
マグニチュード論の展開

セミナーのタイトルを変更しました。

セミナーのタイトルを、「Bradleyのマグニチュード論」から「マグニチュード論の展開」に変更しました。すみません。

当初、今月は、Tai−Danae Bradleyの論文"The Magnitude of Categories of Texts Enriched by Language Models" https://arxiv.org/pdf/2501.06662 を素材としてで、次のような構成を考えていました。

「Bradleyのマグニチュード論」

Part 1　マグニチュード論の展開

Part 2　LLMモデルの拡大　　（論文の第二セクション）

Part 3　LLMとマグニチュード論（論文の第三セクション）

今回のセミナーは、予告した内容の Part 1 を、独立したセミナーにしたものになります。

次回のセミナーは、今回入り口の前で止まってしまった「Bradleyのマグニチュード論」をキチンと紹介したいと思っています。新しいURLで「Bradleyのマグニチュード論」のまとめページを作りました。（Part 1 だけで未完に終わったページをうつしただけです。）

Agenda

マグニチュード論の展開

Part 1　マグニチュード論の登場

Part 2　 enriched カテゴリー論とマグニチュード

Part 3　Lawvereのenriched カテゴリー論

Part 1

マグニチュード論の登場

マグニチュード論の登場

前回のセミナーは、現代のマグニチュード論の前身ともいうべき数学的対象の「大きさ」についての理論、カントールの「無限の大きさ」や、オイラーの「変わらぬ大きさ － 不変量」の理論を見てきました。

また、20世紀のシャニュエルの「オイラー特性数」の研究や、レンスターの「生物多様性」の理論も「大きさ」の理論として取り上げてきました。

ただ、それらの多様な理論は、まだ「マグニチュード」という概念に辿り着いていたわけではありません。このセミナーでは、先のセミナーを受けて、21世紀の「マグニチュード」論の登場とその発展を見ていきたいと思います。

ゼータ関数とメビウス関数

ただ、マグニチュード論の理論的起源は、それにとどまりません。マグニチュード論のテキストの中でしばしば「ゼータ関数」や「メビウス反転」という言葉が登場します。

それは、古典的・数論的な「リーマンのζ関数」と「メビウスのμ関数」に起源を持っています。

さらに遡って、両者の関係はオイラーの「ゼータ関数の無限積表示」を用いると明らかになるという話をします。またしてもオイラーが出てきます。（ただ、今回紹介する計算は初等的なものです。）

マグニチュード論の、深い数学的背景を知るために、こうした繋がりについて述べてみたいと思います。

カテゴリーのオイラー特性数 – 2006年

このセクションでは、現代のマグニチュード論の最初の論文と見なされている Leinsterの2006年の論文「カテゴリーのオイラー特性数」“**The Euler characteristic of a category**” を紹介します。

ただ、この論文ではマグニチュードという言葉は使われてはおらず、それは「カテゴリーのオイラー特性数」として扱われています。

前回のセミナーで見てきたシャニュエルのオイラー特性数の研究が、現代のマグニチュード論につながっていることがわかると思います。

距離空間のマグニチュード －－ 2011年

このセクションでは、先に見た2006年の論文とは異なり、「マグニチュード」を論文タイトルに掲げた、Leinsterの2011年の論文を紹介します。今回のセミナーは、この論文の第一章の構成に従っています。

The magnitude of metric spaces

https://arxiv.org/abs/1012.5857

この論文で最初に導入されているのが「行列のマグニチュード」です。ここで導入される行列の「重み付け」とその双対の「co重み付け」の概念は、マグニチュード論にとって基本的なものです。

それは前回のセミナーのLeinsterの「生物多様性」の定義でも出てきていたものです。

Part 1 Agenda

マグニチュード論の登場

- ゼータ関数とメビウス関数
- カテゴリーのオイラー特性数 −− 2006年
- 距離空間のマグニチュード −− 2011年


ゼータ関数とメビウス関数

ゼータ関数とメビウス関数

今回のセッションでは、古典的数論の世界での、リーマンのゼータ関数$\zeta(n)$とメビウスのメビウス関数$\mu(n)$の関係を見ていきたいと思います。

目標にするのは、両者の間に次のような関係があることを示すことです。

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

リーマンのゼータ関数

メビウスのメビウス関数

$$\frac{1}{L(\chi, s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}$$

Dirichlet L-function

Dirichlet character χ(n)

マグニチュード論と
ゼータ関数とメビウス関数

残念ながら、古典的数論的なゼータ関数とメビウス関数の理論と現代のマグニチュード論との関係は、直観的に明らかなわけではありません。レンスターは次のように理論の流れを説明しています。

Notions of Möbius inversion
https://arxiv.org/pdf/1201.0413

Number-theoretic Möbius inversion
(Möbius 1832)

↓

Möbius inversion for posets
(Rota 1964, et al.)

↙ ↘

Fine Möbius inversion for categories
(Leroux et al. 1975, '80; Haigh 1980)

Coarse Möbius inversion for categories
(Haigh 1980; Leinster 2008)

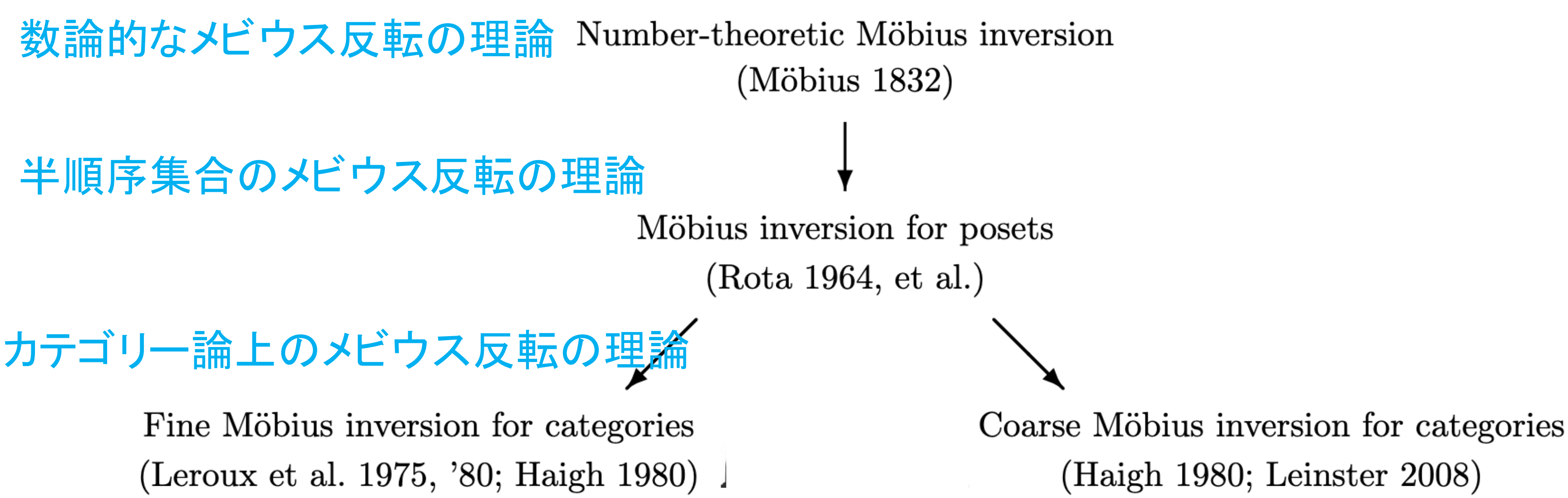
1830年代の数論的なメビウス反転の理論は、

1960年代Rotaによって半順序集合のメビウス反転の理論として発展した。

1970-80年代、LerouxやHaighによって、カテゴリー論上のメビウス反転の理論が展開され、

さらに理論は進展した。

この論文は、最近の二つの理論に橋をかけることを目的としている。



メビウス反転公式の一般化

https://ja.wikipedia.org/wiki/メビウスの反転公式

「Weisner, Hall, Rota の貢献」から

一般化メビウス反転公式は、当初はワイズナー（1935）とフィリップ・ホール（1936）が独立に与えたものである。両者とも群論の問題から着想を得ている。両者とも、この公式が組み合わせ数学と関連することに気づいていたわけでも、メビウス関数の理論を発展させたわけでもなかったようである。メビウス関数の基礎的論文において、ロタは組み合わせ数学におけるこの理論の重要性を示し、深い考察を与えた。彼は包除原理、古典的な数論的メビウス反転、彩色問題、ネットワーク上の流れといった事柄間の関連性に言及している。それ以降ロタの強い影響力により、メビウス反転の理論とそれに関連する事柄は、組み合わせ数学で活発に研究される領域となった。

マグニチュード関連論文での
ゼータ関数とメビウス関数の利用

先に紹介したレンスターの論文は、2012年のもので、彼がマグニチュード論の構築に取り掛かり始めた時期のものです。その頃から、彼がマグニチュード論とゼータ関数とメビウス関数との関連について意識していたことがわかります。

といっても、まだまだ語るべきことは多数あって、僕が説明すべき空白が埋められたわけではないのですが、一つ留意してほしいことがあります。

それは、レンスターにしろBradleyにしろ、マグニチュードに関連した論文に、ゼータ関数やメビウス関数という言葉が、普通に登場することです。これらは、有名なリーマンのゼータ関数やメビウスの数論的反転公式とどこかで繋がっているのです。

たとえば、前回の行列のマグニチュードを扱ったセッションで、レンスターの次のような式を紹介しました。

$$|\zeta| = \sum_{i,j \in I} \zeta^{-1}(j,i)$$

ここでは、一般の正方行列をゼータζで表しています。

この式の右辺には、ζ^{-1}が現れるのですが、今回冒頭で紹介した、ゼータ関数とメビウス関数の関係式

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

は、$\zeta^{-1}(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$ に他なりません。

ま、一方は正方行列ゼータζ一般の逆行列で、他方は、リーマン・ゼータの逆数なのですが、いろいろ気になります。

今回のセミナーの主題であるBradleyの論文には、メビウス関数について多数の言及があります。

For instance, if a finite poset has top and bottom elements, then its magnitude can be computed by evaluating its Möbius function (defined in Section 3) at those extremal elements [Rot64], [Sta11, Proposition 3.8.5]. And in the context of metric spaces, *weighting vectors* [Lei13]—such as $(\sum_y \mu(x, y))_x$ when the Möbius coefficients μ exist—effectively detect the boundary of certain subsets of Euclidean space, an insight with recent applications in machine learning [BKD+21, ADBOR24]; see also [Wil09].

