいと思います。

集合の基数(濃度)

- 集合の要素の数をその集合の基数あるいは「濃度」と呼びます。集合Aの基数あるいは濃度を $|A|$ で表します。
- 集合Aの要素と、集合Bの要素の間に、「一対一」の対応が成り立つ時、 $|A| = |B|$ と定義します。

集合Aが有限個の要素を持つ場合

- 前回見たように、順序数 n は n より小さい全ての順序数の集合 $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ として定義されます。
ある集合Aの要素と順序数 $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ の要素との間に「一対一」の対応が成り立つ時、 $|A| = n$ とします。

有限集合の場合、その順序数と基数は一致します。

無限集合の基数(濃度)

全ての自然数の集合を ω とします。(これは順序数になります)

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

この可算無限集合 ω の基数(濃度)を \aleph_0 (アレフゼロ)と呼びます。

$$|\omega| = \aleph_0$$

要素の数が \aleph_0 の集合の、全ての部分集合からなる集合の要素の数は、 2^{\aleph_0} になって $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ になりますので、この操作を繰り返せば、いくらでも大きな基数を作ることができます。

無限集合の基数を、 \aleph_0 から始めて大きさを順番に並べて、その系列を、 $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$ とします。

この系列の中で \aleph_1 は \aleph_0 の次に大きな無限基数だということです。カントールは、 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ となるだろうと予想しました。これを「連続体仮説」と言います。

あらためて、順序数の系列と基数の系列をまとめると、次のようになります。

	有限	可算無限	非可算
順序数の系列:	$0, 1, 2, 3, \dots, \omega,$	$\omega_1,$	$\omega_2, \omega_3, \dots$
基数の系列	$: 0, 1, 2, 3, \dots, \aleph_0,$	$\aleph_1,$	$\aleph_2, \aleph_3, \dots$

有限の場合のみ、順序数と基数は一致しますが、無限集合の場合、二つは一致しません。また前回のセッションで見た順序数は、すべて可算なものでしたが、非可算な順序数も存在します。

カントールが無限集合の濃度 について発見したこと

カントールは、無限集合の濃度について、さまざまの驚くべき発見を次々に行いました。代表的なものを挙げておきます。

- 自然数と有理数の濃度は等しい。
- 実数の濃度は、自然数の濃度より大きく非可算である
- 平面上の点の濃度は、直線上の点の濃度と等しい

しかし、自身が提出した連続体の濃度についての予想「連続体仮説」を証明することはできませんでした。

詳細は、以下のセッションで。

無限の不思議

部分は、全体と同じ数の要素を持つ

奇数・偶数は、自然数の一部である。明らかに、自然数の数は、奇数や偶数の数より大きいように見える。

自然数: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

奇数: 1, 3, 5, 7, 9, ...

偶数: 0, 2, 4, 6, 8, ...

ただ、次のような対応で、奇数全体も偶数全体も、自然数全体と「一対一」に対応することがわかる。

自然数: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., n, ...

奇数: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ..., $2n+1$, ...

偶数: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ..., $2n$, ...

よって、「一対一」対応で、要素の数を考えれば、自然数の数と基数の数と偶数の数は等しい。

ヒルベルトの無限ホテル

「客室が無限にあるホテルを考える。現実にある客室が有限のホテルの場合には、「満室である」ということと「もう1人も泊められない」ということは同値である。しかし「無限ホテル」ではそうはならない。

無限ホテルが「満室である」としよう。この場合でも次のようにして新たな客を泊めることができる。客室数は無限とはいえ $1, 2, 3, \dots$ と番号を付けられる。客が1人来たら、1号室にいた客を2号室へ、2号室の客を3号室へ、3号室の客を4号室へ、 \dots 、 n 号室の客を $n + 1$ 号室へ、 \dots と順番に移す。

客室は無限にあるのだから誰もあぶれることはない。新たな客は1号室に泊めればよい。」

「新たな客は1人どころか、複数でも、(可算)無限でもよい。例えば、1号室の客を2号室へ、2号室の客を4号室へ、3号室の客を6号室へ、...、 n 号室の客を $2n$ 号室へ、...と移せば、1号室、3号室、5号室、...つまり奇数号室は空室になるから、無限の客を新たに泊めることができる。」



「ヒルベルトの無限ホテル」の解説動画です。

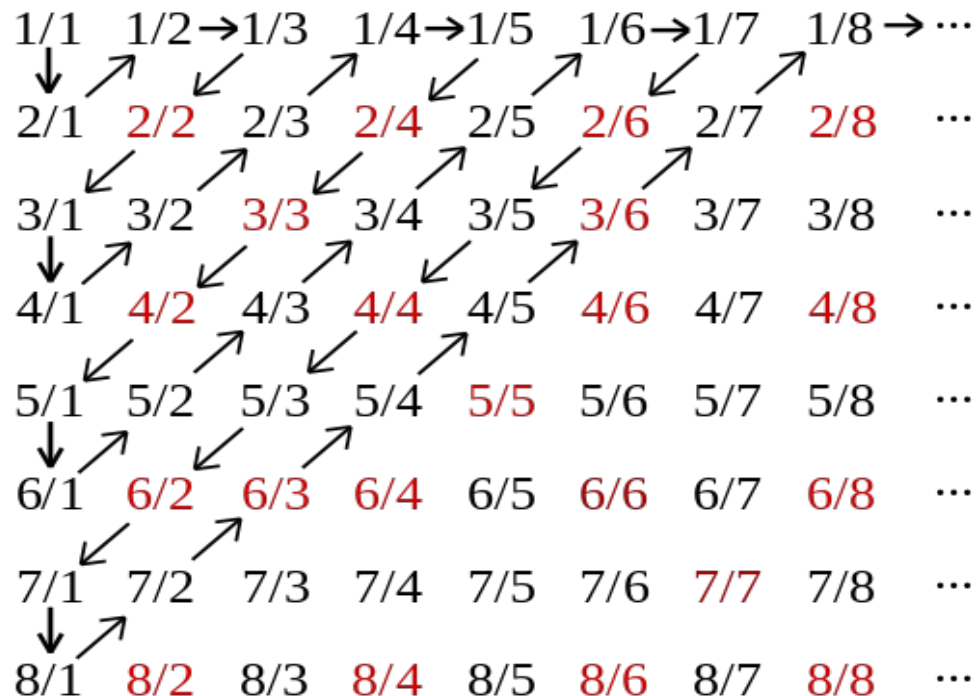


https://youtu.be/Uj3_KqkI9Zo

自然数全体と有理数全体とは、 一対一に対応する

有理数は、0以外の二つの自然数 p, q について、 p/q で表される数である。0と1の間にも、有理数は無限に存在する。

ところが、次のように有理数を全て数え上げることができる。



すなわち、自然数全体と有理数全体とは、一対一に対応する

n個の自然数の組の全体と 自然数とは、一対一に対応する

- 有理数は、ゼロでない二個の自然数の組と考えることができるが、ゼロでない自然数のn個の組も、次のように一つの自然数に対応づけることができる。

- 以下で、i番目の素数を p_i で表すとする。

$$p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7, p_5=11, p_6=13, \dots$$

この時、自然数のk個の組 $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ に、次の数Aを対応づける。

$$A = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$$

たとえば、4個の自然数の組 $(23, 100, 1, 13)$ は、次の自然数に対応づけられる。

$$(23, 100, 1, 13) \rightarrow 2^{23} \cdot 3^{100} \cdot 5^1 \cdot 7^{13}$$

- この対応は、一対一である。

$$2^{23} \cdot 3^{100} \cdot 5^1 \cdot 7^{13} \rightarrow (23, 100, 1, 13)$$

0と1を結ぶ直線上の点の数は、 自然数の数より大きい

1874年、カントールは、0と1を結ぶ直線上の点の数は、自然数の数より大きいことを発見します。これは、実数の濃度は非可算であるということの意味します。

1891年 カントールは、次に示すような**対角線論法**での証明に成功します。

- こうしてできた対応表の対角線上の桁の数字からなる実数を、Aとしよう。

$$A = 0.a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}a_{6,6}a_{7,7}a_{8,8}a_{9,9} \dots\dots$$

- Aの小数点以下の各桁の数字 $a_{n,n}$ を、各桁の数字に1を加えた数字 $a'_{n,n}$ で置き換える(9の桁は0にする)。この数字をBとする。置き換えたのだから $a'_{n,n} \neq a_{n,n}$ である。例えば、

$$A = 0.341980675597 \dots \text{ならば、}$$

$$B = 0.452091786608 \dots \text{となる。}$$

- この数字

$$B = 0.a'_{1,1}a'_{2,2}a'_{3,3}a'_{4,4}a'_{5,5}a'_{6,6}a'_{7,7}a'_{8,8}a'_{9,9} \dots\dots$$

は、先の対応表の中には存在しない。なぜなら先の対応表の中の数字とは、少なくとも一箇所では異なるから。

実数は、自然数とは、「一対一」で対応しない

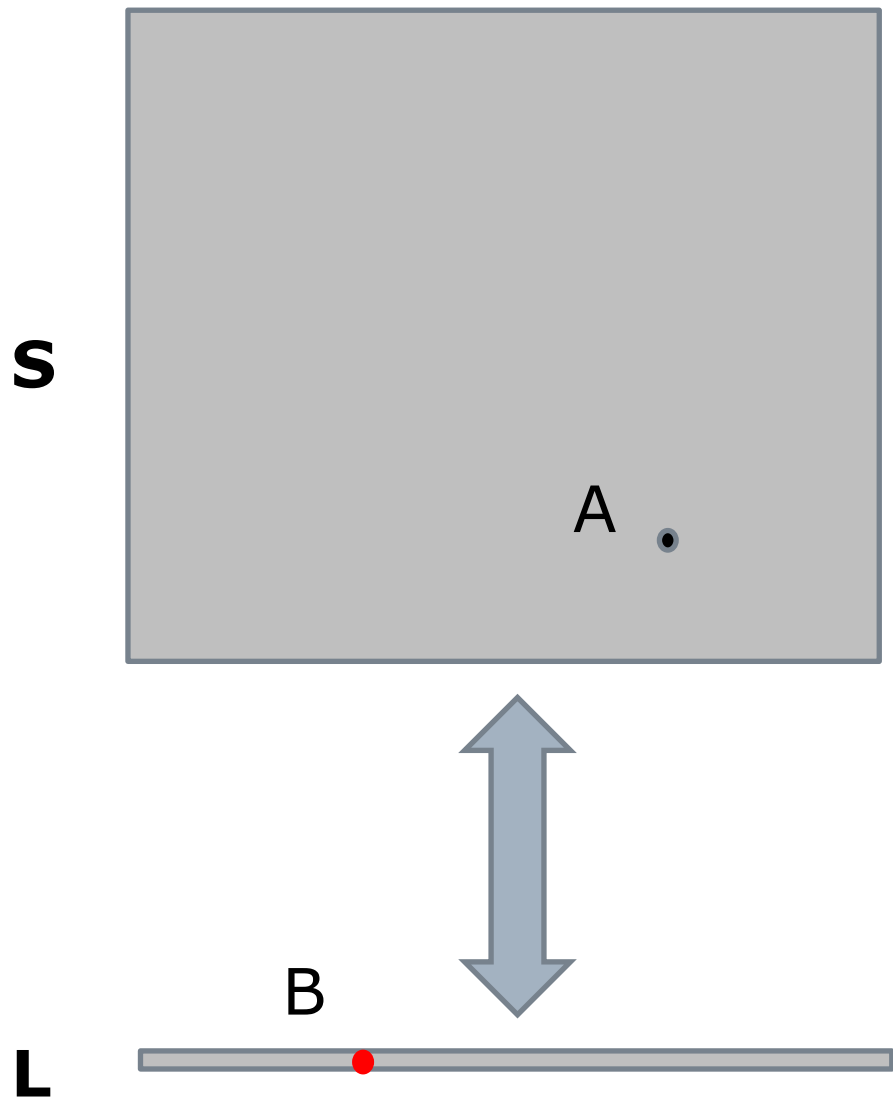
実数の個数は自然数の個数より大きい！

平面上の点の数は、 直線上の点の数と等しい

1878年、カントールは、 n 次元のユークリッド空間 R^n は、実数 R と同じ濃度を持つことを発見します。

“Je le vois, mais je ne le crois pas!” (“I see it, but I don't believe it!”) Dedekindへの手紙

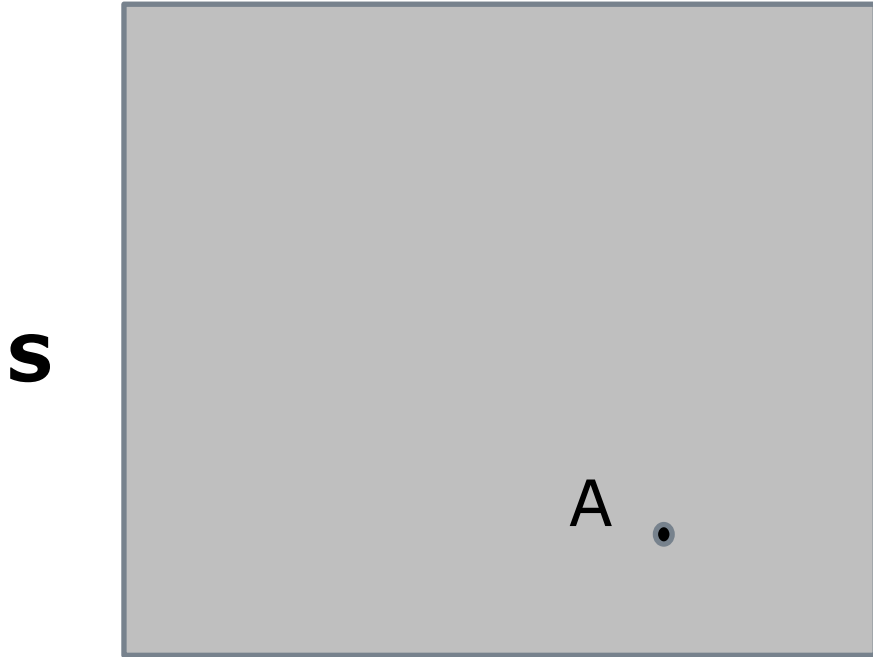
平面と直線の点の濃度



1×1 の大きさを持つ正方形 S と、長さ 1 の直線 L を考えよう。

S 上の点の数と、 L 上の点の数は、どちらが大きいだろうか？

平面と直線の点の濃度



平面上の点Aの座標を (x, y) とする。

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9\dots$$

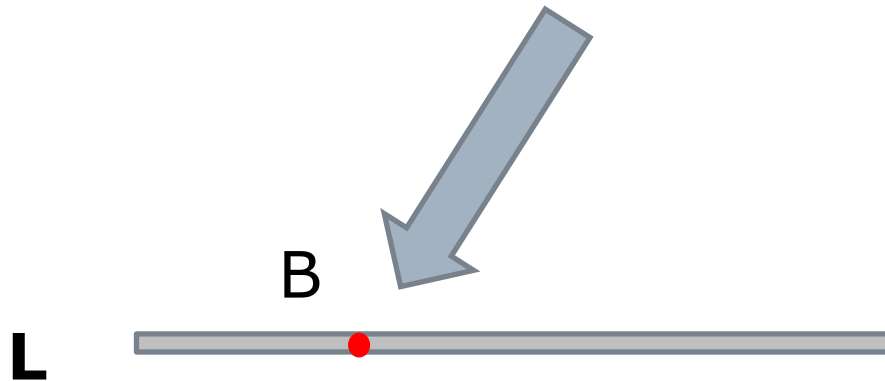
$$y = 0.y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9\dots$$

この時、次の実数 z を考える

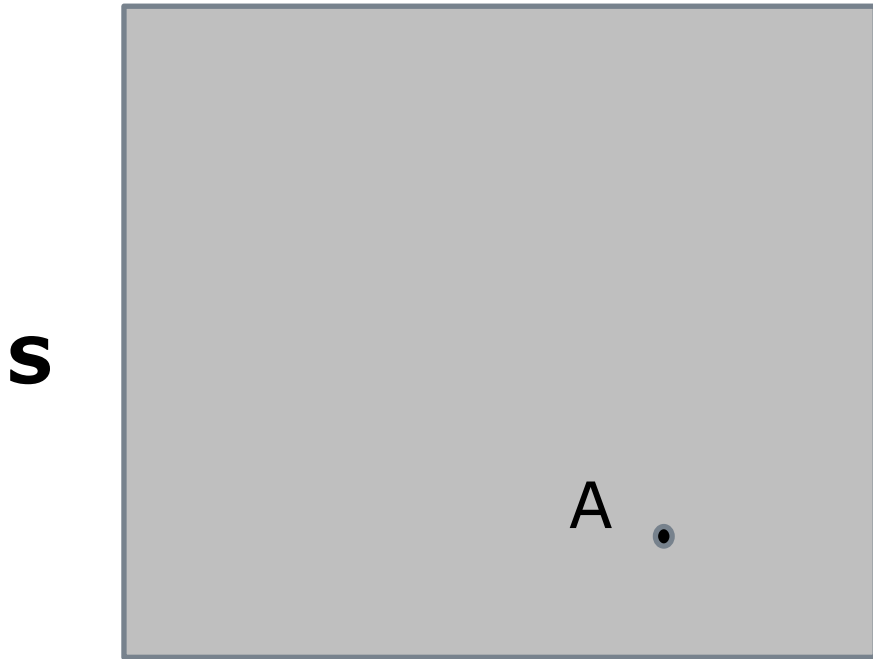
$$z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4x_5y_5\dots$$

この z は、直線上の一点Bに対応する。

こうして、平面上の任意の点を、直線上の点に対応付けすることができる。



平面と直線の点の濃度



直線上の点Bに対応する実数を z とする。

$$z = 0.x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9\dots$$

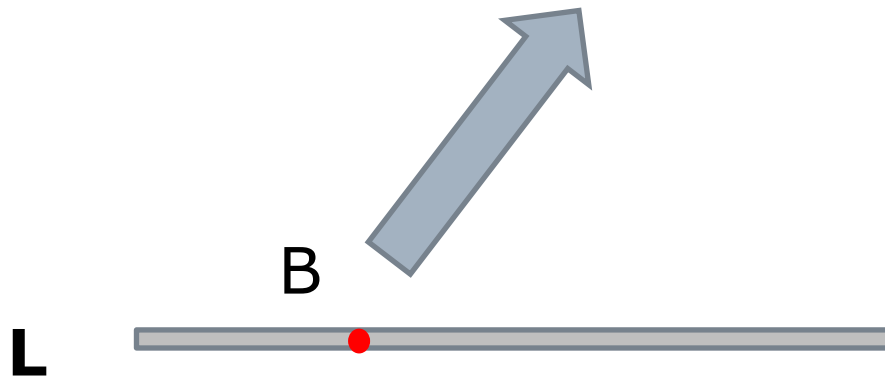
この時、次の実数 x と y を考える

$$x = 0.x_1x_3x_5x_7x_9x_{11}x_{13}x_{15}x_{17}\dots$$

$$y = 0.x_2x_4x_6x_8x_{10}x_{12}x_{14}x_{16}x_{18}\dots$$

平面上で、 (x, y) を座標とする点を A とすれば、直線上の点 B を、平面上の点 A に対応させることができる。

こうして、平面上の点は、直線上の点に 一対一 に対応する。



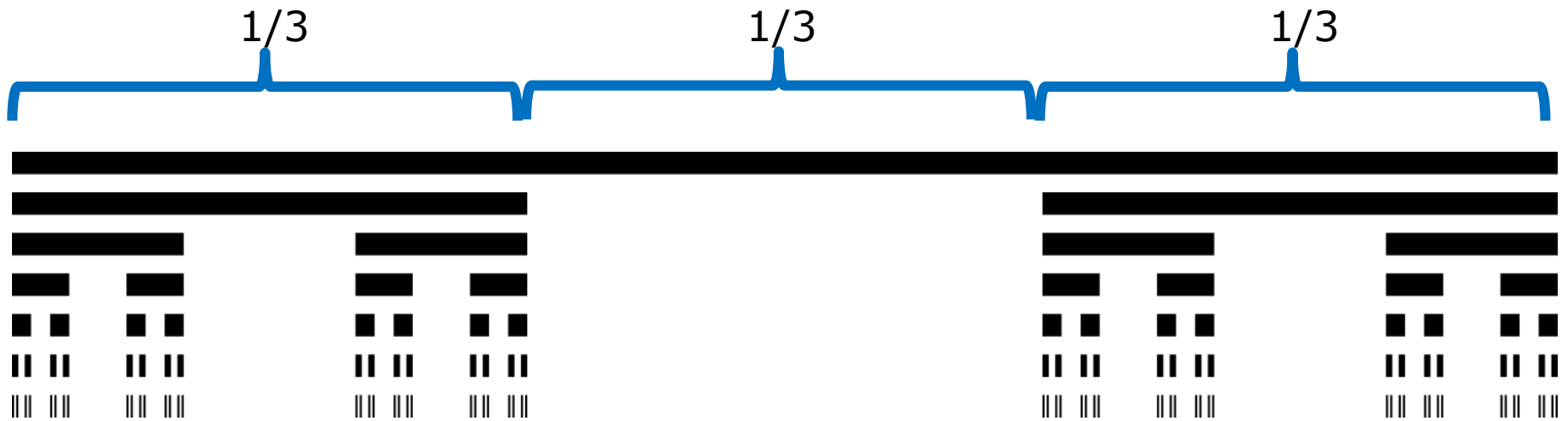
L

カントール集合

長さが0だが、実数と同じ濃度の点を持つ集合

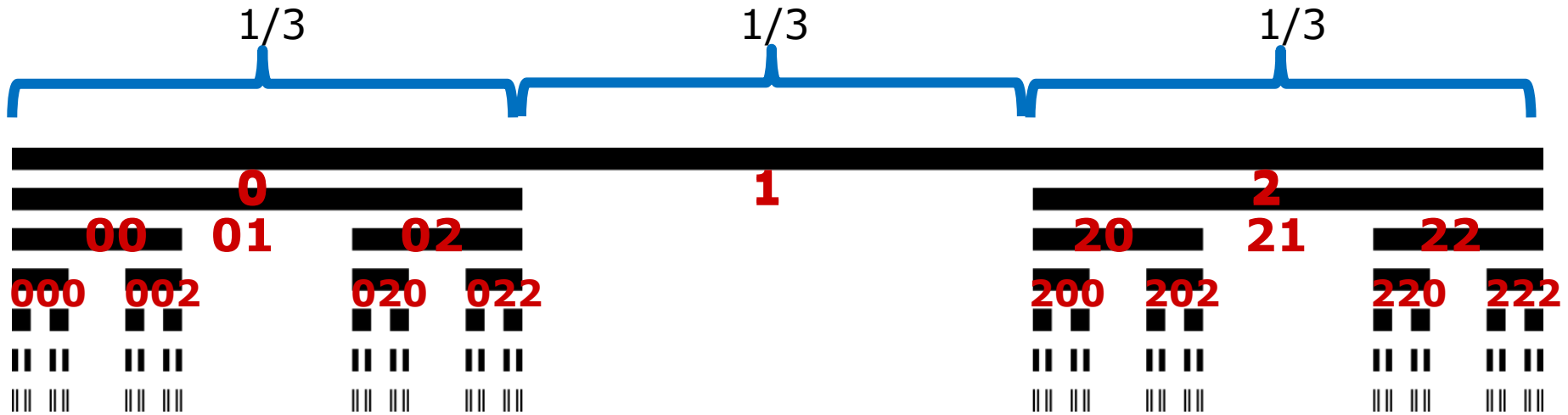
Discovered in 1874 by Henry John Stephen Smith and introduced by Cantor in 1883

