

# たとえ話で理解する量子の世界



## はじめに

- 今回のセミナーの呼びかけに、僕は次のような趣旨のことを書きました。
- 「問題は、「量子の世界」を、我々は直接触ることはもちろん、見ることも聞くこともできないということです。そればかりか、量子は、我々の感覚的直感だけではなく理論的直感にも反した振る舞いをします。」
- 「それでは、感覚的な直感や常識的な推察が役に立たないとしたら、「量子の世界」を知るためにはどうしたらいいのでしょうか？ おそらく唯一の有効な方法は、数学的理論に基づいた量子の世界のモデルを作ることです。」

- ここでは、日常的な認識のスタイルと、量子論的認識のスタイルの違いが強調されています。だから、量子の世界を知るためには、数学的にアプローチするしかないのだということです。僕は、基本的には、こうした考え方をしています。
  
- ただ、少し不思議な感じもします。素朴な疑問ですが。
  - 目にも見えず、直感にも反するものを、我々は認識できるのでしょうか？
  - 「数学的理論に基づいた量子の世界のモデルを作る」ことで認識できるということですが、モデルはモデルです。実在の量子の世界そのものではないのでは？
  - こうした物理モデルの「正しさ」—実在的にそれが成り立つことは、実験によって「証明」あるいは「反証」されるのでしょうか？
  - 物理の理論に、なぜ、数学が必要なのでしょう？ 物理的認識と数学的認識は同じものなのでしょうか？
  - 数学理論の「正しさ」は、どのように意味で、正しいものなのでしょうか？

- 小論は、量子論の初歩を数学的に説明することを直接の目標とはしていません。むしろ、先に見たような「素朴な疑問」を意識しながら、数学的方法に限らず、量子論の理解に役立つこと、逆に、理解の妨げになることをみていきたいと思います。
- 小論では、そうした数学を利用する「一歩手前」の認識の働きで、特に、「たとえ話」で理解するという認識スタイルに注目しています。小論のタイトル「たとえ話で理解する量子の世界」は、そういう意味で付けられたものです。
- 長くなりすぎるのでタイトルに入れることは割愛したのですが、僕が、注目しているもう一つのアプローチがあります。それは、数式ではなく、図形に対する直観を活用しようというものです。本当は、「たとえ話と図形に対する直観で理解する量子の世界」というのが、今回、話したかったことになります。

- 個人的には、2017年からだと思いますが、「紙と鉛筆で学ぶ」というサブタイトルで量子論の基礎のセミナーを何度も開催してきました。数百人の人に受講してもらったのですが、天下りに計算をしてもらうというところがあって、分かりにくかったのではと、すこし、反省していました。今回は、バリバリ計算してもらうというのをやめています。
- たとえ最終的な定式化が数学的なものになるにしても、認識が前に進む時には、いろいろな「きっかけ」があっていいのだと思います。

# Agenda たとえ話で理解する量子の世界

- 第一話： 量子の「状態」について
  - 普通の言葉で「状態」の認識を考える
  - 二つの数字で表現される量的状態
  - 「重ね合わせ」
  - 物理的量と数学的量の違い
- 第二話： 量子の「状態」の観測について
  - スピンの発見
  - 二つの状態の「重ね合わせ」の観測について
  - 確率はどこからでてくるのか？
- 第三話： 図形で理解する数の世界の拡大
  - 量子の世界は複素数の世界
  - スカラー、ベクトル、行列、テンソル、 ...
  - 量子ゲートと量子コンピュータ
  - 抽象化された巨大な対象を具体的・視覚的に把握するTensor Network

# 第一話： 量子の「状態」について



# Agenda

## 第一話： 量子の「状態」について

- 普通の言葉で「状態」の認識を考える
  - 質的状态の認識
  - bit型の質的状态の認識
  - 量的状态の認識
- 二つの数字で表現される量的状态
  - 物理的な量としての「位置」
  - 数学的な量としての「位置」
- 「重ね合わせ」
- 物理的な量と数学的な量の違い

普通の言葉で  
「状態」の認識を考える

## 「状態」という言葉の意味について

- この講義では「状態」という言葉が使われます。例えば、「量子の状態」のように。ただ、「量子の状態」というのは、あまり、普段使う言葉ではないかもしれませんね。
- 「状態」という言葉が、日常的には、どのように使われているのかみておきましょう。例えば、こんな使い方をします。
  - 「生活の状態」
  - 「健康の状態」
  - 「心理の状態」

## 「〇〇の状態」の状態

- 「〇〇の状態」というとき、その「状態」は、対象の「〇〇」に応じて、いくつかの「状態」をとることが分かります。
- 「〇〇の状態」というのは、我々が対象〇〇を認識した時の、認識の内容のことですね。その認識内容は、対象によって、あるいは認識する主体によって、あるいは認識の状況によって様々に変わります。
- 例えば、「生活の状態」なら、「豊か」、「貧しい」といった「状態」を、「健康の状態」なら、「健康」、「病弱」、「不健康」、「病気」といった状態を、「心理の状態」なら、「喜」「怒」「哀」「楽」といった「状態」をとります。
- こうした「状態」の多様性は、ある意味で、「状態」という概念の本質的な特徴の一つです。「状態」は変わるものです。ただ、我々が対象を認識した瞬間に、「状態」は一つに定まります。

## 「〇〇の状態」の状態を「形式化」する

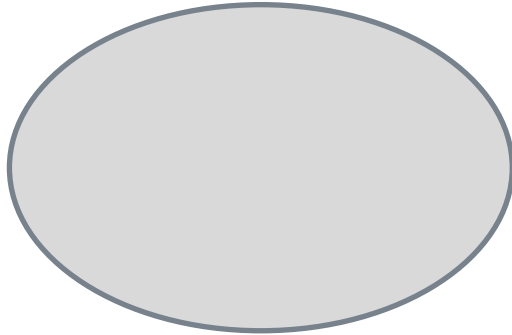
- ここで、ちょっと状態を表す記号  $|\cdot\rangle$  記号を導入して、「〇〇の状態」を  $|\text{〇〇の状態}\rangle$  で、それがとる様々な状態を  $|\text{状態}\rangle$  で表してみましょう。例えば、
- $|\text{健康の状態}\rangle = |\text{健康}\rangle$ ,  $|\text{健康の状態}\rangle = |\text{病気}\rangle$ ,  
 $|\text{心理の状態}\rangle = |\text{喜}\rangle$ ,  $|\text{心理の状態}\rangle = |\text{怒}\rangle$ ,  
 $|\text{心理の状態}\rangle = |\text{哀}\rangle$ ,  $|\text{心理の状態}\rangle = |\text{楽}\rangle$ , ...
- ここで注意すべきことは、状態を表す記号  $|\cdot\rangle$  や等号を導入して、「形式化」してみたのですが、この式は、「数学的」なものとは言えません。それは、普通の言語で簡単に言い換えることができるし、そこでの認識の内容は質的なもので、物理的・数学的認識につながる量的・数的な認識ではありません。

## 「形式化」してわかること

- もう一つわかることは、同じ記号を使っていますが、左辺の|状態>と右辺の|状態>とは、表している意味が違うということです。
- 例えば、|生活の状態> = |貧しい> という式を考えてみれば分かるように、左辺の|生活の状態>は、状態を知りたいと思う認識の対象を指しているのに対して、右辺の|貧しい>は、その対象が認識の時点での具体的な状態を指しています。普通の言語に直してみれば、左辺は主語で右辺は述語です。
- こうした関係は、プログラミング言語や数学での「変数」で考えるともっと分かりやすいと思います。左辺は、変数の名前を指して、右辺は変数の値を指しています。「状態」は、形式的には、「変数」に「値」を割り当てることで表現されるという抽象は、とても強力なものです。