Definition 3.3 A patch-finite category $\mathbf{A}$ has **coarse Möbius inversion** if $\zeta_{\mathbf{A}} \in k_{\mathrm{p}}\mathbf{A}$ is invertible. In that case, its **coarse Möbius function** is $\mu_{\mathbf{A}} = \zeta_{\mathbf{A}}^{-1} \in k_{\mathrm{p}}\mathbf{A}$.

Theorem 3.5 *Let* $\mathbf{A}$ *be a finite category with coarse Möbius inversion over* k. *Let* $a, b \in \mathbf{A}$. *Then* $\zeta_{\mathbf{A}}(a, b) = 0 \Rightarrow \mu_{\mathbf{A}}(a, b) = 0$.

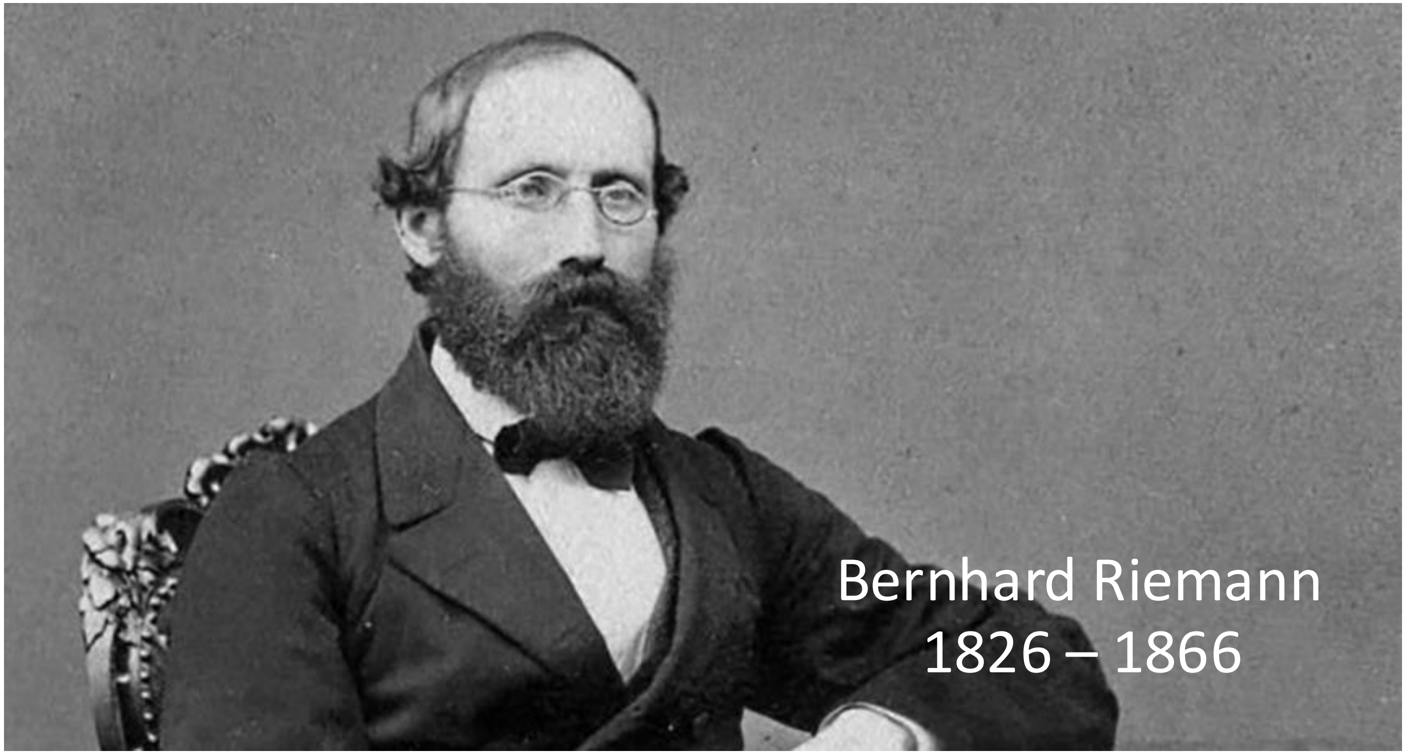
Proof In the terminology of Appendix A, Lemma 3.4 states that $\zeta_{\mathbf{A}}$ is transitive. The result follows from Theorem A.4 on inverse matrices. □

Corollary 3.6 *Let* $\mathbf{A}$ *be a finite category. The coarse zeta function of* $\mathbf{A}$ *is invertible in* $k_{\mathrm{p}}\mathbf{A}$ *if and only if it is invertible in* $k_{\mathrm{c}}\mathbf{A}$. □

こちらについては、おいおい説明していく予定です。

Euler–Riemann ζ-function

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

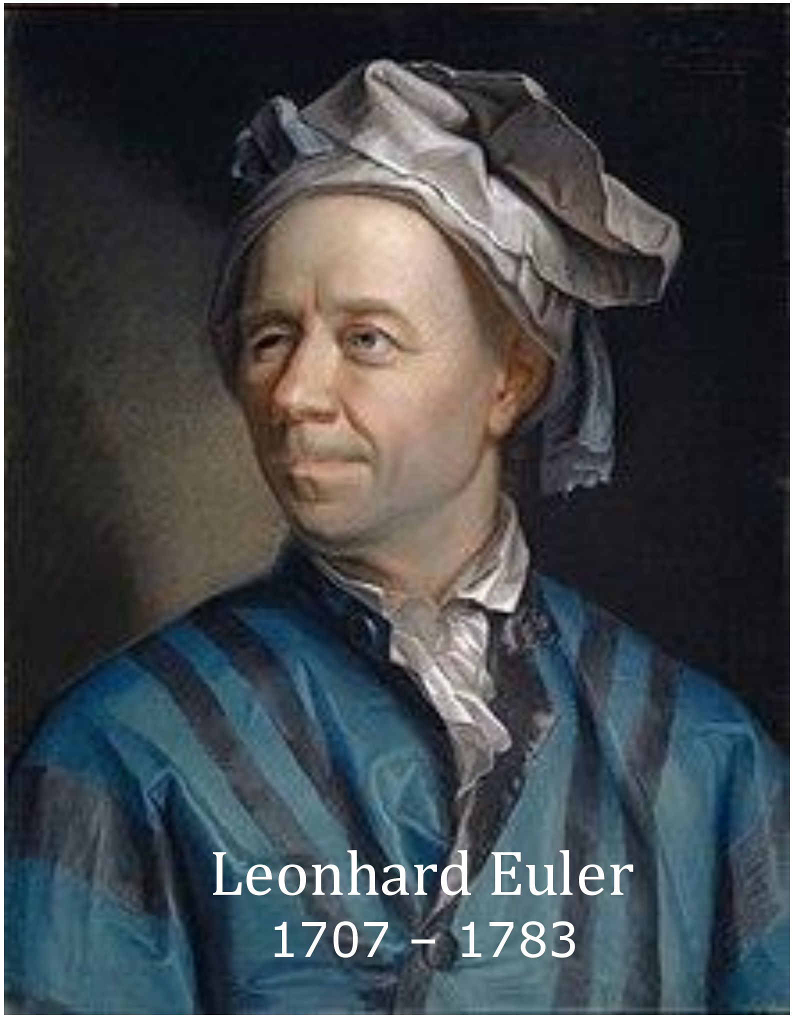


Eulerが考えたこと -- Euler product

1737年、Eulerは次の式が成り立つことを証明しました。

$$\zeta(s) = \sum_{n} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ prime} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

これを、$\zeta(s)$のEuler product表示といいます。



Euler product formulaの導出

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{14^s} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \cdots$$

分母が2で割れる項は、取り除かれている。

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\cdots$$

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{27^s}+\frac{1}{33^s}+\frac{1}{39^s}+\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{17^s}+\cdots$$

分母が2と3で割れる項が、取り除かれている。

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{17^s}+\cdots$$

$$\frac{1}{5^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55^s}+\frac{1}{85^s}+\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{17^s}+\cdots$$

分母が2と3と5で割れる項が、取り除かれている。

$$\cdots\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\cdots}$$

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prime} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\ prime} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

メビウス関数の定義

メビウス関数μ(*n*)は、次のように定義されます。

- $\mu(n) = 0$　（*n* が1以外の平方数で割り切れる時）
- $\mu(1) = 1$
- $\mu(n) = (-1)^k$（*n* が相異なる *k* 個の素因数に分解される時）
  - $\mu(n) = 1$（*n* が相異なる 偶数個の素因数に分解される時）
  - $\mu(n) = -1$（*n* が相異なる 奇数個の素因数に分解される時）

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_3^s}\right)\cdots$$

$$=1-\underbrace{\left(\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_2^s}+\frac{1}{p_3^s}+\ldots\right)}_{k=1}+\underbrace{\left(\frac{1}{p_1^s\,p_2^s}+\frac{1}{p_1^s\,p_3^s}+\ldots+\frac{1}{p_2^s\,p_3^s}+\frac{1}{p_2^s\,p_4^s}+\ldots\right)}_{k=2}\underbrace{-\ldots}_{k=3}$$

$$=1-\sum_{0<i}\frac{1}{p_i^s}+\sum_{0<i<j}\frac{1}{p_i^s\,p_j^s}-\sum_{0<i<j<k}\frac{1}{p_i^s\,p_j^s\,p_k^s}+\ldots$$

分母は、k湖の異なる素数の積のs乗

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

nがそれ以外の形の因数を持てば、
それは平方数で割れるということで
μ(n)=0となって、その項は和に
寄与しない・

メビウス関数の基本的性質

メビウス関数は乗法的関数である。すなわち、互いに素な m, n に対して、$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ となる。

また、m, n が互いに素でなければ、$\mu(mn) = 0$である。

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$$

$\mu(n)$ は 1 の原始 n 乗根の和である。

$$\mu(n) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ \gcd(k,n)=1}} \exp(2\pi ki/n)$$

メビウスの反転公式

関数 f(n), g(n) について、次の 2 つの命題は同値である。

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$


カテゴリーのオイラー標数 – 2006年

カテゴリーのオイラー特性数

今回のセッションでは、2006年のLeinsterの論文 “The Euler characteristic of a category” の概要の紹介をしたいと思います。https://arxiv.org/abs/math/0610260

この論文には、Magnitude という言葉は登場しません。
それにもかかわらず、この論文は、現代のマグニチュード論の最初の論文と見なされています。

ここで彼が主題とした「あるカテゴリーのオイラー特性数」を考えることが、「そのカテゴリーのマグニチュード」を考えることに等しいことは、その後の理論展開を見れば明らかだからです。

The Euler characteristic of a category

Tom Leinster*

Abstract

The Euler characteristic of a finite category is defined and shown to be compatible with Euler characteristics of other types of object, including orbifolds. A formula for the cardinality of the colimit of a diagram of sets is proved, generalizing the classical inclusion-exclusion formula. Both rest on a generalization of Möbius–Rota inversion from posets to categories.