コントロール集合の構成



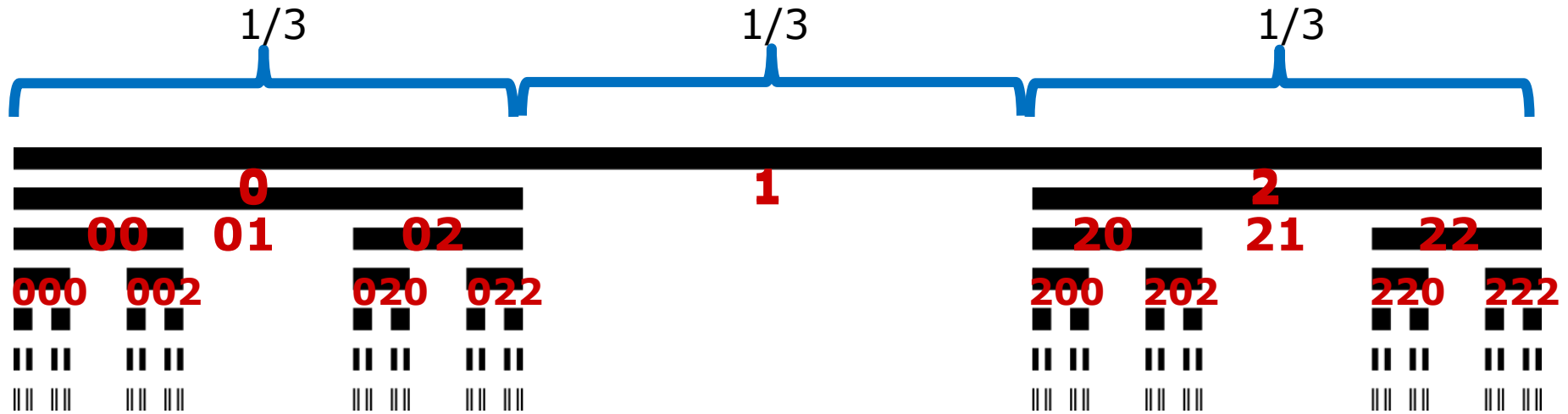
区間 $[0, 1]$ を三等分して、真ん中の部分を切り落とす。左右に残った二つの部分に対しても、真ん中の $1/3$ を落とす操作を、無限回繰り返して残ったのが**コントロール集合**。この図では、その操作を6回ほど繰り返している。

コントロール集合の表現 0,1,2 の三進数



三等分した区間を、左から **0, 1, 2** とラベルをつける。
一回目の操作で、**1**の部分が落ちて、**0**と**2**の部分が残る。
二回目の操作を残った**0**と**2**の部分に同じように行う。そこで残った部分は、**00, 02, 20, 22** というラベルをつけることができる。同様な操作を繰り返す。
結局、コントロール集合上の点は、1が現れない**0**と**2**からなる無限列で表現されることがわかる。

コントロール集合 長さ=0



このコントロール集合は、操作を繰り返すたびに、長さが $1/3, 2/3 \cdot 1/3, 4/27, \dots$ ずつ切り取られていく。無限回の操作の後には、切り取られた部分の長さは、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1$$

となる。もとの長さが1だから、この図形の長さは $1-1=0$ となる。

コントロール集合の濃度

驚くべきことに、この長さ0のコントロール集合は、実は、実数と同じ濃度を持っている！ そのことは、次のようにして分かる。

この集合上の点 x が、0,1,2の三進表記(ただし、1は現れない。)で、例えば、次のように表現されたとしよう。

$$x=0.22020022020002022.....$$

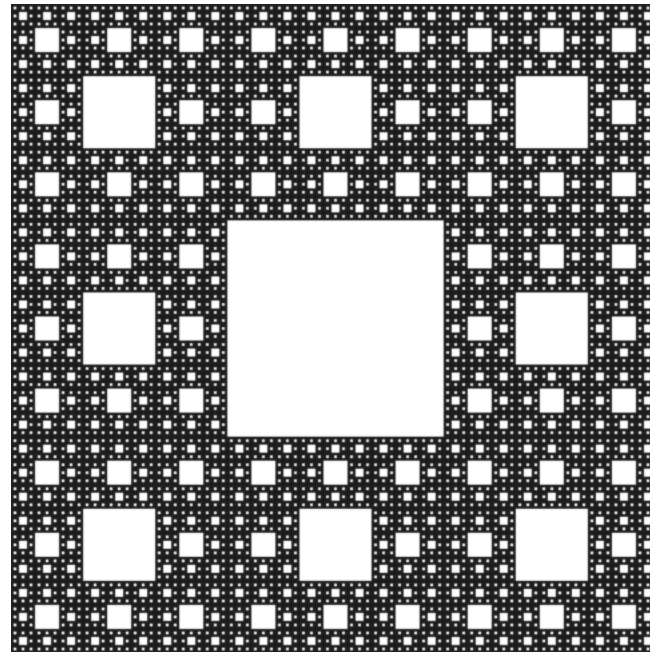
この時、ここで現れる 2 を全て1に置き換えた数を y とする。

$$y=0.11010011010001011.....$$

x と y は、一対一で、対応している。

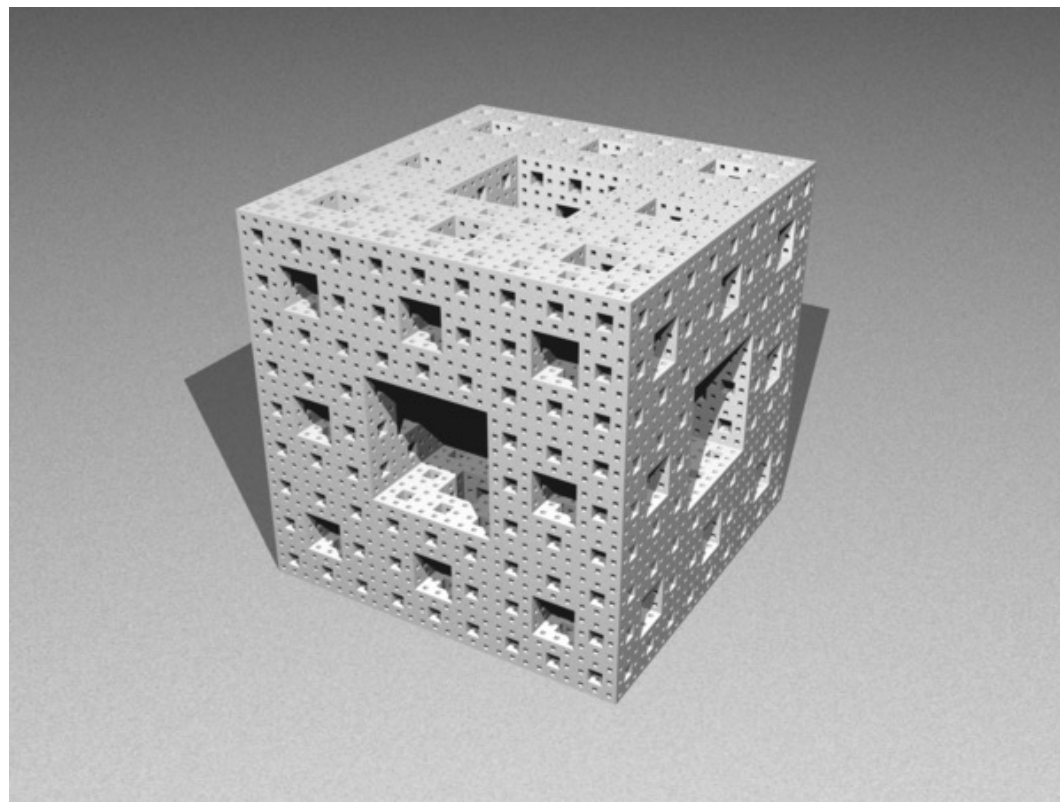
この y を、 $[0,1]$ 区間の実数の二進表記だと考えれば、コントロール集合上の点 x は、 $[0,1]$ 区間の実数の一つに対応していることが分かる。逆に、 $[0,1]$ 区間の実数の二進表記で、1を2に置き換えれば、この実数のコントロール集合上の対応する点がわかる。

カントール集合の二次元版 シェルピンスキーのカーペット



この図形も、測度(面積)ゼロだが、実数と同じ濃度を持つ。

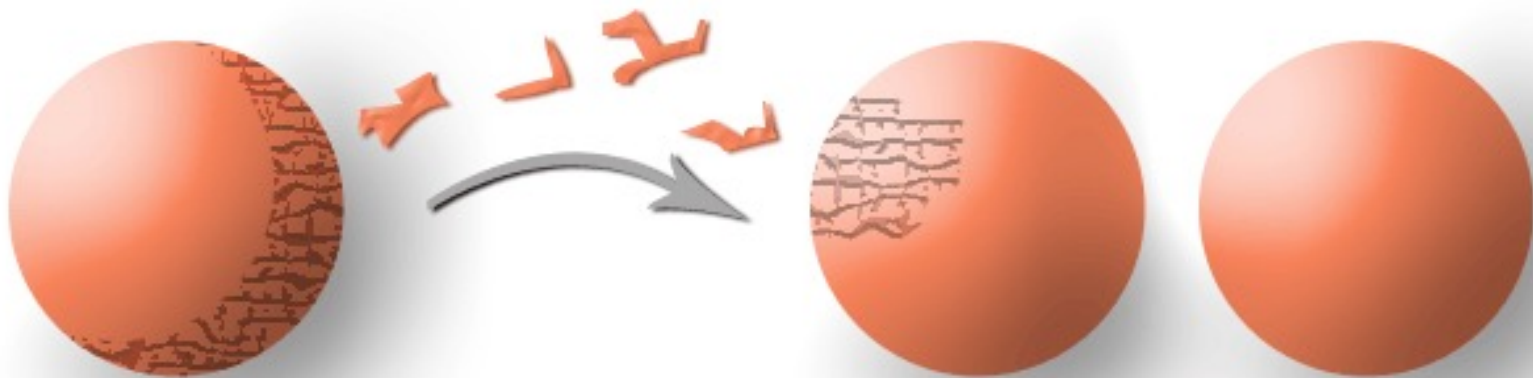
カントール集合の三次元版 メンガーのスポンジ



この図形も、測度(体積)ゼロだが、実数と同じ濃度を持つ。
しかし、表面積は無限大である。

Banach–Tarski paradox

球を3次元空間内で、有限個の部分に分割し、それらを回転・平行移動操作のみを使ってうまく組み替えることで、元の球と同じ半径の球を2つ作ることができるという定理



カントールが証明できなかったこと 連続体仮説 1878年

カントールは、彼が見つけた可算無限の濃度 \aleph_0 より大きな実数の無限の濃度 c を、無限濃度の階層の次の無限 \aleph_1 に等しいと見当をつけた。またこれが、 2^{\aleph_0} に等しいと予想した。

これが、カントールの「連続体仮説 CH(Continuum Hypothesis)」である。

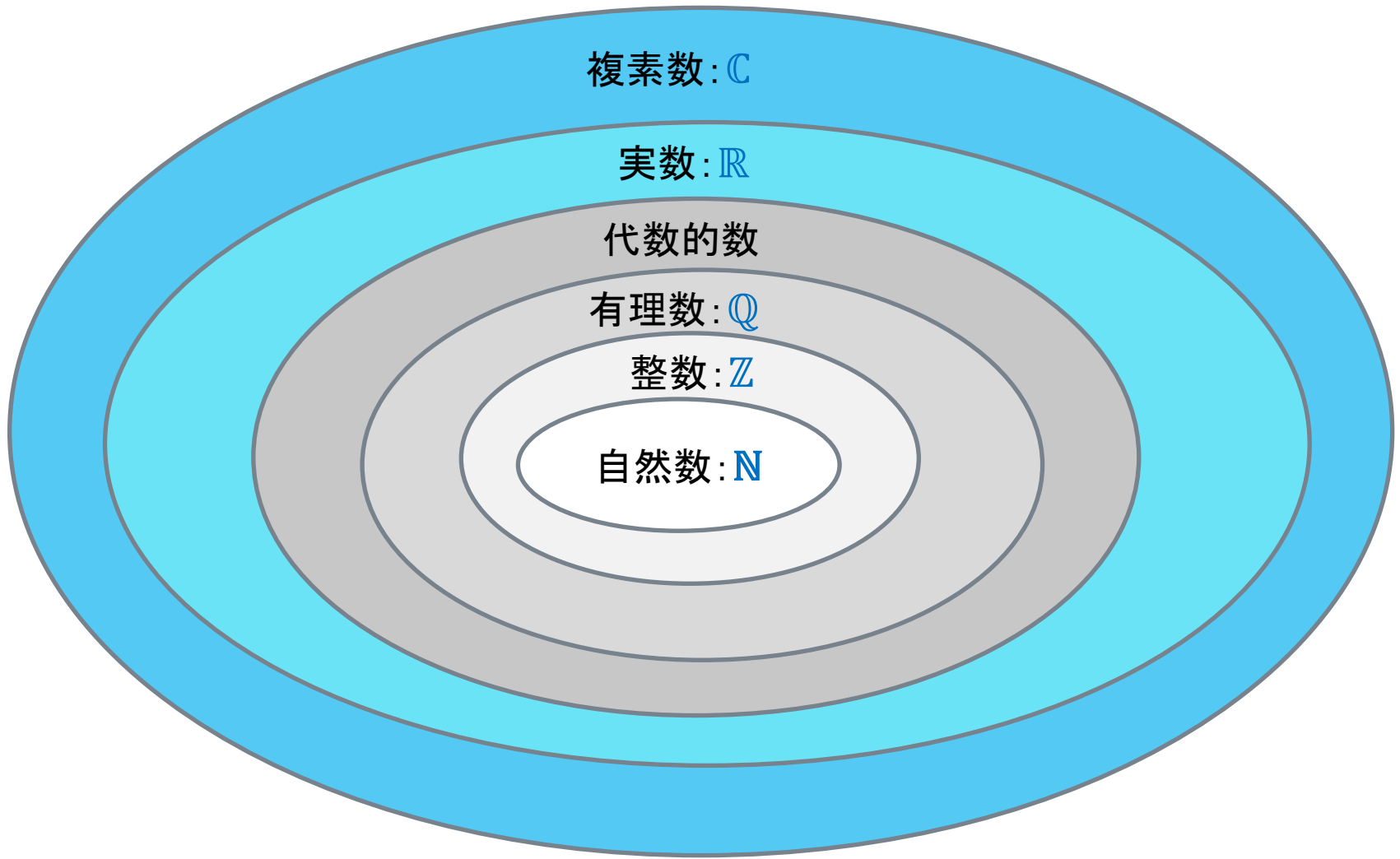
$$c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

さらに、一般に、次の関係が成り立つとした。それを「一般連続体仮説 GCH(General Continuum Hypothesis)」という

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

しかし、彼はこの問題を解くことが出来なかった。

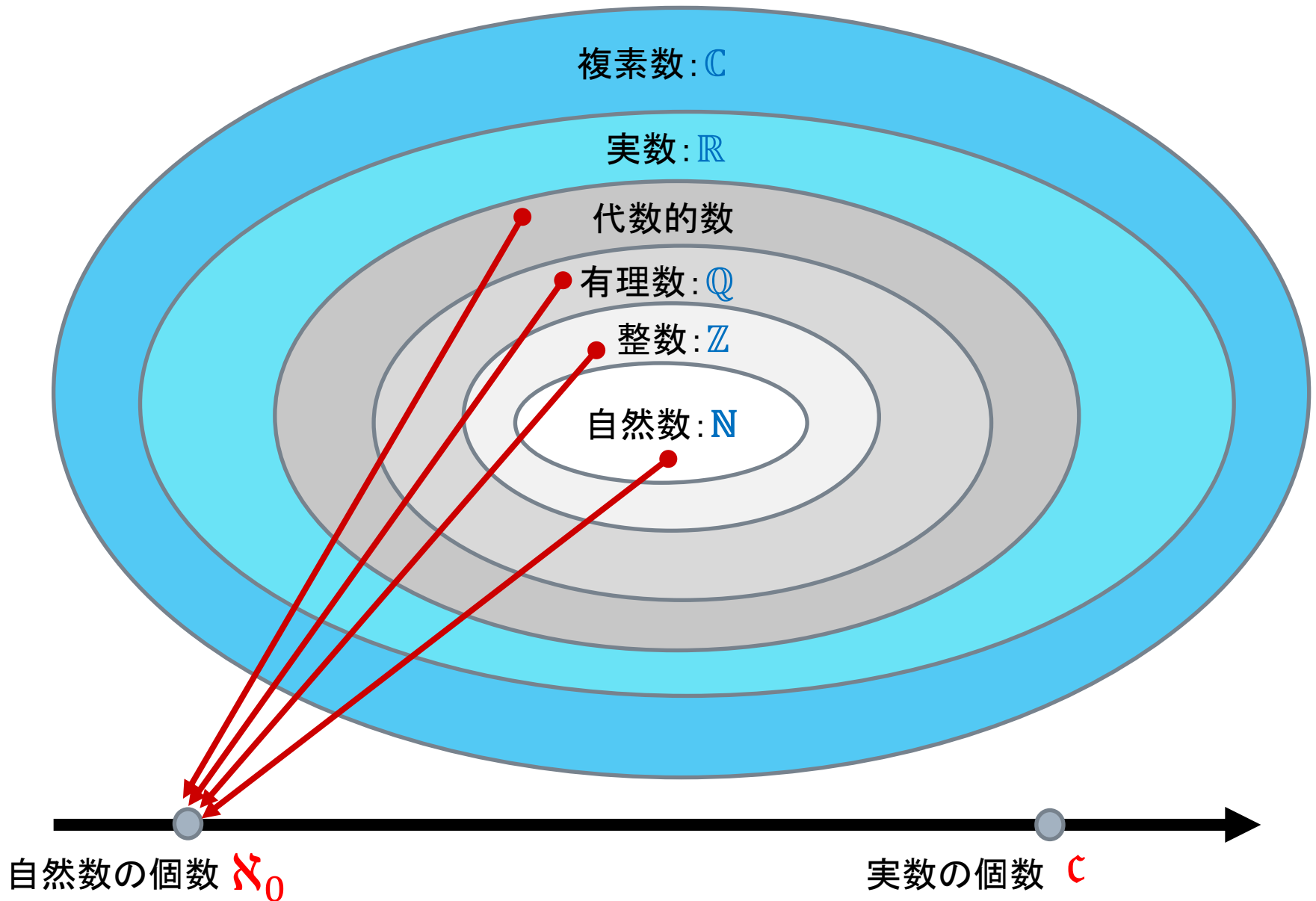
数の階層



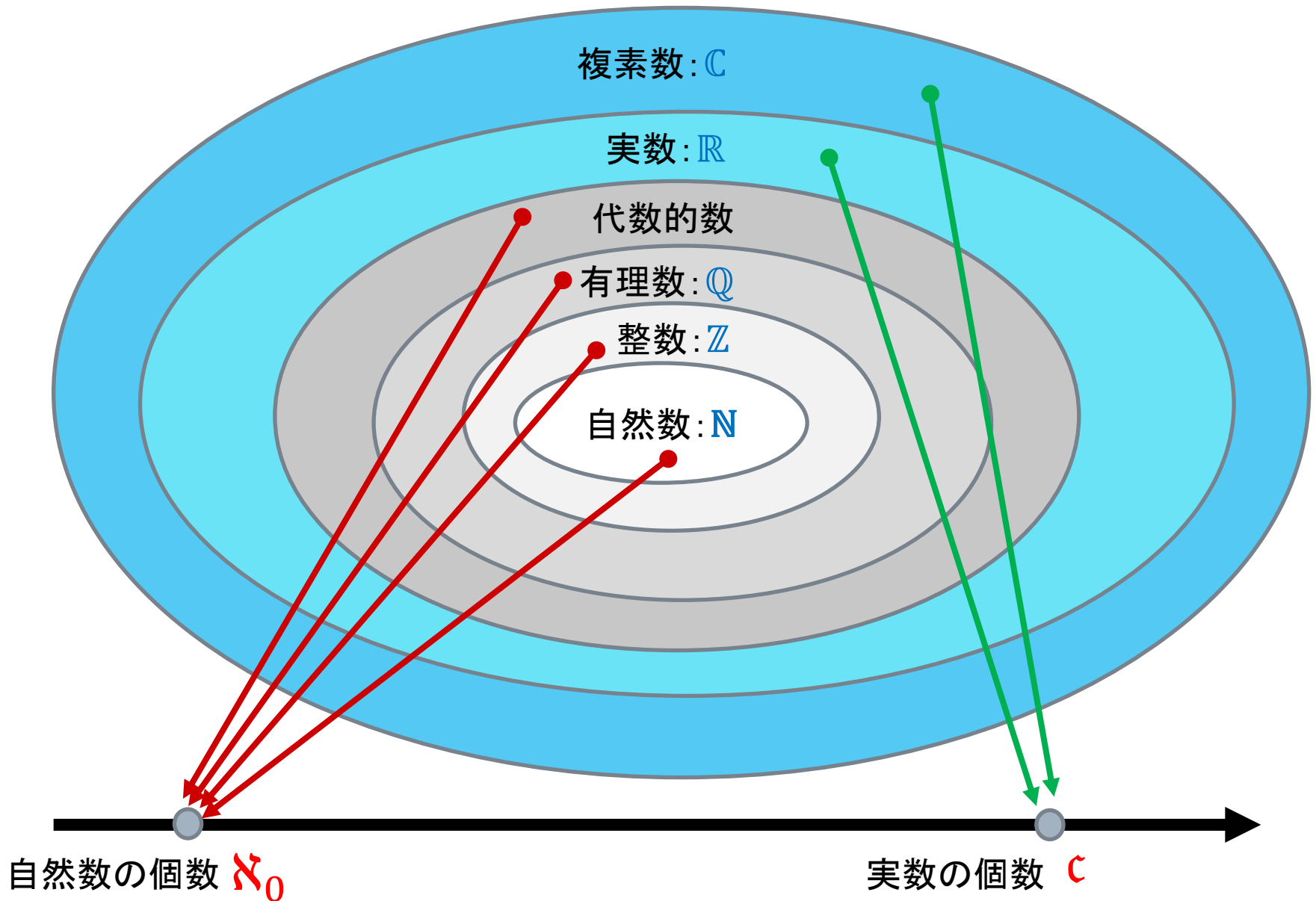
自然数の個数 \aleph_0

実数の個数 \mathfrak{c}

無限の数の濃度についてカントールが示したこと



無限の数の濃度についてカントールが示したこと



ヒルベルトの23の問題 1900年

ヒルベルトは、1900年に、20世紀の数学が解くべき23の問題のリストを発表した。その問題提起は、20世紀の数学に少なくない影響を与えた。カントールの「連続体仮説」は、この23の問題の第一番目の問題に取り上げられている。

ゲーデル

連続体仮説と集合論の無矛盾性の証明

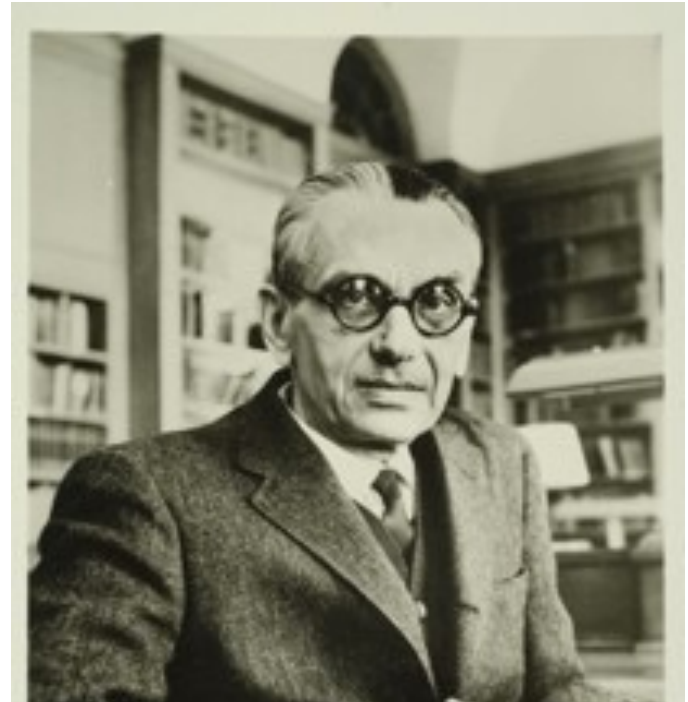
「世紀の難問」と呼ばれた連続体仮説の問題で、大きな前進があったのは、1940年のことだ。クルト・ゲーデルが、連続体仮説と選択公理の二つを満たす集合論のモデルを実際に構成して見せたのだ。この集合論のモデルの中では、連続体仮説は「真」である。

この結果は、連続体仮説を直接に証明したものではないことに注意しよう。それは、集合論と連続体仮説には矛盾がないこと、すなわち、集合論の中では連続体仮説の否定は証明できないことを意味している。

THE CONSISTENCY
OF THE
CONTINUUM HYPOTHESIS

KURT GÖDEL

ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
PRINCETON UNIVERSITY PRESS



コーエン 1963年 連続体仮説と集合論の独立性の証明

連続体仮説を最終的に解決したのは、J.P.コーエンだった。彼は、「強制法(Forcing Method)」というモデル構成法を創出し、連続体仮説の否定が成り立つモデルを構成した。

先のゲーデルの結果と合わせると、連続体仮説は、集合論の公理群からは独立であることが証明されたことになる。連続体仮説は、集合論の公理群からは証明できないのだ。

結果から見ると、カントールが、全力で連続体仮説を証明しようとして、成功しなかったのには理由があったのである。



J.P.Cohen
1934-2007

²³ Gardner, R. S., A. J. Wahls, C. Basilio, R. S. Miller, P. Lengyel, and J. F. Speyer, these PROCEEDINGS, 48, 2087 (1962).
²⁴ Balph, R. K., and H. G. Khorana, *J. Am. Chem. Soc.*, 83, 2926 (1961).
²⁵ Ames, B. N., and D. T. Dubin, *J. Biol. Chem.*, 235, 789 (1960).
²⁶ Chen, P. S., Jr., T. Y. Toribara, and H. Warner, *Anal. Chem.*, 28, 1756 (1956).
²⁷ Heppel, L. A., D. R. Harkness, and R. J. Himoe, *J. Biol. Chem.*, 237, 841 (1962).
²⁸ Russell, W. E., and H. G. Khorana, *J. Biol. Chem.*, 234, 2114 (1959).
²⁹ Kay, E. R. M., N. S. Simmons, and A. L. Doucet, *J. Am. Chem. Soc.*, 74, 1724 (1952).
³⁰ Sherman, J. R., and J. Adler, *J. Biol. Chem.*, 238, 873 (1962).
³¹ Waley, S. G., and J. Watson, *Biochem. J.*, 55, 328 (1953).
³² Akabori, S., K. Ohno, and K. Narita, *Bull. Chem. Soc. Japan*, 25, 214 (1952).
³³ Lowry, O. H., N. J. Rosebrough, A. L. Farr, and R. J. Randall, *J. Biol. Chem.*, 193, 265 (1951).
³⁴ Nakamoto, T., and S. B. Weiss, these PROCEEDINGS, 48, 880 (1962).
³⁵ Fox, C. F., W. S. Robinson, and S. B. Weiss, *Fed. Proc.*, 22, 463 (1963).
³⁶ Krakow, J. S., and S. Oshon, these PROCEEDINGS, 49, 88 (1963).