# 質的狀態の認識

# 質的な状態の認識



対象

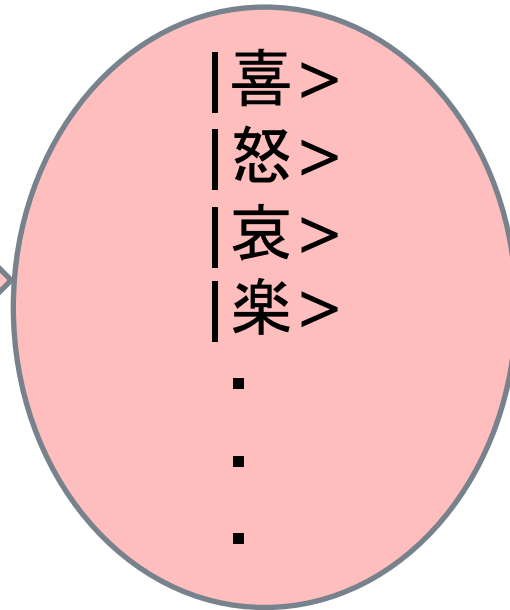
# 質的な状態の認識



認識

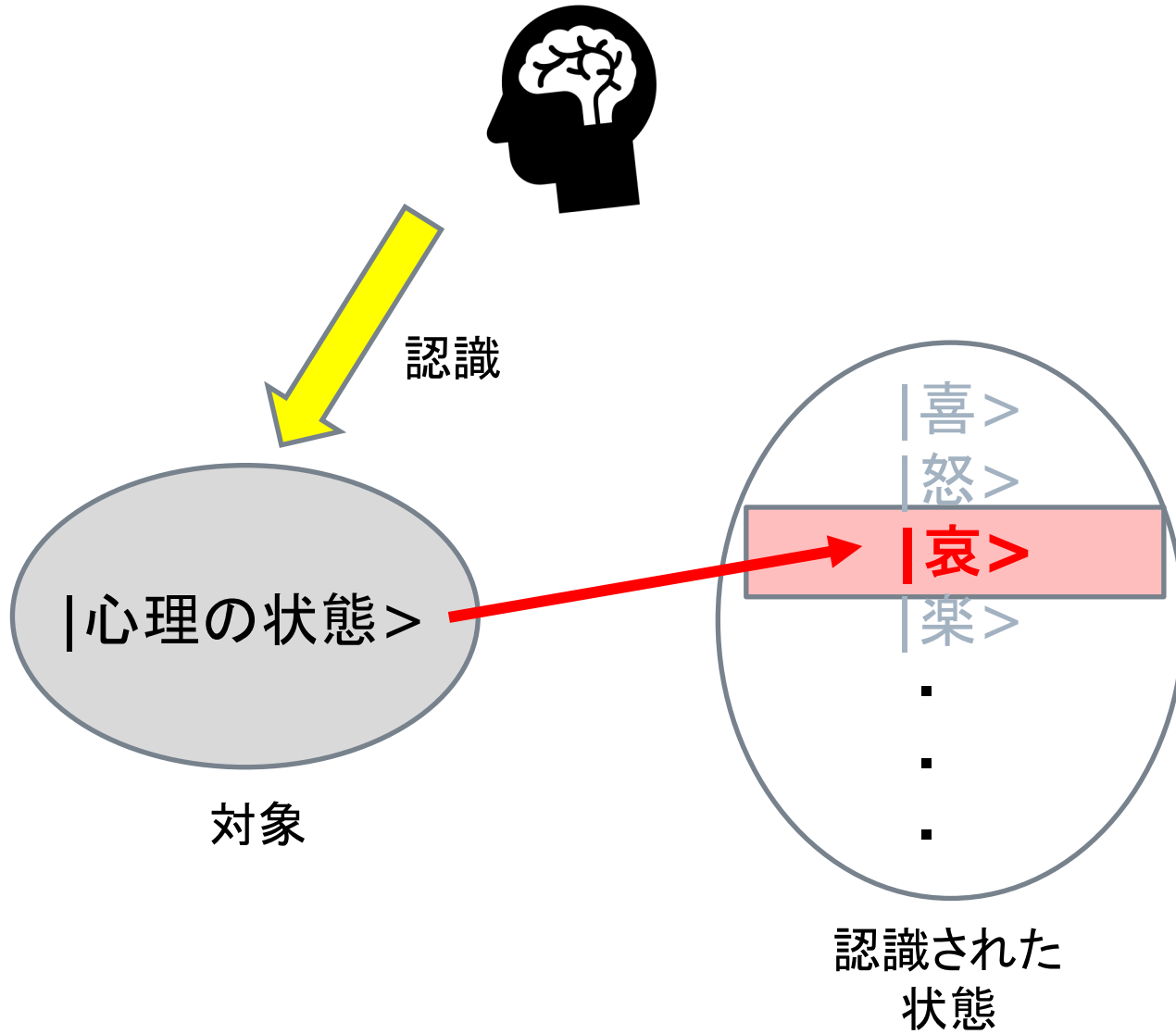


対象

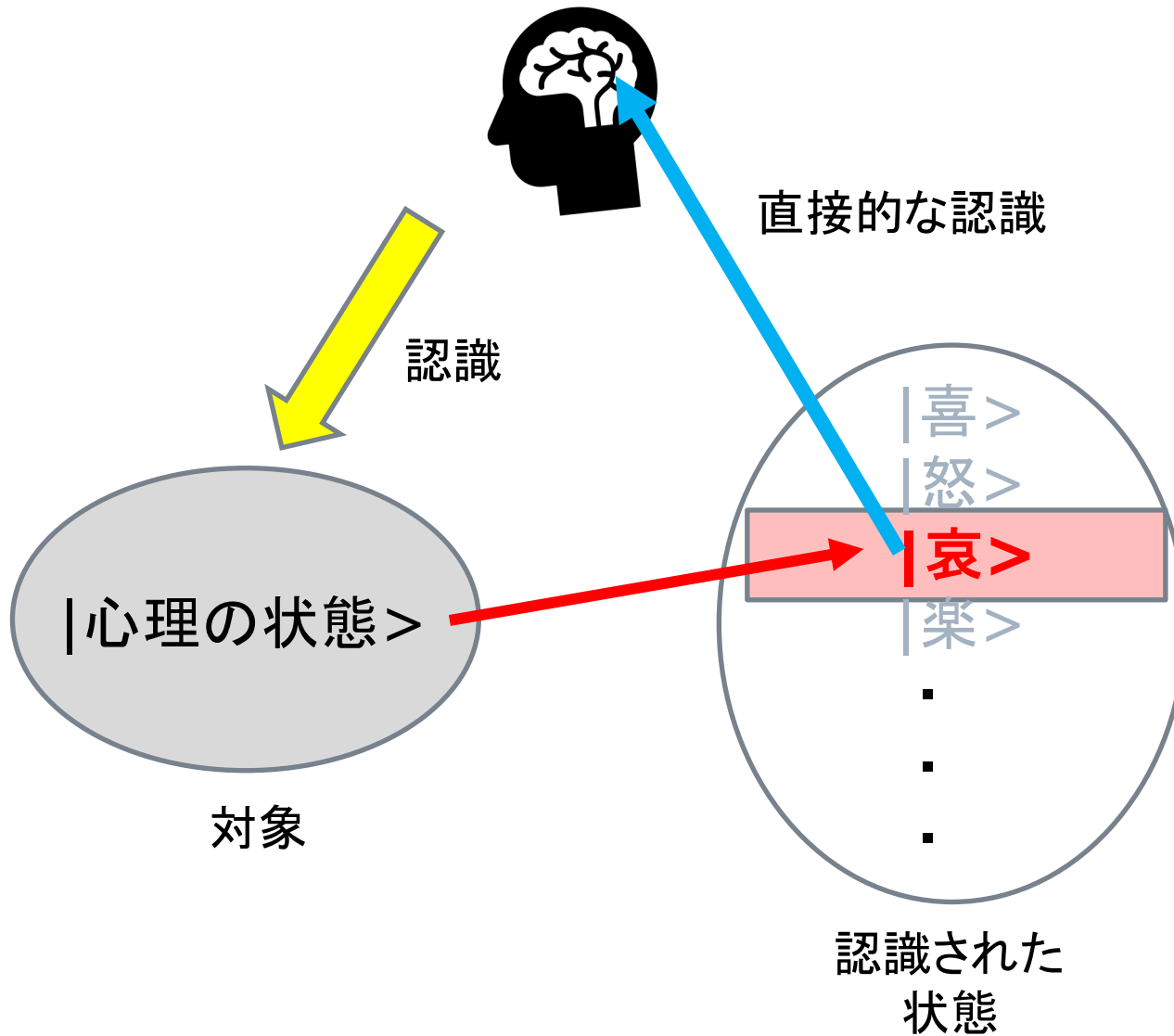


心理状態で  
可能な状態

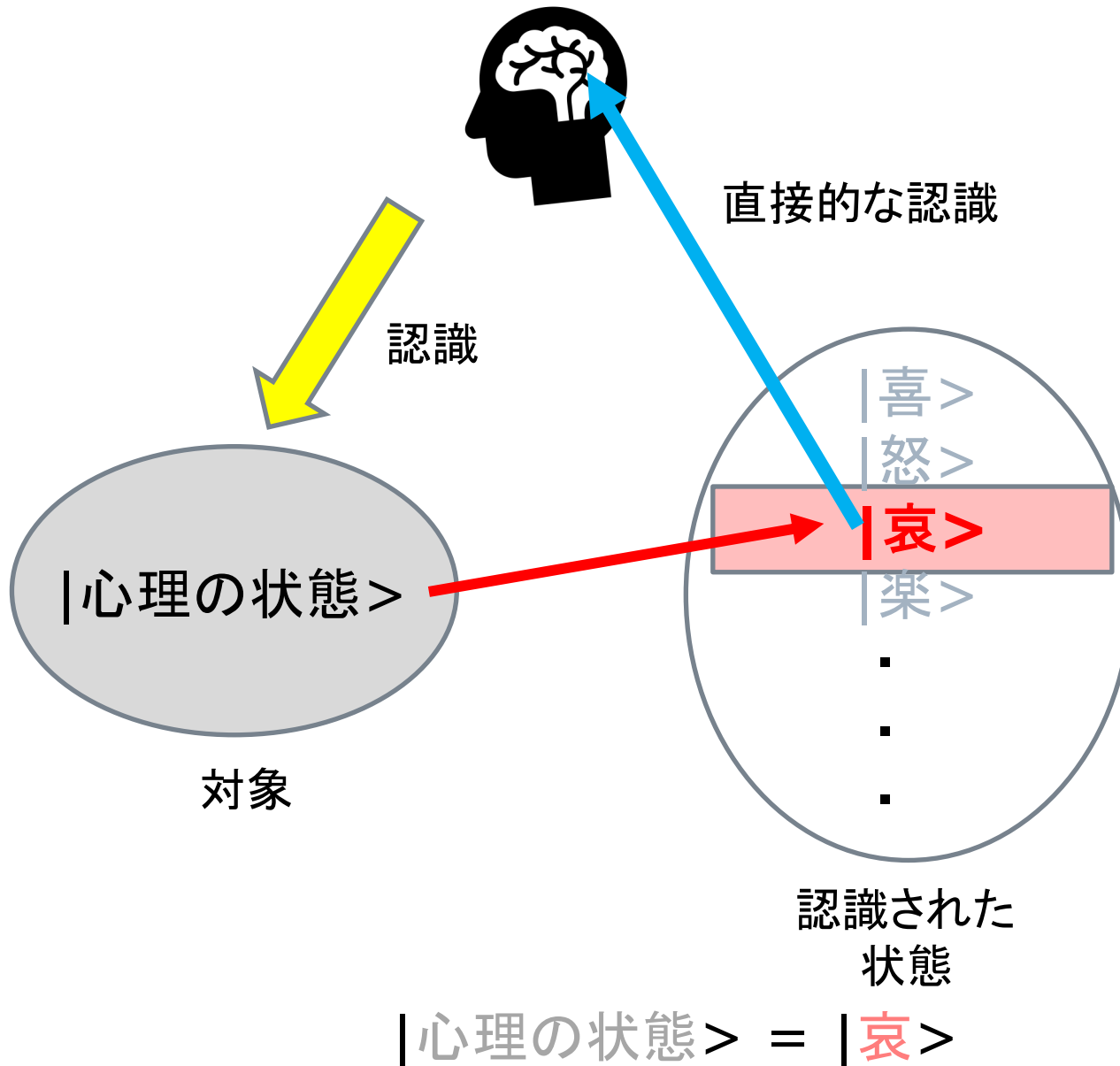
# 質的な状態の認識



# 質的な状態の認識



# 質的な状態の認識



# 質的な状態の認識

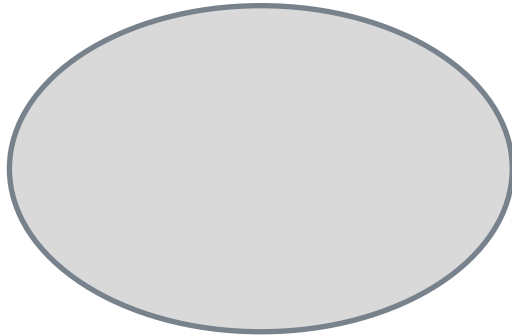


形式化された間接的な  
質的な状態の認識

$|\text{心理の状態}\rangle = |\text{哀}\rangle$

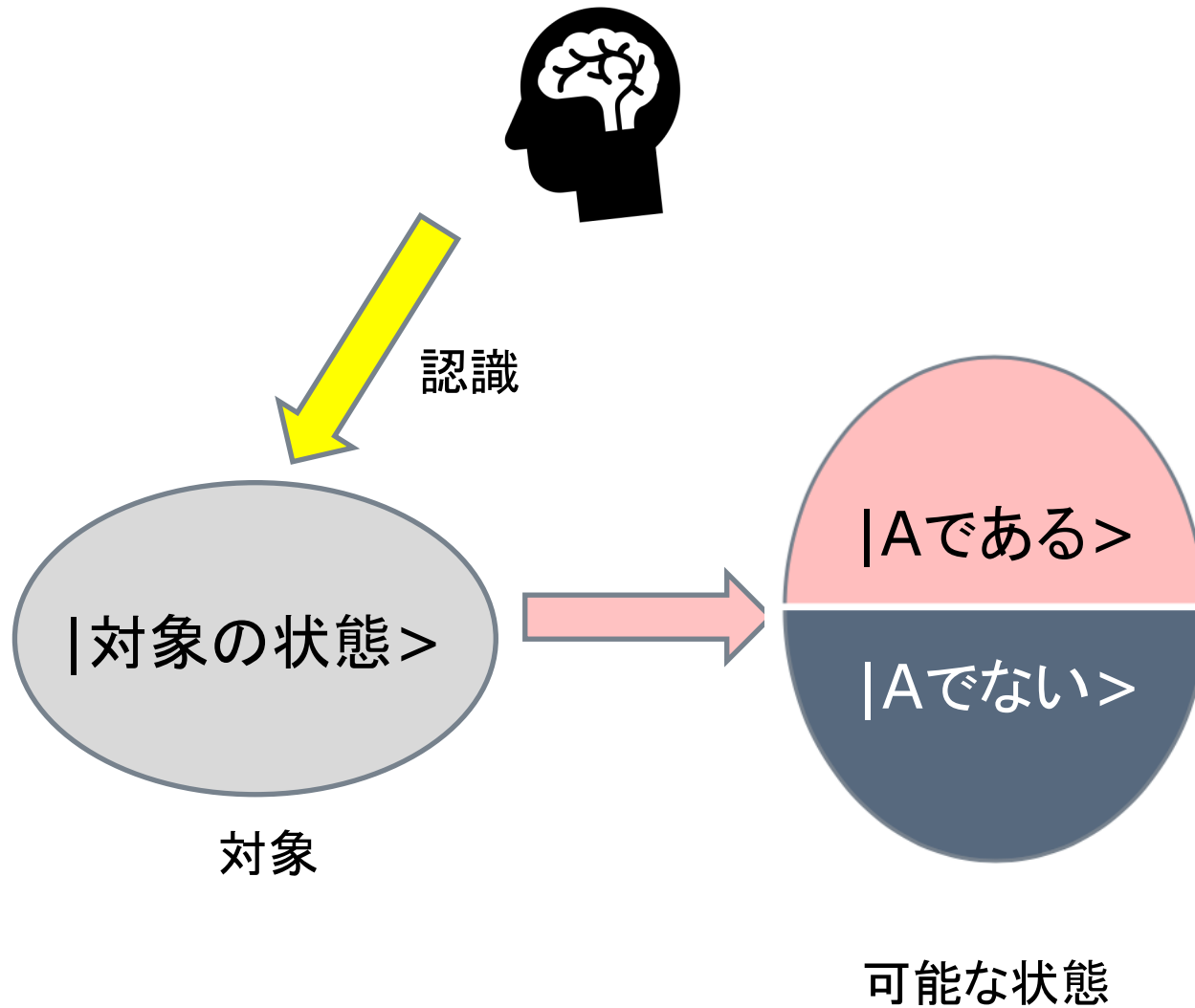
# 二つの値のみを取る bit型の質的状态の認識

# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識

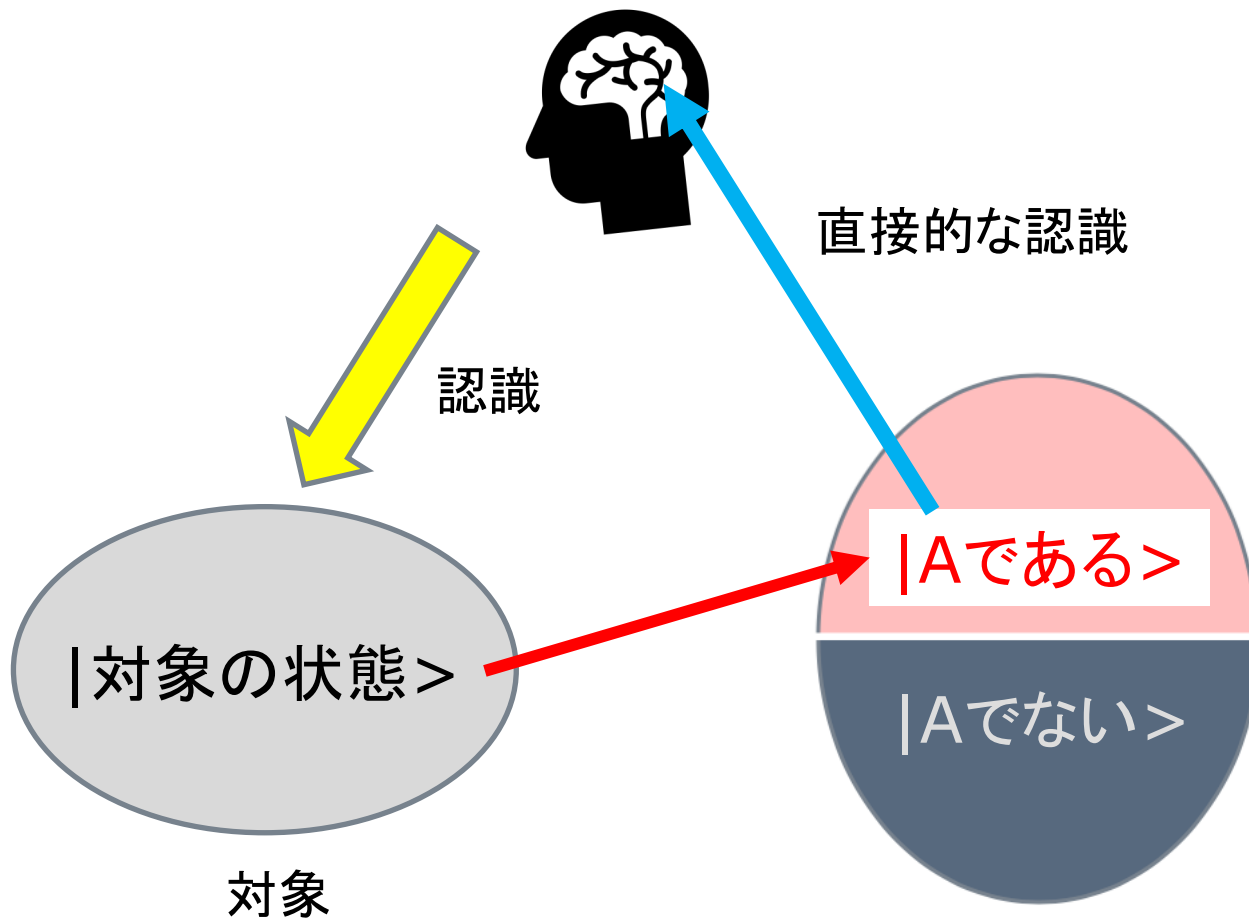


対象

# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識

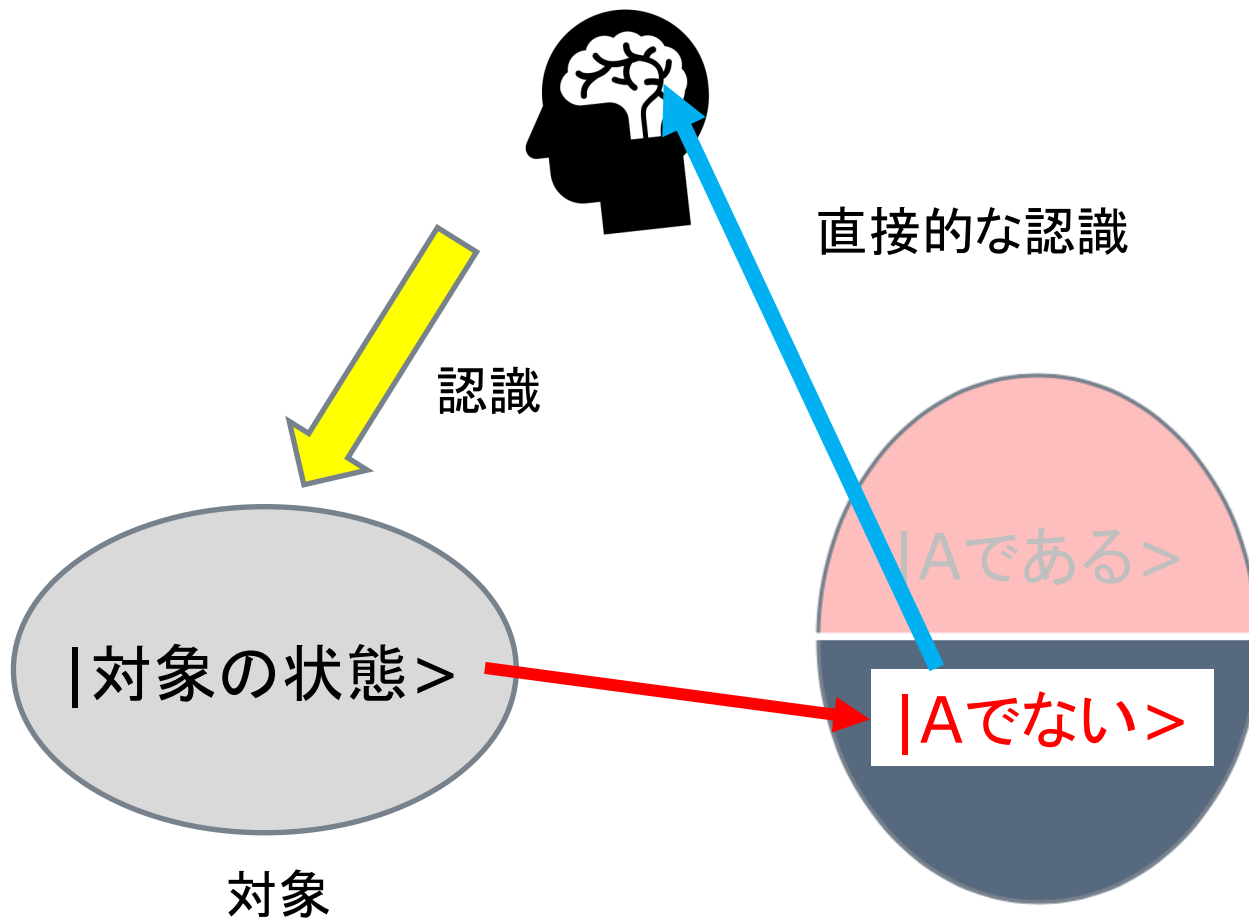


# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識

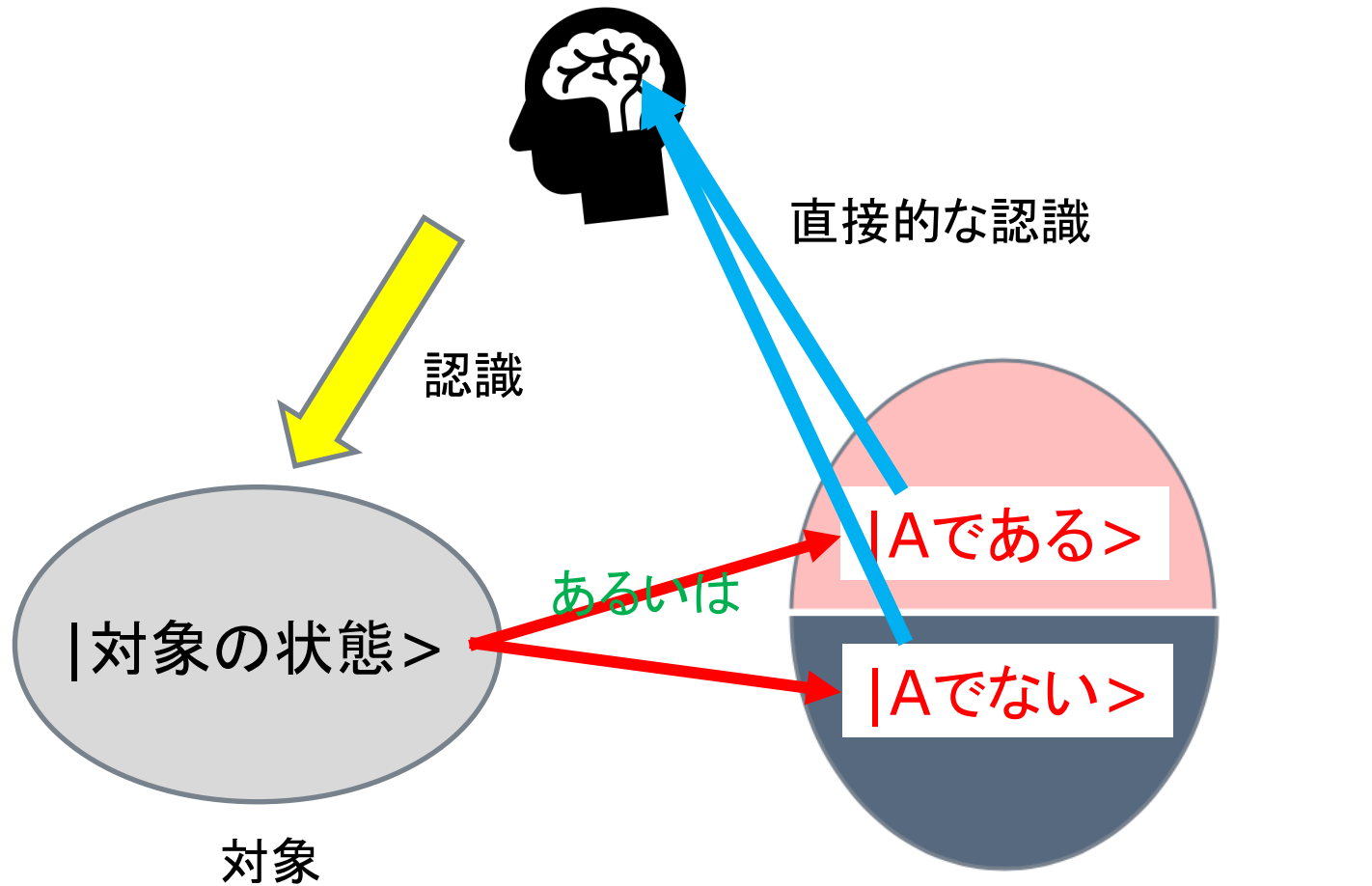


あるいは

# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識



# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識



$$\begin{aligned} |対象の状態\rangle &= |Aである\rangle \\ |対象の状態\rangle &= |Aでない\rangle \end{aligned} \quad \text{あるいは}$$

# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識



形式化された間接的な  
質的な状態の認識

$|\text{対象の状態}\rangle = |A\text{である}\rangle$  あるいは  
 $|\text{対象の状態}\rangle = |A\text{でない}\rangle$

# 二つの値のみを取るbit型の質的な状態の認識

$$\begin{aligned} |\text{対象の状態}\rangle &= |A\text{である}\rangle && \text{あるいは} \\ |\text{対象の状態}\rangle &= |A\text{でない}\rangle \end{aligned}$$

上の式は、次の式と同じである

$$\begin{aligned} |\text{対象の状態}\rangle &= |A\rangle && \text{あるいは} \\ |\text{対象の状態}\rangle &= \text{not}|A\rangle \end{aligned}$$

上の式は、次のように変形できる

$$\begin{aligned} |\text{対象の状態}\rangle &= \mathbf{1}|A\rangle && \text{あるいは} \\ |\text{対象の状態}\rangle &= \mathbf{0}|A\rangle \end{aligned}$$

この形は、次に見る量的な状態の認識の形と共通するものである

# 量的状態の認識

## 「物理的な状態」の表現

- 状態を表すのは、質的な情報だけではありません。
- 例えば、体重 68kg, 身長 168cm のような体重・身長といった物理的な状態は、単位の違いを無視すれば、一つの数字で表すことができます。単位を含めて表現すれば、次のようになります。
  
- $| \text{僕の体重} \rangle = 68 | \text{体重kg} \rangle$   
 $| \text{僕の身長} \rangle = 168 | \text{身長cm} \rangle$
  
- ここでは、一つの状態に一つの数字と単位が対応しています。

## 「量的な状態」の表現

- 状態を表すのは、質的な情報だけではありません。
- 例えば、体重 68kg, 身長 168cm のような体重・身長といった物理的な状態は、単位の違いを無視すれば、一つの数字で表すことができます。単位を含めて表現すれば、次のようになります。

$$\begin{array}{ccc} & \text{数} & \text{単位} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \square \text{ |僕の体重}\rangle = & 68 & \text{|体重kg}\rangle \\ \text{|僕の身長}\rangle = & 168 & \text{|身長cm}\rangle \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{数} & \text{単位} \end{array}$$