Contents

Introduction 1

1 Möbius inversion 4

2 Euler characteristic 10

3 The cardinality of a colimit 16

4 Relations with Rota's theory 18

5 Appendix: category theory 21

References 23

マグニチュード論の背景と展望を知る

この論文の「はじめに」の部分を、紹介しようと思います。
マグニチュード論が、どのような理論的関心を背景として、何を明らかにしようとして生まれてきたのかがよくわかるように思います。

先のセッションで見た、「ゼータ関数とメビウス関数」やその発展として「Rotaの理論」はもちろんですが、「オイラー特性数」をどのように捉えるのかという問題意識が大きなテーマとして意識されているのがわかります。

（これまで、「オイラー標数」という訳語を使ってきましたが、これから「オイラー特性数」に変えようかと思っています。）

オイラー特性数の基本的性格

「オイラー特性数は最初に「頂点数から辺数を引いたものに面数を加えたもの」として学び、後にホモロジー群のランクの交替和として学ぶ。

しかしオイラー特性数は、過去50年間にますます明らかにされてきたように、これらの定義が示す以上に根本的なものである。

それは基数や測度に近い性質を持つ。

より正確には、それは対象に関連する基本的な無次元量である。」

3次元の多面体の頂点と辺と面の数

オイラーは、3次元の空間上の図形を構成する基本的な要素として、「点」と「線」と「面」に注目します。

彼は、点（頂点）と線（辺）と面から構成される3次元の(凸な)多面体について、頂点の数をｖ、辺の数をｅ、面の数をｆとすると、次の関係が成り立つことに気づきました。

$$v - e + f = 2$$

次の「プラトンの正多面体」について、この関係が成り立つこと確かめてください。

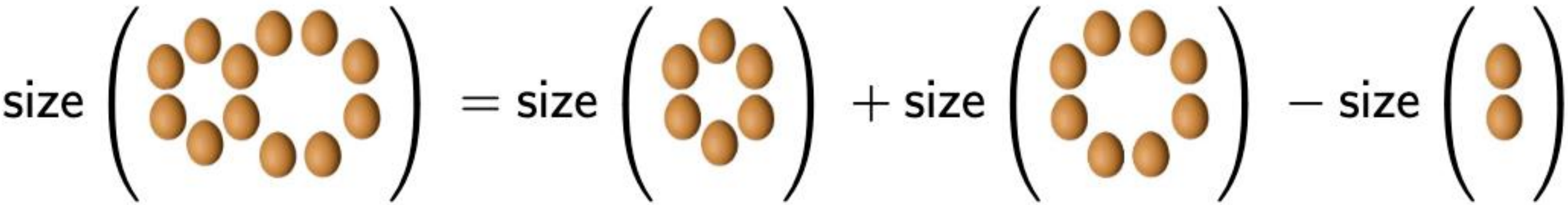
この $v - e + f = 2$ を(凸)多面体の「オイラー標数」と言います。

基数とオイラー特性数

「有限集合はオイラー特性数にとって最も単純な文脈を提供する。そして有限集合に量を割り当てる根本的な方法は、その要素を数えることである。

実際、位相空間のオイラー特性数は、基数の一般化として有用に考えることができる。例えば、和集合や積集合に関して同じ法則に従う。」

和集合と積集合のサイズ



$$\mathrm{size}(A \cup B) = \mathrm{size}(A) + \mathrm{size}(B) - \mathrm{size}(A \cap B)$$

$$\mathrm{size}(A \times B) = \mathrm{size}(A) \times \mathrm{size}(B)$$

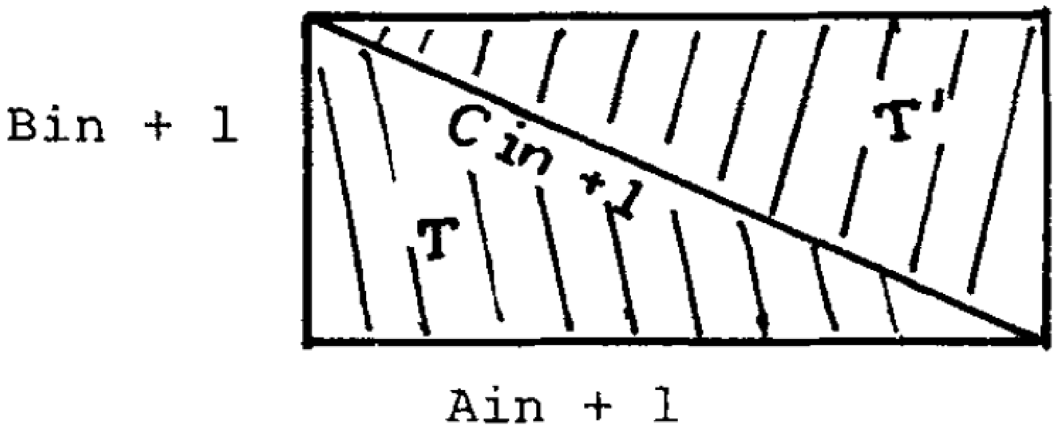
測度とオイラー特性数

「さらに別の例がこの点を補強する。

$\mathbb{R}^n$の部分集合がコンパクトな凸部分集合の有限和であるとき、それは多凸(polyconvex)である。V_nを、$\mathbb{R}^n$のpolyconvexな部分集合上で定義され、ユークリッド変換で不変な有限加法的測度のベクトル空間とする。Hadwigerの定理[KR]は、$\dim V_n = n+1$を述べる。([Sc2]も参照のこと)

自然な基底は、$d \in \{0, \ldots, n\}$ごとに1つのd次元測度から成る。例えば$n=2$の場合、{オイラー特性量、周長、面積}がそれにあたる。したがって、スカラー乗を除けば、オイラー特性量はpolyconvex集合上の唯一の無次元測度である。」

シャニュエルの直角三角形のサイズの計算



$$\mathrm{size}(T \cup T') = \mathrm{size}(T) + \mathrm{size}(T') - \mathrm{size}(T \cap T')$$

$$(Ain + 1)\,(Bin + 1) = 2\,\mathrm{size}(T) - (Cin + 1)$$

$$\mathrm{size}(T) = AB/2\, in^2 + (A+B+C)/2\ in + 1$$

2次元の
面積

1次元の長さ
＝周囲長の1/2

0次元の
オイラーの標数

オイラー特性数の新しい定義と理解の重要性
有限カテゴリーでの展開

「シャニュエル[Sc1]は、他の文脈においてオイラー特性数がその本質を明瞭に示す形で定義可能であることを示した。彼は特定の多面体カテゴリーにおいて、オイラー特性数が単純な普遍性によって決定されることを証明した。

これら全てが、新たな文脈におけるオイラー特性数の定義と理解の重要性を明らかにしている。ここでは有限カテゴリーに対してこれを実施する。」

分類空間とオイラー特性数

「他の位相不変量と同様に、分類空間関手を用いて空間からカテゴリーへ定義を単純に移すことを想定できる。すなわち、与えられたカテゴリー $\mathbb{A}$ に対して、その分類空間 $B\mathbb{A}$ のオイラー特性数として $\chi(\mathbb{A})$ を定義する。この方法の問題点は、$B\mathbb{A}$のオイラー特性関数が常に定義されるとは限らないことである。

以下に、後者が存在する場合に位相的オイラー特性関数と一致し、かつそれが存在しない様々な状況でも有効となる、カテゴリーのオイラー特性関数の定義を示す。これは有理数であり、必ずしも整数ではない。

（残念ながら、「分類空間」については、これまでのセッションでは説明していません。）

カテゴリーのオイラー特性数の定義

「定義の一形態を非常に簡潔に与えることができる。

有限カテゴリー$\mathbb{A}$ を考え、その対象を $a_1, \ldots, a_n$ と全順序付けする。Z を (i, j) 成分が a_i から a_j への射の数を表す行列とする。

$M = Z^{-1}$と定義する（逆行列が存在すると仮定する）。

すると $\chi(\mathbb{A})$ は M の要素の和となる。

もちろん、この定義が正しいことを読者に納得させる必要がある。」

Rota反転の一般化

「本研究の基盤は、メビウス・Rota反転(§1)の一般化である。

Rotaは半順序集合に対するメビウス逆変換を確立した[R]。
我々はこれをカテゴリー論へ拡張する。(半順序集合は、各射集合が最大1要素を持つカテゴリーとして扱う:オブジェクトは半順序集合の要素であり、$a \dashrightarrow b$ という射は $a \leq b$ の場合にのみ存在する。)

これにより、とりわけ「表現公式」が導かれる:表現可能なもののの和であることが既知の任意の関手に対し、Rotaの論文の精神に沿って、列挙問題を解決するためにこの変換を用いることができる。」

「しかしながら、この一般化されたメビウス反転の主たる応用は、カテゴリーのオイラー特性数に関する理論にある（§2）。

実際には、先ほど示した定義とは異なる定義を用いる。
この定義は、Zが可逆である場合には上記の定義と一致するが、より広範なカテゴリーのクラスに対して有効である。これは、カテゴリーのオブジェクトの「重み」という概念に依存する。

この定義の正当性は二つの方法で示される:

名称から予想される性質（積、ファイブレーションなどに対する振る舞い）を備えていること、

および他の構造（群カテゴリー 、グラフ、位相空間、オービフォールド）のオイラー特性との互換性を示すことである。」

今後の課題

「究極的には、Schanuelが多面体に対して行ったように[Sc1]、カテゴリーのオイラー特性が普遍的性質によって記述されることが望ましい。そのためには、本稿の制約を緩和する必要があるかもしれない。

本稿では簡略化のため、対象となるカテゴリーは有限であること、係数は有理数のrig（semi ring）に属することを要求している。

以下のように「このカテゴリーはオイラー特性数（有理数系において）を持つか？」と問う代わりに、「このカテゴリーのオイラー特性数はどのリグに属するか？」と問うべきかもしれない。

ただし、本稿ではこの点については追求しない。


距離空間のマグニチュード －－ 2011年

距離空間のマグニチュード －－ 2011年

このセクションでは、「マグニチュード」を論文タイトルに掲げた、Leinsterの2011年の論文を紹介します。

The magnitude of metric spaces

https://arxiv.org/abs/1012.5857

ここでは、enrich化されたカテゴリー論の枠組みで、マグニチュードがどのように定義されるかをみていきたいと思います。

マグニチュード論について振り返るべき基本的な論文の一つだと思います。 この論文の目次を見ておきましょう。

Introduction

1 Enriched categories
1.1 The magnitude of a matrix . . . .
1.2 Background on enriched categories . . . .
1.3 The magnitude of an enriched category . . . .
1.4 Properties . . . .