THE INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS

By PAUL J. COHEN*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STANFORD UNIVERSITY

Communicated by Karl Gödel, September 30, 1963

This is the first of two notes in which we outline a proof of the fact that the Continuum Hypothesis cannot be derived from the other axioms of set theory, including the Axiom of Choice. Since Gödel¹ has shown that the Continuum Hypothesis is consistent with these axioms, the independence of the hypothesis is thus established. We shall work with the usual axioms for Zermelo-Fraenkel set theory,² and by Z-F we shall denote these axioms without the Axiom of Choice, (but with the Axiom of Regularity). By a model for Z-F we shall always mean a collection of actual sets with the usual ϵ -relation satisfying Z-F. We use the standard definitions³ for the set of integers ω , ordinal, and cardinal numbers.

- THEOREM 1. *There are models for Z-F in which the following occur:*
- (1) *There is a set a , $a \subseteq \omega$ such that a is not constructible in the sense of reference 3, yet the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis both hold.*
 - (2) *The continuum (i.e., $\mathcal{P}(\omega)$ where \mathcal{P} means power set) has no well-ordering.*
 - (3) *The Axiom of Choice holds, but $\aleph_1 \neq 2^{\aleph_0}$.*
 - (4) *The Axiom of Choice for countable pairs of elements in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ fails.*

Only part 3 will be discussed in this paper. In parts 1 and 3 the universe is well-ordered by a single definable relation. Note that 4 implies that there is no simple ordering of $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$. Since the Axiom of Constructibility implies the Generalized Continuum Hypothesis,⁴ and the latter implies the Axiom of Choice,⁵ Theorem 1 completely settles the question of the relative strength of these axioms.

Before giving details, we sketch the intuitive ideas involved. The starting point is the realization^{6, 7} that no formula $\alpha(x)$ can be shown from the axioms of Z-F to have the property that the collection of all x satisfying it form a model for Z-F in which the Axiom of Constructibility ($V = L$,⁸) fails. Thus, to find such models, it seems natural to strengthen Z-F by postulating the existence of a set which is a

非カントールの集合論の発見

コーエンの結果は、始祖のカントールが構想した、いわばカントールの集合論とは異なる、非カントールの集合論が存在することを明らかにした衝撃的なものだった。

ユークリッド幾何学の「第五公準」が、他のユークリッド幾何学の公理群からは独立で、それらから証明できないことの認識の成立が、非ユークリッド幾何学を成立させたのと同じことが、「数学の基礎」である集合論で起きたのである。

コーエンの結果とその方法は、1960年代の中頃には、集合論の構造についての認識を飛躍的に発展させた。





Part 2

オイラーの「変わらぬ大きさ」

Part 2 Agenda

オイラーの「変わらぬ大きさ」

- 「形」を数える – オイラーの「標数」
- オイラーの標数の「式の形」を考える
- シャニユエルー – 「負の集合」と「ポテトの長さ」
- 「大きさ」と「オイラーの標数」を図解する

A landscape photograph capturing a sunset over the ocean. The sun is a bright, glowing orb in the upper center, casting a shimmering path of light across the water's surface. The sky is filled with soft, wispy clouds in shades of blue and orange. In the foreground, a dense field of tall, green grasses with feathery, light-colored seed heads dominates the view. The horizon line is visible in the distance, where the ocean meets the sky.

「形」を数える - オイラーの「標数」

オイラーの標数

このセッションでは、図形の「大きさ」に関係した量として、「オイラーの標数(Euler characteristic)」を紹介しようと思います。

3次元の多面体の頂点と辺と面の数

オイラーは、3次元の空間上の図形を構成する基本的な要素として、「点」と「線」と「面」に注目します。

彼は、点(頂点)と線(辺)と面から構成される3次元の(凸な)多面体について、頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f とすると、次の関係が成り立つことに気づきました。

$$v - e + f = 2$$

次の「プラトンの正多面体」について、この関係が成り立つこと確かめてください。

この $v - e + f = 2$ を(凸)多面体の「オイラー標数」と言います。

正四面体(三角錐)

Tetrahedron



構成面
正三角形

頂点 v 辺 e 面 f

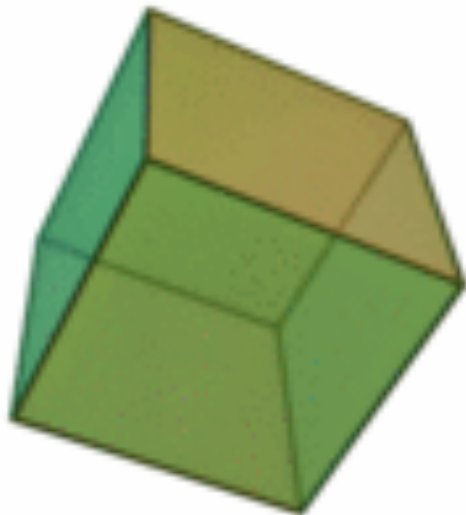
4 6 4

$$4 - 6 + 4 = 2$$

$$v - e + f = 2$$

正六面体(立方体)

Hexahedron or cube



構成面
正方形

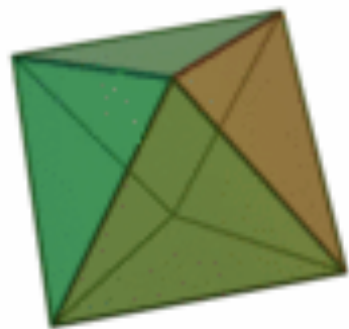
頂点 v 辺 e 面 f

8 12 6

$$8 - 12 + 6 = 2$$

$$v - e + f = 2$$

正八面体
Octahedron



構成面
正三角形

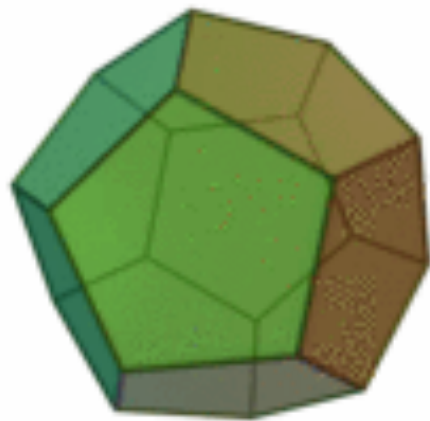
頂点 v 辺 e 面 f

6 12 8

$$6 - 12 + 8 = 2$$

$$v - e + f = 2$$

正十二面体
Dodecahedron



構成面
正五角形

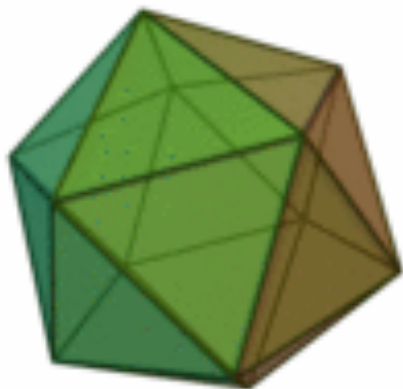
頂点 v 辺 e 面 f

20 30 12

$$20 - 30 + 12 = 2$$

$$v - e + f = 2$$

正二十面体
Icosahedron

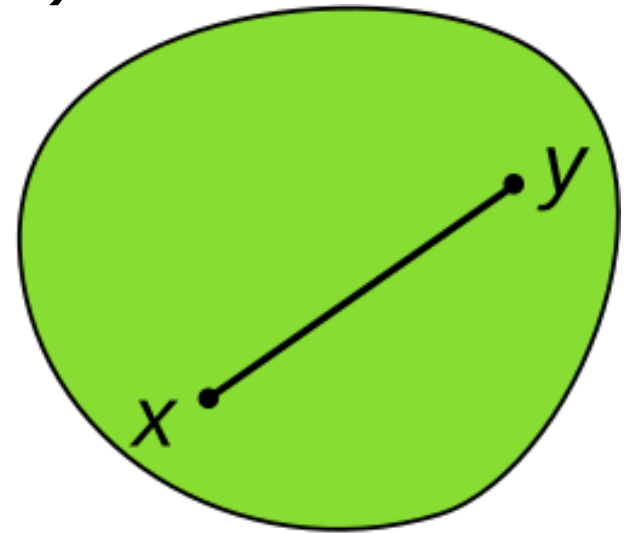


構成面
正三角形

頂点 v	辺 e	面 f
12	30	20
$12 - 30 + 20 = 2$		
$v - e + f = 2$		

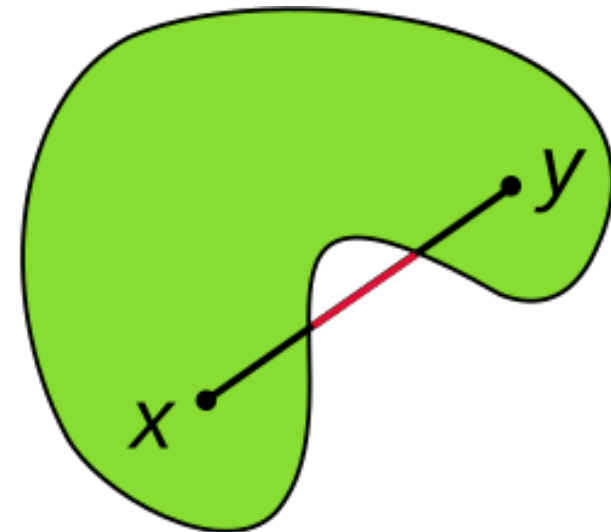
凸集合(convex set)

物体が凸(とつ、英: convex)であるとは、その物体に含まれる任意の二点に対し、それら二点を結ぶ線分上の任意の点がまたその物体に含まれることを言います。



先に見た、 $v-e+f=2$ を満たす多面体は、全て、凸集合です。

凸集合ではない多面体の例を、次に示します。

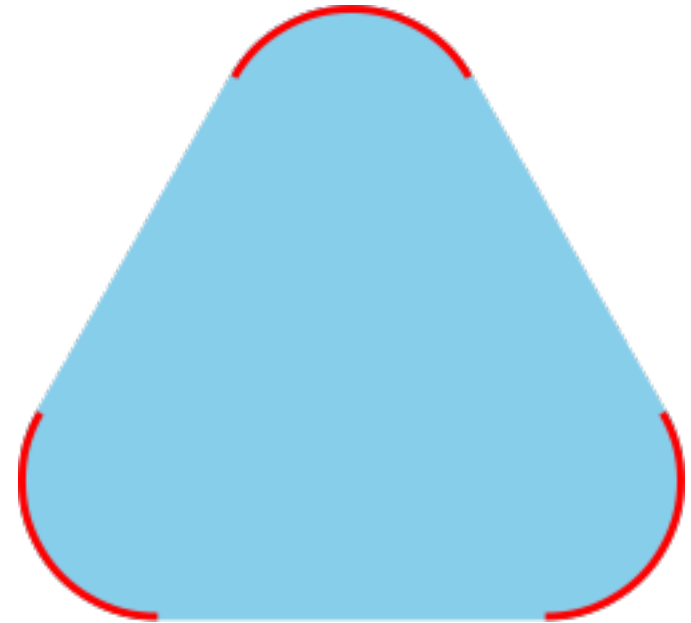


convex hull (凸包)

convex hull は、与えられた集合を含む最小の凸集合です。

例えば、右の図で赤で表される集合の convex hull は、青で表された凸集合です。

X がユークリッド平面内の有界な点集合のとき、その convex hull は直観的には X を輪ゴムで囲んだときに輪ゴムが作る図形と考えていいです。



$v - e + f = 2$: サッカーボール

サッカーボールの表面は、5角形と6角形で構成されています。5角形の数をP,6角形の数をHとすると、次の式が成り立ちます。



$$\begin{aligned}f &= P + H \\e &= (5P + 6H)/2 \\v &= (5P + 6H)/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v - e + f &= \frac{5P + 6H}{3} - \frac{5P + 6H}{2} + P + H \\&= \frac{1}{6}H = 2\end{aligned}$$

これから $H=12$ がわかります。

どんなサッカーボールにも、6角形は12個あります。

オイラーの標数 $v - e + f$ は変わらない「大きさ」

オイラーの標数 $v - e + f$ は、どんな「大きさ」なのかを考えてみましょう。確かにそれはある自然数ですので「大きさ」を持ちます。

ただ、先に見たように、それは、凸な多面体の種類やその多面体の実際の大きさが変わっても、オイラーの標数 $v - e + f$ の「大きさ」は変化しません。

それは、変わらない「大きさ」なのです。(そういう量を「位相不変量」と言います。)

オイラーは、何を数えたのか？

それでは、オイラーは、どのようにして、多面体に対して「変わらない大きさ」を見つけたのでしょうか？

それは、多面体を構成する「同じ形」の要素の数を数えることによつてです。

彼は、「同じ形」を持つものとして、多面体の「頂点」の数 v と、「辺」の数 e と、「面」の数 f を数えました。

「同じ形」とは？

それらが「同じ形」をしているとは、どういうことでしょうか？

- 「頂点」については、それは「点」ですので、どれも同じ形です。
- 「辺」については、長さや向きを無視すれば、それは同じ「線分」とみなせます。
- 「面」については、「頂点」や「辺」より複雑です。先の例でも、「面」は三角形だったり四角形だった五角形だったりしました。

まあ、当面、「面」は二次元の図形で「平らなもの」という直感で進んでいいと思います。

2次元の「面」のオイラー標数を考える

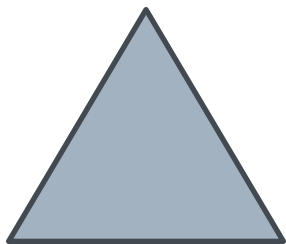
先の多面体の例で「面」として数えられた、三角形・四角形・五角形等のオイラー標数 $v - e + f$ を考えてみましょう。

注意しなければならないのは、これらの三角形・四角形・五角形といった図形は、3次元の多面体の一部を構成しているのですが、それ自身を取り出してみれば、それは3次元の空間に埋め込まれた2次元の「平面」に他なりません。

そのオイラー標数が、3次元の多面体のオイラー標数と異なることは、次の図のように簡単に確かめられます。

そのオイラー標数 $v - e + f$ は、1になります。また、任意のn角形についても、そのオイラー標数 $v - e + f$ は、1になります。

三角形



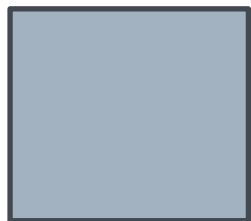
頂点 v 辺 e 面 f

3 3 1

$$3 - 3 + 1 = 1$$

$$v - e + f = 1$$

四角形



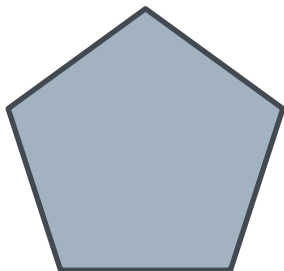
頂点 v 辺 e 面 f

4 4 1

$$4 - 4 + 1 = 1$$

$$v - e + f = 1$$

五角形



頂点 v 辺 e 面 f

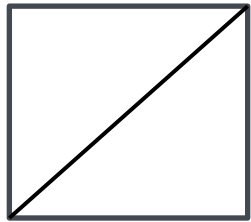
5 5 1

$$5 - 5 + 1 = 1$$

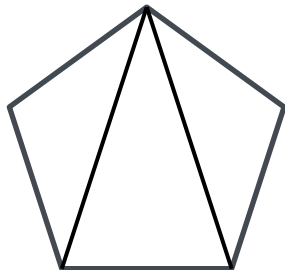
$$v - e + f = 1$$

平面を三角形で分割した図形のオイラー標数

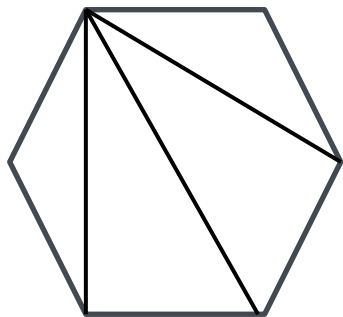
二次元の平面を三角形で分割した図形のオイラー標数を考えてみましょう。



頂点 v	辺 e	面 f
4	5	2
$4 - 5 + 2 = 1$		
$v - e + f = 1$		



頂点 v	辺 e	面 f
5	7	3
$5 - 7 + 3 = 1$		
$v - e + f = 1$		

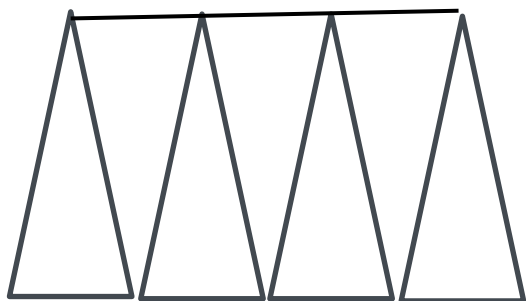


頂点 v 辺 e 面 f

6 9 4

$$6 - 9 + 4 = 1$$

$$v - e + f = 1$$



頂点 v 辺 e 面 f

9 15 7

$$9 - 15 + 7 = 1$$

$$v - e + f = 1$$

「表面」のオイラー標数

天下りですが、3次元の図形の形とオイラー標数がどのように結びつくかを知るためにも、いくつかの図形の「表面」のオイラー標数を示しておこうと思います。

これらの図形の「表面」のオイラー標数は、基本的には、「表面」を三角形のポリゴンで分割することで計算されます。

この計算の一部は、次のセッションで紹介しようと思います。

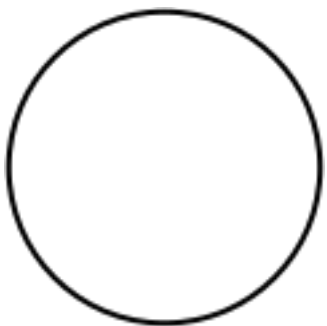
「表面」のオイラー標数 χ

区間



$\chi = 1$

円周



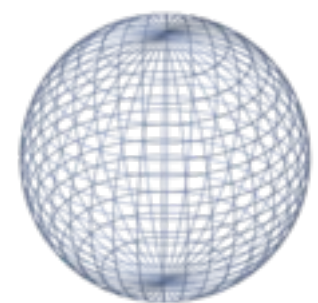
$\chi = 0$

円板



$\chi = 1$

球



$\chi = 2$

トーラス



$\chi = 0$

二重トーラス



$\chi = -2$

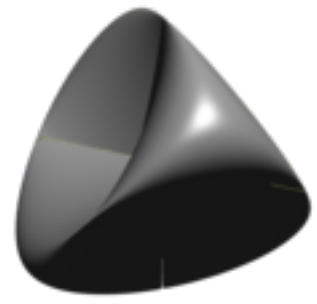
三重トーラス



$\chi = -4$

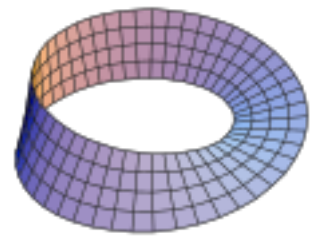
「表面」のオイラー標数 χ

実射影平面



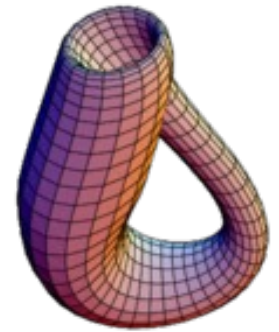
$$\chi = 1$$

メビウスの帯



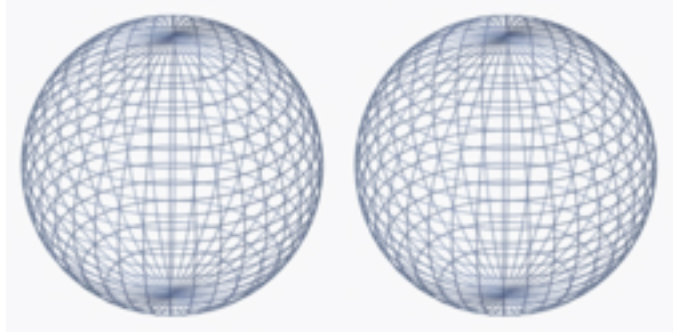
$$\chi = 0$$

クラインの壺



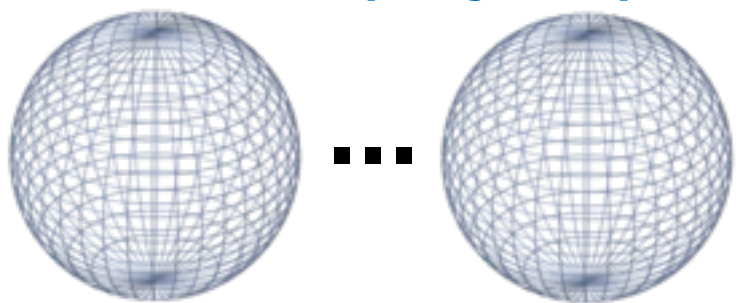
$$\chi = 0$$

二つの球(disjoint)



$$\chi = 2 + 2 = 4$$

n個の球(disjoint)



$$\chi = 2 + \dots + 2 = 2n$$

1次元の「線分」のオイラー標数を考える

2次元の「面」あるいは「表面」のオイラー標数を見てきたので、今度は、1次元の「線」のオイラー標数を考えてみましょう。


1次元と言っても、3次元の多面体の一部を構成している「辺」を取り出したもので、それは2次元の「面」に埋め込まれた1次元の「線分」に他なりません。



2次元の「面」に埋め込まれた1次元の「線」には、「面」は含まれませんので、そのオイラー標数は、 $v - e + f$ で $f = 0$ とおいた $v - e$ になります。