- ここでは、一つの状態に一つの数字と単位が対応しています。

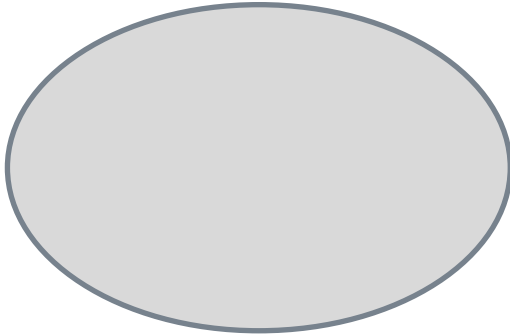
## 「量的な状態」の表現

- 状態を表すのは、質的な情報だけではありません。
- 例えば、体重 68kg, 身長 168cm のような体重・身長といった物理的な状態は、単位の違いを無視すれば、一つの数字で表すことができます。単位を含めて表現すれば、次のようになります。

$$\begin{array}{ccc} & \text{数} & \text{単位} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \square \text{ |僕の体重}\rangle = & 68 & \text{|体重kg}\rangle \\ \text{|僕の身長}\rangle = & 168 & \text{|身長cm}\rangle \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{数} & \text{単位} \end{array}$$

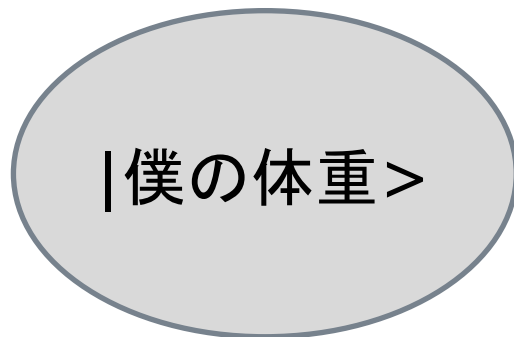
- ここでは、一つの状態に一つの数字と単位が対応しています。物理量の状態では、状態の中から「数」が取り出され、基本となる状態として「単位」が記号 $|\cdot\rangle$ の中に残ります。

# 量的な状態の認識

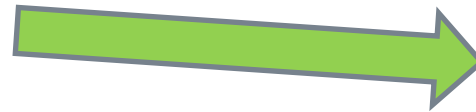


対象

# 量的な状態の認識



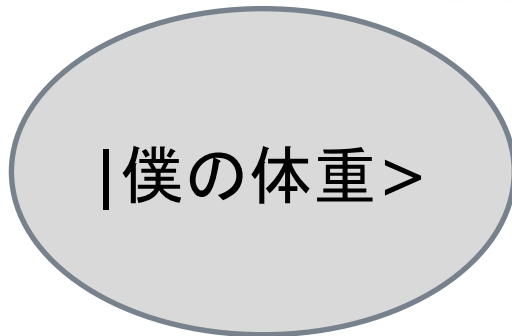
対象



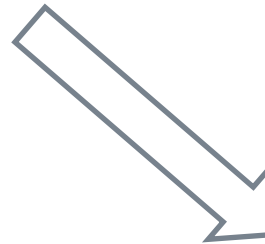
# 量的な状態の認識



観測・測定



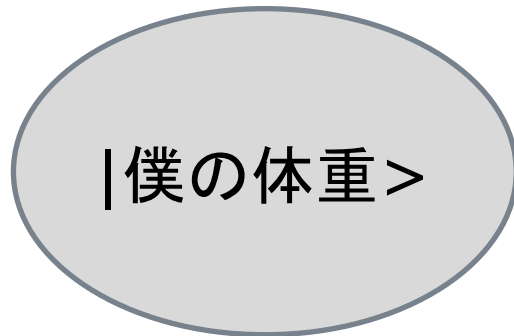
対象



数値



# 量的な状態の認識



対象



$$|\text{僕の体重}\rangle = 68|\text{体重kg}\rangle$$

# 量的な状態の認識



形式化された  
量的な状態の認識

$$|\text{僕の体重}\rangle = 68|\text{体重kg}\rangle$$

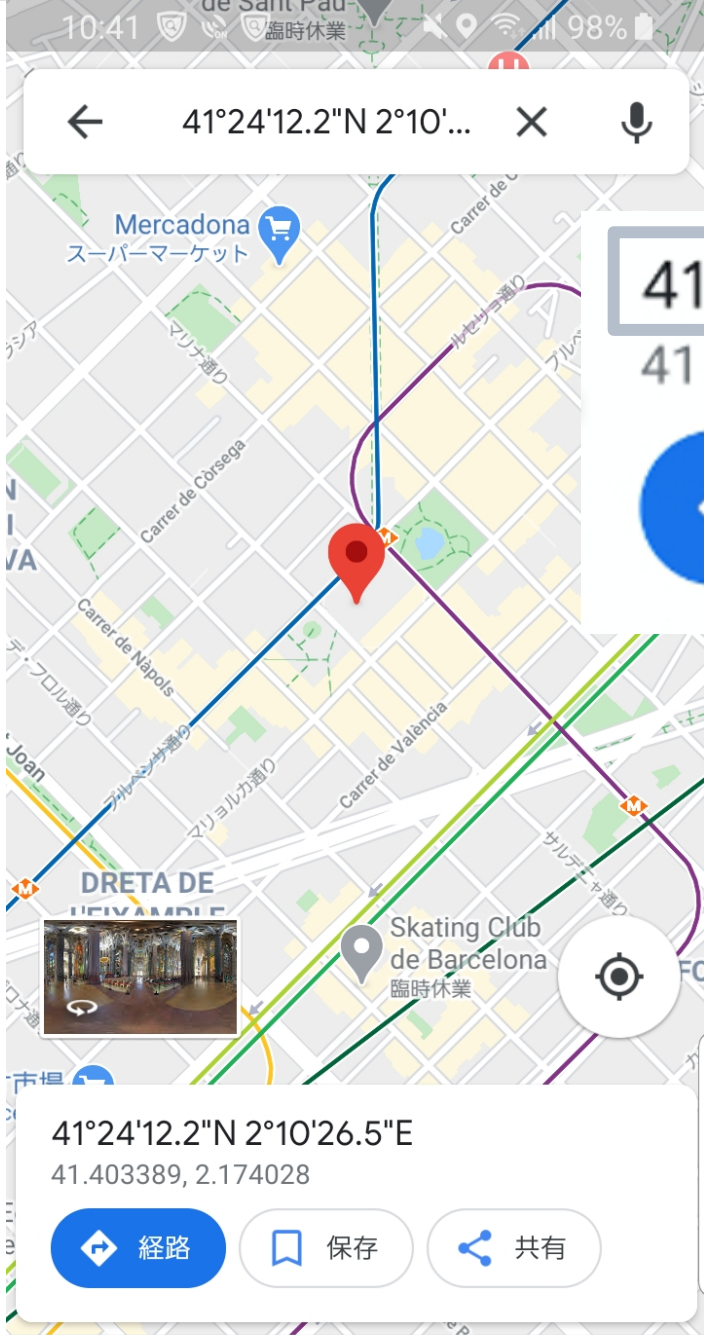
二つの数字で表現される  
量的状態

## 二つの数字で表現される量的状態 物理的な量としての「位置」

- 先にみた量的状態は、状態を表す一つの「単位」と、一つの数字で表されていました。それは、「単位」を捨象すれば、一つの数字で表されていると考えることができます。
- ところで、一つの状態なのに、それを表すのに二つの数字が必要な状態があります。たとえば、GPSで表される「位置」の情報は、北緯と東経を表す二つの数字で表されています。

二つの数字で表現される量的状態  
物理的な量としての「位置」

# 二つの数字で表される「位置」



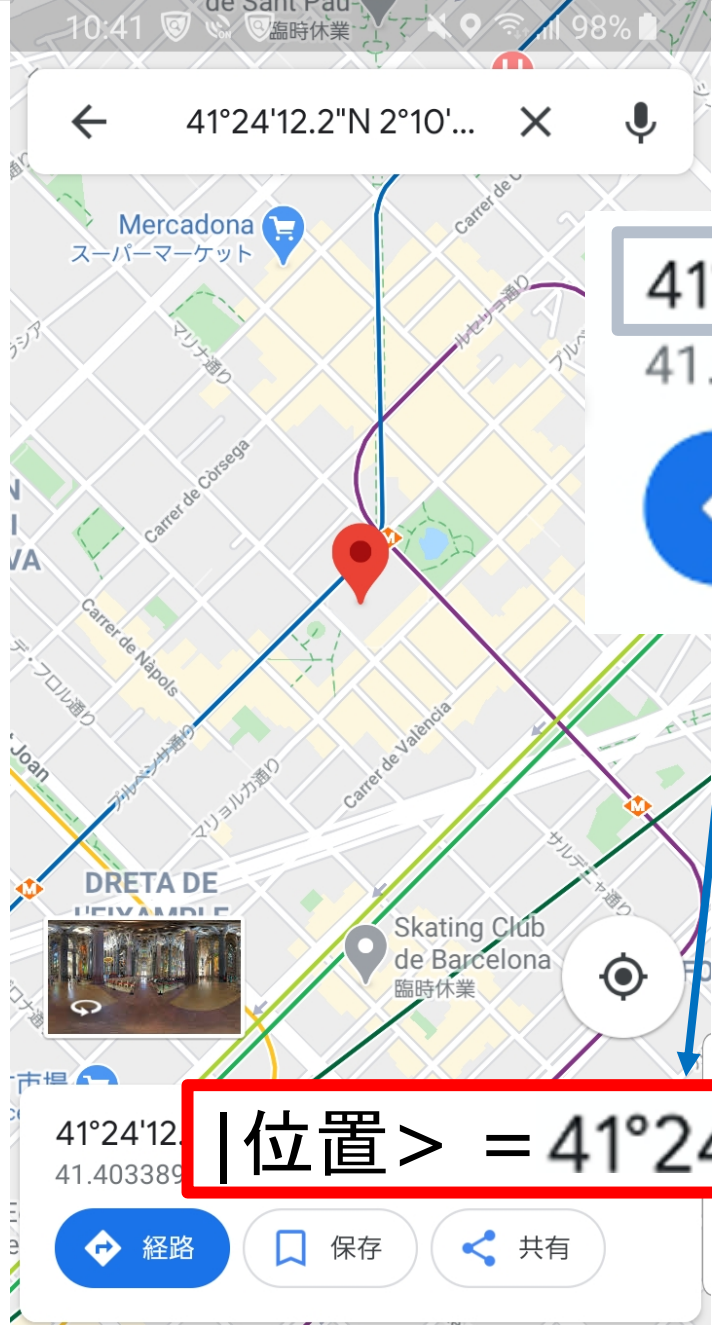
41°24'12.2"N 2°10'26.5"E  
41.403389, 2.174028



41°24'12.2"N 2°10'26.5"E  
41.403389, 2.174028



# 二つの数字で表される「位置」



41°24'12.2"N 2°10'26.5"E

41.403389, 2.174028

経路

保存

共有

位置 > = 41°24'12.2" | 北緯 > + 2°10'26.5" | 東経 >

数値 単位

数値 単位



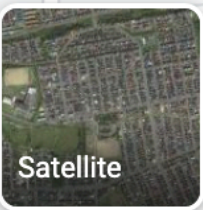
## 5-chōme-1 Tomioka

Wakkanai, Hokkaido 097-0012, Ja...

45.389850, 141.722333



二つの数字で表される「位置」



### 5-chōme-1 Tomioka

Wakkanai, Hokkaido 097-0012, Ja...

45.389850, 141.722333





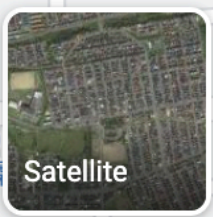
# 5-chōme-1 Tomioka

Wakkanai, Hokkaido 097-0012, Ja...

45.389850, 141.722333



|僕の位置>  
 = **45.389850** | **北緯**> + **141.722333** | **東経**>



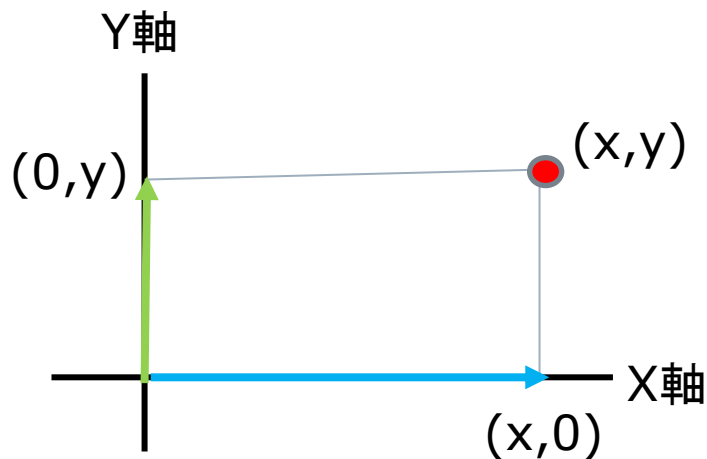
5-chōme-1 Tomioka  
 Wakkanai, Hokkaido 097-0012, Ja...  
 45.389850, 141.722333



二つの数字で表現される量的状態  
数学的な量としての「位置」

## 二つの数字で表現される量的状態 数学的な量としての「位置」

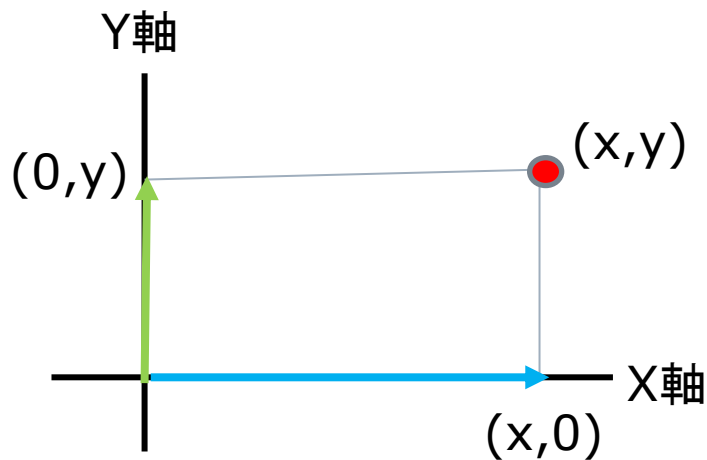
- 一つの状態を表すのに二つの数字が必要な状態で、GPSでの「位置」と並んで、我々に身近な例は、次のような XY 平面上の点の「位置」かもしれません。



# 二つの数字で表現される量的状態 数学的な量としての「位置」

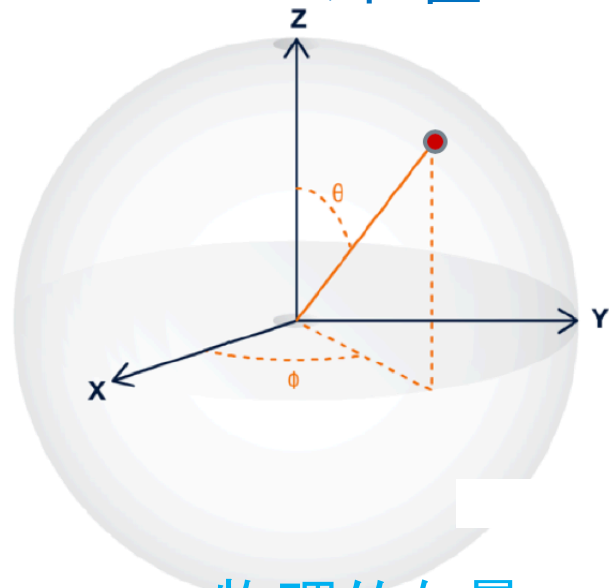
- ただ、GPS上の位置は、地球の上での位置で、物理的な意味を持つ物理的な量ですが、XY平面上の位置は、物理的な対応物はない数学的な量です。

## XY平面上の位置



数学的な量

## GPS上の位置

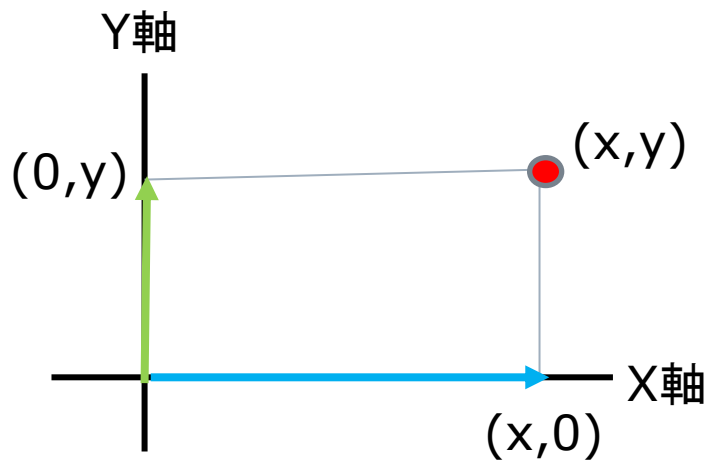


物理的な量

# 二つの数字で表現される量的状態 数学的な量としての「位置」

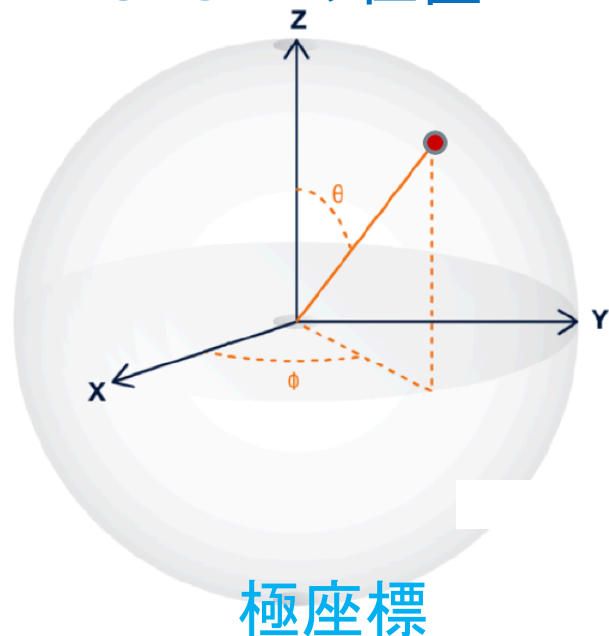
- あと、二つの位置の「座標系」は、異なったものです。座標の取り方は異なるのですが、両者を次のページに示すように、一対一に対応付けることができます。