2 Finite metric spaces
2.1 The magnitude of a finite metric space . . . .
2.2 Magnitude functions . . . .
2.3 Constructions . . . .
2.4 Positive definite spaces . . . .
2.5 Subsets of Euclidean space . . . .

3 Compact metric spaces
3.1 The magnitude of a compact metric space . . . .
3.2 Subsets of the real line . . . .
3.3 Background on integral geometry . . . .
3.4 Subsets of ℓ_1^N . . . .
3.5 Subsets of Euclidean space . . . .

References

Introduction

1 Enriched categories
1.1 The magnitude of a matrix . . . .
1.2 Background on enriched categories . . . .
1.3 The magnitude of an enriched category . . . .
1.4 Properties . . . .

2 Finite metric spaces
2.1 The magnitude of a finite metric space . . . .
2.2 Magnitude functions . . . .
2.3 Constructions . . . .
2.4 Positive definite spaces . . . .
2.5 Subsets of Euclidean space . . . .

3 Compact metric spaces
3.1 The magnitude of a compact metric space . . . .
3.2 Subsets of the real line . . . .
3.3 Background on integral geometry . . . .
3.4 Subsets of ℓ_1^N . . . .
3.5 Subsets of Euclidean space . . . .

References

Introduction

1 Enriched categories

1.1 The magnitude of a matrix 行列のマグニチュード

1.2 Background on enriched categories enriched category論

1.3 The magnitude of an enriched category enriched categoryのマグニチュード

1.4 Properties

2 Finite metric spaces

2.1 The magnitude of a finite metric space

2.2 Magnitude functions

2.3 Constructions

2.4 Positive definite spaces

2.5 Subsets of Euclidean space

3 Compact metric spaces

3.1 The magnitude of a compact metric space

3.2 Subsets of the real line

3.3 Background on integral geometry

3.4 Subsets of ℓ_1^N

3.5 Subsets of Euclidean space

References

この論文の主要なテーマは、Magnitude of Metric Spaces であって、Magnitude of an Enriched Category ではないことに、留意してください。

残念ながら、マグニチュード論の研究フォーカスのこの変化については、今回のセミナーでは、あまり触れることはできません。

次回のセッション、「Lawvereの「一般化された距離空間」」で、別の角度から議論したいと思います。

今回の論文で示された次の図式は、示唆的なものだと思います・

$$\boxed{(\text{categories}) \subset (\text{enriched categories}) \supset (\text{metric spaces})}$$

セッションの課題

今回のセッションでは、enrich化されたカテゴリー論の枠組みの元で、「enrich化されたカテゴリーのマグニチュード」がどのように定義されるかを、Leinsterの論文に沿ってみていこうと思います。

このセッションで扱うのは、この論文の次の部分です。

- 行列のマグニチュード

残りの次の部分は、次のセクションで扱います。

- enriched categoryについて
- enriched categoryのマグニチュード

生物多様性の定義と行列のマグニチュード

先のセミナーで、生物多様性のレンスターの定義は、「類似度行列」Zのマグニチュードと等しいことを見てきました。

Z_B 上の非負の重み付け w および $\{1, \dots, n\}$ の非空部分集合 $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対して、$p = p(w)$ が成り立つ。

さらに、この状況では、すべてのq ∈ [0, ∞]について、

$$ {}^{q}D^{\mathbf{Z}}(\mathbf{p}) = |\mathbf{Z}_B| $$

すなわち、生物多様性は、行列 Z_B のマグニチュードに等しい。

ここでは、「類似度行列」の定義は、振り返りませんが、類似度行列からそのマグニチュードをどう計算するかについては、簡単に説明していました。

「任意の行列 M について、M 上の重み付けとは、Mw がすべての成分が 1 である列ベクトルとなるような列ベクトル w を指す。

M とその転置行列の両方に少なくとも一つの重み付けが存在するならば、量 $\sum_{\mathrm{i}} w_i$ は M 上の重み付け w の選択に依存しないことが容易に確認できる。この量は 行列M のマグニチュード |M| と呼ばれる 。」

行列のマグニチュード

今回のセッションでは、この定義をより一般の行列のマグニチュードに拡張することを考えていきます。

定義・補題等のナンバリングは、元論文のものをそのまま残してあります。

行列のマグニチュードは、グラフのマグニチュードや、カテゴリーのマグニチュード、距離空間のマグニチュード等々、さまざまなマグニチュードを具体的に計算する上で、その最も基本的な基礎になります。

行列の要素が取りうる値を非負の実数からrig kに拡大する

rig （またはsemi ring）とは、負の要素を持たないringのことです。rigは、シャニュエルの議論の時にも登場しました。

rig kは、和について可換なモノイド構造（+, 0）を持ち、積についてはモノイド構造（･, 1）を備えています。また、和と積は、a(b+c)=ab+acという分配律を満たします。

以下の議論では、行列の要素は、このrig kに値を取ることにします。

抽象的な有限集合によって
インデックス付けされている行列を考える

rig k上に定義された行列を考える際、行と列が抽象的な有限集合によってインデックス付けされていると考えると便利です。

有限集合IとJの場合、rig k上のI × J行列は関数I × J → kで定義され、通常の行列演算を実行できます、

たとえば、H × I 行列にI × J行列を掛けて H × J 行列をうることができます。恒等式行列はクロネッカー δ です。I × J行列ζにはJ × I行列の転置行列ζ^*があります。

重み付けとco重み付け

有限集合 I に対して、$u_I \in k^I$ は、すべての $i \in I$ に対て $u_I(i) = 1$ となる列ベクトルとして表記する。

定義 1.1.1 rig k 上の $I \times J$ 行列 ζ を考える。

ζ 上の**重み付け**とは、列ベクトル$w \in k^J$ で、$\zeta w = u_I$ を満たすものである。

ζ 上の**co重み付け**とは、行ベクトル $v \in k^I$ で、$v\zeta = u_J^*$ を満たすものである。

行列はゼロ個、一つ、あるいは複数の(co)重み付けを持つ場合があるが、それらの自由度は以下の基本的事実によって制約される。

行列の重みづけ

「任意の行列 M について、M 上の重み付けとは、Mw がすべての成分が 1 である列ベクトルとなるような列ベクトル w を指す。」

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

すべての成分が
1 である列ベクトル
$u_I \in k^I$

重みベクトル w

$$|M| = \sum_i w_i$$

補題 1.1.2 ζを ある rig k 上の I × J 行列 とする、
w をζ上の 重み付け とし、v をζ上の co重み付け とする。この時

$$\sum_{j\in J} w(j) = \sum_{i\in I} v(i)$$

証明

$$\sum_{j\in J} w(j) = u_J^* w = v\zeta w = v u_I = \sum_{i\in I} v(i)$$

$$(1,1,1,\ldots 1) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$u_J^* = v\zeta$$

重み付け w の要素 $w(j)$ を**重み**と呼び、同様にv(i) を**co重み**と呼ぶ。先の補題は、行列 ζ が重み付けとco重み付けの両方を持つ場合、総重みは選択された重み付けに依存しないことを示唆する。これにより以下の定義が可能となる。

定義 1.1.3 rig k 上の行列 ζ は、少なくとも一つの重み付けおよび少なくとも一つのco重み付けを持つ場合、**magnitude**を持つ。

magnitudeは任意の重み付け w および ζ 上のco重み付け v に対して次のように表される。

$$|\zeta| = \sum_{j \in J} w(j) = \sum_{i \in I} v(i) \in k$$

正方行列 ζ の場合

我々は正方行列 ζ を扱う。

ζ が可逆であれば、一意な重み付けと一意なco重み付けが存在する。（逆に、k が体であれば、一意な重み付けまたはco重み付けは可逆性を意味する。）

この場合、重み（weight）はζ^{-1}の行の和であり、co重み（coweight）は列の和である。

補題1.1.2はこの場合に自明であり、そのmagnitudeには簡単な公式が存在する:

可逆な正方行列のマグニチュード

補題 1.1.3 ζを rig k上の可逆な I × I 行列とする。
ζは $w(j) = \sum_i \zeta^{-1}(\mathrm{j}, \mathrm{i})\ \ (\mathrm{j} \in \mathrm{I})$で与えられる一意的な重み付けwと、それとdualな式で与えられる一意な重み付けvを持つ。
そのマグニチュードは次の式で与えられる。

$$|\zeta| = \sum_{i,j \in I} \zeta^{-1}(j, i)$$

多くの場合、行列ζは対称であり、その場合、重み付けとco重み付けは本質的に同じである。

Part 2

enriched カテゴリー論とマグニチュード

enriched カテゴリー論とマグニチュード

このセクションでは、Leinsterのマグニチュード論の展開にとっても、また、今回のセミナーの本来のターゲットであったBradleyのマグニチュード論にとっても、両者にとって重要な飛躍である「enrichedカテゴリーのマグニチュード」の紹介です。

先に見たLeinsterの2011年の論文を彼自身がblogにした **“The Magnitude of an Enriched Category”**に依拠しています。。
https://golem.ph.utexas.edu/category/2011/06/the_magnitude_of_an_enriched_c.html

重要なことは、マグニチュードの理解には、こうしたカテゴリー論的なアプローチが不可欠だということです。

カテゴリー論の利用では、LLMの意味理解の構造の解明にカテゴリー論のco−presheafの概念を導入したBradleyの研究は画期的なものだったと思います。

その点では、Leinsterのマグニチュード論とBradleyの新しいLLM論は、理論的土台の多くを共有しています。別のセミナーで紹介する予定のCoeckeらのQNLP（量子コンピュータを使った言語理解の取り組み）も同じ土台に立っています。