頂点 v	辺 e
2	1
2 - 1	= 1
$v - e = 1$	

二つの頂点と一つの辺を持つ1次元の図形である「線分」のオイラー標数が、1であることはわかりました。ただ、これで終わりでしょうか？

わかりやすいように、両端の頂点に座標0と1を割り当てると、線分  は、 $[0, 1]$ とモデル化できます。

こうしたモデルで、 $[0, 1)$ あるいは、 $(0, 1]$ とモデル化される半直線  あるいは  のオイラー標数はどうなるのでしょうか？

シャニユエル(Stephen H. Schanuel)は、さらに進んで、両端を含まない直線  $(0, 1)$ のオイラー標数を計算しようとしています。

シャニユエルの問題意識と解決策

シャニユエルの問題意識とその解決策は、オイラー標数の研究の中で、特筆すべきものです。

シャニユエルは、集合の要素の個数が $\{0, 1, 2, \dots\}$ という自然数で表されることに、疑問を投げかけます。

「マイナス1個、マイナス2個と数えられる集合は存在するか？」

彼の研究は、18世紀のオイラー標数に、20世紀数学の光を当て、さらに、21世紀の「マグニチュード論」の扉を開ける画期的なものです。

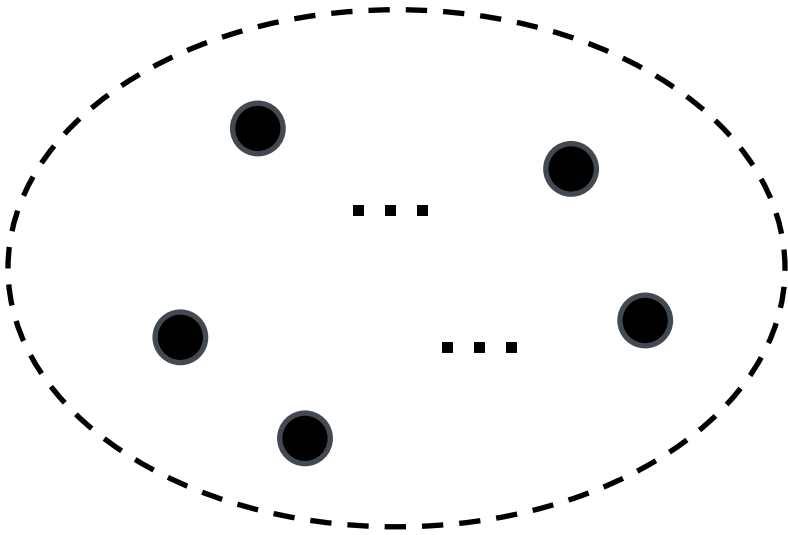
それについては、別のセッションで詳しく紹介したいと思います。

0次元の「点」のオイラー標数を考える

3次元の(凸な)「多面体」と、それに埋め込まれた2次元の「面」、1次元の「直線」のオイラー標数を見てきたので、最後に、3次元の多面体に埋め込まれた0次元の「点」のオイラー標数をみることにしましょう。

0次元の図形としての「点」は、内部に「直線」も「面」も含まないので、そのオイラーの標数は、 $v - e + f$ で $f = 0, e = 0$ とおいた v になります。

n個の点の集合



頂点 v

n

$$v = n$$

これは、ほとんど自明なことに思われます。

重要なことは(これも当然のことに思われますが)、この0次元の「点」のオイラー標数は、以前見たカントールの集合の要素の個数である、基数(cardinal number)と一致することです。

次回のセッションの課題

次回のセッションでは、シャニユエルのオイラー標数の概念の拡大の議論を紹介する前に、オイラーの標識を導く式を、分析してみようと思います。



オイラーの標数の「式の形」を考える

オイラーの標数の「式の形」を考える

このセッションでは、オイラーがオイラーの標数の式をどのように導いたかを考えてみようと思います。

もっとも、この件についてオイラーが考えたことの何か歴史的資料が残されているわけではなさそうです。(僕が知らないだけかもしれませんが)

ここでは、残されたオイラーの標数の「式の形」から、オイラーが考えたことを考えていきたいと思います。

ふたたび、オイラーが数えたものについて

基本的には、オイラーが数えたものを考えてみましょう。

集合 $\{X\}$ の要素の数を数えた時、その数を $\#\{X\}$ で表すことにしましょう。

Aのオイラーの標数

$$= \#\{A\text{の頂点の集合}\} - \#\{A\text{の辺の集合}\} + \#\{A\text{の面の集合}\}$$

オイラーが示したことは、この三種類の数え上げの結果を組み合わせると(足し算と引き算が交互に登場するので、「交代和」と言います)「変わらない大きさ」が得られるということです。

何度見ても、素晴らしい発見ですね。

ただ、不思議な発見だと思います。

なぜ、「三つの集合」なのか？

今度は、なぜ、 $\{A$ の頂点の集合 $\}$ と $\{A$ の辺の集合 $\}$ と $\{A$ の面の集合 $\}$ という三つの集合に注目したのかを考えてみましょう。

これには、答えることができるかもしれません。

オイラーが見ていたのは、3次元の多面体 A です。

$\{A$ の頂点の集合 $\}$ は、**0次元の形**を持つ A の部分集合です。

$\{A$ の辺の集合 $\}$ は、**1次元の形**を持つ A の部分集合です。

$\{A$ の面の集合 $\}$ は、**2次元の形**を持つ A の部分集合です。

3次元の対象であるA自身を除いて、Aに属する任意の部分集合は、すべて0次元か、1次元か、2次元の次元を持ちます。

カントールなら、3次元の対象も基本的には0次元の点の集まりとして考えたかもしれません。そこが、カントールとオイラーのアプローチの違いです。そのことについては、後で振り返ります。

多面体を構成する部分集合の{頂点、辺、面}という三つの集合へのオイラーの分類は、**多面体の三つの集合たちによる自然な「分割」**を提供していることに注目してください。

(「頂点」の集合は、「辺」の集合としても、「面」の集合としても、二重、三重にカウントされている」というツッコミは、ここでは忘れましょう。)

「同じ形」=「同じ次元」を持つもの

オイラーの標数が、なぜ、三つの項を持つのかということですが、オイラーの多面体を構成する三つの部分集合への注目は、基本的には、その部分集合の「次元」に注目したものだということがわかります。

3次元の多面体を構成する、基本的な部分集合は、0次元か、1次元か、2次元 かの 三つの次元を持ちます。

今まで、直感的に、「点は点」「辺は辺」「面は面」で「同じ形」をしていると述べてきたのですが、そこでの「同じ形」というのは「同じ次元を持つ形」だということです。

オイラーは、同じ次元を持つものの形の数を数えているのです。

「同じ次元を持つ形」の数え方

「同じ次元を持つ形」という抽象は、強力なものです。この抽象によって、「点は点。すべて0次元」「辺は辺。すべて1次元」「面は面。すべて2次元」と「同じ形」としてグループ分けされ、それからカウントが始まります。

ただ、この三つの集合に対する三つの「数え方」は、それぞれ異なる特徴を持っています。

英語だと、その違いを表現するのは難しいかもしれません。

ただ、日本語だと、0次元の点は「一個、二個、…」と数え、1次元の辺は「一辺、二辺、…」と数え、2次元の面は「一面、二面、…」と数えるのは変ではありません。

「同じ次元を持つ形」という抽象で捨象される量

その数え方の違いを説明するためには、数えるときに捨象される対象の性質に注目する必要があります。

面の数を数える時、我々は、2次元の対象であるそれぞれの面がそれぞれ異なる「面積」という量的規定を持つことを捨象して、その面数を数えます。

辺の数を数える時も同様です、我々は、1次元の対象であるそれぞれの辺がそれぞれ異なる「長さ」という量的規定を持つことを捨象して、その本数を数えます。

0次元の対象である頂点の数のカウントは、少し違います。点には、捨象すべき属性を持たないからです。

この頂点のカウントは、先にも述べましたが、コントロールの集合の基数(cardinal number)の数え方と同じものです。

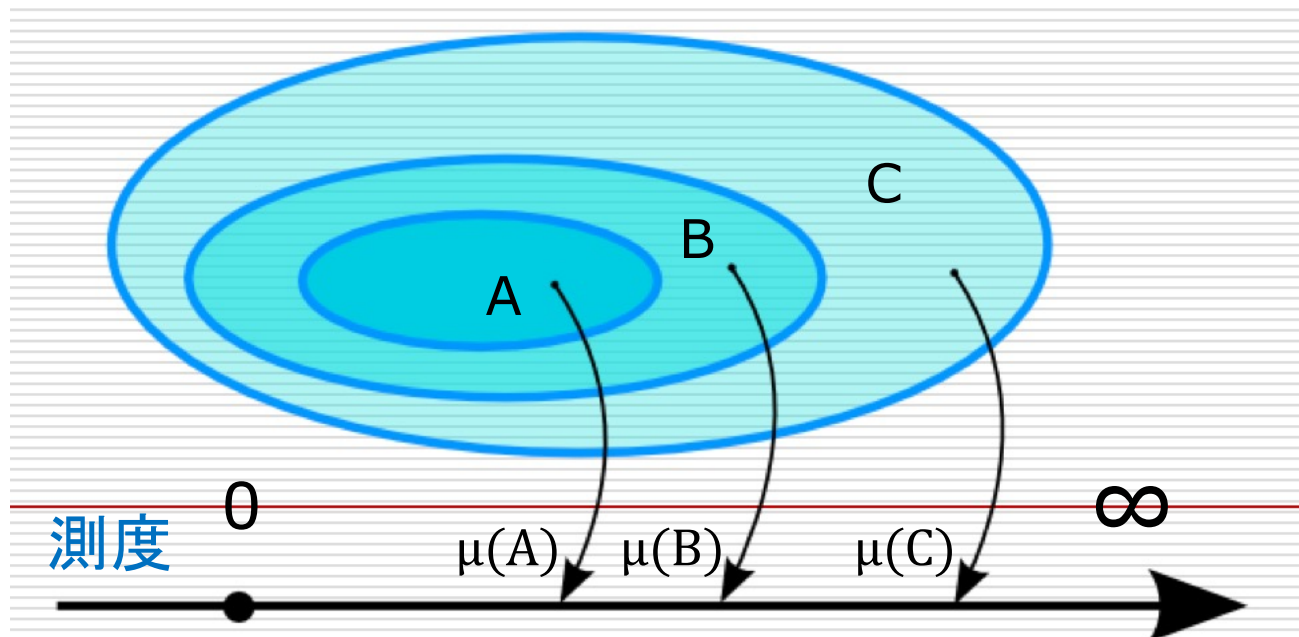
ただ、面積や長さは、面積や長さを持つ平面上や直線上の点の「濃度」には還元されません。コントロールが明らかにしたように、1次元の直線上の点の濃度は(たとえどんなに短い直線であろうと)、n次元の立体上の点の濃度と等しいからです。

こうした量は、一般には「測度」と呼ばれます。

直感的に言えば、「個数」は自然数に値を取り、「数える」ことで与えられるのに対して、「測度」は実数値をとり、「測る」ことで与えられます。

「測る」 -- 測度の性質

- 測度は、長さ、面積、体積等に関係した量。実数値をとる
- AがBの部分集合なら、Aの測度 $\mu(A)$ はBの測度 $\mu(B)$ より小さい。(無限集合の要素の「個数」である「濃度」は、この性質を満たさない)
- 空集合の測度は、ゼロである。



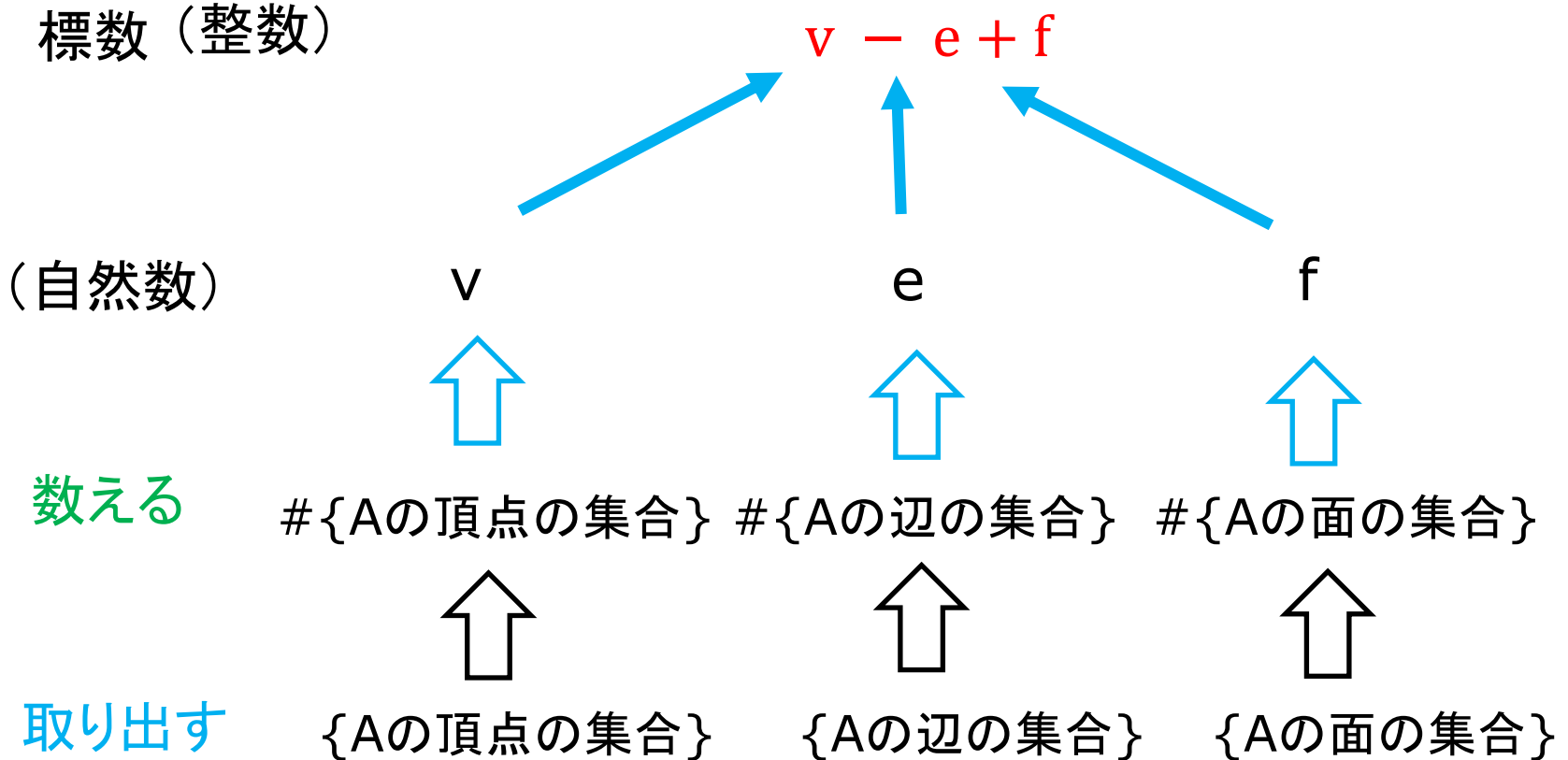
「測る」 -- 測度の性質

ある集合が、互いに共通部分を持たない部分に分割されるなら、その集合の測度は、分割された部分の測度の和になる。

$$\mu(\text{[trapezoid with dotted line]}) = \mu(\text{[trapezoid 1]}) + \mu(\text{[trapezoid 2]}) + \mu(\text{[trapezoid 3]}) + \dots$$

3次元の多面体のオイラー標数の計算

3次元の多面体Aのオイラー標数の計算は次のように進みます。

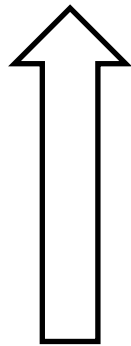


先の図での「取り出す」「数える」の詳しい記述 捨象される二つの測度 -- 長さと面積

{Aの頂点の集合}

{Aの辺の集合}

{Aの面の集合}



辺の長さを
捨象する

面の面積を
捨象する

{ A_v : Aの頂点の集合}

{ A_e : Aの辺の集合}

{ A_f : Aの面の集合}

同じ0次元の形を持つ A_v

同じ1次元の形を持つ A_e

同じ2次元の形を持つ A_f

$$A \supseteq A_f \supseteq A_e \supseteq A_v$$

$$A \supseteq A_f \supseteq A_e$$

$$A \supseteq A_f$$

オイラー標数の不思議 交代和

オイラー標数の式 $v - e + f = 2$ には、交代和という不思議な形が現れます。

偶数次元の0次元の形である点の数 v と2次元の形である面の数 f は、そのまま単純に足されるのに対して、奇数次元の1次元の形である辺の数 e は、引かれます。

$$v - e + f = 2$$

は、次元の偶奇で足し算と引き算が交代に現れる次のような形の式で表現されます。

$$(-1)^0 v + (-1)^1 e + (-1)^2 f = 2$$

オイラーの標数の式の現代的な証明は、ポアンカレの1895年の論文で与えられます。

Henri Poincare

Analysis Situs and Its Five Supplements

https://ncatlab.org/nlab/files/Stillwell_AnalysisSitus.pdf

ここでは、現代のトポロジー論の先駆けとなったポアンカレの証明を紹介することはできないのですが、オイラーはもちろんこうした証明を知っていたわけではありません。

それにもかかわらず、オイラーは、偶数次元と奇数次元の空間の性質の違いを直感的に把握していたように思えます。素晴らしい！

(次元の偶奇による空間の性質の違いは、現代の数学でも、現代の物理学でも、大きなテーマであり続けています。)

オイラー標数の一般化

ここではオイラー標数の一般化を考えます。Aのオイラー標数を $\chi(A)$ と表すことにしましょう。

Aが三次元の凸な多面体の場合、 $\chi(A) = v - e + f$ でした。

$v = \chi_0(A)$, $e = \chi_1(A)$, $f = \chi_2(A)$ とすれば、

$$\chi(A) = \chi_0(A) - \chi_1(A) + \chi_2(A)$$

$$= \sum_{k=0}^2 (-1)^k \chi_k(A)$$

オイラー標数の一般化は、次のような形になります。

$$\chi(A) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \chi_k(A)$$



シャニュエル
「負の集合」と「ポテトの長さ」

シャニュエルが考えたこと

このセッションでは、オイラーの標数論を新しい段階に引き上げ、21世紀の「マグニチュード論」の扉を開いたシャニュエル (Stephen H. Schanuel)の二つの議論を紹介したいと思います。

一つはこの論文です。

Stephen Schanuel, 1991, Negative sets have Euler characteristic and dimension

<https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0084232>

この論文で、シャニュエルは、「負の集合」を負のオイラー標数を持つ集合と定義し、この概念を有限集合の基数の一般化として機能することを示しました。

シャニュエルの「負の集合」

シャニュエルはオイラーの研究について次のように語ります。

「オイラーの解析は、適切に「有限」な空間を数えることで、明確に定義された負の整数を得られることを示したもので、それは、**基数論における革命的な進展であった**。その影響が数学の広範な分野に浸透していることを考慮すれば、カントールの無限集合への拡張よりも重要な成果と言えるかもしれない。」

これまでのセッションで、シャニュエルの議論を、「マイナスの個数の要素を持つ集合」を考えようとしたと紹介してきました。それは、「Negative set」という論文のタイトルからも明らかなのですが、基本的には、カントール集合論の基数論の拡張にオイラー標数を利用しようとする彼の問題意識に基づいたものです。

シャニュエルの研究の意図 オイラー標数を加法的測度として扱う

シャニュエルは、この論文で研究の意図について、次のように語っています。

「後世の記述ではこの「オイラー特性」を位相不変量として扱うものもあるが、我々はむしろ位相の無関係性を強調し、多面体のオイラー特性を有限加法的測度として扱うことを望む。大まかに言えば、ベッティ数(ホモロジー群の位数)は空間がどのように構成されるかに依存するが、オイラー特性数は依存しない。空間が共通部分を持たない二つの部分集合の和集合である場合、オイラー特性数は加算される。」

シャニュエルの「ポテトの長さ」

ここでの「位相の無関係性を強調し、多面体のオイラー特性を有限加法的測度として扱う」という研究は、シャニュエルの次の論文で本格的に展開されることとなります。

Stephen Schanuel, 2006, WHAT IS THE LENGTH OF A POTATE? An Introduction to Geometric Measure Theory

https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~tl/docs/Schanuel_Length_of_potato.pdf

奇妙なタイトルですね。

この「ポテトの長さ」というタイトルに、ちょっとした違和感を覚えた人もいるかと思います。(それが、タイトルに込めたシャニュエルの狙いなのだと思います。)

その違和感は、「ポテトの重さ」というタイトルだと、ほとんどなくなるように思います。それは、ポテトの「大きさ」は、主にその「重さ」で測られるからです。

ただ、ポテトには、もちろん「長さ」もあります。そして、ポテトの「大きさ」には、多分「長さ」も関係しているはずですが。

シャニュエルは、「重さ」と「長さ」の両方に関連するポテトの「大きさ」に、オイラーの標数を結びつけることによって、こうした問題に答えます。

それは、今回のセミナーのテーマである、「マグニチュード」論の「大きさ」へのアプローチと共通するものです。

ただ、「大きさ」とオイラーの標数との関係は、自明なものには見えないかもしれません。

先のセッションでは、オイラーの標数の計算でオイラーが「数えた」ものは、「同じ形」の図形の数で、「同じ形」の図形とは、「次元の等しい」形のこと、そこでは、同じ次元の形を持つ図形の「長さ」や「面積」を「捨象する」ことで「数える」ことが可能になっていると説明してきました。

オイラーの標数と「長さ」や「面積」といった図形の測度との関係は、どういうものなのでしょう？ シャニユエルの「ポテトの長さ」の論文は、こうした疑問に答えるものです。

シャニュエルの標数論の理論 -- Burnside rig

シャニュエルの1990年の論文は、理論的枠組みとして Burnside rig を使っています。

rig というのは、大雑把にいうと、Ring(環)の演算の定義から、マイナス'-'を落とした、'+ 'と'×'のみから定義されるringのことです。"rig"は、文字列"ring"から、"without negatives" ということ、文字 'n' を抜いたものです。

今年の連続セミナーの三巡目で取り上げる予定の"tropical algebra/geometry"もrigをベースにしています。

二つの集合の和の要素の数

このセッションでは、シャニュエルの標数論を紹介していきたいと思います。ただ、今回のセッションでは、rig をベースにした理論構成を深く説明することはできません。

ただ、シャニュエルが行った構成に直感的な説明を与えることはできると思います。

まず、共通部分を持たない二つの集合AとBに和を次のように定義します。

$$A + B = A \cup B$$

集合Aの要素の数を $|A|$ と表すと、共通部分を持たない二つの集合AとBについては、次の式が成り立つことがわかります。

$$|A + B| = |A \cup B| = |A| + |B|$$

AとBが共通部分を持つときは、要素の数は、次の式で表されます。

$$|A + B| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

直感的な理解にはとても役に立つ以下の図の多くは、Leinsterの“[How to measure almost anything](https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~tl/fims/fims.pdf)”から借用しています。

<https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~tl/fims/fims.pdf>

Leinsterは、要素の数を $\text{size}()$ と表しています。

卵の数を数える

卵がなければ

$$\text{size}(\quad) = 0$$

一個の卵なら

$$\text{size}(\text{卵}) = 1.$$

これはどうだろう？

$$\text{size}(\text{卵の集合}) = ?$$

こうなる

$$\text{size}(\text{卵の集合}) = \text{size}(\text{卵の集合A}) + \text{size}(\text{卵の集合B}) - \text{size}(\text{卵の集合A} \cap \text{卵の集合B})$$