## XY平面上の位置

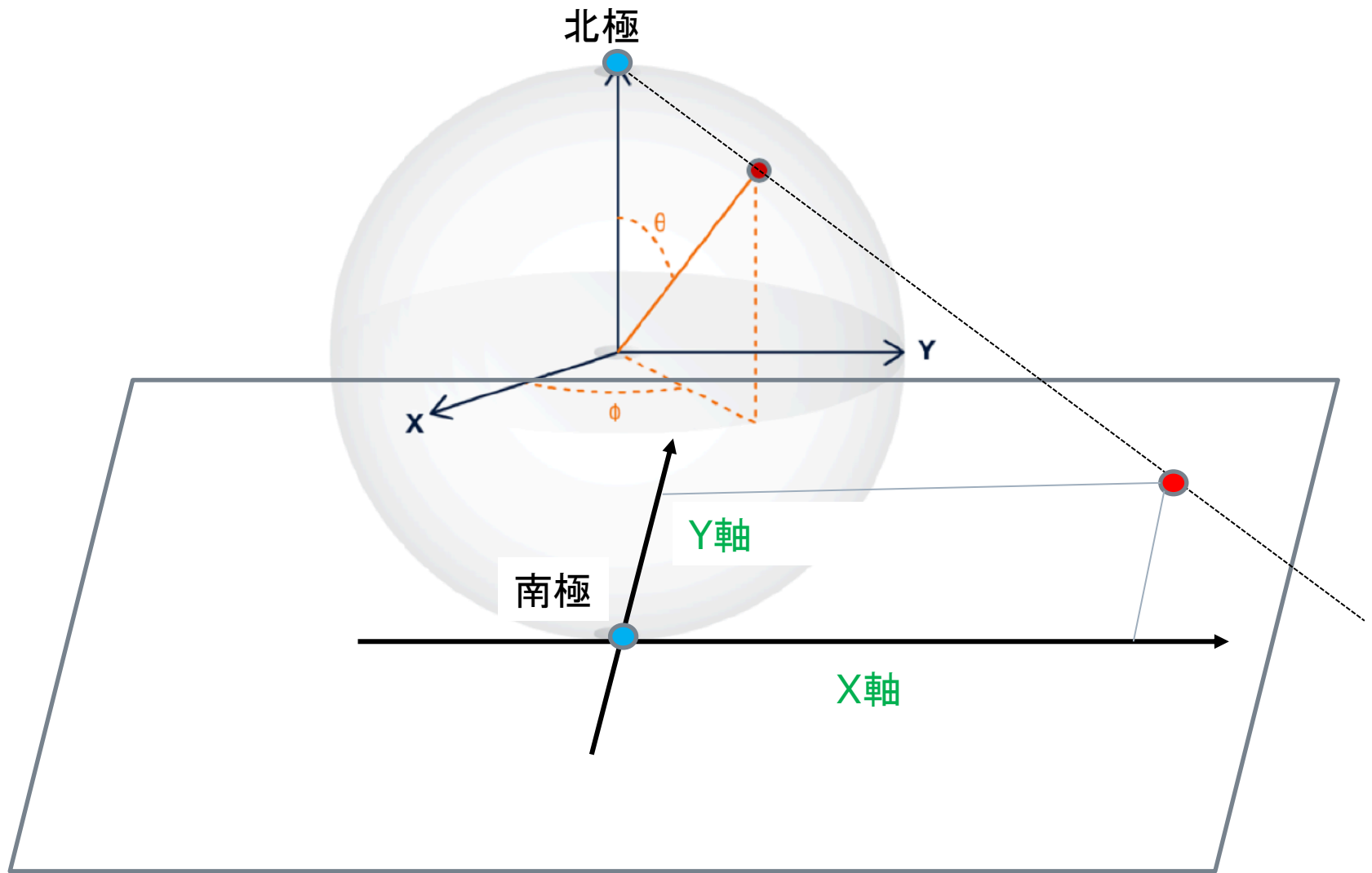


XY座標

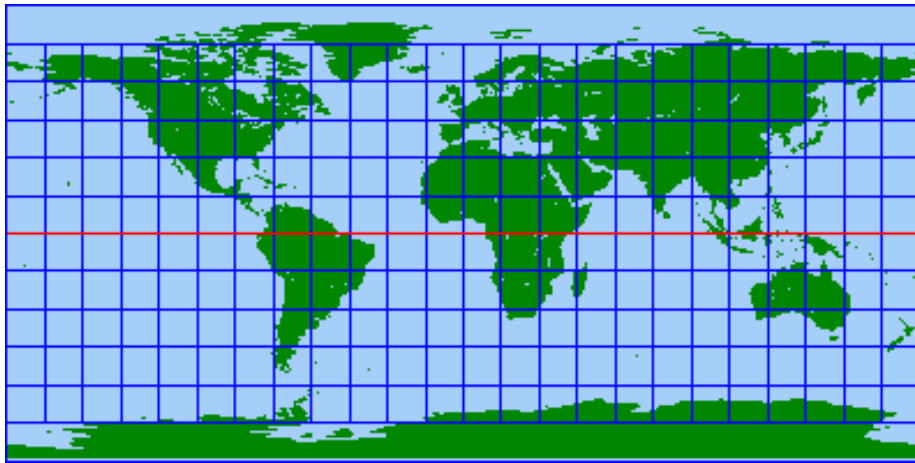
## GPS上の位置



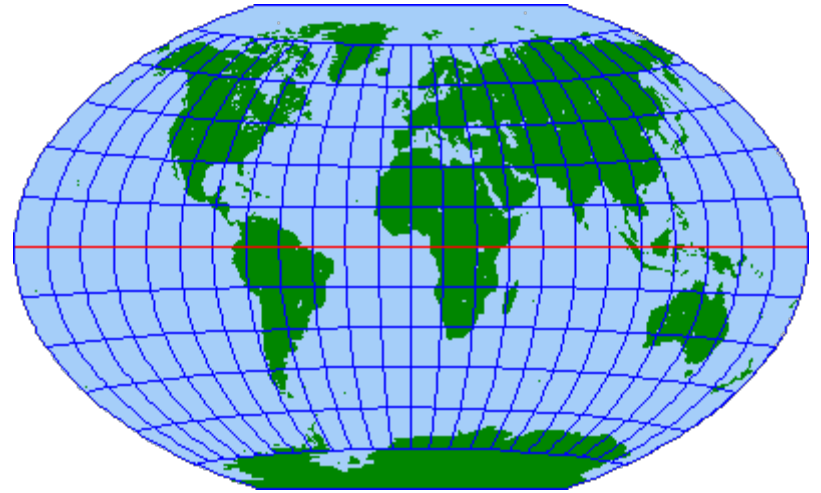
極座標



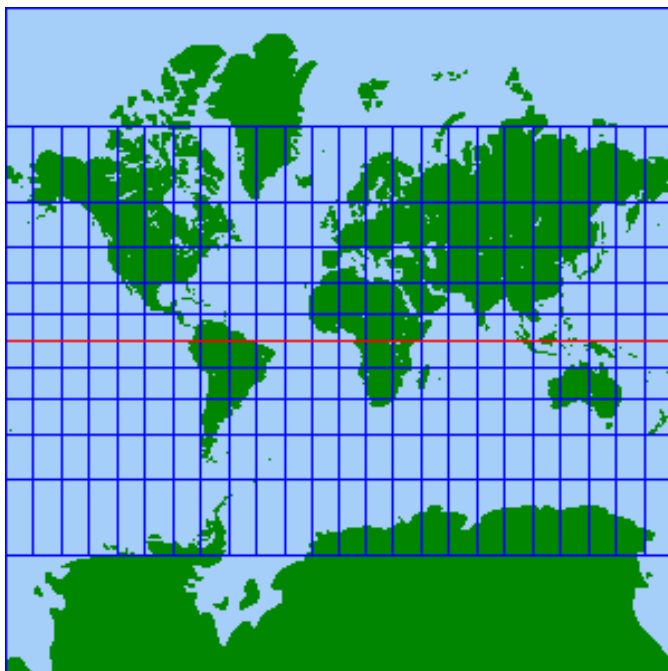
XY座標と極座標を対応づける



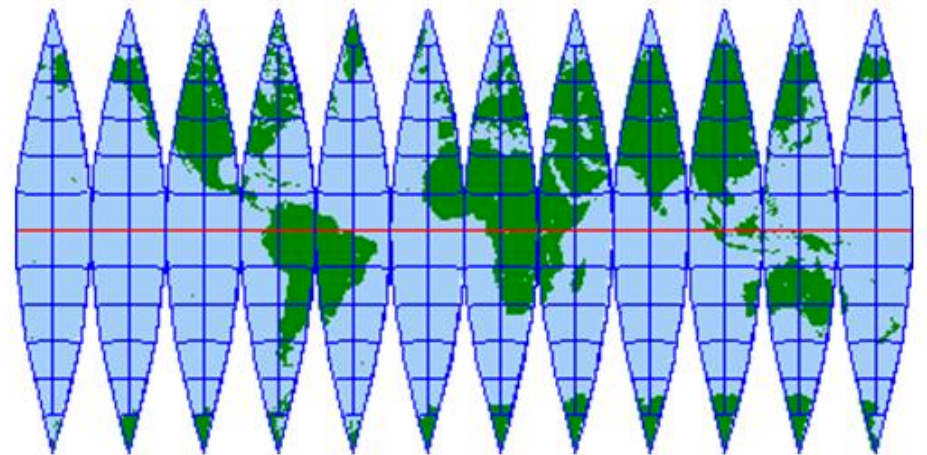
円筒図法



ヴィンケル図法



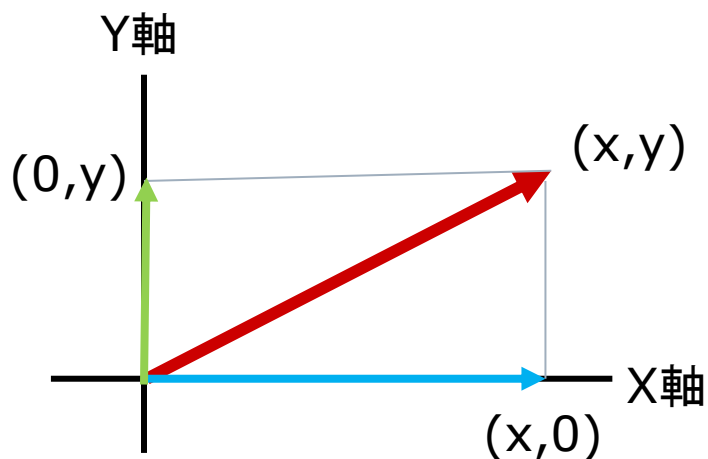
メルカートル図法



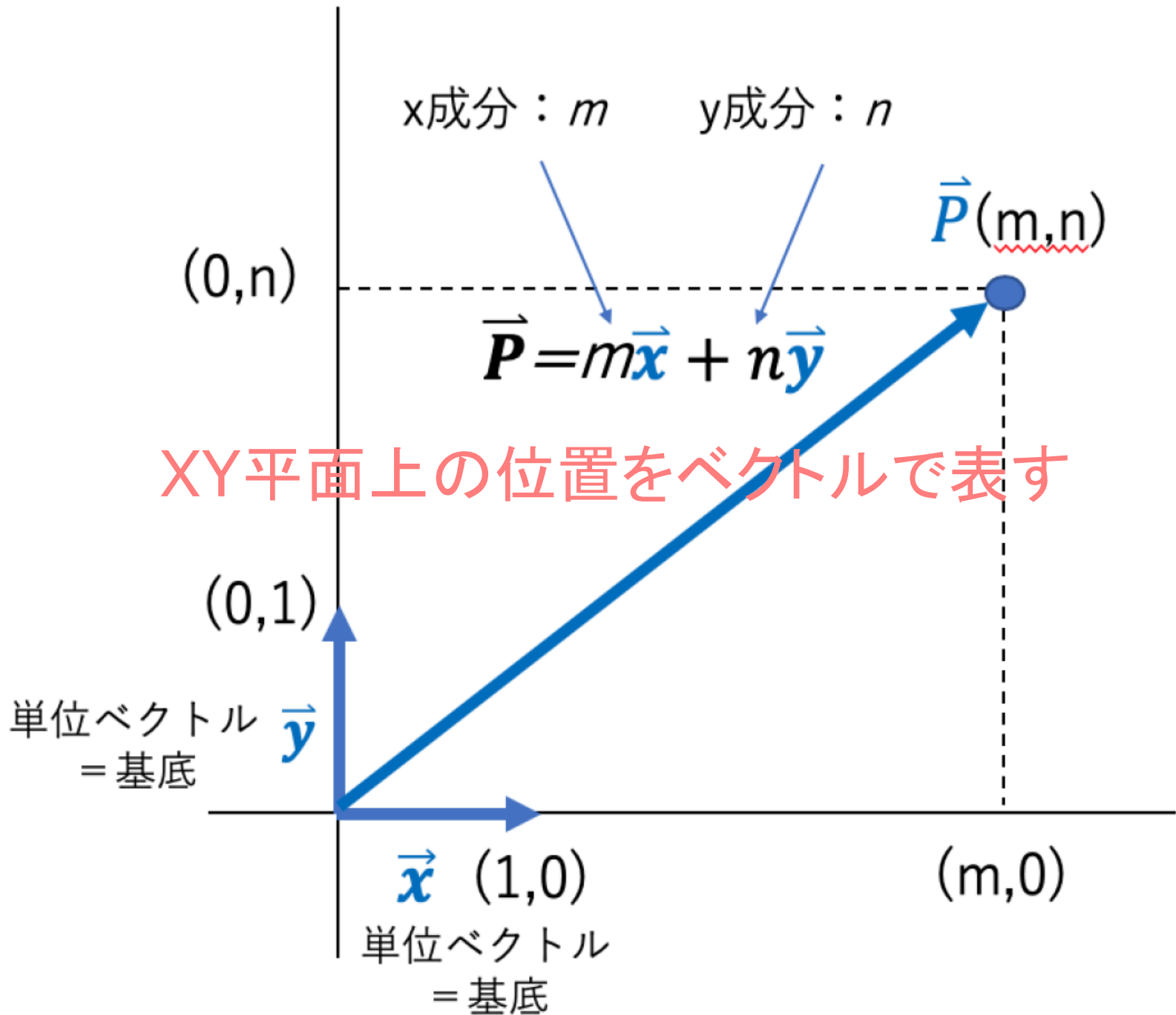
舟型多円錐図法

## XY平面上の位置をベクトルで表す

- XY平面で、二つのx軸方向の長さ1のベクトル $(1,0)$ を $x$ 、 $y$ 軸方向の長さ1のベクトル $(0,1)$ を $y$ とすると、原点から点 $P(m,n)$ に向かうベクトル $P$ は、 $P=mx+ny=m(1,0)+n(0,1)$ と表すことができます。
- この時、 $m$ を $P$ の「 $x$ 成分」、 $n$ を $P$ の「 $y$ 成分」といいます。
- また、二つの単位ベクトル  $x(1,0)$ ,  $y(0,1)$ を、「基底」ベクトルと呼びます。



$$\begin{aligned} (x,y) &= \overset{\text{x軸方向の成分}}{\color{blue}(x,0)} + \overset{\text{y軸方向の成分}}{\color{green}(0,y)} \\ &= \underset{\text{x軸方向の単位成分}}{\color{blue}x}(1,0) + \underset{\text{y軸方向の単位成分}}{\color{green}y}(0,1) \end{aligned}$$



$\vec{P} = m\vec{x} + n\vec{y}$  を状態の言葉で表現する

- $\vec{P} = m\vec{x} + n\vec{y}$  という XY 平面上の位置の表現は、次のように書き直すことができます。

$$|P\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

$m, n$  は数です。ここでも、 $|x\rangle, |y\rangle$  は、それぞれ「独立」な  $x$ -方向、 $y$ -方向の「単位」になっています。

- これは、先に見た GPS での次のような位置の表現と、形式的には同じものです。

$$|P\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

- いずれの形式でも、位置の状態  $|P\rangle$  は、座標系の取り方にかかわらず、二つの数で表現されています。これは、我々が普段扱う位置の状態が持つ情報の、とても大事な特徴です。

二つの数字で表現される量的状態  
「重ね合わせ」

# 量子の状態は、二つの数字で表される

- 量子の状態 $|Q\rangle$ は、次のように二つの数字 $m, n$ で表されます。

$$|Q\rangle = m|0\rangle + n|1\rangle$$

これは、先に見た 次のようなXY平面上の位置の表現や、GPSでの位置の表現と同じ形をしています。

- XY平面上の位置の表現

$$|XY\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

- GPSでの位置の表現

$$|GPS\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

こうした状態を状態の「重ね合わせ」という「重ね合わせ」の例

□ 量子の状態 $|Q\rangle$

$$|Q\rangle = m|0\rangle + n|1\rangle$$

□ XY平面上の位置の表現

$$|XY\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

□ GPSでの位置の表現

$$|GPS\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

# 「重ね合わせ」の状態を構成するもの 数字二つ

□ 量子の状態 $|Q\rangle$

$$|Q\rangle = m|0\rangle + n|1\rangle$$

□ XY平面上の位置の表現

$$|XY\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

□ GPSでの位置の表現

$$|GPS\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

# 「重ね合わせ」の状態を構成するもの 二つの基本となる単位状態(基底)

□ 量子の状態 $|Q\rangle$

$$|Q\rangle = m|0\rangle + n|1\rangle$$

□ XY平面上の位置の表現

$$|XY\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

□ GPSでの位置の表現

$$|GPS\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

なぜ二つの数字で表されるのか  
基本となる単位状態(基底)が独立だから

□ 量子の状態 $|Q\rangle$

$$|Q\rangle = m|0\rangle + n|1\rangle$$

独立

□ XY平面上の位置の表現

$$|XY\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

独立

□ GPSでの位置の表現

$$|GPS\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

独立

# 「重ね合わせ」の状態を構成する 数字二つを基底についての成分という

□ 量子の状態 $|Q\rangle$

$$|Q\rangle = m|0\rangle + n|1\rangle$$

成分

□ XY平面上の位置の表現

$$|XY\rangle = m|x\rangle + n|y\rangle$$

成分

□ GPSでの位置の表現

$$|GPS\rangle = m|\text{北緯}\rangle + n|\text{東経}\rangle$$

成分

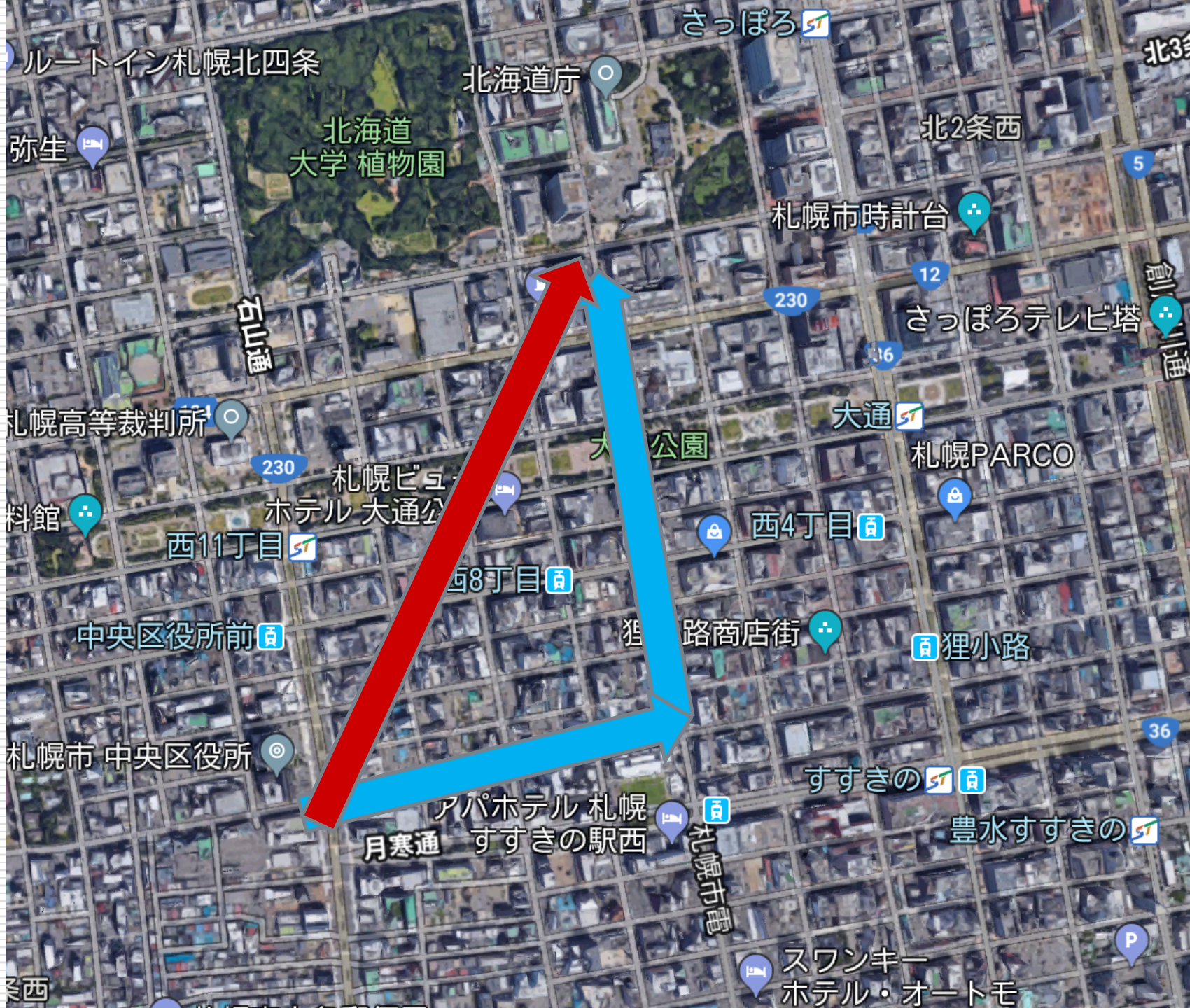
# 「重ね合わせ」の状態の一般化と もっとも単純な「重ね合わせ」としての **qubit**