カテゴリー論という共通の武器を得て、さまざまな分野で同時多発的に進行する研究の展開は、21世紀の科学・技術の発展の大きな特徴だと僕は考えています。

このセクションの前半は、「enrichedカテゴリー論」の基本的な紹介に当てられています。ここでの「ダイアルのたとえ」は、とてもわかりやすいものだと思います。

後半では、enrich化されたカテゴリーのマグニチュードをどのように定義できるのかという話をしています。

Part 2 Agenda

enriched カテゴリー論とマグニチュード

- enrich化されたカテゴリー
- enrich化されたカテゴリーのマグニチュード


enrich化されたカテゴリー

enrich化されたカテゴリーとマグニチュード論

今回と次回のセッションでは、2011年のLeinsterのblog

”The Magnitude of an Enriched Category”

https://golem.ph.utexas.edu/category/2011/06/the_magnitude_of_an_enriched_c.html

に基づいて「enrich化されたカテゴリーのマグニチュード」の話をしようと思います。

今回は、その前段として「enrich化されたカテゴリー」とはどういうものかを振り返ってみようと思います。

「カテゴリーのオイラー特性数」から「enrich化されたカテゴリーのマグニチュード」へ

前回も述べたように、前回のセッションが依拠した2006年のLeinsterの論文は、まだ「マグニチュード」という言葉を使ってお理ませんでした。

このblogが書かれた2011年には、「マグニチュード」という概念は広く使われるようになっていました。セッションのテーマの変化は、このことを反映しています。

ただ、このテーマの変化には、「オイラー特性数」が新しい「マグニチュード」という概念に置き換わった以上に、重要なことがあります。

それは、「カテゴリーのマグニチュード」を一般的に考えるのではなく、「enrich化されたカテゴリーのマグニチュード」を考えることが、マグニチュード論にとってより重要であるという認識が新たに生まれたということです。

それはマグニチュード論の展開にとって大きな飛躍になりました。次回のセッションでは、そのことを述べてみたいと思います。

先のLeinsterのblog には、「enrich化されたカテゴリー」とはどういう働きをするものかを説明する、面白い「ダイアル」を使った、たとえが登場します。

今回は、それを紹介しようと思います。

Leinsterのダイアル

enrich化されたカテゴリー論の一般性
Leinsterのダイアルのたとえ話

「enrich化されたカテゴリー論は強力な機械である。その機械の前面にはダイヤルがある：ダイヤルを回すと、あなたがenrich化するカテゴリー - より詩的に言えば、数学の一分野 - が選択される。

ダイアルを

- {true, false} に回すと、「順序理論」が選択される。
- {0, ♾️ } に回すと「計量幾何学」が選択される。
- Ab に回すと「ホモロジー代数」が選択される。
- Set に回すと「カテゴリー論」そのものが選択される。
- nCat に回すと「(n+1)-カテゴリー論」が選択される。

したがって、enrich化されたカテゴリー論の完全な一般性で定式化された定義は、極めて一般的である。」

マグニチュード論を、
より一般的な枠組みから定義する

詳しいことは、次回の「enrich化されたカテゴリーのマグニチュード」のセッションで紹介しようと思いますが、マグニチュード論のカテゴリー論的な構築を目指していたLeinsterは、ある問題に直面します。

先に紹介した2006年の論文に続いて、Leinsterはマグニチュードの興味深い第二の定式化を提出します。しかし、この二つのマグニチュードの定式化は、一致しませんでした。

この問題を、Leinsterは、enrich化されたカテゴリー論というより一般的な枠組みのもとで解決することに成功します。

enrich化されたカテゴリー論
ふりかえり

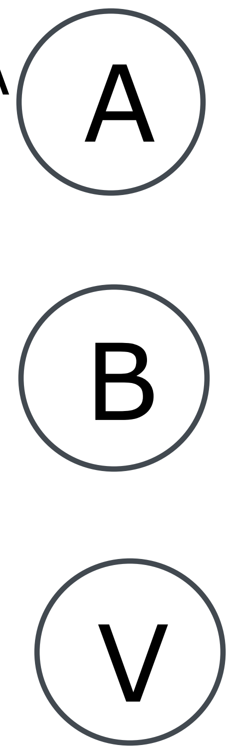
enrich化されたカテゴリー論(enriched category theory)には、三つのカテゴリーが登場します。

- enrich化されたカテゴリー
- enrich化されるカテゴリー
- enrich化するカテゴリー

enrich化されたカテゴリー論

便宜的に、三つのカテゴリーに、次のような名前をつけておきましょう。

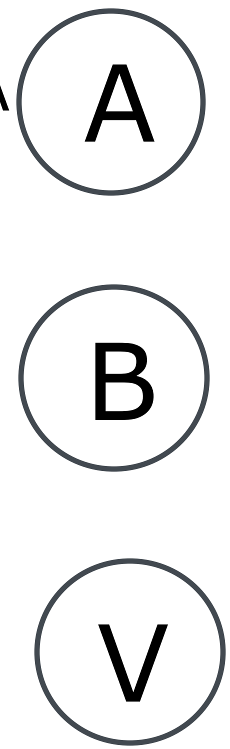
- Vでenrich化されたカテゴリー: A
- enrich化されるカテゴリー: B
- enrich化するカテゴリー: V



V-カテゴリー A

Vでenrich化されたカテゴリー Aを、**V-カテゴリー A と呼びます**

- Vでenrich化されたカテゴリー: A
  V-カテゴリー A
- enrich化されるカテゴリー: B
- enrich化するカテゴリー: V



V-カテゴリー Aのオブジェクトは、カテゴリー Bのオブジェクトと等しい

Vでenrich化された、**V-カテゴリー　A** のオブジェクトは、元のenrich化されるカテゴリー Bのオブジェクトと等しくなります。

- Vでenrich化されたカテゴリー: A
  V-カテゴリー　A
- enrich化されるカテゴリー: B
- enrich化するカテゴリー: V

A

B

V

$a \in ob(A)$

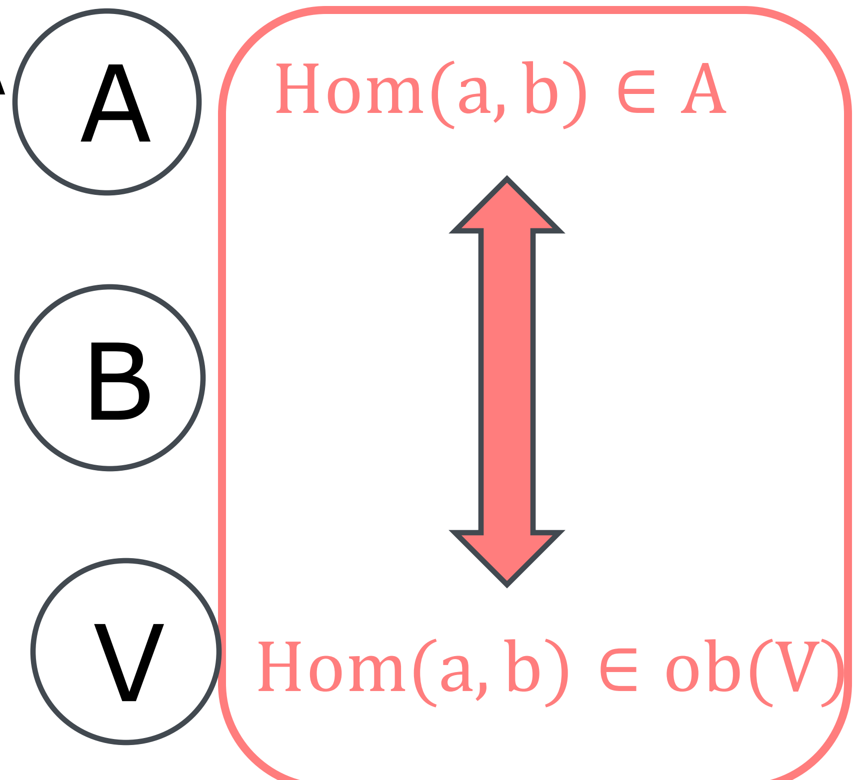
$\Updownarrow$

$a \in ob(B)$

V-カテゴリー　Aの射は、カテゴリー Vのオブジェクトと等しい

Vでenrich化された、**V-カテゴリー　A** の射は、enrichするカテゴリー Vのオブジェクトと等しくなります。

- Vでenrich化されたカテゴリー：A
  V-カテゴリー　A
- enrich化されるカテゴリー：X
- enrich化するカテゴリー：V



enrich化するカテゴリー V が満たすべき性質 monoidal カテゴリー

enrich化するカテゴリー Vは、次のmonoidal カテゴリーの性質を満たす必要があります。

Vには結合的な二項演算 $\otimes$ が定義され、ユニット **1** が存在する。

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

$$1 \otimes a = a \otimes 1 = a$$

V-カテゴリー Aを構成するオブジェクトと射 それが満たす演算

V = (V , ⊗, 1) をenrich化するmonoidal カテゴリーとします。

V でenrich化されたカテゴリー A、すなわち V-カテゴリー Aの定義は、通常のカテゴリーの定義から、Hom-setが集合ではなく V のオブジェクトであるという条件を加えることで得られます。

したがって、V-カテゴリー A は、オブジェクトの集合 ob A、各 a, b ∈ ob A に対する V のオブジェクト Hom(a, b)、
および次の性質を満たす合成と恒等元の演算から構成されます。

射の合成 $\mathrm{Hom(a, b)} \otimes \mathrm{Hom(b, c)} \to \mathrm{Hom(a, c)}$

恒等元 $1 \to \mathrm{Hom(a, a)}$

V-カテゴリーのカテゴリー **V–Cat**

enrich化されたカテゴリーには、enrich化されたFunctorの概念が伴います。

V-カテゴリー A , A′ に対して、V-Functor F : A → A′ は、

オブジェクトに対しては、

ob A →ob A′ で a ↦ F(a) で表される関数、

射に対しては、次の写像で定義されます。

$$\mathrm{Hom}(a, b) \to \mathrm{Hom}(F(a), F(b))$$

V-カテゴリーとV-Functorのカテゴリーを **V-Cat**と呼びます。

monoidal カテゴリー V と
それに対応するV-カテゴリーの例

V = 集合のカテゴリー **Set**

⊗を直積 × とし、Unit 1 を一つの要素からなる集合 { * }とする。
V = Setの時、V-Cat は、カテゴリーとFunctorのカテゴリー**Cat**
となる。

V = ある体k上のベクトル空間のカテゴリー **Vect**

⊗を通常のテンソル積⊗とし、Unit 1 = k とする。

V =Vect の時、V-Cat は、各hom集合上にベクトル空間構造を
備え、合成が双線形であるもののカテゴリー **linear category**
になる。

V = 半順序集合のカテゴリー **Poset**

Posetは、$\otimes$ = + および 1 = 0 を備えたmonoidalカテゴリーである。

半順序集合は、各射集合が最大1つの要素を持つカテゴリーとして見なせる。

特に、非負実数と無限大からなる半順序集合([0, ∞], ≥)を考えよう。結果として得られるカテゴリーのオブジェクトは[0, ∞]の要素であり、x ≥ yのときのみ射x → yが存在し、それ以外では射は存在しない。