$\text{size}(A \cup B) = \text{size}(A) + \text{size}(B) - \text{size}(A \cap B)$

二つの集合の積の要素の数

次に、二つの集合AとBの積の要素の数を次のように定義します。

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

直感的なイメージは次のようなものです。

$$\text{size} \left(\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) = \text{size} \left(\bullet \bullet \bullet \bullet \right) \times \text{size} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)$$

$$\text{size}(A \times B) = \text{size}(A) \times \text{size}(B)$$

「負の集合」論文のポイント

开区間のオイラー標数

シャニュエルの議論に戻りましょう。

彼の「負の集合」論文の重要なポイントは、**开区間のオイラー標数を「-1」とみなすことができる**ということです。

両端の0、1を含まない、开区間(0, 1)を考えます。この(0, 1)の中間に一点{1/2}を置きます。

このとき、开区間(0, 1)は、次のようにお互い共通部分を持たない三つの集合に分割できます。

$$(0, 1) = (0, 1/2) \cup \{1/2\} \cup (1/2, 1)$$

$$(\text{○} \text{---} \text{○}) = (\text{○} \text{---} \text{○}) \cup \{\bullet\} \cup (\text{○} \text{---} \text{○})$$

$$(\bigcirc \text{---} \bigcirc) = (\bigcirc \text{---} \bigcirc) \cup \{\bullet\} \cup (\bigcirc \text{---} \bigcirc)$$

开区間(0,1)と开区間(0, 1/2), 間区間(1/2, 1)は、同じ形をしていますので、このオイラー標数を x としましょう。一点{1/2}のオイラー標数は1ですので、次の式が成り立ちます。

$$x = x + 1 + x$$

$$\text{これから } x = -1$$

といきたいのですが、 rig には減算(マイナス)が定義されていないので、自由に移項して、符号を変えることができません。

言えるのは、 x と $x + 1 + x$ は、ほぼほぼ同値であるというところまでです。

$$x \sim x + 1 + x$$

シャニユエルの計算

$x \sim x + 1 + x = 2x + 1$ という関係から **开区間のオイラー数が マイナス1である**ことを導いたシャニユエルの展開は、詳しく述べることはできません。ただ、その結果を直感的に裏付けることはできると思います。

シャニユエルの計算は、共通部分をもたない集合の和の要素は、それぞれの集合の要素の和に等しいことを基本にしています。

ここで注意が必要なのは、同じ線状の形をしていても、両端を含む線分と、両端を含まない开区間では、その線状の形の数え方が大きく異なるということです。

1次元の「線」状の図形のオイラー標数を考える

以前、一元の線分のオイラー標数を次のように計算しました。

2次元の「面」に埋め込まれた1次元の「線」には、「面」は含まれませんので、そのオイラー標数は、 $v - e + f$ で $f = 0$ とおいた $v - e$ になります。

Case1:線分



頂点 v 辺 e

2 1

2 - 1 = 1

$v - e = 1$

それでは、半直線と开区間のオイラー数も同じように計算できるのでしょうか？ 次のように。

Case2: 半直線



頂点 v	辺 e
1	1
$1 - 1$	$= 1$
$v - e = 0$	

Case 3: 开区間



頂点 v	辺 e
0	1
$0 - 1$	$= -1$
$v - e = -1$	

ただ、ここでみた三つのケースで、頂点の数え方はいいとしても、辺の数の数え方には疑問が残ります。

というのも、Case1の「線分」と、Case2の「半直線」とCase3の「開区間」では、「辺」として数えられたものが、全く同じ形をしているかは、明らかではないからです。

辺の形が不明確で同じではなく数え方がはっきりしないのに、オイラーの標数の公式で、辺の数を示す e の値を、線の形をしているからと、勝手に1としていけません。

こうした曖昧さを、シャニュエルは、次に見るようには掃しました。

開区間は「負の集合」

共通部分を持たない集合のサイズの和として、オイラー標数を捉え返すことは、その性質を考える上で重要です。

シャニユエルは開区間のオイラー標数が-1であることを示しました。

$$\chi\{\text{○} \text{---} \text{○}\} = -1$$

重要なことは、開区間のオイラー数が-1だということは、開区間のサイズは-1だと考えることと同じだということです。

それは、開区間をマイナスの大きさを持つ集合と考えることです。

オイラー・シャニユエルの標数

開区間は「負の集合」で、そのサイズを-1と数えると、以下のように、さまざまな形の対象のオイラーの標数の計算が可能になります。それはなかなか強力なものです。

こうしたアプローチで計算されたオイラー標数を、「オイラー・シャニユエルの標数」と呼びます。いくつかの例を見ておきましょう。

1点からなる集合のオイラー標数は1です。

$$X\{\bullet\} = 1$$

半直線のオイラー標数 = 0

$$X\{\bullet\text{---}\circ\} = X\{\bullet\} + X\{\circ\text{---}\circ\} = 1 + (-1) = 0$$

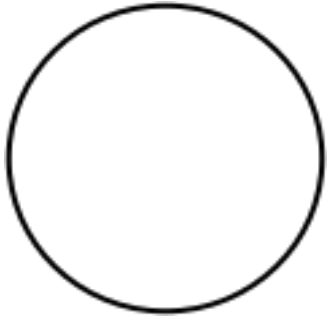
線分のオイラー標数 = 1

$$X\{\bullet\text{---}\bullet\} = X\{\bullet\} + X\{\bullet\text{---}\circ\} = 1 + 0 = 1$$

半直線のオイラー標数を使うと、次のように、円周のオイラー標数を求めることができます。

$$\begin{aligned}\chi(O) &= \chi(\text{C}) + \chi(\text{D}) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

円周



$$\chi = 0$$

これは以前に紹介しました。

以下の図の多くは、Baezの“Mystery of counting”から借用しています。

<https://math.ucr.edu/home/baez/counting/counting.pdf>

二次元の形のオイラー標数

二次元の形のオイラー標数を求めるには、サイズの積の形を利用します。

$$\begin{aligned}\chi(\text{正方形}) &= \chi(\text{点}) \times \chi(\text{線}) \\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

円板



$$\chi = 1$$

閉じた境界を持つ二次元の平面の、
オイラー標数は1です。

先の例は、わかりやすいかもしれませんが、次の平面のイメージ
できますか？

$$\begin{aligned}\chi(\text{□ with diagonal lines}) &= \chi(\text{I}) \times \chi(\text{C}) \\ &= 1 \times -1 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi(\text{□ with diagonal lines and dots}) &= \chi(\text{I}) \times \chi(\text{C}) \\ &= -1 \times -1 = 1\end{aligned}$$

こちらは、境界がない平面です。

$$\chi(\mathbb{R}) = \chi(\text{---}) = -1$$

$$\chi(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$$

これは、開区間のn乗と思えばいいと思います。

$$\chi(\mathbb{C}) = \chi(\text{---}) \times \chi(\text{---}) = -1 \times -1 = 1$$

複素平面は、境界がない平面です。

トーラス表面のオイラー標数

トーラス表面のオイラー標数は、次のように計算できます。

$$\chi(\text{torus}) = \chi(\text{disk}) + \chi(\text{disk})$$

$$= \chi(0) * \chi(\text{point}) + \chi(0) * \chi(\text{point})$$

$$= 0 * 1 + 0 * -1 = 0$$

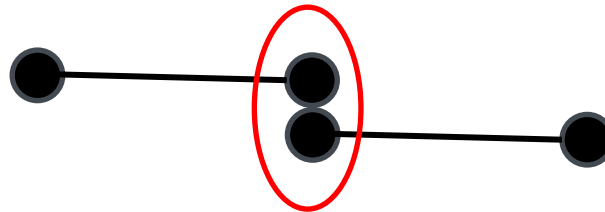
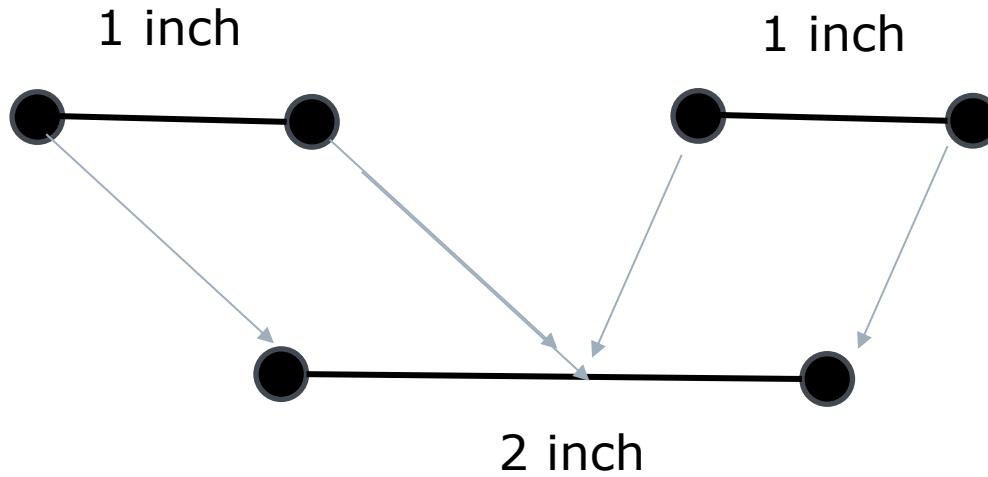
シャニュエルの定規

「ポテトの長さ」の論文で、シャニュエルは、1 inchの長さを測る定規の話をしています。

この定規は、「線分」と考えていいのですが(端のないものには、長さも面積も定義できません)、この定規で2 inch を測ろうとすると問題が起きると彼は言います。

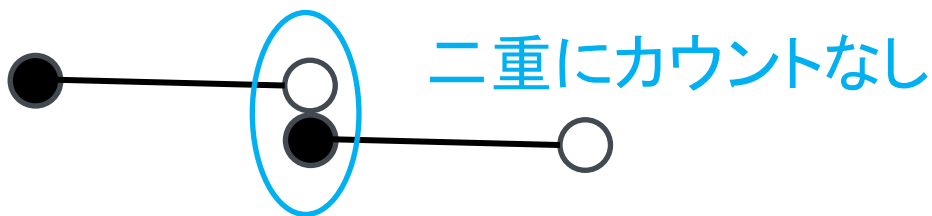
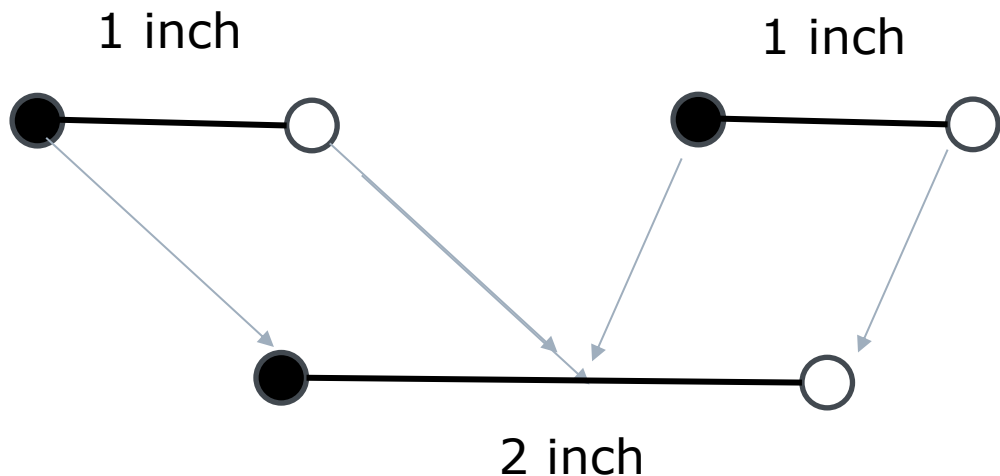
「この定規の欠点は、その線分を2倍に拡大すると、結果として得られる線分が元の線分の2つのコピーの互いに共通部分のない和集合ではなく、2つの部分が一点で重なり合う点があることである。」

こうなるということです。



二つの点が二重にカウントされている

定規で測る対象のサイズを次のように考えます。

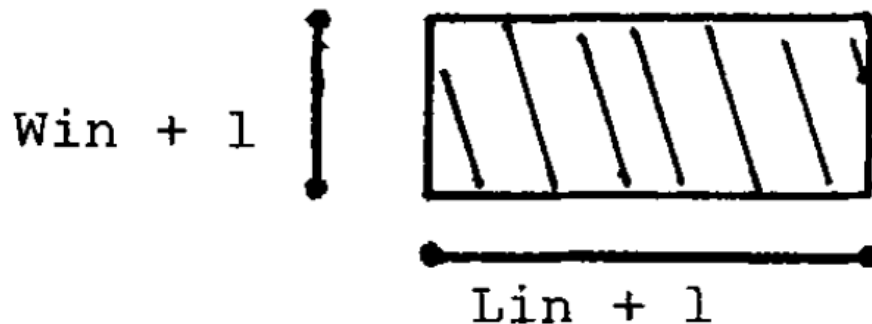


$$\begin{aligned} \text{size}(\text{●} \text{---} \text{●}) &= \text{size}(\text{●} \text{---} \text{○}) + \text{size}(\text{●}) \\ &= 2 \text{ inch} + 1 \end{aligned}$$

シャニュエルの長方形のサイズの計算

シャニュエルは、長さL inchの線分のサイズを $L \text{ inch} + 1$ と考えることを提案します。(以下の図では、Linと表現されています。)

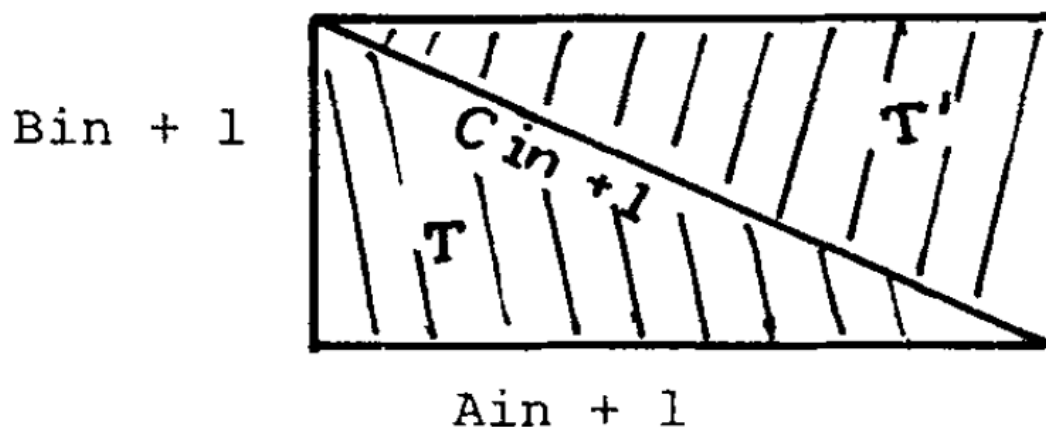
このとき、閉じた長さがL inch 幅がW inchの長方形のサイズは、



$$(Lin + i)(Win + i) = LWin^2 + (L + W)in + 1$$

で計算されることになります。

直角三角形のサイズはどうなるでしょう？



$$\text{size}(T \cup T') = \text{size}(T) + \text{size}(T') - \text{size}(T \cap T')$$

$$(A_{in+1})(B_{in+1}) = 2\text{size}(T) - (C_{in+1})$$

$$\text{size}(T) = AB/2 \text{ in}^2 + (A+B+C)/2 \text{ in} + 1$$



2次元の
面積



1次元の長さ
= 周囲長の1/2



0次元の
オイラーの標数

こうして、無限小の大きさしかもたない一点のサイズを1として、それを加えたものとしてサイズの概念を拡大すると、オイラーの標数を計算したときに捨象した、長さや面積という測度が、サイズの式に復活してくることがわかります。

ここで利用したのは、オイラーの標数の公式ではなく、

$$|A + B| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

という公式だったことに留意してください。

ポテト論文は、まだまだ続いて、オイラー標数と加算的な測度との深い関係が展開されるのですが、ここでは割愛します。



「大きさ」と「オイラーの標数」を図解する

今まで見てきたことの振り返り

このセッションでは、オイラー標数についてのシャニュエルの議論を直感的な図解で振り返ろうと思います。

ここでは、ある図形の「大きさ」として、オイラーの標数を捉えるというアイデアが大きな役割を果たしています。

「位相との無関係性を強調し、多面体のオイラー特性を有限加法的測度として扱う」

次回のセッションから、こうしたアイデアを受け継いだ、Leinsterの「Magnitude論」の紹介に入りたいと思っています。

二つの集合の和の要素の数 coproduct

卵がなければ

$$\text{size}(\quad) = 0$$

一個の卵なら

$$\text{size}(\text{卵}) = 1.$$

これはどうだろう？

$$\text{size}(\text{卵の集合}) = ?$$

こうなる

$$\text{size}(\text{卵の集合}) = \text{size}(\text{卵の集合}) + \text{size}(\text{卵の集合}) - \text{size}(\text{卵の集合})$$

$$\text{size}(A \cup B) = \text{size}(A) + \text{size}(B) - \text{size}(A \cap B)$$

二つの集合の積の要素の数 product

次に、二つの集合AとBの積の要素の数を次のように定義します。

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

直感的なイメージは次のようなものです。

$$\text{size} \left(\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) = \text{size} \left(\bullet \bullet \bullet \bullet \right) \times \text{size} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)$$

$$\text{size}(A \times B) = \text{size}(A) \times \text{size}(B)$$

开区間のオイラー標数

开区間 $(0, 1)$ は、次のように**お互い共通部分を持たない**三つの集合に分割できます。

$$(0, 1) = (0, 1/2) \cup \{1/2\} \cup (1/2, 1)$$

$$(\bigcirc \text{---} \bigcirc) = (\bigcirc \text{---} \bigcirc) \cup \{\bullet\} \cup (\bigcirc \text{---} \bigcirc)$$

$$x = x + 1 + x$$

$$x = x + 1 + x$$



equalをisomorphicで置き換える

$$x \cong x + 1 + x$$

$$x \cong 2x + 1$$

オイラー・シャニユエルの標数

1点からなる集合のオイラー標数 = 1

$$\chi\{\bullet\} = 1$$

开区間のオイラー標数 = -1

$$\chi\{\circ\text{---}\circ\} = -1$$

半直線のオイラー標数 = 0

$$\chi\{\bullet\text{---}\circ\} = \chi\{\bullet\} + \chi\{\circ\text{---}\circ\} = 1 + (-1) = 0$$

線分のオイラー標数 = 1

$$\chi\{\bullet\text{---}\bullet\} = \chi\{\bullet\} + \chi\{\bullet\text{---}\circ\} = 1 + 0 = 1$$

円周のオイラー標数 = 0

$$\begin{aligned}\chi(O) &= \chi(\text{Circumference}) + \chi(\text{Interior}) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

2次元の閉平面のオイラー標数 = 1

$$\begin{aligned}\chi(\text{Square}) &= \chi(\text{Boundary}) \times \chi(\text{Interior}) \\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

2次元の開平面のオイラー標数

$$\begin{aligned}\chi(\text{Square with holes}) &= \chi(\text{Boundary}) \times \chi(\text{Interior}) \\ &= -1 \times -1 = 1\end{aligned}$$

実数 \mathbb{R} は、1次元の開区間

$$\chi(\mathbb{R}) = \chi(\text{---}) = -1$$

\mathbb{R}^n は、開区間のn乗と思えばいい

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{R}^n) &= \chi(\text{---}) \times \chi(\text{---}) \times \cdots \times \chi(\text{---}) \\ &= -1 \times -1 \times \cdots \times -1 = (-1)^n\end{aligned}$$

複素平面は、境界がない2次元の平面

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{C}) &= \chi(\text{---}) \times \chi(\text{---}) \\ &= -1 \times -1 = 1\end{aligned}$$

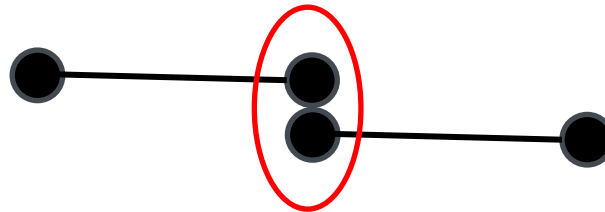
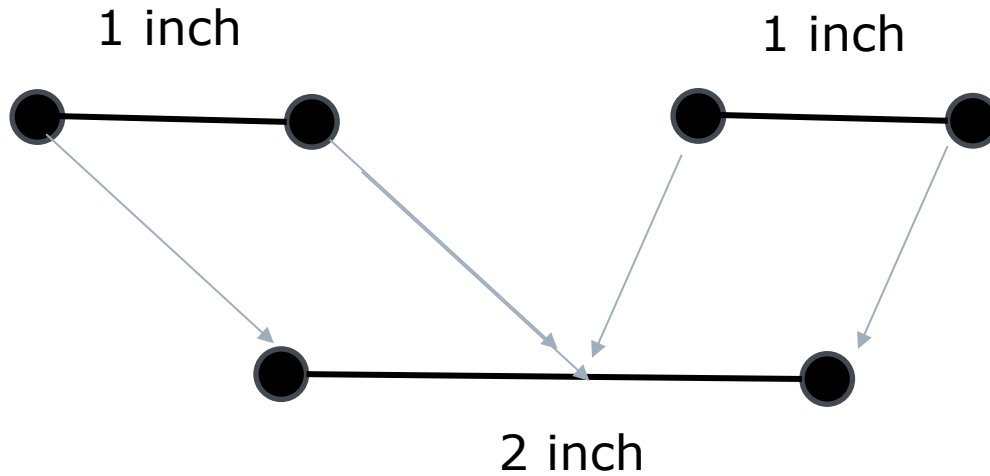
トーラス表面のオイラー標数は、次のように計算できます。

$$\chi(\text{torus}) = \chi(\text{disk}) + \chi(\text{disk})$$

$$= \chi(0) * \chi(\text{point}) + \chi(0) * \chi(\text{point})$$

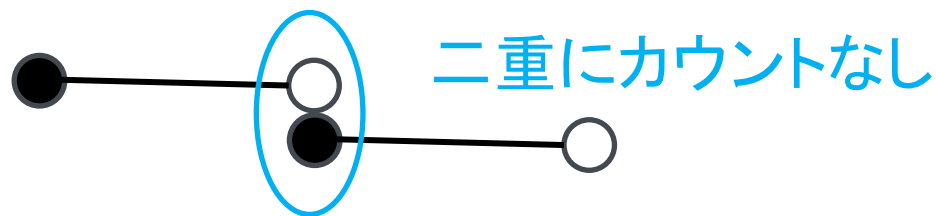
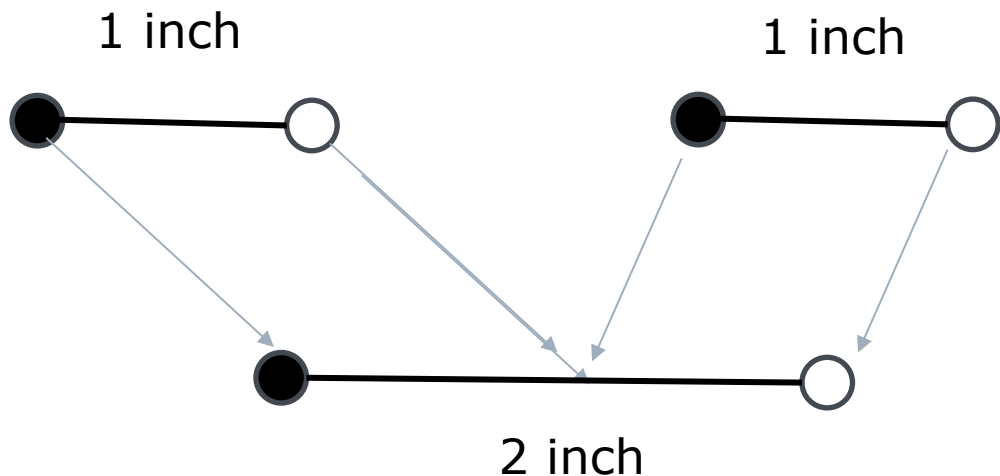
$$= 0 * 1 + 0 * -1 = 0$$