- 「重ね合わせ」の状態は、次のようにして一般化できます。
  - 互いに独立な  $n$  個の基底  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$  を取ります。
  - $n$  個の数  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$  を取って
  - 一般的な「重ね合わせ」の状態  $|\Psi\rangle$  を次のように定義します。  
$$|\Psi\rangle = n_1|e_1\rangle + n_2|e_2\rangle + n_3|e_3\rangle + \dots + n_n|e_n\rangle$$
  
- もっとも単純な「重ね合わせ」の状態、すなわち、二つの状態の「重ね合わせ」の状態を **qubit** といいます。  
$$|\text{qubit}\rangle = n_1|e_1\rangle + n_2|e_2\rangle$$
  
- 独立な  $n$  個の基底を、 $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$  としましょう。  
$$|\text{qubit}\rangle = n_1|0\rangle + n_2|1\rangle$$

# 物理的量と数学的量の違い

## 物理的な量と数学的な量の違いを考える

- ここで、脇道に入りますが、物理的な量と数学的な量の違いをあらためて考えてみましょう。
- 数学的には、「距離」は「二点間を結ぶ直線の長さ」です。これは、日常的にも我々の直感に反している訳ではありません。
- 例えば、札幌や京都は、碁盤の目上に街路が区画されています。こうした区画上の二つの場所の距離を測るには、直接の距離が測りにくくても、街路に沿った距離を測れば「ピタゴラスの定理」で距離を求めることができます。
- 次の図で、二点間の距離(赤い矢印)は、直接には、測りにくいのですが、街路に沿って二つの距離(青い矢印)を測れば求めることができます。
- その意味では、物理的な距離と数学的な距離は一致しています。



さっぽろ

ルートイン札幌北四条

北海道庁

北海道  
大学 植物園

北2条西

札幌市時計台

さっぽろテレビ塔

石山通

大通

札幌PARCO

札幌高等裁判所

大公園

札幌ビュ  
ホテル 大通公

西4丁目

料館

西11丁目

西8丁目

狸小路商店街

狸小路

中央区役所前

札幌市 中央区役所

アパホテル 札幌  
月寒通 すすきの駅西

すすきの

豊水すすきの

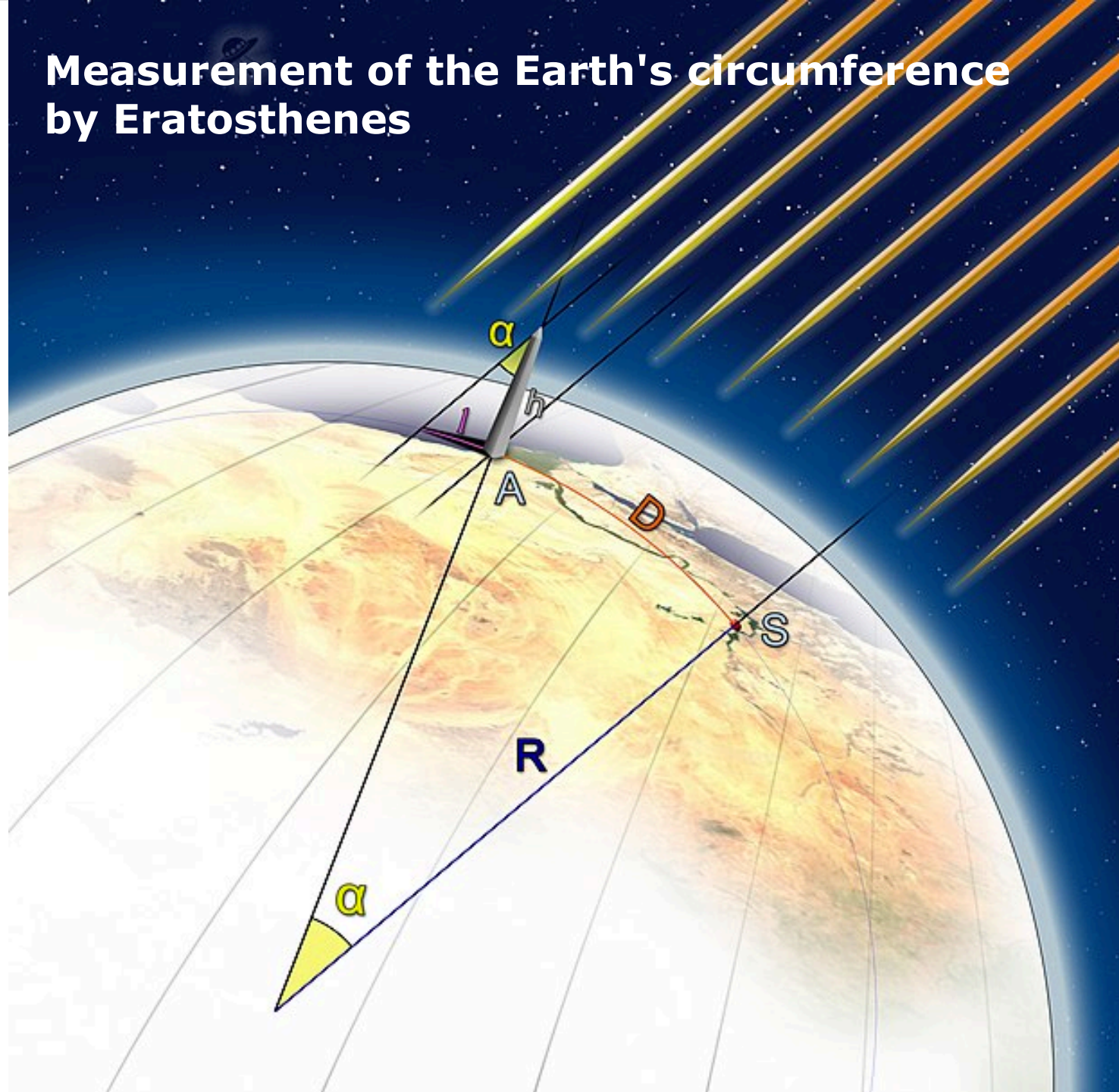
札幌市電

スワンキー  
ホテル・オートモ

# エラステネスは、どうやって地球の半径を計算したか

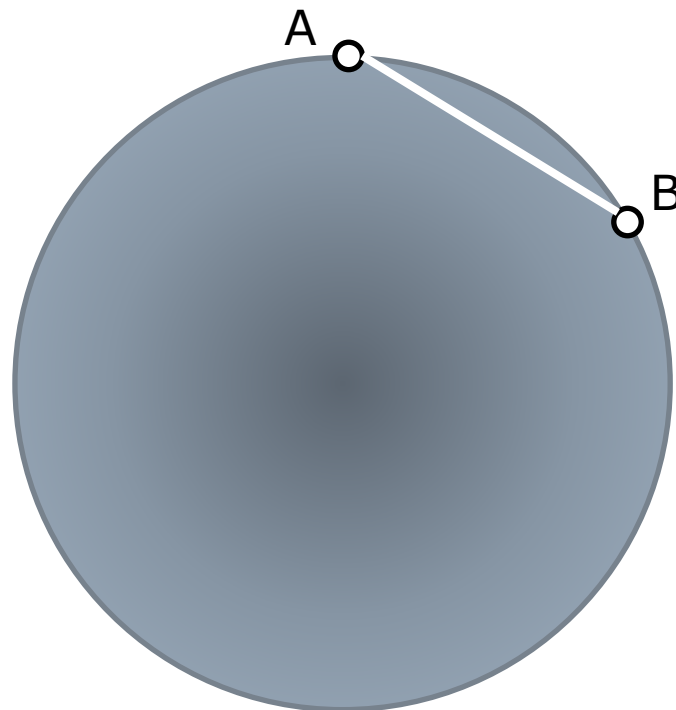
- 古代ギリシャのエラステネスは、次のようにして地球の半径を計算しました。(次の図)
  - 地点Sでは、夏至の日の正午に、太陽が真上に来る。
  - 地点Aで、夏至の日の正午に、地面に垂直に立てた棒が、地面に落とす影を観測すれば、この時刻にこの地点の垂直な向きと太陽の光がなす角度 $\alpha$ がわかる。(太陽からの光は、S地点でもA地点でも平行であると仮定している)
  - 地点Aと地点Sとの間の距離がわかれば、それから地球の半径がわかる。
- なかなか素晴らしいですね。

# Measurement of the Earth's circumference by Eratosthenes

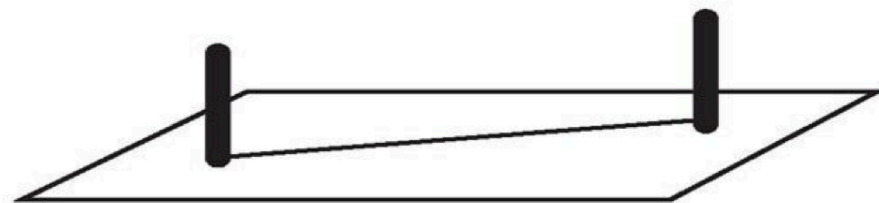
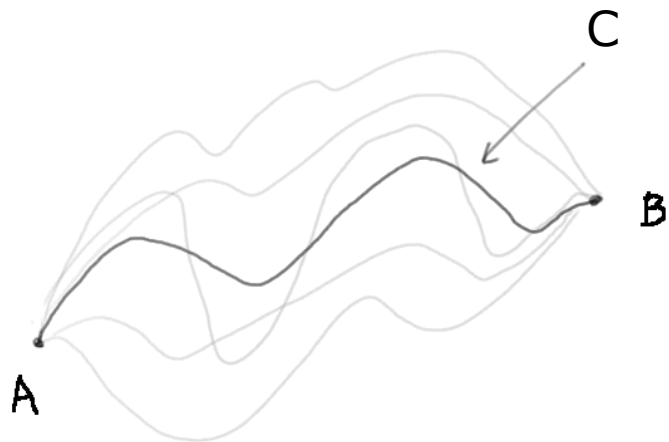


## 数学的距離と物理的距離は一致するか？

- ただ、地球上で遠く離れた場所を考えれば、二つの距離は一致しないことが分かります。
- 右の図で、AB間の数学的距離は、AとBを結んだ直線の長さですが、この直線は、地球の内部を通ることになります。その長さは直接ははかれません。
- AB間の物理的距離は、直線ABではなく、地表にそった円弧ABの長さですね。そうした線を「測地線」と言います。



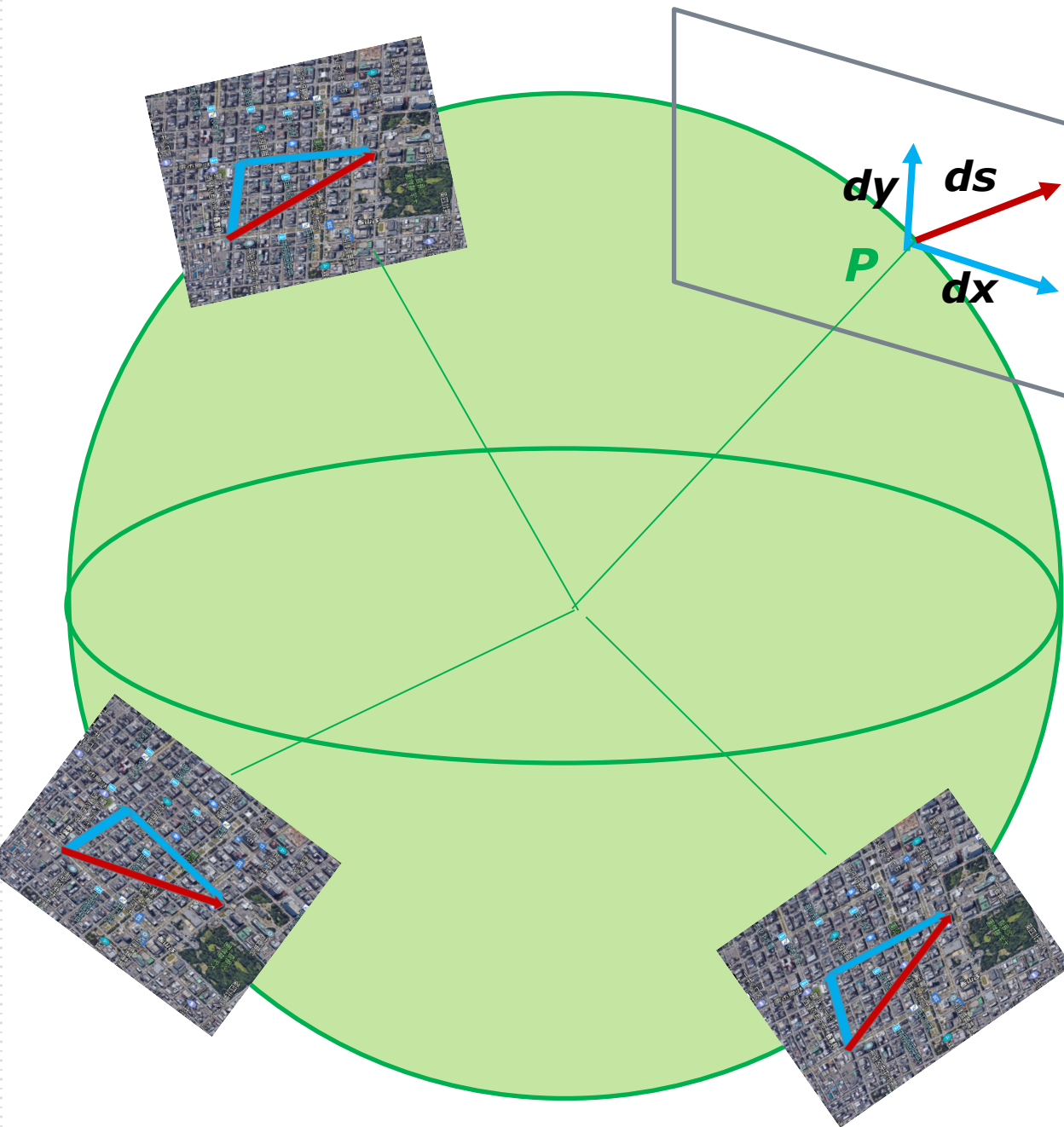
# 測地線 AとBを結ぶ最短の曲線



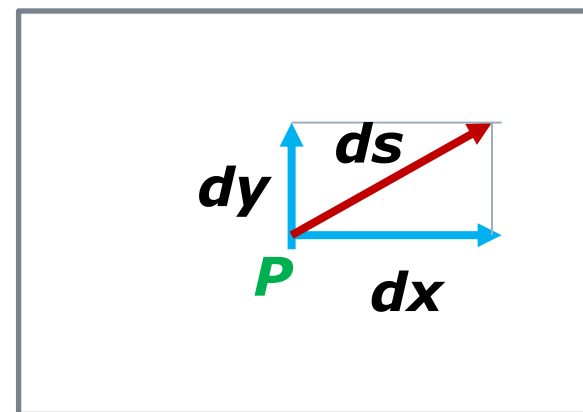
平坦な空間なら  
直線になる。

空間自体が曲がって  
測地線は、直線ではなくなる

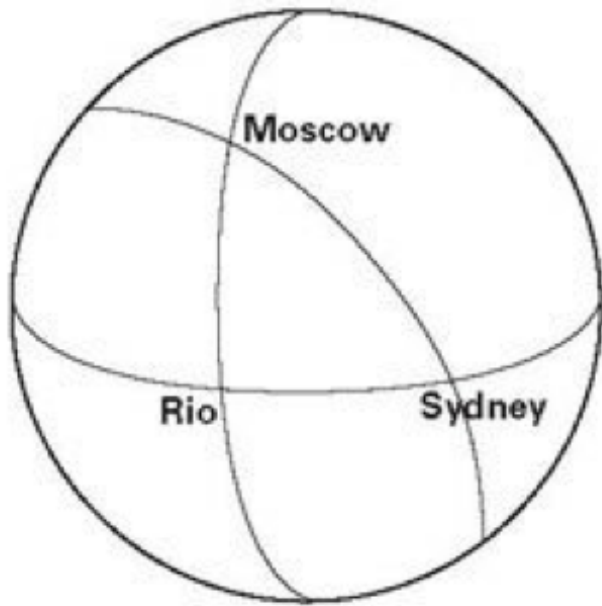




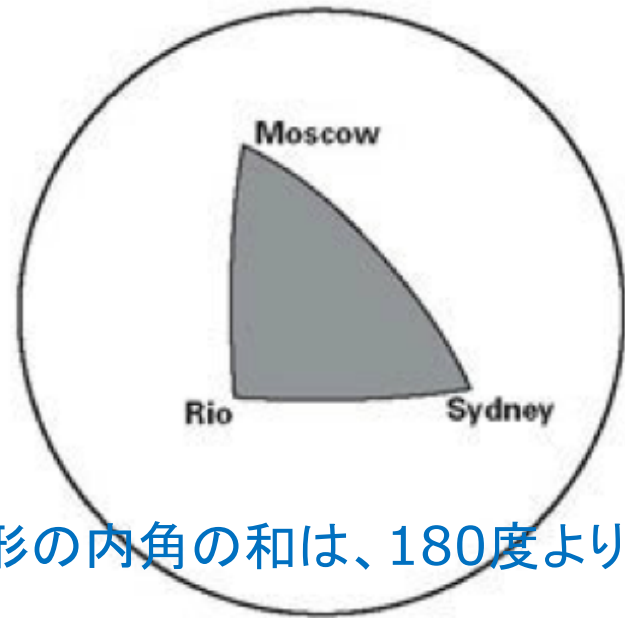
球面上の点Pで  
球に接する平面を  
考える。その平面  
が、**ごく小さなもの**  
だとすれば、平面  
上の線分の長さは、  
ピタゴラスの定理で  
求められる。