V = [0, ∞]とすると、Lawvere が指摘したように、
V–カテゴリーは、「一般化された距離空間」である。

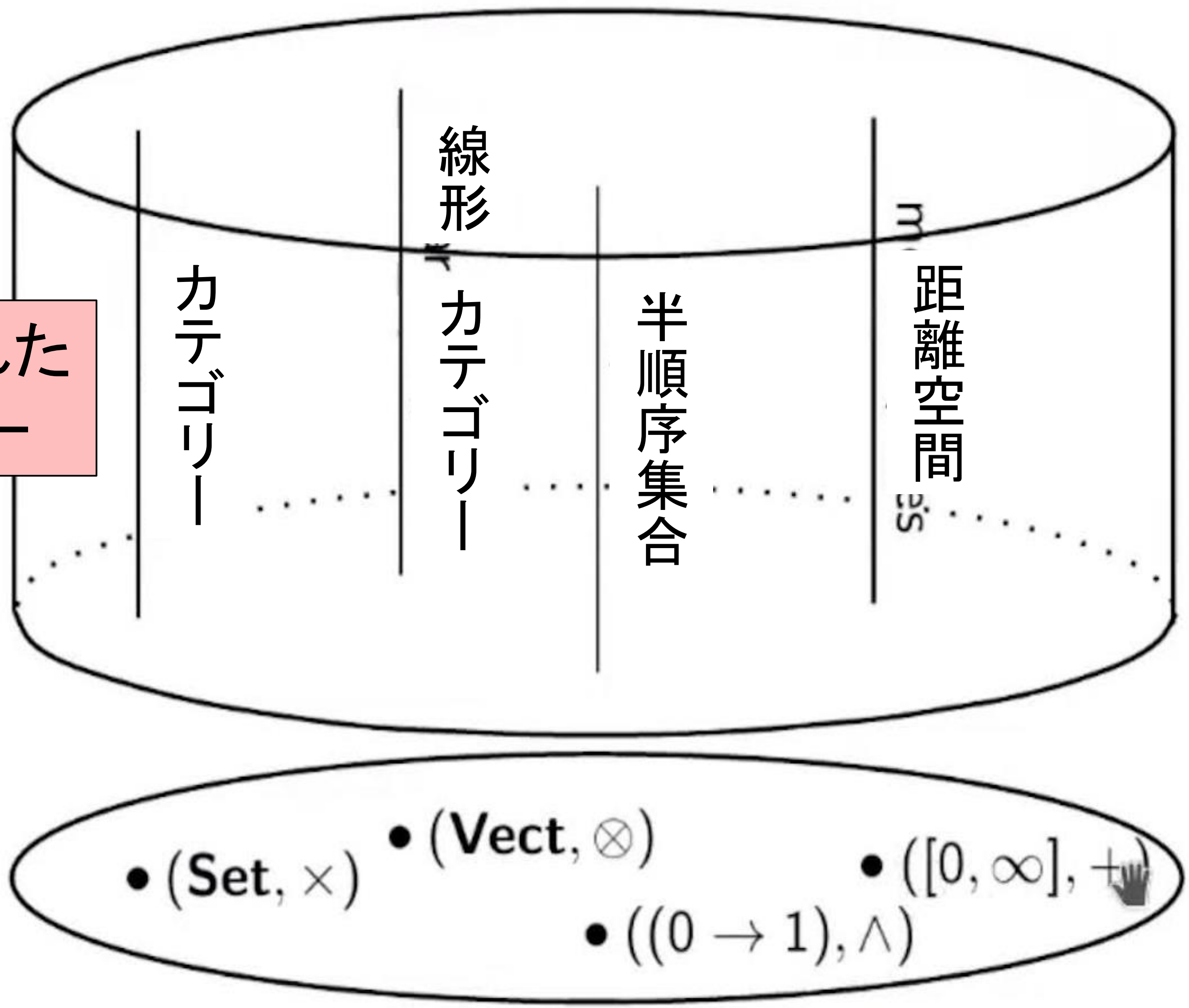
V = 真理値 {false, true} のカテゴリー **2**

2は、$\otimes = \wedge$ および $1 = \mathrm{true}$ を備えたmonoidalカテゴリーである。

この時、V –カテゴリーは、前順序関係（反射的かつ推移的な関係）を備えた集合であり、V –カテゴリーの同値関係まで考慮すれば、これは半順序集合と同じものである。

monoidal カテゴリーVとenrich化されたV-カテゴリー

enrich化された
V-カテゴリー



monoidal
カテゴリーV


enrich化されたカテゴリーの
マグニチュード

enriched categoryのマグニチュード

行列のマグニチュードを既に定義したので、各enrich化されたカテゴリーに一つの行列を割り当てます。

このため、enrich化するカテゴリーVにさらなる構造を仮定します。具体的には、Vのオブジェクトに対する「サイズ」の概念が存在すると仮定します。

これによって、Vでenrich化されたカテゴリーに対するサイズの概念が導かれることになります。

Vのオブジェクトの「サイズ」

Vをmonoidal カテゴリーとして、rig k とモノイド準同型写像を想定しています。

$$|\cdot| : \boxed{(\mathrm{ob}\,\mathscr{V} / \cong, \otimes, \mathbb{1})} \to (k, \cdot, 1).$$

ここでの領域は、Vのオブジェクトの同型類のモノイドです。

Vのオブジェクトの「サイズ」の例

- Vが、有限集合のmonoidal カテゴリーである **FinSetの場合** は、$\mathrm{k} = \mathbb{Q}$ として $|\mathrm{X}| = \#\mathrm{X}$ 。
- Vが、有限次元のベクトル空間の monoidal カテゴリーである **FDVec の場合**、$\mathrm{k} = \mathbb{Q}$ として $|\mathrm{X}| = \dim \mathrm{X}$ 。
- V= **{0, ∞}の場合**、$\mathrm{k} = \mathbb{R}$ として $|\mathrm{X}| = e^{-x}$。
（f | · | が可測であるのは、C ≥ 0 であるある定数に対して、$|x| = C^x$である場合のみである。）
- V = **2 の場合**、$k = \mathbb{Z}$, $|\mathrm{f}| = 0$ かつ $|\mathrm{t}| = 1$。

V-cat の定義と
enriched カテゴリーのマグニチュード

そのオブジェクトが有限なオブジェクトを持つV-カテゴリーで、その射が、それら間のV-functorからなるカテゴリーを**V-cat**（小文字のc）と表記します。

定義 1.3.2 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{Vcat}$ の時、

i. **Aの類似度行列** ζ_A は、k上の $ob\,\boldsymbol{A} \times ob\,\boldsymbol{A}$ の行列 で、$\zeta_A(\mathrm{a},\mathrm{b}) = |\mathrm{Hom}(\mathrm{a},\mathrm{b})|$ $(\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{A})$ で定義される。

ii. Aの（co）重み付けは、ζ_A の（co）重み付けである。

iii. Aは ζ_A がマグニチュードを持つとき、マグニチュードを持つ。この時、そのマグニチュードは、$|\mathrm{A}| = |\zeta_A|$ である。

iv. ζ_A が、可逆な時 Aはメビウス反転を持つ。そのメビウス行列は、$\mu_A = \zeta_A^{-1}$ である。

enriched カテゴリーのマグニチュードの例 V = FinSet の場合

V = FinSet の場合、有限カテゴリー A のマグニチュード $|A| \in \mathbb{Q}$ の概念を得る。これは A のオイラー特性とも呼ばれ、$\chi(A)$ と表記される。

これは位相空間、グラフ、半順序集合、オービフォールドのオイラー特性、集合の濃度、群の位数と関連する定理が存在する。

非常に多くの有限カテゴリーはメビウス反転（特にオイラー特性）を持つ。メビウス行列μ_Aは、順序集合に対するRotaのメビウス関数の一般化であり、これはさらに整数上の古典的なメビウス関数を一般化したものである。

V = 2 の場合
有限半順序集合 A のマグニチュード

V = 2 と取ると、有限半順序集合 A のマグニチュード $|A| \in \mathbb{Z}$ の概念が得られる。オイラー特性数という名称のもと、これは Rota に遡る; 現代的な記述については [37] を参照されたい。

これは常に定義される。実際、あらゆる半順序集合はメビウス反転を持ち、メビウス行列は(i)で言及したロータのメビウス関数である。

半順序集合はカテゴリーとして、あるいは非対称距離空間として見なせることに留意した。これらのマグニチュードの概念は互換性を持つ: 半順序集合のマグニチュードは、対応するカテゴリーまたは一般化距離空間のそれと同一である。

Vが位相空間のカテゴリーの場合

V を、すべての対象が明確に定義されたオイラー特性を持つ位相空間のカテゴリーとする（例：有限 CW 複体）。

空間 X のオイラー特性を |X| とすると、位相的にenrich化されたカテゴリーのマグニチュードまたはオイラー特性の概念が得られる。

Part 3

Lawvereのenriched カテゴリー論

Lawvereのenriched カテゴリー論

このセクションでは、こうした展開を明確にビジョンとして持っていただけでなく、そうしたカテゴリー論の概念装置を数多く作り上げた数学者Lawvereの研究の一部を紹介します。

enrichedカテゴリー論とその応用について、最大の貢献者の一人は、Lawvereだと思います。現代のマグニチュード論は、Lawvereのビジョンにその多くを負っています。

現代のマグニチュード論の成立に大きく貢献したシャニュエルは、Lawvereの共同研究者でした。

Conceptual Mathematics 2nd Edition:
A first introduction to categories

Part 3 Agenda

Lawvereのenriched カテゴリー論

- Lawvereの「一般化された距離空間」


Lawvereの「一般化された距離空間」

Lawvereの「一般化された距離空間」

このセッションでは、Lawvereの「一般化された距離空間」の話をしたいと思います。

今回、取り上げるのは、1973年の彼の次の論文です。

“Metric Spaces, Generalized Logic and Closed Category”

http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/1/tr1.pdf

この論文、Enriched カテゴリー論を用いて、距離空間の概念を見事に拡張してみせた、彼の有名な論文の一つです。

アナロジーで語るEnriched カテゴリー論

ただ、この論文のどこにも、Enriched カテゴリーという言葉は使われていません。代わりに、「閉じたカテゴリー」と「強いカテゴリー」いう言葉が使われています。

現代のenriched カテゴリー論の用語でいうと、この論文でLawvereのいう「閉じたカテゴリー」が、enrich化するmonoidai カテゴリー Vのことで、「強いカテゴリー」は、Vでenrich化されたV-カテゴリーのことなのです。（このことを念頭におくと、この論文は読みやすいと思います。）