シャニュエルの一次元線分のサイズの計算



二つの点が二重にカウントされている

定規で測る対象のサイズを次のように考えます。

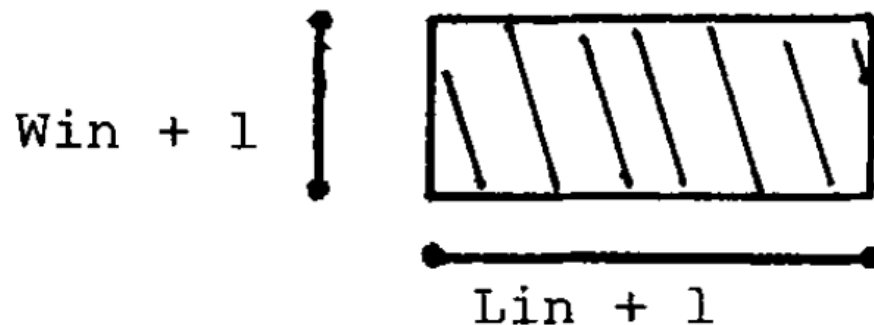


$$\begin{aligned} \text{size}(\text{●} \text{---} \text{●}) &= \text{size}(\text{●} \text{---} \text{○}) + \text{size}(\text{●}) \\ &= 2 \text{ inch} + 1 \end{aligned}$$

シャニュエルの二次元平面のサイズの計算

シャニュエルは、長さL inchの線分のサイズを $L \text{ inch} + 1$ と考えることを提案します。(以下の図では、Linと表現されています。)

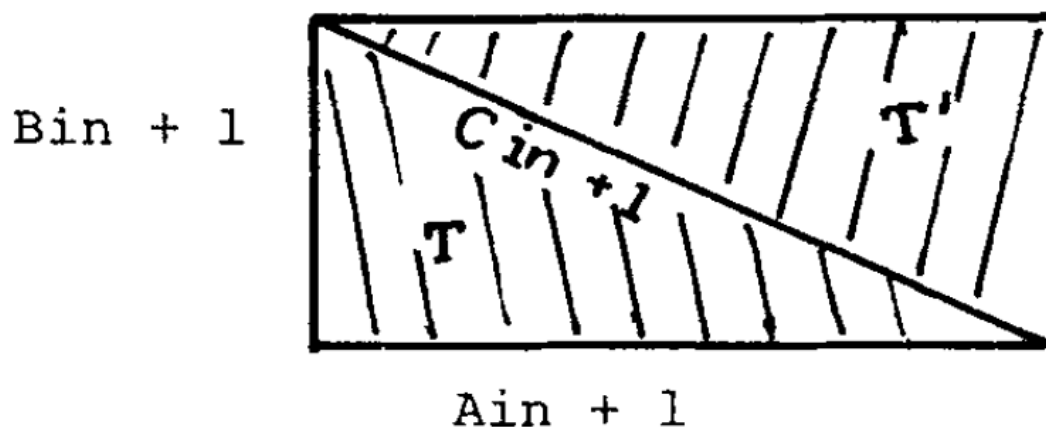
このとき、閉じた長さがL inch 幅がW inchの長方形のサイズは、



$$(Lin + i)(Win + i) = LWin^2 + (L + W)in + 1$$

で計算されることになります。

直角三角形のサイズはどうなるでしょう？



$$\text{size}(T \cup T') = \text{size}(T) + \text{size}(T') - \text{size}(T \cap T')$$

$$(A_{in+1})(B_{in+1}) = 2\text{size}(T) - (C_{in+1})$$

$$\text{size}(T) = AB/2 \text{ in}^2 + (A+B+C)/2 \text{ in} + 1$$



2次元の
面積



1次元の長さ
= 周囲長の1/2



0次元の
オイラーの標数

布のサイズを測る

布のサイズを考えましょう。

$$\text{size} \left(\text{img} \right) = 1.$$

$$\text{size} \left(\text{img} \right) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{size} \left(\text{img} \right) &= \text{size} \left(\text{img} \right) + \text{size} \left(\text{img} \right) - \text{size} \left(\text{img} \right) \\ &= 1 + 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

こういう布の場合は？



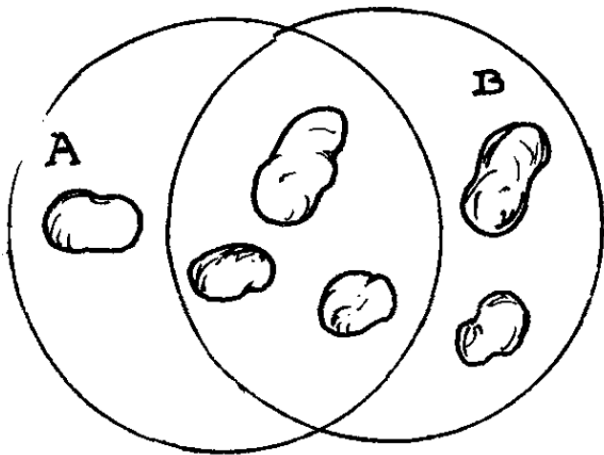
$$\begin{aligned} \text{size} \left(\text{O} \right) &= \text{size} \left(\text{C} \right) + \text{size} \left(\text{C} \right) - \text{size} \left(\text{; } \right) \\ &= 1 + 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{size} \left(\text{球} \right) &= \text{size} \left(\text{球面} \right) + \text{size} \left(\text{球体} \right) - \text{size} \left(\text{点} \right) \\
 &= \text{size} \left(\text{圆} \right) + \text{size} \left(\text{圆} \right) - \text{size} \left(\text{点} \right) \\
 &= 1 + 1 - 0 = 2
 \end{aligned}$$

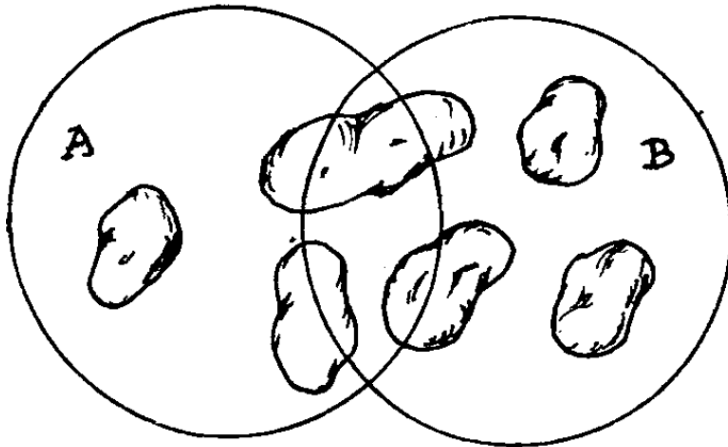
↑ 空洞

$$\text{size} \left(\text{碗} \right) = 1$$

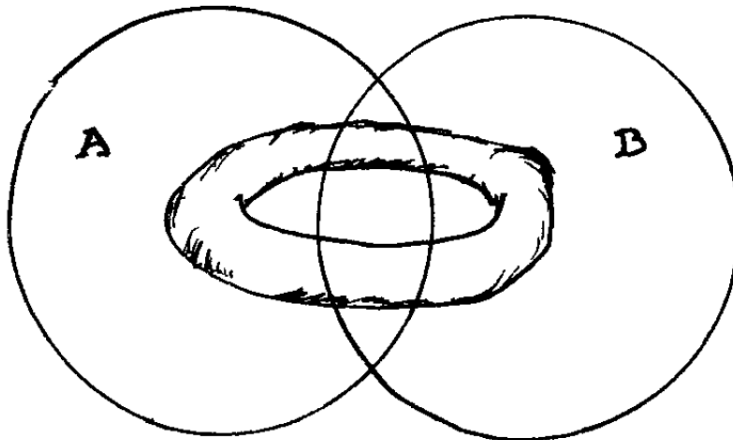
$$\begin{aligned}
 \text{size} \left(\text{圆筒} \right) &= \text{size} \left(\text{圆环} \right) \\
 &= \text{size} \left(\text{C} \right) + \text{size} \left(\text{C} \right) - \text{size} \left(\text{点} \right) \\
 &= 1 + 1 - 2 = 0
 \end{aligned}$$



$$6 = 4 + 5 - 3$$



$$6 = 4 + 5 - 3$$



$$0 = 1 + 1 - 2$$





Part 3

レンスターの「生物多様性の大きさ」



Part 3 Agenda

レンスターの「生物多様性の大きさ」

- 「生物多様性」の「大きさ」を考える
- レンスターの「多様性」の定義を読む
- 類似度行列とマグニチュード論



「生物多様性」の「大きさ」を考える

「生物多様性」の「大きさ」を考える

これまで、集合の「大きさ」としてのカントールの基数 (cardinality) や、図形の「変わらぬ大きさ」としてのオイラーの標数 (Euler characteristic) を見てきました。

我々の認識の対象となるものには、何らかの形で「大きさ」の概念を持つものが、少なくありません。

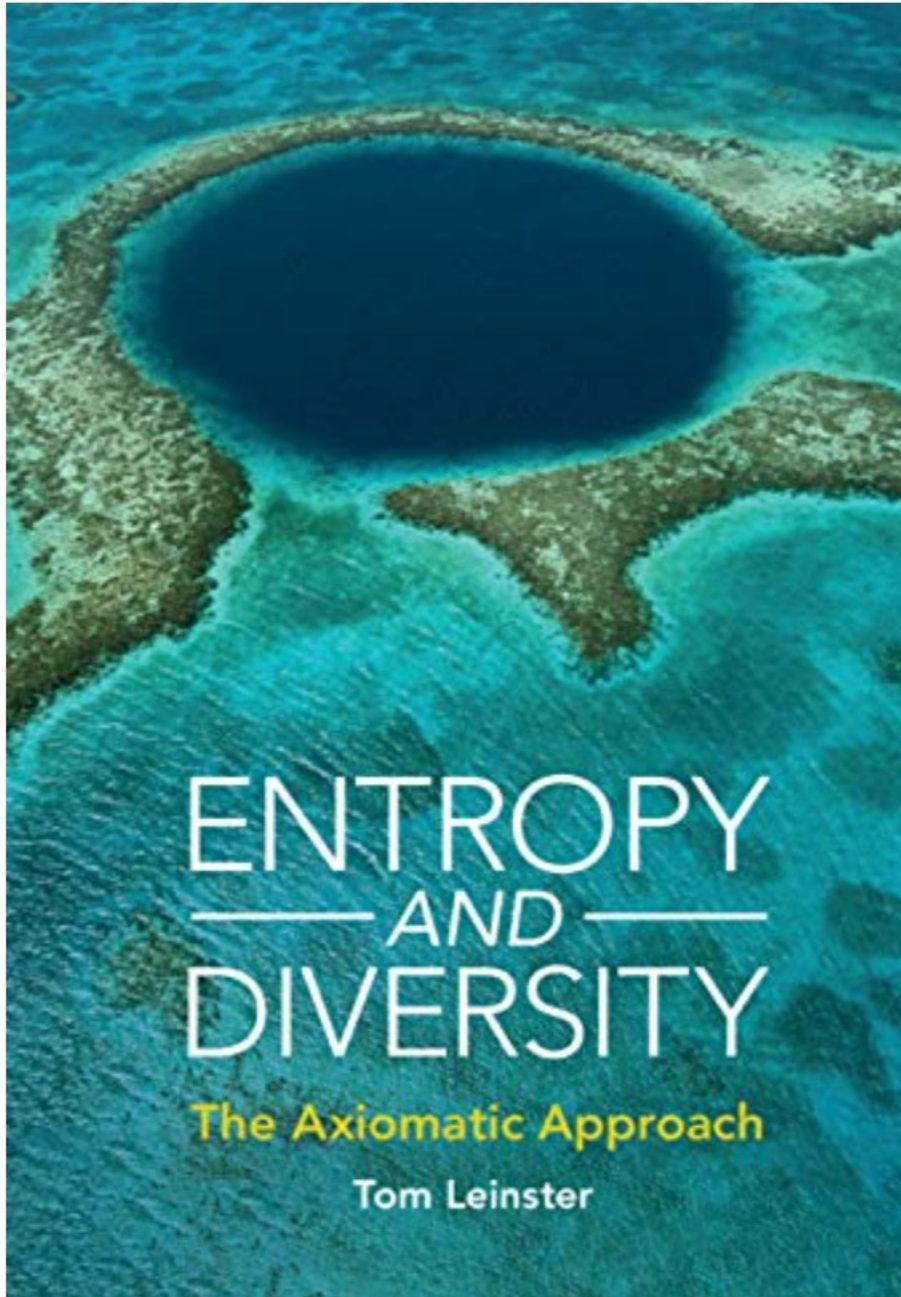
このセッションでは、集合や図形とはちょっと異なる対象の「大きさ」を考えてみようと思います。

このセッションで扱うのは、「生物多様性」の「大きさ」についてです。

「生物多様性」の議論とマグニチュード論と Tom Leinster

前回のセッションで、「次回のセッションから、こうしたアイデアを受け継いだ、Leinsterの「Magnitude論」の紹介に入りたいと思っています。」と書いたのですが、実は、マグニチュード論と「生物多様性」の議論とは、深い結びつきがあります。

マグニチュード論を始めたレンスターは、もちろん数学者ですが、「生物多様性」の問題への関心を強く持っていました。



Tom Leinsterの本(2021年)

https://www.amazon.co.jp/-/en/Tom-Leinster-ebook/dp/B092R32J31/ref=sr_1_1

arXiv

<https://arxiv.org/pdf/2012.02113>

そして、レンスターは、後で見るように、「生物多様性」の数学的理論の構築で画期的な成果を収めました。彼のマグニチュード論は、こうした彼の問題意識と研究成果の発展として捉えることができます。

今回のセッションでは、まず彼の「生物多様性」の「大きさ」の議論を振り返ってみようと思います。今回は途中までですが。

基本的に依拠したのは、2015年のTom LeinsterとMark W. Meckesの次の共著論文です。スライドは、基本的にこの論文からの引用で構成されています。生態学の論文として書かれているので、数学論文よりわかりやすいところがあると考えています。

Maximizing diversity in biology and beyond

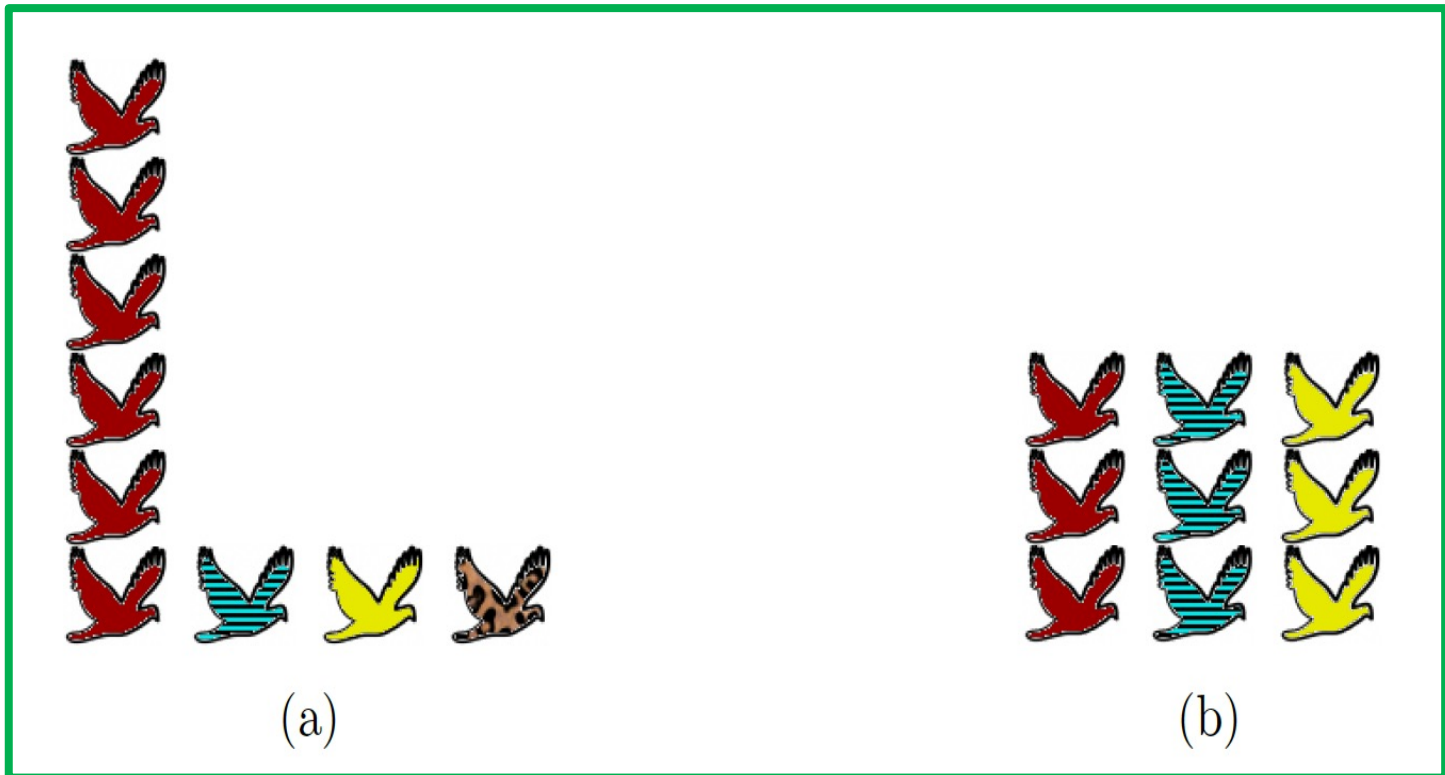
<https://arxiv.org/pdf/1512.06314>

どちらの環境の方が多様性は大きいのか？

「生物多様性の大きさ」の何が問題なのでしょう？

鳥が生息する次のような(a)(b)二つの環境があったとします。

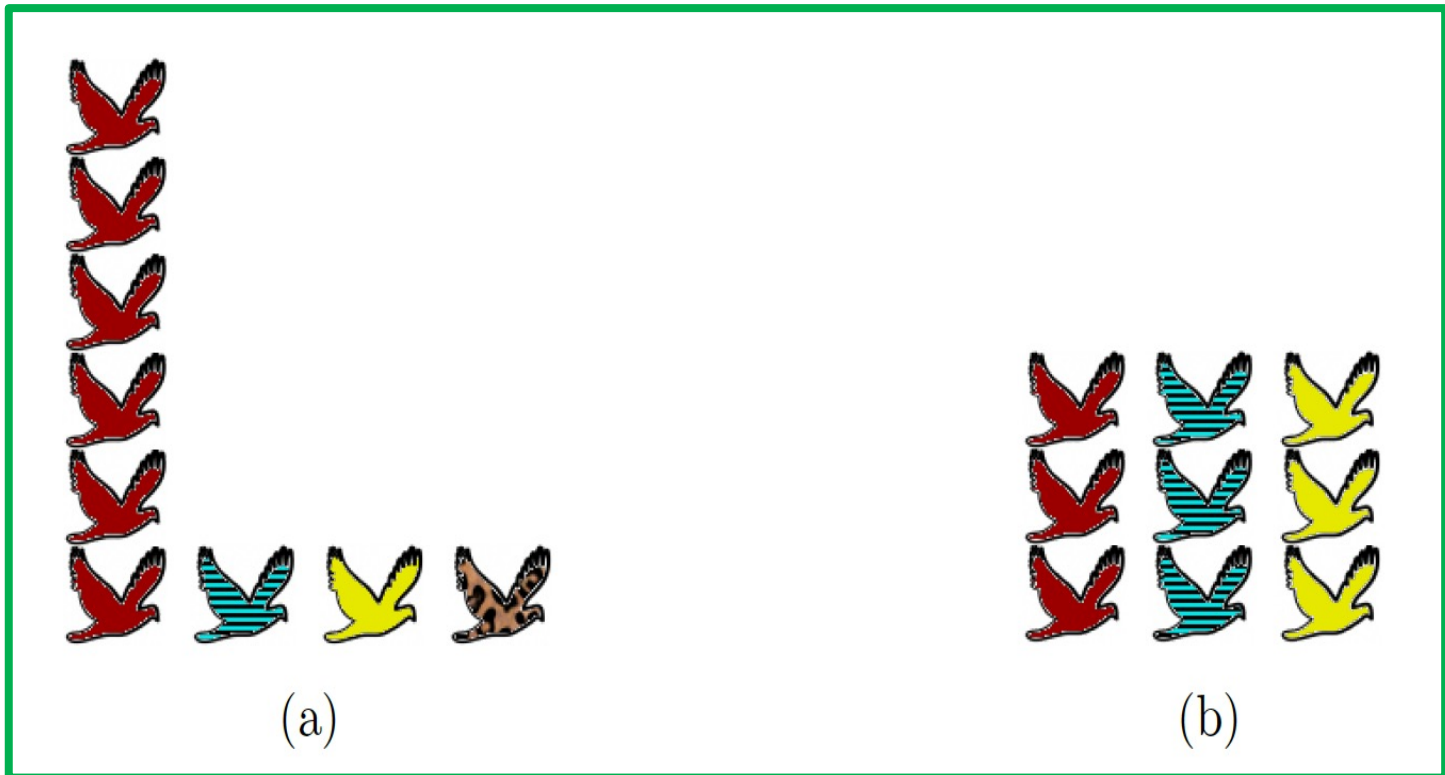
どちらの環境が生物多様性が高いと思いますか？



棒グラフの高さは種ごとの個体数を示しています。

環境(a)では四種が生息し、第一種が優勢で他は比較的稀です。
環境(b)では第四種が欠けているのですが、それ以外の種は均等に分布しています。

どちらの環境が生物多様性が高いと思いますか？



多様性に関する多様な見解

「多様性に関する極端な見解の一つは、種の保存こそが全てであるというものだ:「生物多様性」とは単に存在する種の数(生態学文献やメディアでよく見られる定義)を意味する。存在する種の豊かさには全く注目されないため、希少種も普通種も全く同等に扱われる。この観点では、図の環境(a)は環境(b)よりも多様である。単に種数が多いためだ。」

「反対の極端な立場は、希少種を完全に無視し、最も一般的な種のみを考慮するものである(これは生態系全体の機能に焦点を当てる動機から生じうる)。この観点では、環境(b)は環境(a)よりも多様性が高い。なぜなら(b)はより均衡が取れているからである:環境(a)は単一の一般的な種に支配されているのに対し、環境(b)には等しい割合で3つの一般的な種が存在する。」

「この両極端の間には、希少種に重きを置く度合いが異なる中間的な見解のスペクトルが存在する。文献が十分に証明しているように、目的によって異なる立場を取ることは、様々な科学者にとって適切であると判断されてきた。」

「生態学者たちは20世紀半ばに生物多様性の定量的定義を提案し始め、50年以上にわたる激しい議論、数十の追加多様性指標提案、数百の学術論文、少なくとも1冊の専門書を生み出し、結果として一部の人々には絶望をもたらした(1971年にはハーバートの有名な論文で既に表明されていた)。

一方、遺伝学などの分野では並行して議論が進められ、経済学者は富の不平等や産業集中を測るために同じ数式を用い、情報理論研究者たちは多様性ではなくエントロピーという名称でこうした量の数学的理論を発展させていた。」

生物多様性の尺度としてのエントロピー

「数十年にわたり、生態学者たちは生物多様性の尺度としてエントロピー類似量を用いてきた。

基本前提は、 n 種の生物群集または生態系が p_1, \dots, p_n の割合で存在する場合、確率分布(p_i)のエントロピーがその環境の均衡度または「多様性」の程度を示すというものだ。

シャノンエントロピー自体が頻繁に用いられるほか、後述するように多くの変種も同様に用いられる。しかし、それらのほとんどすべてに共通する性質として、固定された種数 n に対して、エントロピーは均等分布 $p_i = 1/n$ によって最大化されるという点が挙げられる。」