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$



楕円幾何学



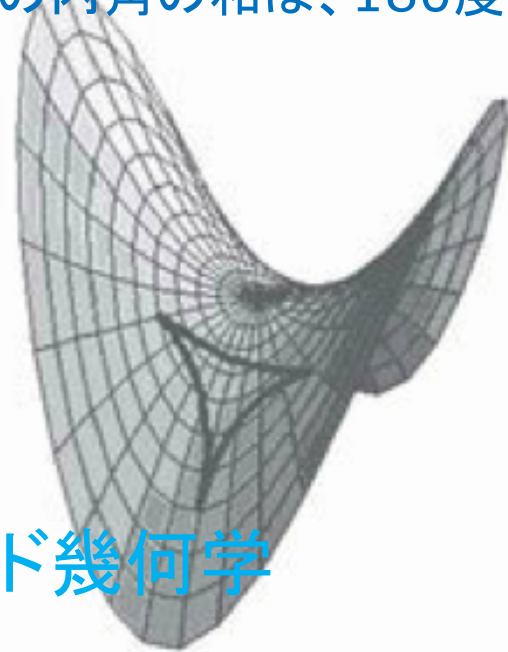
三角形の内角の和は、180度より大きい

三角形の内角の和は、180度より小さい



双曲幾何学

リーマン幾何学 非ユークリッド幾何学

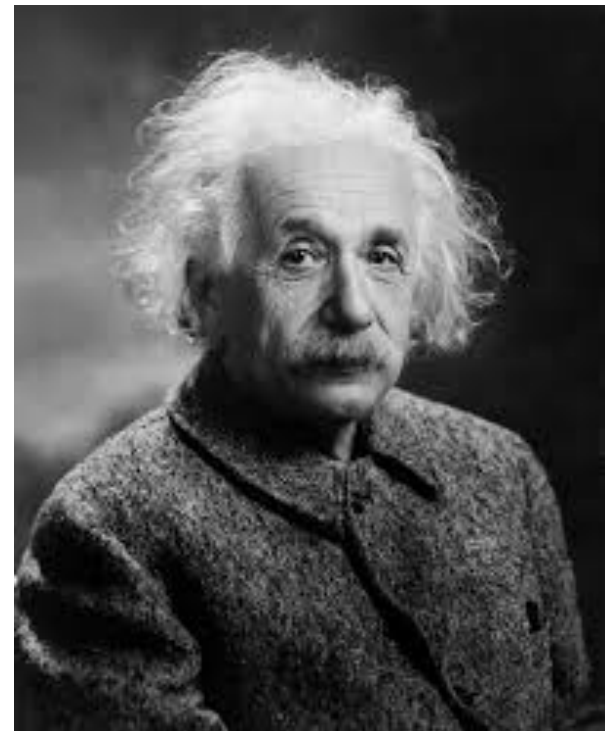


実在の空間の物理的特性に対応した、  
新しい幾何学を、数学は構成できる！

リーマン



アインシュタイン



新しい空間の幾何学に対応した、  
新しい物理学を、物理学は構成できる！



## 第二話： 量子の「状態」の観測について



# Agenda

## 第二話： 量子の「状態」の観測について

- スピンの発見
  - スピンとその測定
- 二つの状態の「重ね合わせ」の観測について
  - qubitを観測する
  - 大統領候補支持の状態の観測
  - qubitと支持状態の観測モデルの比較
- 確率はどこからでてくるのか？
  - 裏か表か？ 量子コインの話
  - 確率と確率振幅
  - 状態  $|A\rangle$  に複素数を掛ける

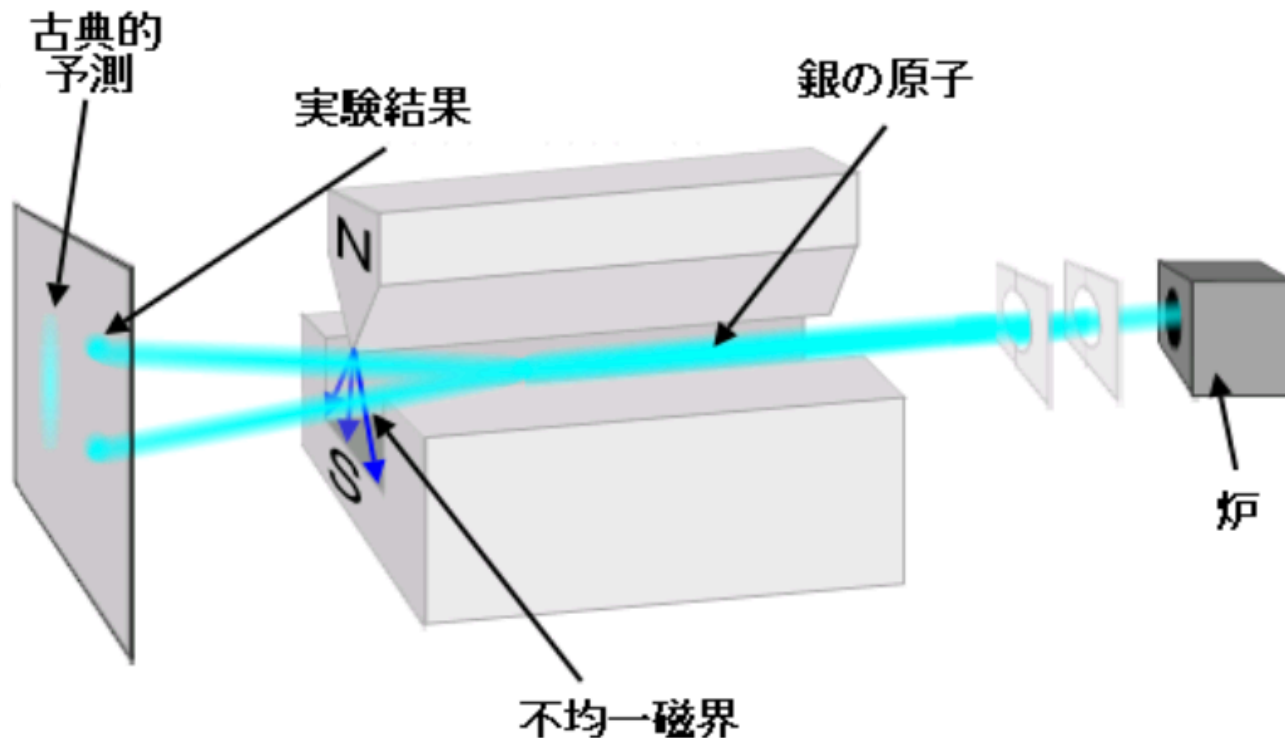
# スピンの発見

Stern-Gerlachの実験

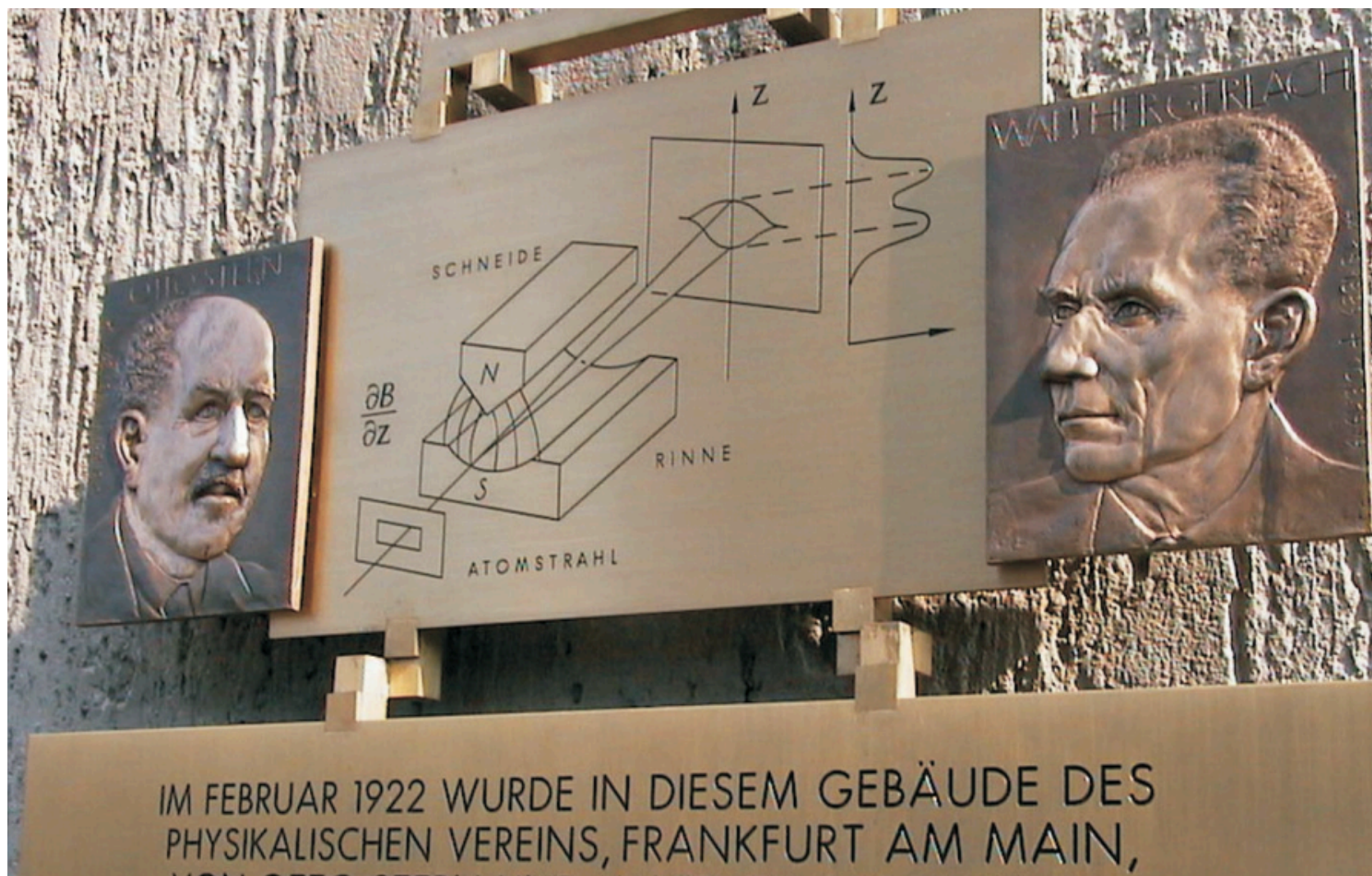
# 銀粒子のスピンの発見

## シュテルン・ゲルラツハの実験 (1922年)

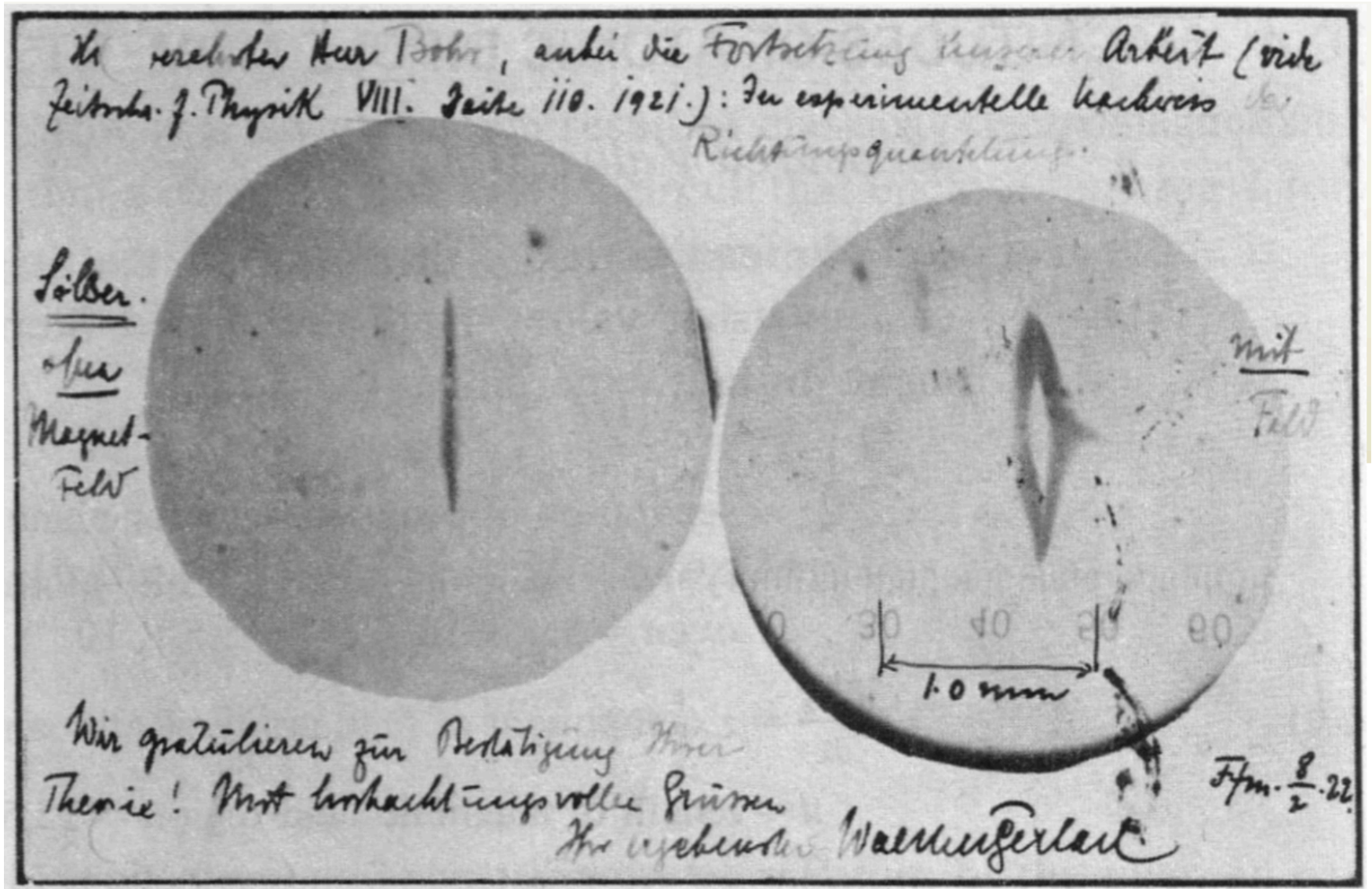
- 加熱して蒸発させた銀粒子をビームとして磁界中に通過させると、ビームは2点に分かれることを示した。



# 銀粒子のスピンの発見 シュテルン・ゲルラツハの実験 (1922年)



Gerlach's postcard, dated 8 February 1922, to Niels Bohr.



<https://bit.ly/35CIWZG>



# ゴールドシュミットとウーレンバッハ 電子もスピンを持つという理論を提示 (1925年)



# 全ての素粒子はスピンを持つ

	フェルミオン			ボソン	
クォーク	$u$ アップ	$c$ チャーム	$t$ トップ	$\gamma$ 光子	
	$d$ ダウン	$s$ ストレンジ	$b$ ボトム	$g$ グルーオン	
レプトン	$\nu_e$ 電子ν	$\nu_\mu$ ミューν	$\nu_\tau$ タウν	$W$ W ボソン	
	$e$ 電子	$\mu$ ミューオン	$\tau$ タウ	$Z$ Z ボソン	$H$ ヒッグス

現代物理学の「標準モデル」での素粒子のリスト

# スピンとその測定

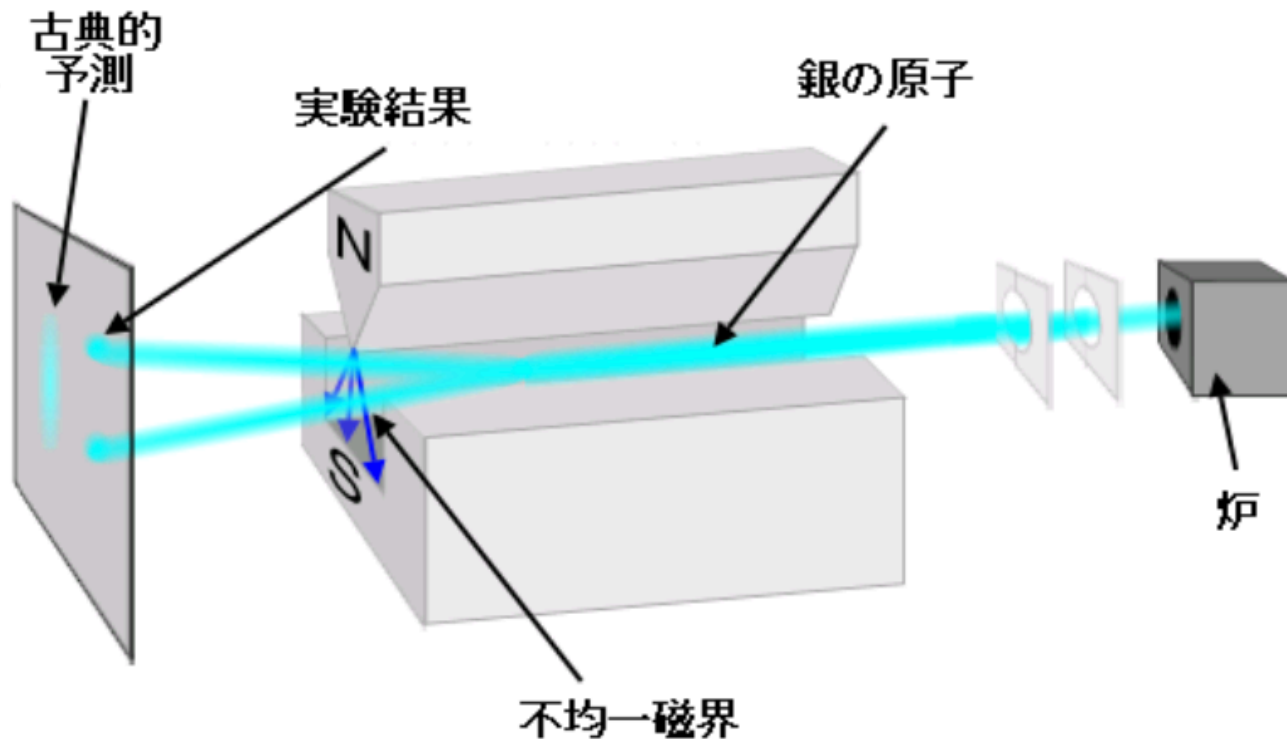
[https://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Gerlach\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Gerlach_experiment)

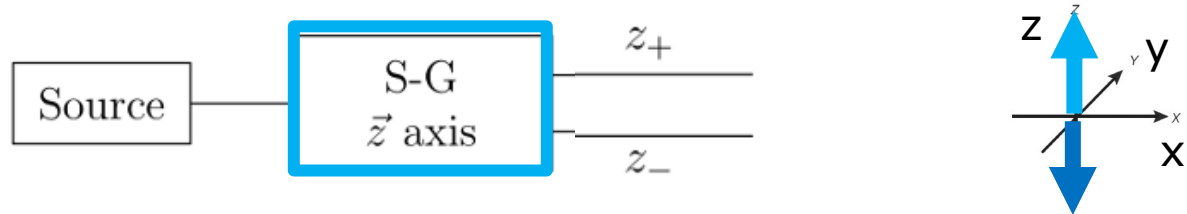
<https://eman-physics.net/quantum/spin2.html>