Lawvereの研究と教育のアプローチ

また、理論の展開にも特徴があります。彼は言います。

「本稿が、閉じた実数の非負の量という閉じたカテゴリーを値域とする、強いカテゴリーとして捉えられた距離空間の方向のはっきりした例に基づいて、閉じたカテゴリーへの入門としても読まれることを願う。

閉じたカテゴリーは強いカテゴリーの妥当な理論を構築するのに十分なものであるため、本研究の基盤となるアナロジーの初歩的な性質を明らかにするためために、まず強いカテゴリーのいくつかの例を検討する。」

$[0,\infty]$ 区間の実数からなる距離空間のような「強いカテゴリー」は、身近でイメージしやすい。そこから具体的な例をうまく積み重ねて、抽象的な「閉じたカテゴリー」を理解する入門コースとしても読んでもらえるようにしたい。

両者の関係では、「閉じたカテゴリー」の役割が本質的だということが、この論文の基本的内容なのだが、そのことは、具体例からの初等的なアナロジーで理解できるはずである。

まあ、そういった趣旨だと思います。

enriched カテゴリーという言葉は、いつ登場したのか？

enriched カテゴリーの理論を始めたのは、Lawvereではありません。

enriched カテゴリー論の中核的なアイデアである、あるカテゴリーの射の集合 hom-setを、他のカテゴリーのhom-objectで置き換えるという研究は、1965年には、EilenbergやKellyらによって活発に展開されていました。

当時のEilenbergとKellyのこの分野での重要な論文のタイトルは、"Closed category" でした。

（残念ながら、僕には enriched categoryという言葉を誰が最初に使ったのか特定することができませんでした。）

Lawvereのアプローチのインパクト

それらの理論は抽象的で難解な理論として展開されたものでした。もちろん、Lawvereは、こうした理論を熟知していました。

While in Perugia(1972-1974), Lawvere worked on various kinds of enriched category. (wiki)

ただ、これらの理論の研究と教育に対する、Lawvereのアプローチは、全く違ったものでした。

それは、これらの抽象的な理論が、具体的な数学（例えば、距離空間の理論）を再構成する道具として利用できることを、鮮やかに示したものでした。

この点では、当時、数学者自身が、なかば自虐的なジョークとして、カテゴリー論を ‘general abstract nonsense’ とか‘general nonsense’ と呼ぶことがあったことを思い起こしてください。

教育的な意図としては、彼は、enriched カテゴリー論を、アナロジーを用いて、初等的な入門コースとして展開しようとしたのです。
（もっとも、この論文が「初等的な入門コース」かは。微妙です。）

Lawvereは、別の論文で自身のこうしたアプローチを「あらゆる概念の歴史的起源に対する冷静な評価」に基づくものだと語ります。壮大で透徹したビジョンだと思います。

彼のアプローチは、数学の世界に大きなインパクトを与えることになります。

この論文の出発点となるアナロジー

この論文のアイデアの中心であり、議論の展開の出発点にあるのは、次の二つの式がよく似ているというアナロジーの発見です。

$$dist(a,b)\ +\ dist(b,c)\ \geq\ dist(a,c)$$

$$\mathrm{hom}(a,b)\ \otimes\ \mathrm{hom}(b,c) \rightarrow\ \mathrm{hom}(a,c)$$

確かに、distとhom、＋と⊗、≥と→ が対応していると考えると二つの式はよく似ています。

この論文の出発点となるアナロジー

この論文のアイデアの中心であり、議論の展開の出発点にあるのは、次の二つの式がよく似ているというアナロジーの発見です。

$$\boldsymbol{dist}(a,b) \;+\; \boldsymbol{dist}(b,c) \;\geq\; \boldsymbol{dist}(a,c)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathbf{hom}(a,b) \;\otimes\; \boldsymbol{hom}(b,c) \rightarrow \; \boldsymbol{hom}(a,c)$$

確かに、**distとhom**、+と⊗、≥と→ が対応していると考えると二つの式はよく似ています。

この論文の出発点となるアナロジー

この論文のアイデアの中心であり、議論の展開の出発点にあるのは、次の二つの式がよく似ているというアナロジーの発見です。

$$dist(a,b) \;+\; dist(b,c) \;\geq\; dist(a,c)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\mathrm{hom}(a,b) \;\otimes\; \mathrm{hom}(b,c) \;\rightarrow\; \mathrm{hom}(a,c)$$

確かに、distとhom、 +と⊗、≧と→ が対応していると考えると二つの式はよく似ています。

ただ、二つの式が表しているものは違うものです。

第一の式が表しているもの:三角不等式

それぞれの式についてみていきましょう。まず第一の式から。

$$dist(a,b)\ +\ dist(b,c)\ \geq\ dist(a,c)$$

この式で、$dist(a,b)$が表しているのは、距離が定義された空間での点aと点bとの距離です。

ですから、先の式は、「aからbへの距離とbからcへの距離を加えたものは、aからbの距離より大きいか等しい」です。

これは、「三角形の2辺の和は、他の一辺より大きいという、よく知られた関係を表しています。(三角不等式)

第二の式が表しているもの：射の合成法則：

第二の式についてみていきましょう。

$$hom(a,b) \otimes hom(b,c) \rightarrow hom(a,c)$$

この式で、$\mathrm{hom}(a,b)$が表しているのは、あるカテゴリーXのオブジェクトaから同じカテゴリーに属する他のオブジェクトbへの射です。

ですから、先の式は、a,b,c がカテゴリーXのオブジェクトの時、「aからbへの射があって、同時に、bからcへの射があれば、aからcの射があるが導かれる」ことを意味しています。

これは、カテゴリーの射の合成法則を表しています。

比較しやすいように名前を変える

二つの式を比較しやすいように、元の式の名前を変えましょう。次のように。

$$dist(a,b) + dist(b,c) \geq dist(a,c)$$
$$\mathrm{hom}(a,b) \otimes \mathrm{hom}(b,c) \to \mathrm{hom}(a,c)$$

$$\Downarrow$$

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$$
$$V(a,b) \otimes V(b,c) \to V(a,c)$$

monoidal カテゴリーでenrich化された カテゴリーとして距離空間のカテゴリーを構成する

二つの式があります。

一つは、距離空間の三角不等式を表す式 (1)

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$$

もう一つは、カテゴリーの射の合成法則を表す式です(2)。

$$V(a,b) \otimes V(b,c) \rightarrow V(a,c)$$

このニつの式の関係をどう捉えるのか。Lawvereの考えたことは、次のようなことです。

(2)の式の方が基本的で、(1)はそれから導出される。

(1)はmonoidalカテゴリーの性質を表している。このmonoidalカテゴリーVによってenrich化されたカテゴリーSとして距離空間のカテゴリーを導出する。

カテゴリーVが「enrich化」できるための条件

ただ、問題が残っています。

カテゴリーVが、「enrich化する」能力を持つためには、Vがsymmetricでassociativeなmonoidal構造を持つことに加えて、特に二つの条件が必要でした。

一つは、射の合成性の条件です。これは先に見た式(2)で表現されます。

$$V(a,b) \otimes V(b,c) \rightarrow V(a,c)$$

もう一つの条件は、Vに恒等射が存在することです。その条件は、Vのunitを $\mathbb{I}$ として次のように表現されます。

$$\mathbb{I} \rightarrow V(a,a)$$

V-カテゴリーSでの恒等射の条件

monoidaiカテゴリーVの射の合成性の条件

$$V(a,b)\ \otimes V(b,c) \to\ \ V(a,c)$$

が、Vでenrich化された距離空間Sの次の式に対応するとして、

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$$

monoidaiカテゴリーVの恒等射の条件

$$\mathbb{I} \to V(a,a)$$

は、距離空間Sのどのような式に対応するのでしょう？

Vの射$\to$が、Sの$\geq$に対応するとして、

$$\mathbb{I} \geq d(a,a)$$

になるのでしょうか？

残念ながら、そうはなりません。

$\mathbb{I}$ は、任意のVのオブジェクト aに対して、次の式を満たすVのunitです。それはSのunitではありません。

$$a \otimes \mathbb{I} = a = \mathbb{I} \otimes a$$

Sの基本演算は、 $\otimes$ではなく ＋ですので、そのunitは、次の式を満たす 0になります。

$$a + 0 = a = 0 + a$$

よって、monoidaiカテゴリーVの恒等射の条件 $\mathbb{I} \to V(a, a)$ に対応する距離空間Sの式は、次のようになります。

$$0 \geq d(a, a)$$

$$0 \geq d(a,a)\ ?$$

ただ、Sでdは距離を表すのですから、この条件を強制されるのは、少し変に思われるかもしれません。

ただ、大丈夫なのです。

dは距離ですので、非負の値をとります。

ですので、任意のaについて $0 \leq d(a,a)$ が成り立つはずです。

このことと、$0 \geq d(a,a)$ を合わせると、

$$0 = d(a,a)$$

が導かれることになります。

これは距離の性質としては、合理的なものです。

enriched カテゴリー論の言葉で 整理してみよう

monoidalカテゴリーVで enrich化された V-カテゴリーSとして距離空間のカテゴリーSを考えてみましょう。

- VとSは同じオブジェクトを持ちます。それは距離空間上の点です。それは [0, ∞]の区間に値を取る実数と考えることができます。(∞ を含むことに注意)

- Vの射 $a \to b$は$a \geq b$ である場合に限り、かつその場合にのみ, 定義されます。(BradleyのLLMのモデルでは、射$a \to b$は、$a \leq b$ である場合に限り定義されていました。ちょうど反対になっています)