生態系 E が n 種の生物を含み、それらが p_1, p_2, \dots, p_n の割合で生息していると仮定する(ただし $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$)。 E の「多様性」または「size」を次のように定義できる:

$$\text{size}(E) = p_1^{-p_1} p_2^{-p_2} \dots p_n^{-p_n}.$$

(これはシャノンエントロピーの指数関数である。)

1つの p_i が1で残りが0 (mono culture) の場合、サイズは最小となる:

このとき $\text{size}(E) = 1$ 。

$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ の場合、サイズは最大となる:

このとき $\text{size}(E) = n$ 。

レニイ・エントロピーとツァリス・エントロピー

「シャノン・エントロピーはパラメータ $q \in [0, \infty]$ で表される連続的なエントロピースペクトル上の単なる一点（とはいえ特殊な点）に過ぎないことは広く理解されている。

このスペクトルは少なくとも二つの形で提示されている: レニイ・エントロピー H_q として、およびいわゆるツァリス・エントロピー S_q として」

$$H_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n p_i^q, \quad S_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i^q \right).$$

「 H_q と S_q はどちらも $q \rightarrow 1$ の際にシャノンエントロピーに収束する。さらに、 H_q と S_q は増加する可逆変換によって互いに導出可能であり、この意味で互換性を持つ。

多様性指標として H_q または S_q を用いる場合、 q は稀な種に付与される重みを制御する。 $q=0$ では稀な種と一般的な種に同等の重要性が与えられ、極限值 $q=\infty$ では最も一般的な種の優位性のみが反映される。

異なる q 値は、二つの分布のうちどちらがより多様であるかについて本質的に異なる判断を生む。例えば、時間の経過とともに環境が一部の種を失いながらもより均衡化する場合、 $q = 0$ ではレニィ・エントロピーとツァリス・エントロピーは減少するが、 $q = \infty$ では増加する。

したがって q を変化させることで、「多様性」という言葉の意味に関する多様な視点を組み込むことが可能となる。」

種間の類似性の差異を考慮した「多様性」概念へ

「しかしながら、この生物群集の粗いモデルは、種間の類似性の差異を全く考慮していない点で、現実からかけ離れているという認識が高まっている。

例えば、10種の草で構成される草原よりも、10種の劇的に異なる植物種で構成される草原の方が多様性が高いと直感的に判断するだろう。

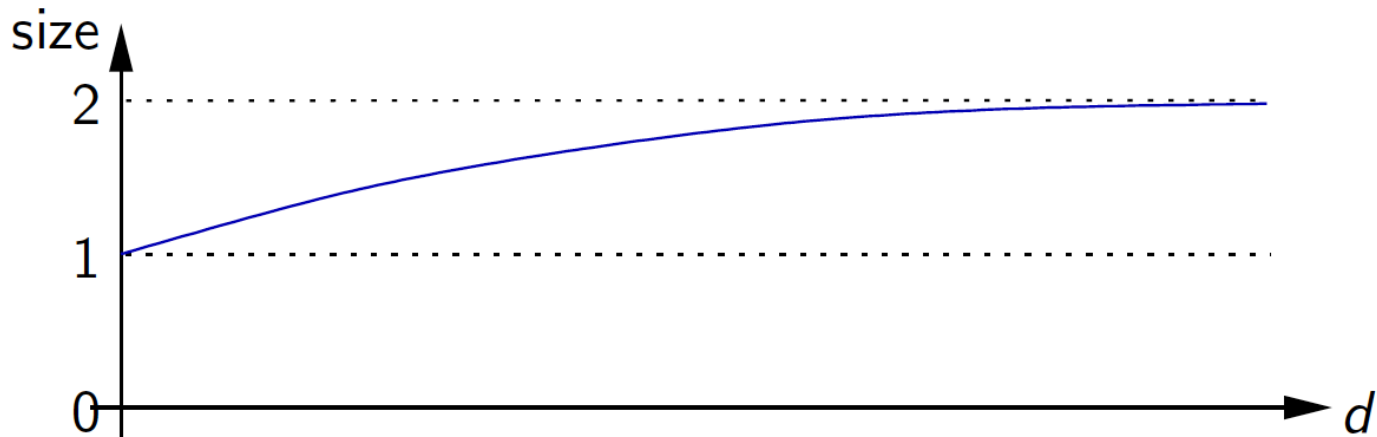
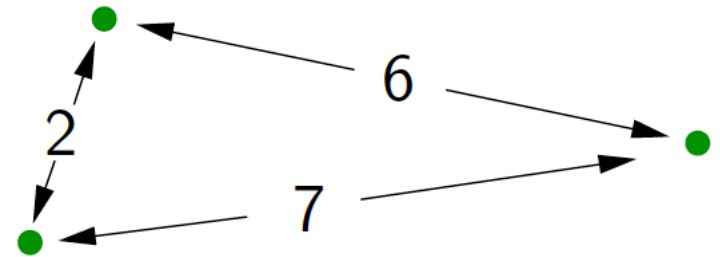
このことから、種間の類似性を考慮した指標が導入されるに至った。数学的に言えば、この改良は本質的に、有限集合上の確率分布に対する古典的なエントロピー概念を、有限距離空間上の確率分布へと拡張することを意味する。」

距離空間の「大きさ」の定義の例

距離空間とは、任意の二点間に「距離」が割り当てられた点の集合である。

$$\text{size}(\) = 0 \text{ and } \text{size}(\bullet) = 1.$$

$$\text{size}(\bullet \xleftarrow{d} \bullet \xrightarrow{\ } \bullet) = \frac{2}{1 + e^{-2d}}:$$

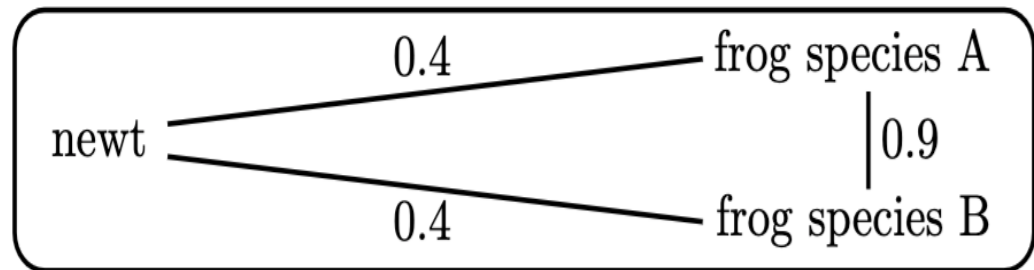


種間の類似性の差異を考慮した「多様性」概念のもとでの「最大の多様性」

「最大エントロピー問題はここでより興味深いものとなる。」

例えば、二種類のほとんど変わらないカエルと一種類のイモリから成る池の生物環境を考えてみよう。最大エントロピー（あるいは多様性）が均等分布(1/3, 1/3, 1/3)によって達成されるとは考えにくい。なぜなら、その場合、環境は2/3がカエルで、わずか1/3がイモリになってしまうからだ。最大化分布は(1/4, 1/4, 1/2)に近いと予想される。」

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$



類似性を持つ集合上の分布のモデル

「本節および次節では、LeinsterとCobbold [26]による多様性指標について簡潔に紹介する。我々には二つの課題がある。まず「生物コミュニティ」という概念の数学的モデルを構築すること(本節)。次に、多様性指標そのものを定義し説明すること(次節)。

簡潔に述べると、生物コミュニティは有限集合(その要素は種である)としてモデル化され、**確率分布(種の相対的豊度を示す)**と、集合の各要素のペアに対する**類似係数(種間の類似性を反映)**の両方が備えられる。

次に、これらの側面を順に検討する。」

種への分割について

「まず、個体群または個体のシステムを、 $n \geq 1$ の種に分割すると仮定する。

「種」という言葉は標準的な意味を持つ必要はなく、属、血清型（ウイルスの場合）、特定の食性を持つ生物の分類群など、意味があると見なされる任意の単位を指し得る。生物学的分類である必要すらなく、例えば[29]では土壌タイプが単位となっている。

ただし具体性を期すため、ここでは種に分割された生態系コミュニティを扱う。システムを種やタイプに分割する行為は多少人工的だが、類似係数の導入によってこの問題は緩和される。」

多様性はシステムの大きさに依存しない

「重要なのは、「多様性」という言葉が絶対的な豊富さではなく、相対的な豊富さのみを指す点である。

森の半分が焼失したり、患者の腸内細菌の90%が失われたりすれば、それは生態学的あるいは医学的な災害となるかもしれない。しかし、システムが十分に混合されていると仮定すれば、多様性は変化しない。

物理学の用語で言えば、多様性は(質量や熱のような)外延量(示量性を持つ)ではなく(密度や温度のような)内包量(示強性を持つ)であり、システムの大きさに依存しないことを意味する。」

種間の類似性

「モデルの第三かつ最終的な側面は種間の類似性である。

種*i*と*j*のペアごとに、両種の類似性を表す実数 Z_{ij} を指定する。これにより $n \times n$ 行列 $Z = (Z_{ij}) \ 1 \leq i, j \leq n$ が定義される。

[26]では類似性を0から1の尺度で測定し、0は完全な非類似性を、1は種が同一であることを意味する。したがって、そこでは

$$0 \leq Z_{ij} \leq 1 \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して}) \quad (1)$$

$$Z_{ii} = 1 \quad (\text{すべての } i \text{ に対して})$$

」

「実際、我々の最大化定理ではより弱い仮定のみが必要となる

$$0 < Z_{ij} < 1 \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して}) \quad (2)$$

$$Z_{ii} > 0 \quad (\text{すべての } i \text{ に対して})$$

これに加え、 Z が対称行列であるという要件が求められる。

([26]の付録では、(2)を満たす行列を「関連性行列」と呼んだ。) 「種」や「豊度」の意味が非常に柔軟であるのと同様に、「類似性」の意味もまた柔軟である:」

レンスターの多様性の尺度

「ここでは、後で最大化を目指す[26]の多様性指標の定義を示す。続いて、この特定の定義を採用する理由を説明する。

第3節と同様に、有限確率分布 $p = (p_1, \dots, p_n)$ でモデル化された生物コミュニティと、式(2)を満たす $n \times n$ 行列 Z を用いる。

セクション2で説明したように、我々は単一の多様性指標ではなく、稀な種への重み付けを制御するパラメータ $q \in [0, \infty]$ でインデックス付けされた多様性指標の族を定義する。

コミュニティの次数 q ($q \neq 1, \infty$) の多様性は

$${}^q D^Z(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

」

ここで $\text{supp}(\mathbf{p})$ は \mathbf{p} の支持集合である(規約、p.5)、

\mathbf{Zp} は行列 \mathbf{Z} に列ベクトル \mathbf{p} を乗じて得られる列ベクトルであり、 $(\mathbf{Zp})_i$ はその i 番目の要素である。仮説 (2) は、 $i \in \text{supp}(\mathbf{p})$ のとき $(\mathbf{Zp})_i > 0$ を意味するため、 ${}^q D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p})$ は一意に定義される。

この式は $q = 1$ の場合には無効だが、 $q \rightarrow 1$ の極限において収束し、 ${}^1 D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p})$ はその極限として定義される。 $q = \infty$ の場合も同様である。具体的には、

$${}^1 D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = \prod_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} (\mathbf{Zp})_i^{-p_i} = \exp\left(-\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i \log(\mathbf{Zp})_i\right),$$
$${}^\infty D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = 1 / \max_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} (\mathbf{Zp})_i.$$

途中ですが、今回はここまで

次回は、もう少し具体的な例で、 $n \times n$ の行列 Z の働きを見ていこうと思います。

また、レンスターの「生物多様性」の満たす重要な性質を見ていきたいと思います。「生物多様性の大きさ」をめぐる長い論争に対する最終回答になっています。

最後に、説明抜きですが、マグニチュード論との関係について触れておきます。

マグニチュード論との関係

「ここで定義された、多様性の最大値は「マグニチュード」として知られる新たな不変量と極めて密接に関連していることがわかる。

これはenriched カテゴリー論[24, Section 1]という極めて広範な一般性の中で定義され、様々な数学分野で興味深い形で特化される。

例えば、それは(通常の)カテゴリーのオイラー特性という概念を自動的に生成し、これは位相的オイラー特性[22]と密接に関連している。」

距離空間の文脈では、マグニチュードは体積や次元といった幾何学的情報を符号化する。

グラフ理論では、マグニチュードはグラフの階層ホモロジー理論と関連する新たな不変量であることが判明している。

代数学においては、マグニチュードは結合代数の不変量を導出し、これはホモロジー的オイラー特性として理解でき。



レンスターの「多様性」の定義を読む

レンスターの「多様性」の定義を読む

このセッションでは、レンスターの「生物多様性」の定義の式を、少し詳しくみてみようと思います。

といっても、レンスターの次「多様性」の定義は複雑ですね。

$${}^qD^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

どこから見ていけばいいのでしょうか？

三つのパラメータ pとZとq

この式は、n 種の種が存在する環境の「生物多様性」を表すものです。この式には三つのパラメータ pとZとqが登場します。

pは、n 種の種が、個体数で見てどのような割合で存在しているかを表す「**確率分布**」です。

環境中の n 種の種を $\{1, \dots, n\}$ と自然数で表すと、確率分布は次のように表せます。

$$\Delta_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, p_1 + \dots + p_n = 1\}$$

Zは、環境中の n 種の種が、生物種として相互にどの程度似ているかを示す $n \times n$ の「類似度行列」です。

以前の「生物多様性」の議論では、エントロピー論の利用が優勢であり、あまり前面には出てこなかった視点だと思います。

「例えば、10種の草だけで構成される草原よりも、10種の明確に異なる植物種で構成される草原の方が多様性が高いと直感的に判断するだろう。」

エントロピー論の利用だけでは、こうしたた例での多様性の違いをはっきりと定義することができませんでした。

「類似度行列」は、こうした視点から導入されたパラメータです。

「確率分布」 p や「類似度行列」 Z が、多様性を測ろうとする環境の客観的な性質を反映したものであるのに対して、一つの実数 $q \in [0, \infty]$ で表される q -パラメータは、少し違った性格を持っています。

それは、環境の多様性のどのような側面に注目するのかという、評価者の動的な「視点」のパラメータだと考えていいと思います。

ですので、同じ確率分布を持つ同じ環境に対しても、 q の値を変えれば、別の多様性の尺度が生まれることになります。

もっとも、 q -パラメータは、全く主観的なものではなく、客観的な意味があるのですが、このセッションでは、そのことには触れません。

三つのパラメータの働きを考える

レンスターの多様性の式には、三つのパラメータ p と Z と q が登場します。ここでは、それぞれのパラメータの働きを、それが導入された歴史の中で見ていきたいと思います。

次のような内容を予定しています。

- 「確率分布 p 」 と Shannon エントロピー H
- 「 q パラメータ」の導入によるエントロピー概念の拡大
Tsallis エントロピー S_q
- Rényi エントロピー H_q と Hill 数
- 「類似度行列 Z 」の例 (これは次回のセッションで)

確率分布 p とShannonエントロピー H

確率分布 p

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

が与えられた時、

Shannon エントロピー H は、次の式で定義されます。

$$H = \sum_i p_i \log \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

Shannonのエントロピーには、確率分布 p 以外の余分なパラメータはありません。どんな確率分布 p も、一意にShannonエントロピーを決定します。

Tsallis エントロピー S_q

パラメータ q によるShannonエントロピーの拡大

Shannonエントロピーの定義中の \log を q -対数 \ln_q (q を底にする自然対数)に置き換えたものを、Tsallis エントロピー とよび、 S_q と表します。

$$S_q = \sum_i p_i \ln_q \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

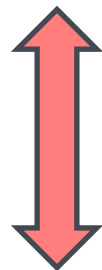
Tsallis エントロピーでは、確率分布 p に加えて、 q が新しいパラメータとして追加されています。

パラメータが一つ増えたことを除けば、両者の定義の形は、よく似ています。

Shannon エントロピー H と *Tsallis* エントロピー S_q の対応

Shannon エントロピー H

$$H = \sum_i p_i \log \left(\frac{1}{p_i} \right)$$



$$S_q = \sum_i p_i \ln_q \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

Tsallis エントロピー S_q

q-パラメータの導入による エントロピー概念の拡大

レンスターは、このエントロピーはTsallisが発見者というより、いろんな分野で何度も繰り返し発見・再発見されているので、
'q-logarithmic entropy' (q-対数エントロピー)と呼ぶのがいいのではという提案をしています。

レンスターの多様性の定義式の中に現れる q-パラメーターは、このq-対数エントロピー(Tsallis エントロピー)のqと同じ仲間だと思っています。

科学の様々な分野で行われたエントロピー概念の拡大の試みの中で、その手段の一つとして、新しいパラメータ q 導入の試みがあったのだと思います。それらは、最終的には、レンスターの「多様性」の定義式に合流していきます。

Tsallis エントロピー を計算する

$$q \neq 1 \text{ の時 } \ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}$$

が分かれば、次のようにTsallis エントロピー を計算することができます。

$$\begin{aligned} S_q &= \sum_i p_i \ln_q \left(\frac{1}{p_i} \right) = \sum_i p_i \left(\frac{1 - p_i^{q-1}}{q - 1} \right) \\ &= \frac{1}{q - 1} \left(\sum_i p_i - \sum_i p_i^{q-1+1} \right) \\ &= \frac{1}{q - 1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right) \end{aligned}$$

Rényi エントロピー H_q

もう一つの重要な拡大されたエントロピーである Rényi エントロピー H_q は、次の式で定義されます。

$$H_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_i p_i^q \right)$$

先に見た Tsallis エントロピー S_q とは、関係があります。

$$S_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right)$$

どちらも

$$X = \sum_i p_i^q$$

の関数とみなせます。

Rényi エントロピー H_q と Tsallis エントロピー S_q の関係

計算の詳細は省略しますが、Rényi エントロピー H_q と Tsallis エントロピー S_q の間には、次のような関係があることがわかります。

$$S_q(\mathbf{p}) = \ln_q(\exp H_q(\mathbf{p}))$$
$$H_q(\mathbf{p}) = \log(\exp_q S_q(\mathbf{p}))$$

この関係は、

$$D_q(\mathbf{p}) = \exp H_q(\mathbf{p})$$

とおくと、次のように見やすいものになります。

この $D_q(\mathbf{p})$ を、**次数 q の Hill 数** と呼びます。

Hill数 $D_q(\mathbf{p})$ を使うと、Rényi エントロピー $H_q(\mathbf{p})$ 、Tsallis エントロピー $S_q(\mathbf{p})$ の関係は、次のように表すことができます。

以前に見た、Shannon エントロピー $H(\mathbf{p})$ と Tsallis エントロピー $S_q(\mathbf{p})$ の関係に似ています。

$$H_q(\mathbf{p}) = \log D_q(\mathbf{p})$$



$$S_q(\mathbf{p}) = \ln_q D_q(\mathbf{p})$$

拡大されたエントロピー概念

Shannon, Boltzmann, Gibbs

$$H = - \sum_i p_i \log p_i$$

Tsallis (q - logarithmic)

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right)$$

Rényi

$$H_q = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_i p_i^q \right)$$

拡大されたエントロピー概念

Shannon, Boltzmann, Gibbs

$$H = - \sum_i p_i \log p_i$$

Hill number

$$D_q = \exp H_q$$

Tsallis (q - logarithmic)

$$S_q = \ln_q D_q$$

Rényi

$$H_q = \log D_q$$

再び、レンスターの多様性の定義について パラメータ q の寄与

ここまで、レンスターの多様性の定義の中に現れる 確率分布 \mathbf{p} と q -パラメータの話をしてきました。

$${}^q D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Z}\mathbf{p})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

ただ、今回のセッションで話したのは、多様性の定義にエントロピー概念を拡大して利用しようとした試みの一部を紹介したにすぎません。

レンスターの多様性の式(単純なモデル $\mathbf{Z} = \mathbf{I}$)での、パラメータ q の寄与を見ておきましょう。

${}^qD^Z(\mathbf{p})$ の q の値に、 $0, 1, 2, \infty$ を入れたものが、どのようなものになるかについて、レンスターは次のように述べています。

- ${}^0D^I(\mathbf{p})$ は種多様性(存在する種の数)、
- ${}^1D^I(\mathbf{p})$ はシャノン・エントロピーの指数関数(Hill数)、
- ${}^2D^I(\mathbf{p})$ はジニ・シン普森指数(無作為に選んだ2個体が同一種である確率の逆数)、
- ${}^\infty D^I(\mathbf{p}) = 1 / \max_i p_i$ はバーガー・パーカー指数(最優占種の優占度を測る指標)である。

要するに、これまで提案されたさまざまな「多様性の指標」を、 q を変化させることで、一つの式でカバーできるのです。

レンスターは、別の論文で、これらをテーブルにまとめています。

TABLE 1. How some familiar diversity indices can be derived from our diversities ${}^qD^Z$.