# 銀粒子のスピンの発見

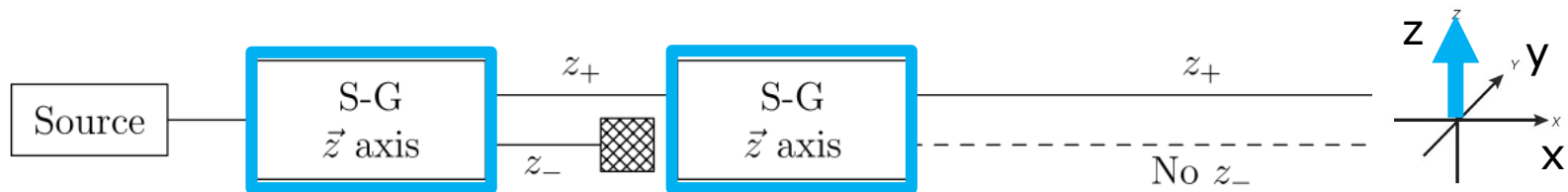
## シュテルン・ゲルラツハの実験 (1922年)

- 加熱して蒸発させた銀粒子をビームとして磁界中に通過させると、ビームは2点に分かれることを示した。

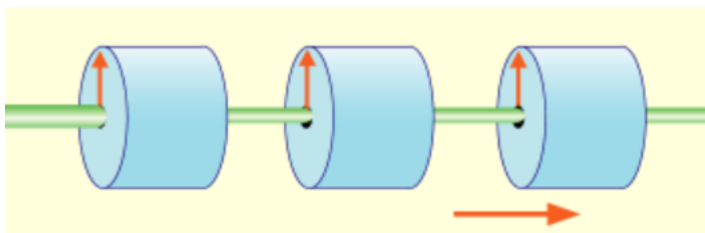




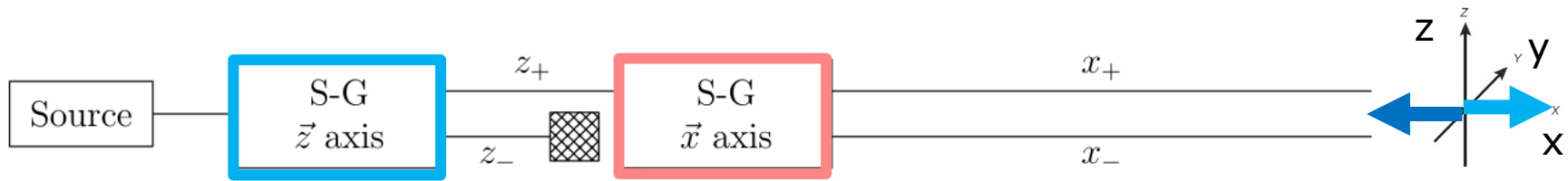
シュテルン-ゲルラツハの装置をS-Gで表す。z-axisは、スピンの分離がz軸方向(仮にそれを上下方向としよう) 下の図は、S-G通過後、zについて上向きと下向きの粒子が観測されることを表している。



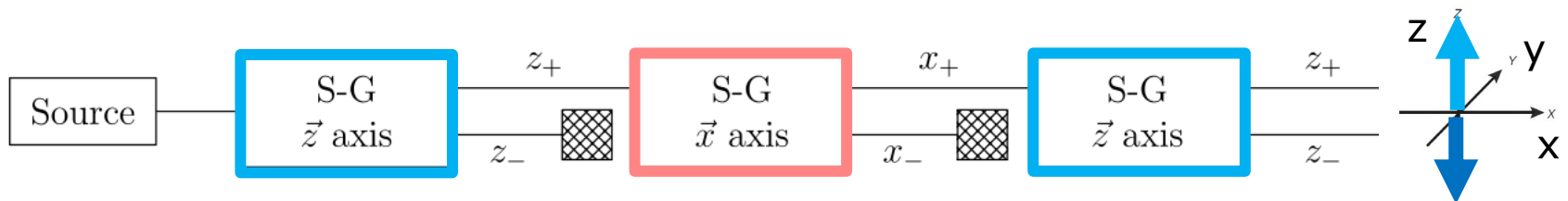
S-Gを通過した粒子のうち、下向きのスピンを持つものをブロックして、上向きのスピンを持つもののみを改めて2つ目のS-Gに通す。この時、このS-Gは、一つ目のS-Gと同様に、z-axisにそってスピンの分離を行うものとする。この時、2つ目のS-Gは、zについて上向きのスピンを持つ粒子しか通さない。



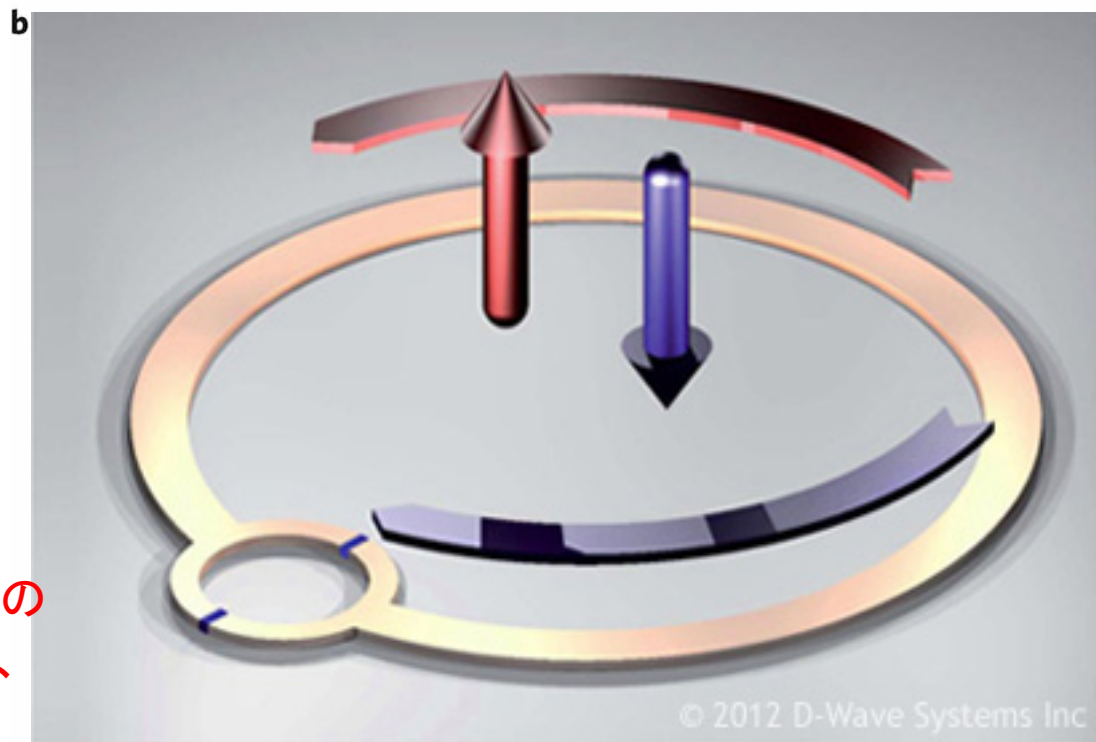
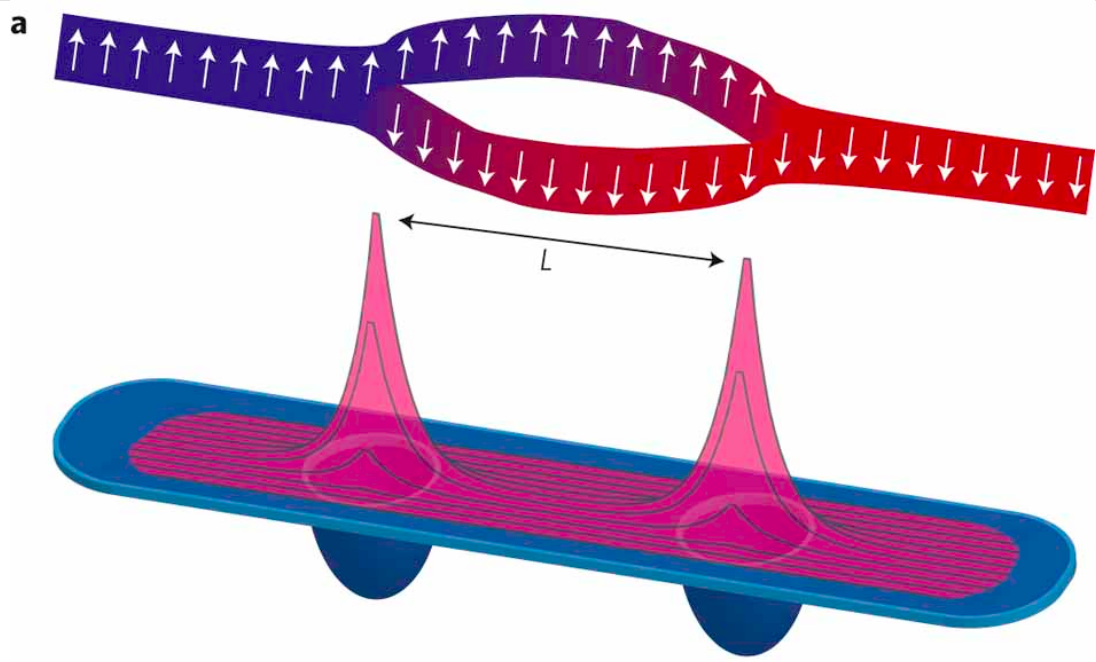
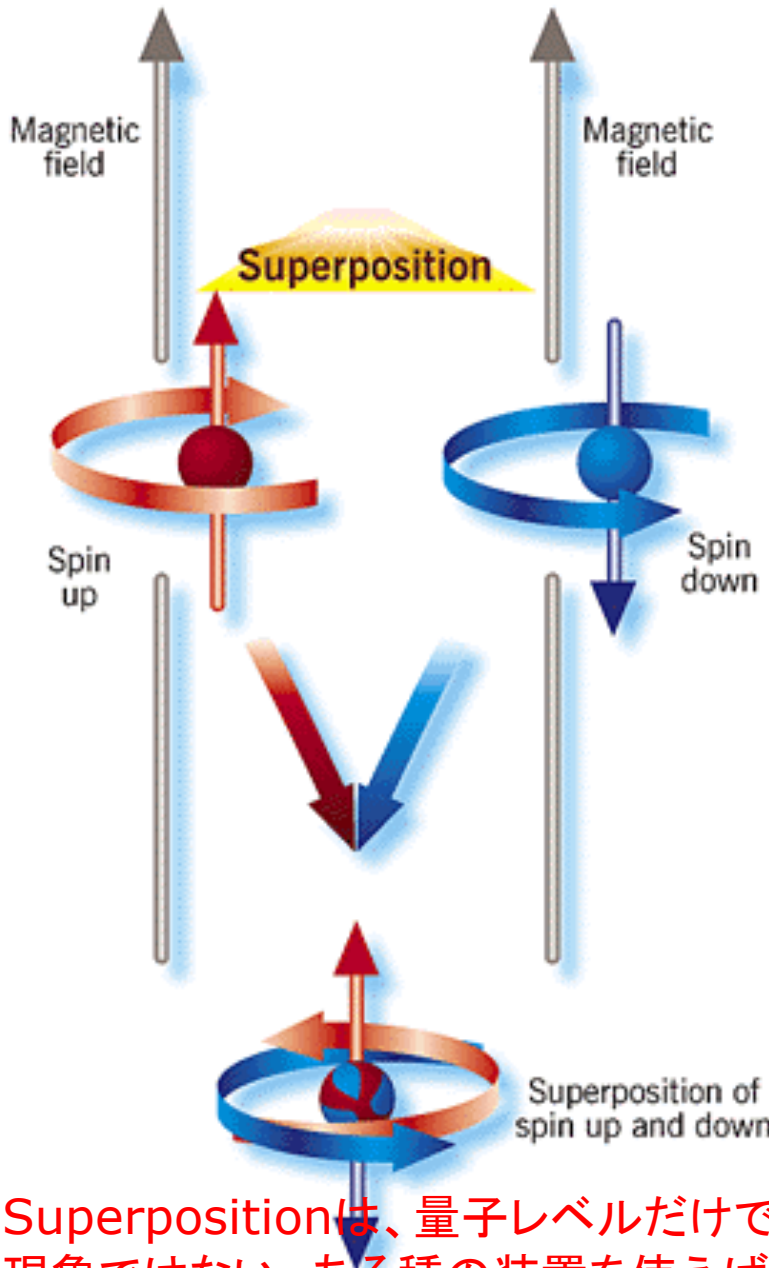
一度z軸上向きである事が確定した粒子は何度同じ測定に掛けようとも、z 軸上向きである事実は変わらないのである。



一つ目のS-Gは、先と同じように  $z$  について上向きの粒子しか通らないようにして2つ目のS-Gに渡す。ただし、2つ目のS-Gは、 $x$  についてスピンの分離を行うものとする。この時、 $x$  について上向きと下向きの二つのスピンをもつ粒子が検出される。



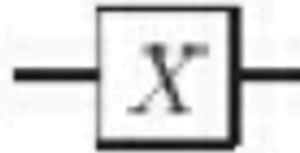
さらに、二つ目S-Gの出力から、 $x$  について下向きのスピンの粒子をブロックし、上向きのスピンを持つ粒子のみを三番目のS-Gに渡す。このS-Gは、 $z$  軸に沿ってスピンの分離を行うものとする。この出力は、再び、 $z$  に沿った上下二つのスピンをもつ粒子になる。