- Vのmonoidal積(⨂)は、標準的な和(+) です。
- Vのmonoidal unitは、0です。

- V-カテゴリーSのhom-オブジェクト$V(a, b)$は、点aと点bの距離 $d(a, b)$ になります。
- Vの恒等射の条件

$$\mathbb{I} \to V(a, a)$$

は、Sでは $0 \geq d(a, a)$ と解釈されます。
これは、 $0 = d(a, a)$ を導きます。
- Vの射の合成性の条件

$$V(a, b) \otimes V(b, c) \to V(a, c)$$

は、Sでは $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$

と解釈されます。

Lawvereの「一般化された距離空間」

こうして、Lawvere は、ほとんど enriched カテゴリー論の方法のみを用いて、距離空間の次の二つの性質を導き出しました。

$$d(a,a) = 0$$
$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$$

こうした手法で導かれる、この二つの性質を満たす距離空間を、Lawvereの「一般化された距離空間」と言います。

従来の距離空間の概念と「一般化された距離空間」との違い

従来の距離空間の定義には、先に見た二つの性質以外に、次のような性質が含まれていました。

$$d(a,b) = d(b,a)$$

aとbとの距離はbとaとの距離に等しい（対称性）。

$$d(a,\mathrm{b}) = 0 \Longrightarrow a = b$$

aとbの距離が0なら、aはbに等しい（非退化性）

$$0 \leq d(a,b) < \infty$$

距離は無限大を含まない。

Lawvereの「一般化された距離空間」は、これらの性質が成り立たない空間なのです。

距離の概念から「対称性」を排除する

Lawvereは、自然な非対称性が重要な情報を含んでおり、力学や解析学における多くの構成が非対称な空間につながると主張しています。

例としては、起伏のある地形を移動するコスト（「丘を上り下りする」）や、情報理論的な尺度であるcross-entropyなどが挙げられます。

Lawvereのフレームワークはこれらを自然に扱うことができますが、古典的な理論ではこれらを例外として扱わなければなりません。

距離の概念から「非退化性」の排除

「非退化性」は、「同型」な対象が実際に「等しい」ことを要求することに相当するため、カテゴリー論的観点からはあまり自然ではありません。

「同型」よりも広い意味を持つ「同値」関係を用いることで、商空間への移行を回避できます。
(Univalent Foundation – Veovodsky)

これにより、ほとんど至るところで等しい関数間の距離がゼロとなる擬距離空間を、商空間を取ることなく直接第一級の市民として扱うことが可能になります。

無限大の距離の許容

距離に無限大を許容することは、抽象集合の中に空集合を含めることと全く同じことだと Lawvereは言います。それは、通常のカテゴリーにおける空なhom-setの概念に対応します。

無限大の距離の許容は、2つの状態間の非連結性や移動の不可能性をモデル化する自然な方法と見なされます。こうしたアプローチは、Bradleyの新しいLLMのモデルでも、利用されることになります。

1973年論文のもう一つの側面
「一般化された論理」

1973年のLawvereの論文には、もう一つの顔があります。
それは、この論文でLawvereが「一般化された距離」とともに、「一般化された論理」について語っていることです。

今回のセッションでは、こうした側面は割愛したのですが、一つだけ例を挙げておきます。

monoidal カテゴリーとして、{true, false}からなるカテゴリー2を取ると、次の対応が存在します。

$$V(a,b) \otimes V(b,c) \rightarrow V(a,c)$$

$$\boxed{(a \Longrightarrow b) \wedge (b \Longrightarrow c) \vdash a \Longrightarrow c}$$

これは、もっとも基本的な論理式 modus ponen (三段論法)です。

カテゴリー X	Xの射とそれが取るとる値	Xの合成則と恒等則の式を記述する写像	Xの合成則の定義域の構造	Xの恒等則の定義域の構造 unit
カテゴリー	$\mathrm{hom}(a,b)$ 抽象的集合b	$\rightarrow$ （射）	$\times$ (直積)	$\mathbb{I}$: 一つの要素を持つ集合

合成則　$\mathrm{hom}(a,b) \times \mathrm{hom}(b,c) \rightarrow \mathrm{hom}(a,c)$

恒等則　$\mathbb{I} \rightarrow hom(a,a)$

カテゴリー X	Xの射とそれが取るとる値	Xの合成則と恒等則の式を記述する写像	Xの合成則の定義域の構造	Xの恒等則の定義域の構造 unit
カテゴリー	$\mathrm{hom}(a,b)$ 抽象的集合b	$\rightarrow$ (射)	$\times$ (直積)	$\mathbb{I}$: 一つの要素を持つ集合

合成則　$\mathrm{hom}(a,b) \times \mathrm{hom}(b,c) \rightarrow \mathrm{hom}(a,c)$

恒等則　$\mathbb{I} \rightarrow hom(a,a)$

カテゴリー X	Xの射とそれが取るとる値	Xの合成則と恒等則の式を記述する写像	Xの合成則の定義域の構造	Xの恒等則の定義域の構造 unit
カテゴリー	$\hom(a,b)$ 抽象的集合b	$\rightarrow$ (射)	$\times$ (直積)	$\mathbb{I}$: 一つの要素を持つ集合
Vに値を持つカテゴリー	Vのオブジェクト	$\rightarrow$ Vの射	$\otimes$ Vのテンソル積	k Vのテンソル積のunitオブジェクト

合成則 $V(a,b) \otimes V(b,c) \rightarrow V(a,c)$

恒等則 $k \rightarrow V(a,a)$

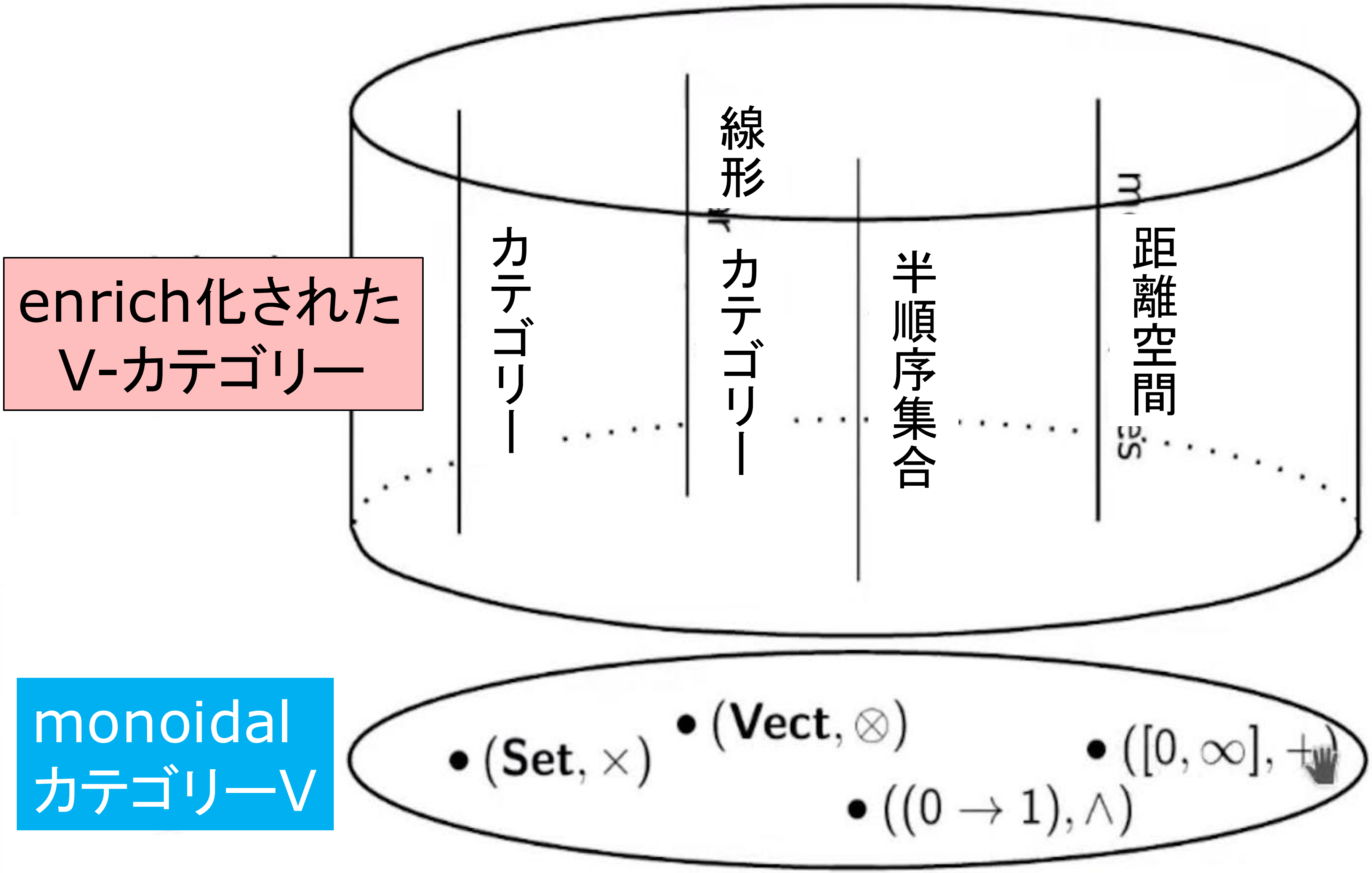
カテゴリー X	Xの射とそれが取るとる値	Xの合成則と恒等則の式を記述する写像	Xの合成則の定義域の構造	Xの恒等則の定義域の構造 unit
カテゴリー	$\hom(a,b)$ 抽象的集合b	$\to$ （射）	$\times$ (直積)	$\mathbb{I}$: 一つの要素を持つ集合
Vに値を持つカテゴリー	Vのオブジェクト	$\to$ Vの射	$\otimes$ Vのテンソル積	k Vのテンソル積のunitオブジェクト
距離空間	dist(a,b) 非負の実数	$\geq$ （大小関係）	$+$ (和)	0 （ゼロ）

合成則 $\mathrm{dist}(a,b) + dist(b,c) \geq dist(a,c)$

恒等則 $0 \geq dist(a,a)$

カテゴリー X	Xの射と それが取る とる値	Xの合成則と 恒等則の式を 記述する写像	Xの合成則の 定義域の構造	Xの恒等則の 定義域の構造 unit
カテゴリー	$\hom(a,b)$ 抽象的集合b	$\rightarrow$ （射）	$\times$ (直積)	$\mathbb{I}$：一つの 要素を持つ集合
Vに値を持つ カテゴリー	Vの オブジェクト	$\rightarrow$ Vの射	$\otimes$ Vの テンソル積	k Vのテンソル 積のunit オブジェクト
距離空間	dist(a,b) 非負の実数	$\geq$ （大小関係）	$+$ (和)	0 （ゼロ）
半順序集合	$a \Longrightarrow b$ 真理値	$\vdash$ （$entailment$）	$\wedge$ (連言 and)	$true$ （真）

monoidal カテゴリーVとenrich化されたV-カテゴリー



「一般化された距離」とマグニチュード論

1973年論文でのLawvereの基本的な問題意識は、距離の標準的な定義は、「あまりにも性急に固定された」ものであり、彼の2つの公理からなるV-カテゴリーによる定義こそがより根源的で正しいものであるということです。

こうしたアプローチは、彼の1986年の論文 **“Taking Categories Seriously”で全面的に展開されることになります**
http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/8/tr8.pdf

Leinsterのマグニチュード論は、これら二つ論文から強い影響を受けています。残念ながら、それについてはこのセッションでは語ることができませんでした。