Diversity measure	Sensitive to rare species		←—————→		Insensitive to rare species		Remarks
	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = \infty$			
Diversity ${}^qD^Z$	compare Faith		$\frac{1}{1 - \text{Rao}}$			compare CCJ	
Naive diversity ${}^qD = {}^qD^I$ (Hill numbers)	species richness	exp(Shannon)	inverse Simpson concentration	$\frac{1}{\text{Berger-Parker}}$		${}^2D, \dots, {}^mD$ give HSG	
Entropy ${}^qH^Z$ (Ricotta-Szeidl)		compare AKB	Rao's quadratic entropy	†			
Naive entropy ${}^qH = {}^qH^I$ (Patil-Taillie-Tsallis)	species richness minus 1	Shannon entropy	Gini-Simpson	†			

https://www.pure.ed.ac.uk/ws/portalfiles/portal/16566744/Measuring_diversity_the_importance_of_species_similarity.pdf

重要なのは、「類似性行列」

ここで紹介した論文のタイトル “Measuring diversity: the importance of species similarity” が示しているように、多様性を測る上で重要なのは、「種の類似性」なのだというのが、レンスターの重要な貢献です。

レンスターの式で重要なのは、「種の類似せ」を表現する「類似性行列」Z だということです。

それについては、次回のセッションで触れたいと思います。

Rényi エントロピー H_q と Tsallis エントロピー S_q の計算について

今回のセッションでは、Rényi エントロピー H_q と Tsallis エントロピー S_q の計算については、ほとんど省略しました。これについては、以前のマルレク「エントロピー論とカテゴリー論」で詳しい計算を紹介しています。

<https://www.marulabo.net/docs/info-entropy5-addendum/>

該当部分は、次の二つの資料です。

pdfからでもYouTubeからでもアクセスできます。

ご利用ください。

● 「Tsallis エントロピー-2 q -*logarithmic* エントロピー」

pdf資料

<https://drive.google.com/file/d/1aihp-ARxkMz4WhvbVuQHaiktahQui7gM/view?usp=sharing>

YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=izTpR22yqg0&list=PLQIrJ0f9gMcPcLv9Xw1F4OnNfO1d9lxxh>

● 「Rényi エントロピーとHill数」

pdf資料

<https://drive.google.com/file/d/1alt-W7jzdps8mL8ldhBVEPjzqWMEWa8a/view?usp=sharing>

YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=SRA8sxyIxyg&list=PLQIrJ0f9gMcPcLv9Xw1F4OnNfO1d9lxxh>

類似度行列とマグニチュード論



類似度行列とマグニチュード論

前回のセッションで、次のレンスターの生物多様性の定義の式を、その三つのパラメータ 確率分布 p と q -パラメータと類似度行列 Z に注目して読み始めました。

ただ、前回は p と q の話で終わっていました。前回は、基本的には、これまで提案されたさまざまな「多様性の指標」を、 q を変化させることで、一つの式でカバーできるのを見てきました。

$${}^q D^Z(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i(\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

レンスターが先の形での生物多様性の定義を初めて提案したのは、“Measuring diversity: the importance of species similarity” というタイトルの論文ででした。

https://www.pure.ed.ac.uk/ws/portalfiles/portal/16566744/Measuring_diversity_the_importance_of_species_similarity.pdf

レンスターの生物多様性の定義のポイントは、種の類似度の重要性への注目です。それは、生物多様性の定義への類似度行列Zの導入として表現されています。

今回のセッションでは、まず、この類似度行列Zが、レンスターの生物多様性の定義の中でどのような役割を果たしているのかを、具体的に見ていきたいと思います。

また、このセッションでは、レンスターの定義が、生物多様性の理論にどのような新しい知見をもたらしたかを見ていきたいと思います。

重要なことは、レンスターの生物多様性の理論と彼のマグニチュード論を結びつけるものが、この生物多様性論への類似度行列Zの導入だと考えられることです。

レンスターのマグニチュード論の最初の論文は、2006年の
“The Euler characteristic of a category”
<https://arxiv.org/pdf/math/0610260> です。

今回のセミナーでも、オイラー標数の紹介をしてきました。そのすぐあとでレンスターのこの2006年の論文を紹介しても良かったのですが(そう予告もしていました)、少し回り道をしています。

認識の内的発展と、その成果の理論的記述の時間軸は、必ずしも一致するわけではありません。

今回のセッションでは、後半でレンスターの生物多様性が、類似度行列 Z のマグニチュードに他ならないことを紹介したいと思います。説明抜きに結論だけ先取りすると、次のことがいえるのです。

Z_B 上の非負の重み付け w および $\{1, \dots, n\}$ の非空部分集合 $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対して、 $p = p(w)$ が成り立つ。

さらに、この状況では、すべての $q \in [0, \infty]$ について、

$${}^q D^Z(\mathbf{p}) = |Z_B|$$

すなわち、生物多様性は、行列 Z_B のマグニチュードに等しい。

類似度行列Zとは何か

n種の生物が存在する環境で、この環境に属する種 i と種 j の類似性を表した $n \times n$ の行列を、この環境の「類似度行列」と言います。レンスターの生物多様性の式では、Z で表されています。

以下で、レンスターが論文の中で取り上げている、具体的な「類似度行列」の例を紹介していきたいと思います。

もっとも単純な類似度行列

最も単純な類似度行列 Z は単位行列 I です。それは、 $n \times n$ の行列 Z の成分のうち、対角線上の線分 Z_{ii} のみが1で(自分は自分に似ていますから)、残りの成分が全て0の行列です。

この類似度行列は、環境内の種には、相互に共通点が全く存在しないことを仮定しています。レンスターは、こうした仮定に基づく多様性のモデルを「**ナイーブ・モデル**」と呼んでいます。それは、従来の多様性モデルでは一般的なものだったとも指摘しています。

「この仮定は粗雑ではあるが、生態学文献で最も普及している多様性指標には暗黙的に含まれている。」

遺传的類似性

DNAシーケンシングのコストが急速に低下したことで、遺传的類似性を(いくつかの方法のいずれかで)測定することがますます一般的になっています。

「したがって、行列の成分 Z_{ij} は種間の遺传的類似性の割合を表すように選択できる。これは、分類学的分類が不明確または不完全な場合でも[26]、微生物群集ではよくあることだが[38]、効果的な戦略である。」

生物進化の時間での類似度

適切な系統樹が与えられた場合、二つの現生種間の類似性を、その種が分岐する時点までの進化時間の割合として定義することができます。

分類学的系統樹に基づいた類似度

より精緻なデータがない場合、分類学的系統樹に基づいて種の類似性を測定できます。例えば、 Z を次のように定義できます。

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ の場合} \\ 0.8 & \text{種 } i \text{ と種 } j \text{ が異なるが同じ属に属する場合、} \\ 0.5 & \text{種 } i \text{ と種 } j \text{ が異なる属に属するが同じ科に属する場合、} \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

距離空間上で類似度を定義する

純粹に数学的な観点では、類似度行列が集合 $\{1, \dots, n\}$ 上の距離関数 d から公式 $Z_{ij} = e^{-d(i,j)}$ によって導かれる場合が重要な事例になります。

この場合、生物多様性は有限距離空間上の確率分布としてモデル化されることになります。「ナイーブ・モデル」は、すべての $i \neq j$ に対して $d(i,j) = \infty$ で定義される距離に対応します。）

「これから定義する多様性指標は、このような分布に対する (Rényi型エントロピーの指数関数としての) 指標と理解できる。」

定義式中の \mathbf{Zp} とは何か？

Zp は行列 Z に列ベクトル p を乗じて得られる列ベクトルで、 $(Zp)_i$ はその i 番目の要素です。

ある種 i について、量

$$(Zp)_i = \sum_j Z_{ij} p_j$$

は種 i と無作為に選ばれた個体との間の期待される類似性を表します。

$${}^q D^Z(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i \boxed{(Z\mathbf{p})_i^q}^{-1} \right)^{1/(1-q)}$$

定義式中の $\sum_i p_i (Zp)_i$ とは何か？

言い換えれば、 $(Zp)_i$ はコミュニティ内における i 番目の種の普通性を測るもので、先の論文では「 i 番目の種に類似した種の相対的豊かさ」と呼ばれていました

したがって、コミュニティ内の個体の平均的な普通性は次のようになります。

$$\sum_i p_i (Zp)_i$$

$${}^q D^Z(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

これはコミュニティの多様性の欠如を測る指標であり、その逆数は多様性の尺度となります。

$$\left(\sum_i p_i (Zp)_i \right)^{-1}$$

これはまさにレンスターの定義式に $q = 2$ を代入したものに他なりません。

$${}^q D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

$${}^2 D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = \left(\sum_i p_i (Zp)_i \right)^{-1}$$

レンスターの式 ${}^q D^Z(p)$ の導出

有限確率分布 $p = (p_1, \dots, p_n)$ に対し、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)$ を定義します。このとき、 $p_i > 0$ ならば $x_i > 0$ です。

実数 $t = 0$ に対して、 p で重み付けされた x の次数 t の冪平均は 次のようになります。

$$M_t(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i x_i^t \right)^{1/t}$$

この定義は、 t の極限を取ることで $t = 0$ および $t = \pm\infty$ に、次のように拡張されます。

$$M_{-\infty}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \min_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} x_i,$$

$$M_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \prod_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} x_i^{p_i},$$

$$M_{\infty}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \max_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} x_i$$

レンスターの式 ${}^q D^Z(p)$ の導出

「さて、前段落の「平均的な普通さ」を考えると、通常の算術平均 ($t = 1$ の場合) を次数 $t = q - 1$ の冪平均で置き換えることができる。」

$$M_t(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i x_i^t \right)^{1/t}$$



$$M_{q-1}(p, Zp) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(p)} p_i (Zp)_i^{q-1} \right)^{1/(q-1)}$$

再び逆数を取ると、まさに定義式 が得られます。

$${}^q D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = 1/M_{q-1}(\mathbf{p}, \mathbf{Zp})$$

$$M_{q-1}(\mathbf{p}, \mathbf{Zp}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(q-1)}$$



$$1/M_{q-1}(\mathbf{p}, \mathbf{Zp}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

$${}^q D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in \text{supp}(\mathbf{p})} p_i (\mathbf{Zp})_i^{q-1} \right)^{1/(1-q)}$$

$${}^qD^Z(\mathbf{p}) = 1/M_{q-1}(\mathbf{p}, \mathbf{Zp})$$

「すべての $p, Z, q \in [0, \infty]$ に対して。したがって、あらゆる場合において、多様性とはコミュニティ内における個体の平均的な平凡さの逆数である。ここで「平均」の解釈は様々である。」

いくつか確認しておくこと

次の議論に進む前に、いくつか確認しておくことがあります。

- 一つは、種の「類似度」が満たす条件についてです。
(これは、以前のセッションで確認しています)
- もう一つは、「多様性プロファイル」という考え方です。

種間の類似性が満たすべき条件

先の論文では類似性を0から1の尺度で測定し、「0は完全な非類似性を、1は種が同一であることを意味する」と定義されています。

したがって、そこでは次の条件が成り立ちます。

$$0 \leq Z_{ij} \leq 1 \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して}) \quad (1)$$

$$Z_{ii} = 1 \quad (\text{すべての } i \text{ に対して})$$

レンスターは、さらに次のように語ります。

「実際、我々の最大化定理ではより弱い仮定のみが必要となる

$$\begin{aligned} 0 < Z_{ij} < 1 & \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して}) & \quad (2) \\ Z_{ii} > 0 & \quad (\text{すべての } i \text{ に対して}) \end{aligned}$$

これに加え、 Z が対称行列であるという要件が求められる。

([26]の付録では、(2)を満たす行列を「関連性行列」と呼んだ。) 「種」や「豊度」の意味が非常に柔軟であるのと同様に、「類似性」の意味もまた柔軟である。」

多様性プロフィール

同じ種リストに対する分布 p と p' について、 q の値が異なれば、 p と p' のどちらがより多様であるかについて異なる判断がなされる可能性があります。

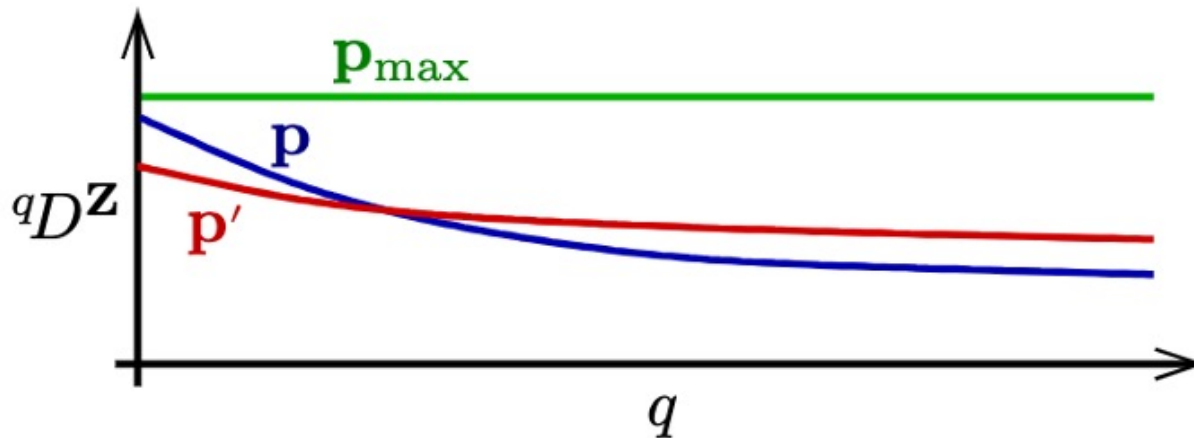
例えば、 $Z = I$ として、以前に見た2つ鳥類の分布を振り返ると、 $q = 0$ とすると環境(a)がより多様となり、「極端な見解」を体現する一方で、 $q = \infty$ とすると環境(b)がより多様となり、反対の極端な見解を体現することになります。

したがって、すべての順序 $q \in [0, \infty]$ について多様性を計ることが最も有益です。 q に対する ${}^q D^Z(p)$ のグラフは、「 p の多様性プロフィール」と呼ばれます。

二つの分布 p と p' は、その多様性プロファイルを同一軸上にプロットすることで比較できます。

一方の曲線が他方を完全に上回っている場合、対応する分布は明らかに多様性が高いことになります。

両者が交差する場合、どちらがより多様であるかの判断は、希少種にどれほどの重要性を置くかによって決まります。



以下、レンスターらの論文 “Maximizing diversity in biology and beyond” <https://arxiv.org/pdf/1512.06314> に基づいて、レンスターの生物多様性の定義の性質を見ていきたいと思っています。

ただ、その証明は割愛しています。定義・定理・補題のナンバリングは論文のままですので、聡明の詳細は論文を参照ください。

${}^q D^Z(p)$ の優れた性質

「多様性指標 ${}^q D^Z(p)$ は多くの優れた性質を持ち、[26]で議論されている。

重要なことに、これらは有効数である: すなわち、すべての q, n について、次の式が成り立つ。

$${}^q D^I(1/n, \dots, 1/n) = n$$

これにより、量 ${}^q D^Z(p)$ に意味が与えられる:

例えば ${}^q D^Z(p) = 32.8$ ならば、そのコミュニティは33種の全く異なる種が等しい割合で構成されるコミュニティとほぼ同等の多様性を持つ。より強い仮定(1)を Z に適用すると、 ${}^q D^Z(p)$ の値は常に1から n の間に収まる。」

「多様性プロファイルは減少している: 希少種への注目度が低下するにつれ、知覚される多様性は低下する。より正確には:

命題4.1

p を $\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布とし、 Z を(2)を満たす $n \times n$ 行列とする。 $(Zp)_i$ がすべての $i \in \text{supp}(p)$ に対して同じ値 K を持つならば、 ${}^qD^Z(p) = 1/K$ がすべての $q \in [0, \infty]$ に対して成立する。そうでない場合、 ${}^qD^Z(p)$ は $q \in [0, \infty]$ において単調減少する。

したがって、あらゆる多様性プロファイルは定数か厳密に減少するかのいずれかである。

次の補題の最初の部分は、多様性プロフィールがまた連続的であることを述べる:」

補題 4.2

(2)を満たす $n \times n$ 行列 Z を固定する。この時、

- i. ${}^q D^Z(\mathbf{p})$ は、各分布 \mathbf{p} について $q \in [0, \infty]$ において連続である;
- ii. ${}^q D^Z(\mathbf{p})$ は、各 $q \in (0, \infty)$ について \mathbf{p} において連続である。

ゼロ豊度の場合、多様性はそれらが全く言及されていない場合と同じである。

これを表現するため、いくつかの表記を導入する：

部分集合 $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ が与えられたとき、 Z の部分行列 $(Z_{ij})_{i,j \in B}$ を Z_B と表記する。

補題 4.3 (欠損種)

Z を (2) を満たす $n \times n$ 行列とする。 $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ とし、 p を $\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布とし、かつ $i \in B$ に対して $p_i = 0$ となるように定める。このとき、 p の B への制限を p' と表記する。この時、すべての $q \in [0, \infty]$ について

$${}^q D^{Z_B}(\mathbf{p}') = {}^q D^Z(\mathbf{p})$$

5 Preparatory lemmas

本稿の残りの部分では、整数 $n \geq 1$ および非負実数からなる $n \times n$ の対称行列 Z を固定する。

この行列の対角要素は正(すなわち、厳密に 0 より大きい)である。また、 $\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布の集合を次のように表記する。

$$\Delta_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, p_1 + \dots + p_n = 1\}$$

主定理を証明するために、まず二つの一見脱線した議論から始める。

Mの重み付けとマグニチュード

任意の行列 M について、 M 上の重み付けとは、 Mw がすべての成分が 1 である列ベクトルとなるような列ベクトル w を指す。

M とその転置行列の両方に少なくとも一つの重み付けが存在するならば、量 $\sum_i w_i$ は M 上の重み付け w の選択に依存しないことが容易に確認できる。この量は M のマグニチュード $|M|$ と呼ばれる [24, Section 1.1]。

M が対称行列である場合 (本稿で扱うケース)、 $|M|$ は M に少なくとも一つの重み付けが存在すれば定義される。 M が可逆行列である場合、 M には唯一つの重み付けが存在し、 $|M|$ は M^{-1} の全要素の和となる。

第二のトピックは命題4.1で示された二分法に関するものである：
あらゆる多様性プロファイルは定数か厳密に減少するかのいずれかである。

ここで、どの分布が定数の多様性プロファイルを持つのか問うてみよう。

この問いは、重み付けとマグニチュードの観点から明確な答えが得られる。それを述べるために、さらにいくつかの定義を行う。

定義 5.1

$\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布 p が不変であるとは、すべての $q, q' \in [0, \infty]$ に対して ${}^q D^Z(p) = {}^{q'} D^Z(p)$ が成り立つことをいう。

$B \subseteq \{1, \dots, n\}$ とし、 $0 \neq w \in [0, \infty)^B$ を非負のベクトルとする。この時、 $\{1, \dots, n\}$ 上に、次のように定義される確率分布 $p(w)$ が存在する

$$(p(w))_i = \begin{cases} w_i / \sum_{j \in B} w_j & \text{if } i \in B \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特に、 B を $\{1, \dots, n\}$ の空でない部分集合とし、 w を $Z_B = (Z_{ij})_{i,j \in B}$ 上の非負の重み付けとする。

このとき $w \neq 0$ なら $p(w)$ は定義され、 $p(w)_i = w_i / |Z_B|$ がすべての $i \in B$ に対して成り立つ。

補題 5.2

$p \in \Delta_n$ に対して、以下の条件は同値である:

- i. p は不変である;
- ii. すべての $i, j \in \text{supp}(p)$ に対して $(Zp)_i = (Zp)_j$ である;
- iii. Z_B 上の非負の重み付け w および $\{1, \dots, n\}$ の非空部分集合 $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対して、 $p = p(w)$ が成り立つ。

さらに、iiiの状況では、すべての $q \in [0, \infty]$ について、

$${}^q D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = |\mathbf{Z}_B|$$

すなわち、生物多様性は、行列 Z_B のマグニチュードに等しい。

本定理よりはるかに弱い結果を証明するが、これは証明における足がかりとなる。

補題 5.3

任意の $q \in (0, 1)$ に対して、 ${}^qD^Z(p)$ を最大化する 不変な分布が存在する。

我々が今証明した結果は、特定の q の値における ${}^qD^Z$ の最大化のみに関わるものであるが、以下の補題により、全ての q に対する最大化に関する結果を同時に導出することが可能となる。

定義 5.4

$\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布が最大化されるのは、すべての $q \in [0, \infty]$ に対して ${}^qD^Z$ を最大化するときである。

補題 5.5

$0 \leq q' \leq q \leq \infty$ に対して、 ${}^{q'}D^Z$ を最大化する不変分布は ${}^qD^Z$ も最大化する。特に、 ${}^0D^Z$ を最大化する不変分布は ${}^qD^Z$ を最大化する。

6 The main theorem

定理 6.1 (主定理)

$\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布が存在し、すべての $q \in [0, \infty]$ に対して ${}^q D^Z$ を最大化する。さらに、最大多様性のsup 集合 $\sup_{p \in \Delta_n} {}^q D^Z(p)$ は $q \in [0, \infty]$ に依存しない。

この定理は次のように理解できる(図2(a))。

視点パラメータ q の各特定の値は、多様性の順序で全ての分布 p の集合をランク付けする。 ${}^q D^Z(p) > {}^q D^Z(p')$ の場合、 p は p' より上位に配置される。 q の異なる値は分布の集合を異なる順序でランク付けする。

しかしながら、あらゆるランキングの頂点に位置する分布 p_{max} が存在する。これが定理6.1の前半部分の内容である。

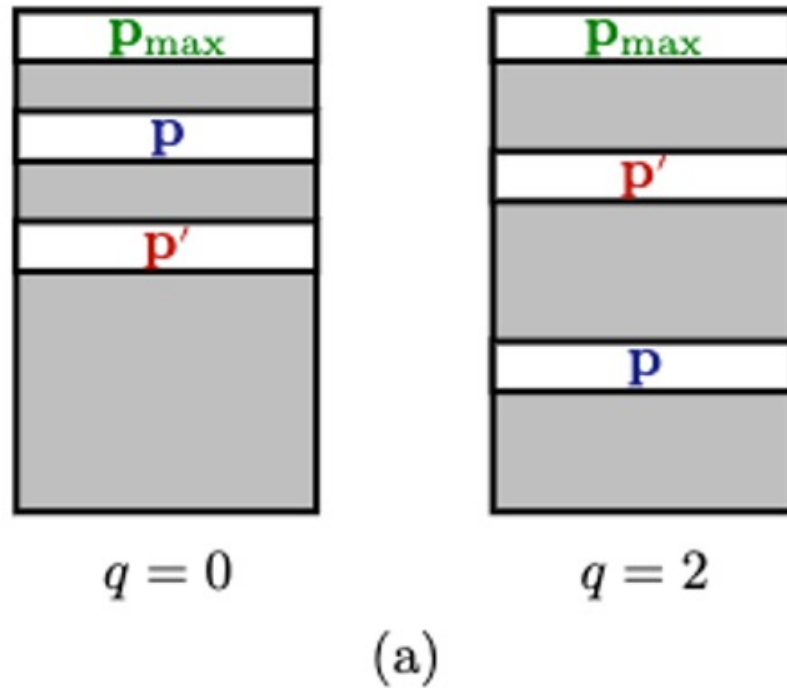
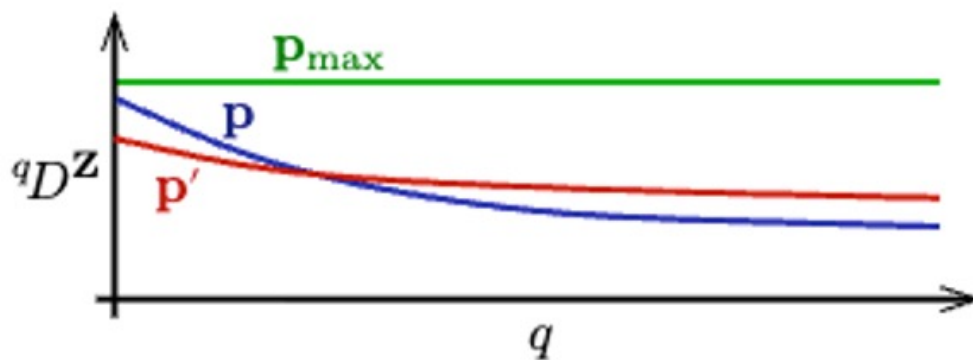


図2: 主定理の可視化: (a) q の異なる値が分布の集合をどのようにランク付けするか、および (b) 多様性プロファイルに基づく可視化。

あるいは、多様性プロファイルを用いて定理を可視化できる(図2(b))。

多様性プロファイルは交差することがあり、異なる q 値が体現する優先順位の違いを反映している。

しかし、少なくとも1つの分布 p_{\max} が存在し、そのプロファイルは他のすべてのプロファイルよりも上方に位置する。さらに、そのプロファイルは一定である。



(b)

定理6.1は直ちに以下を意味する:

補題 6.2

最大化分布はすべて不変である。

この結果は部分的に次のように理解できる。

シャノンエントロピー、より一般的にはレニ・エントロピーのいずれにおいても、最大化する分布は、すべての種 i に対して相対頻度 π を等しく設定することで得られる。

しかし種間の類似性を考慮に入れると、これはもはや成立しない。しかし、近似的に成立するのは、第 i 種に類似した種の相対頻度 $(Z_p)_i$ が全種 i で等しい場合に多様性が最大化されるという事実である。

これは補題6.2と補題5.2(ii)における不変分布の特性から導かれる。

ただし「おおよそ正しい」のは、 $(Z_p)_i = (Z_p)_j$ が保証されるのは i と j が共に p の支持集合に属する場合に限られ、全ての i と j に対してではないためである。

実際、最大化分布の一部または全てが完全な支持集合を持たない可能性があり、この現象は第11節で検討する。

定理6.1の後半は、行列 Z に関連付けられた数値不変量、すなわち最大化分布の定数値が存在する事実を示す。

定義 6.3

Z の最大多様性は

$$D_{\max}(Z) = \sup_{\mathbf{p} \in \Delta_n} {}^q D^Z(\mathbf{p})$$

であり、ここで $q \in [0, \infty]$ である。

次節では $D_{\max}(Z)$ の計算方法を示す。

分布 p が例えば 2 次の多様性を最大化するならば、1 次および ∞ 次の多様性も最大化しなければならないか？

その答えは「Yes」である：

補題 6.4

p を $\{1, \dots, n\}$ 上の確率分布とする。もし p が $(0, \infty]$ 内の何らかの q について ${}^q D^Z$ を最大化するならば、 p は $[0, \infty]$ 内のすべての q について ${}^q D^Z$ を最大化する。

この補題の意義は、あらゆる順序 q における多様性を最大化する分布を求める場合、単一の非零順序における多様性を最大化する分布を見出せば十分であるという点にある。

補題6.4における $q > 0$ という仮定は削除できない。

実際、 $Z = I$ とすると、 $0DI(p)$ は種多様性 (p の台集合のカーディナリティ) であり、これは全サポートを持つ任意の分布 p によって最大化される。

一方、 $1DI(p)$ はシャノンエントロピーの指数関数であり、 p が一様分布である場合にのみ最大化される。