Superpositionは、量子レベルだけの現象ではない。ある種の装置を使えば、それはマクロな現象として現れる。

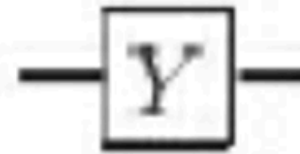
スピンを記述するために  
Pauliが導入した スピン行列

Pauli- $X$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli- $Y$



$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli- $Z$

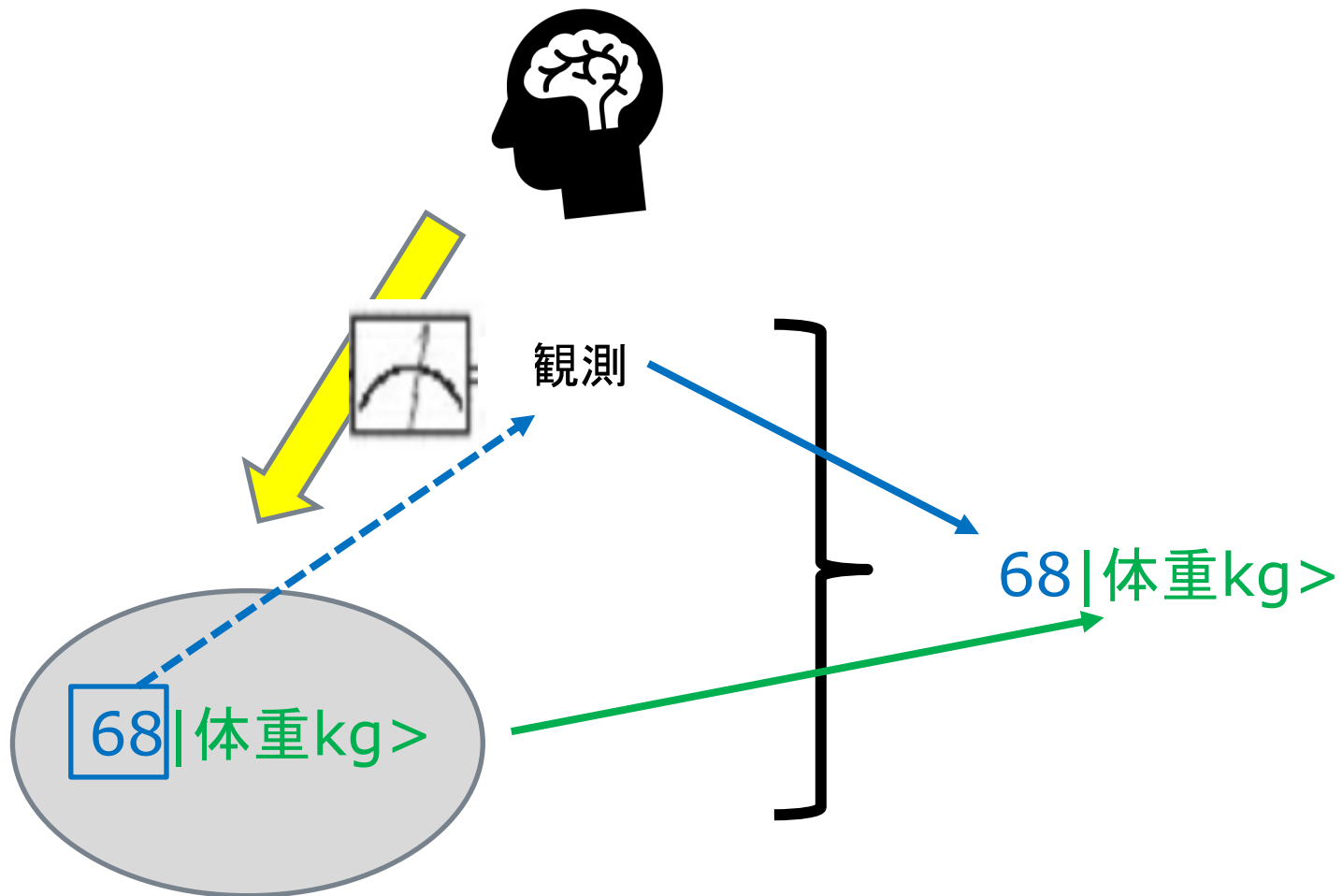


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

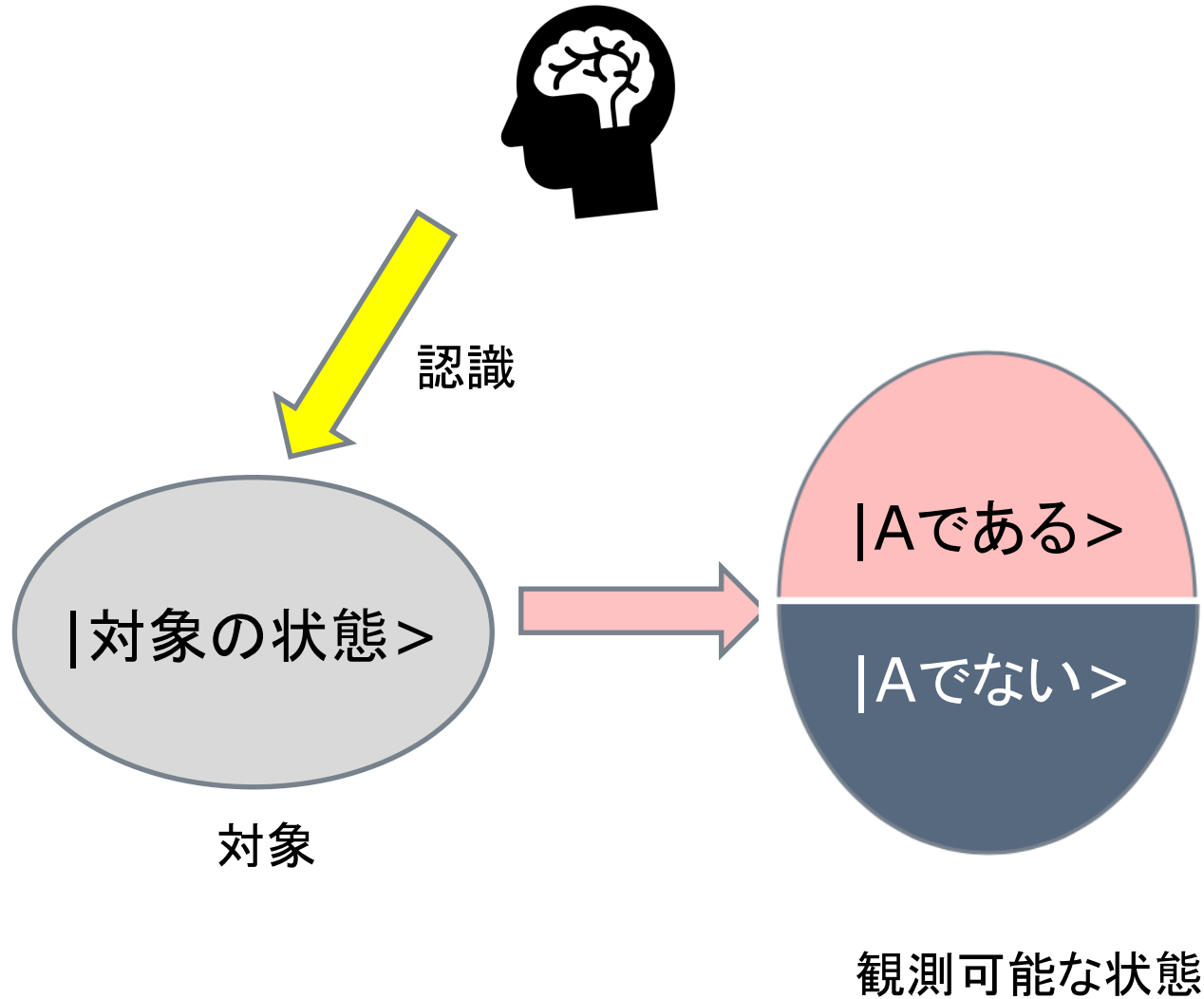
# 二つの状態の「重ね合わせ」の 観測について

二つの状態の「重ね合わせ」の  
qubitを観測する

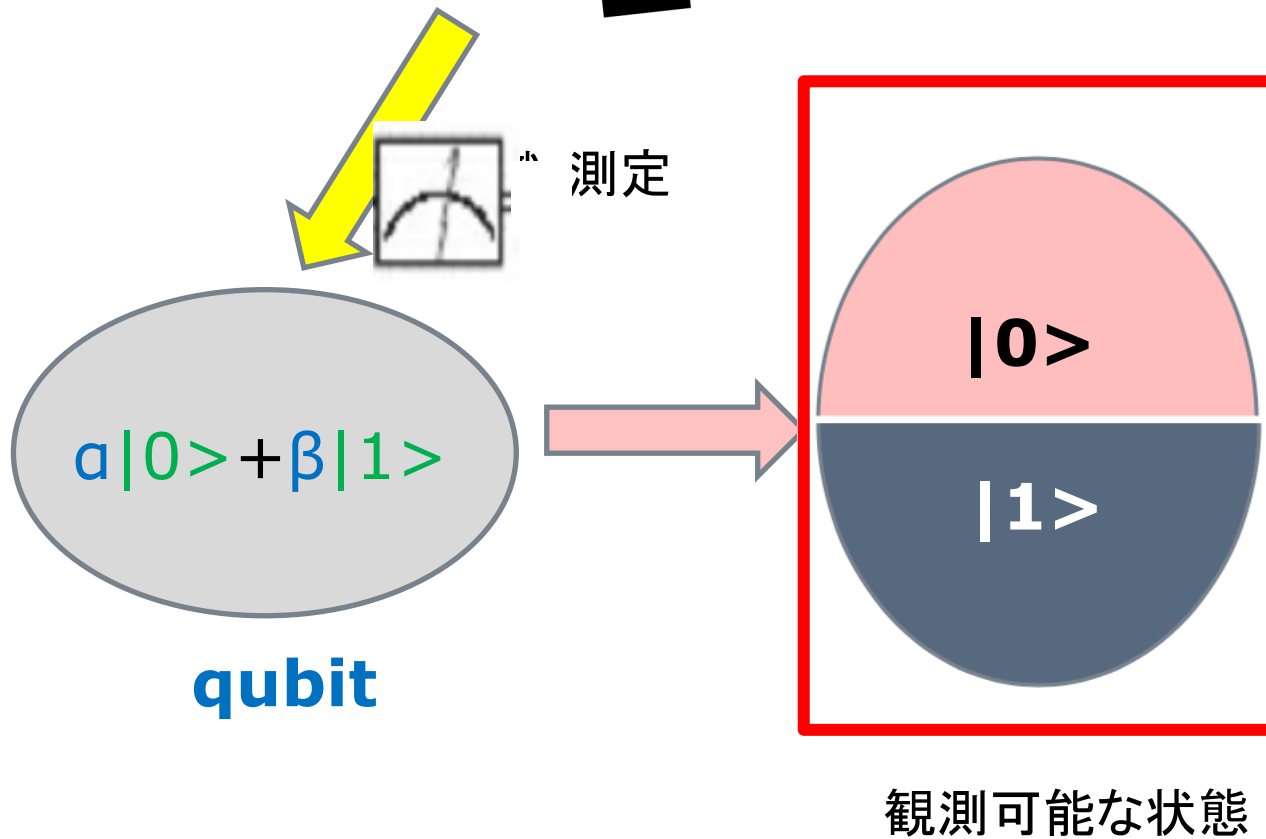
# ふりかえり: 量的状態を観測する



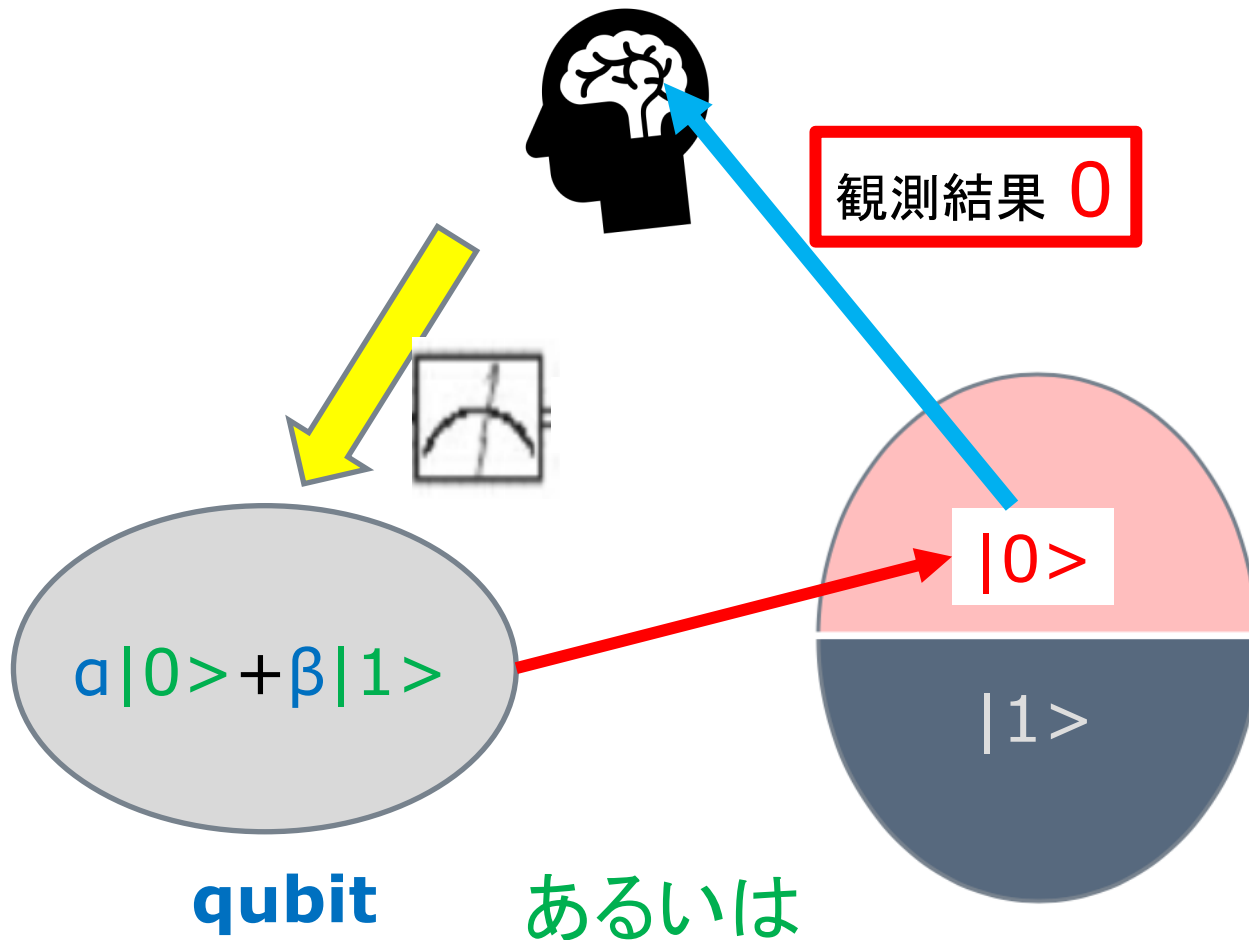
# ふりかえり: 質的状态をbit型で観測する



# qubitを観測する

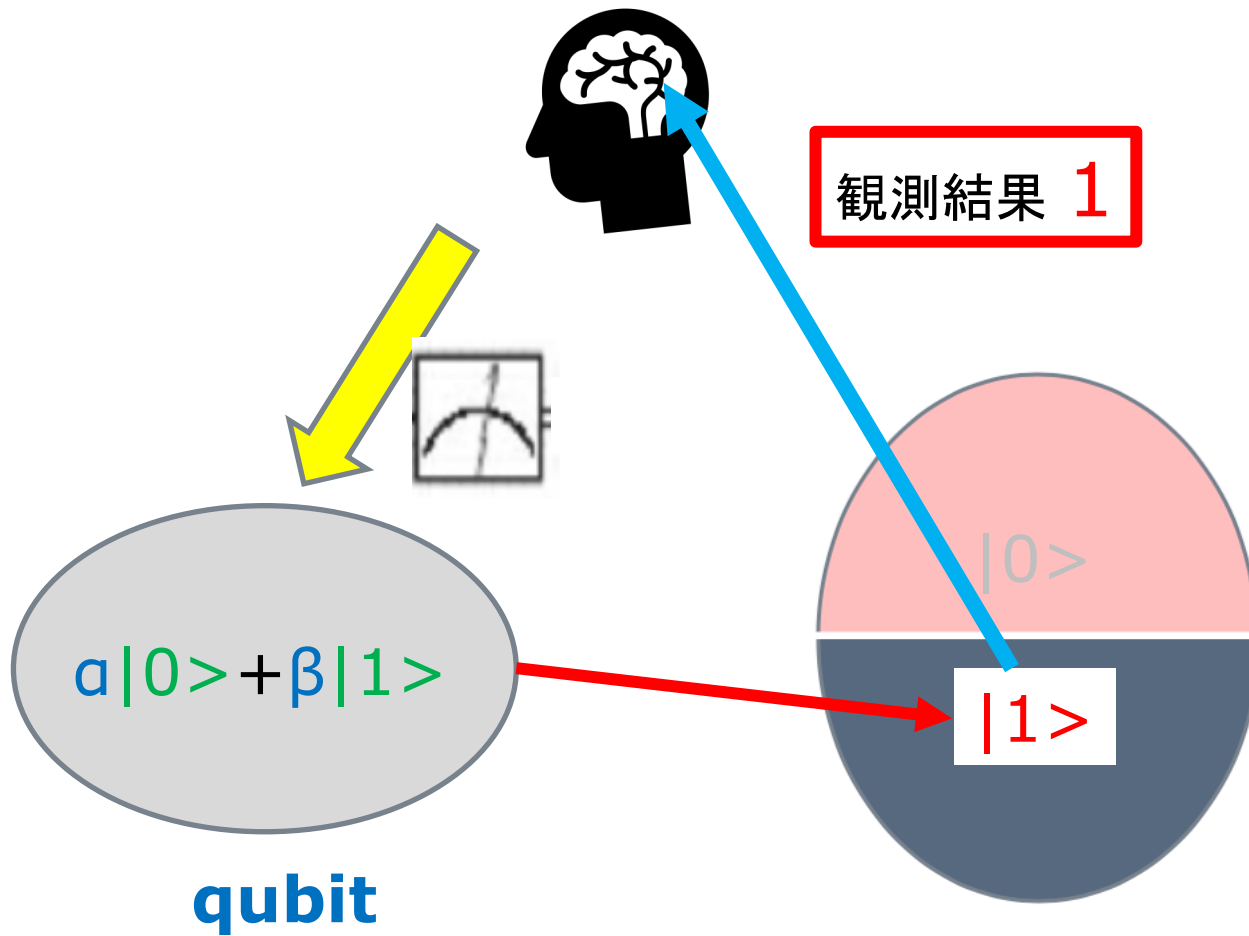


# qubitを観測する



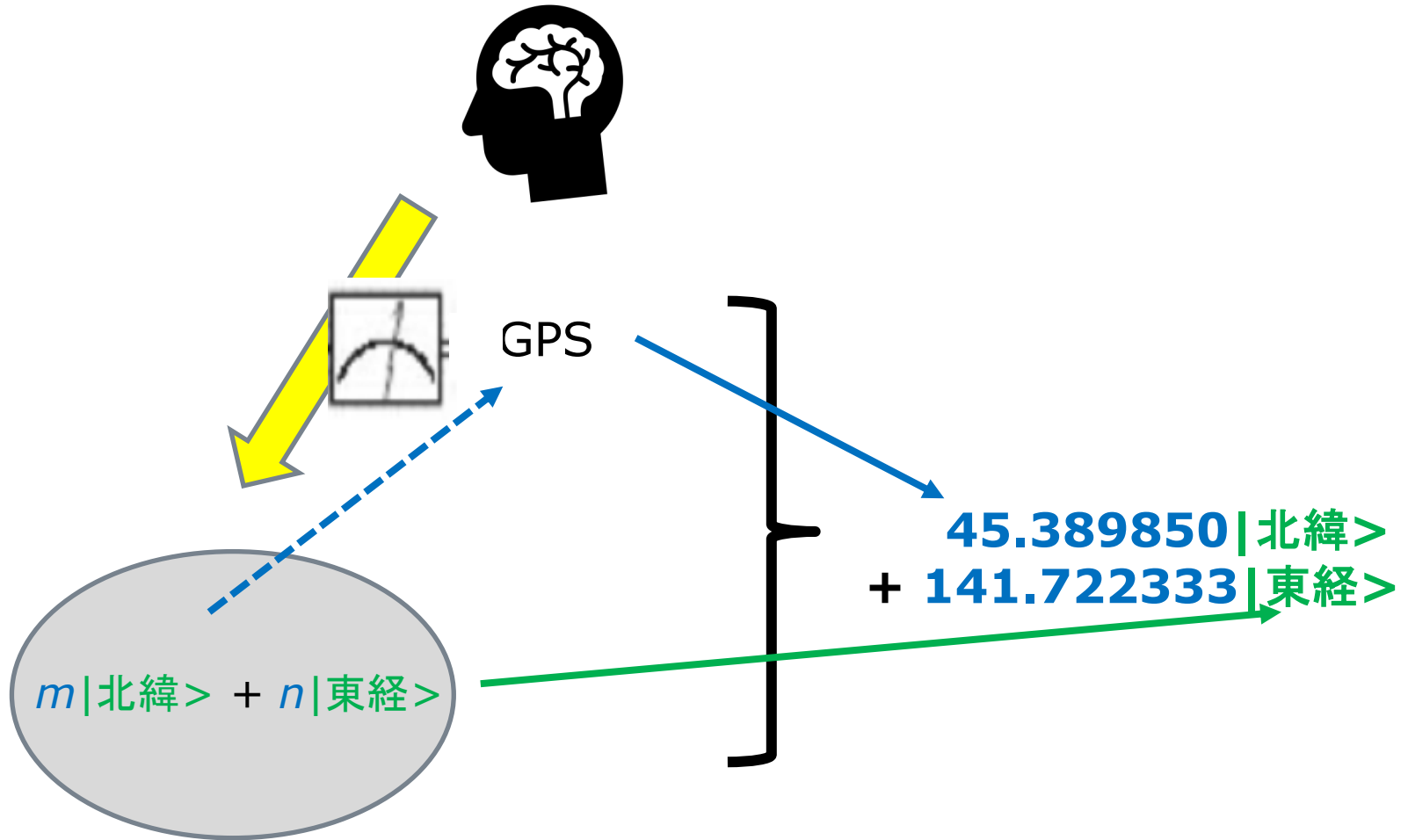
成分  $a, \beta$  は、観測にかからない

# qubitを観測する



成分  $a, \beta$  は、観測にかからない

# 比較: GPSで位置情報を観測する



成分  $m, n$  は、観測できている

## qubitの状態の観測は、次のような特徴を持つ

- qubitの状態は、一つの数字ではなく二つの数字で表される
- qubitの状態は、0の状態  $|0\rangle$ と1の状態  $|1\rangle$ の「重ね合わせ」である。
- qubitを「観測」すると、「重ね合わせ」の状態は失われて、0または1いずれかの状態、すなわち、普通のビットが観測される。
- 一回の観測では、0か1しか返ってこないのだが、繰り返し観測すれば、0が観測される確率と1が観測される確率は一定の値に近づいていく。これが、元の量子ビットの0の状態と1の状態の「重ね合わせ」の情報を与えると考えることができる。

# 大統領候補支持の状態の観測

## 二つの状態の「重ね合わせ」からなる 一つの状態の例

- 現在、アメリカ人がどの大統領候補を支持しているかという「状態」を考えてみましょう。アメリカ人全員を対象として、現時点に限れば、それは一つの「状態」です。
- それは、共和党候補支持と民主党候補支持の二つの状態からなる「重ね合わせ」だと考えることができます。
- ここでは少し単純化して、アメリカ人は共和党候補のトランプ氏か民主党候補のバイデン氏のどちらかを指示しているとしています。

|アメリカ人の大統領候補支持の状態>

= T|トランプ支持> + B|バイデン支持>



## 二つの状態の「重ね合わせ」からなる 一つの状態の「観測」を考える

- ある時点でアメリカ人がどちらかの候補を支持していることは確実だとします。その意味では、この状態は、きちんと客観的には存在しています。ただ、その状態を瞬時に知ることができるわけではありません。
- この例でこの状態を「観測」というのは、具体的には、一人ひとりのアメリカ人に、どの候補を支持しているかを聞くこと以外には方法がありません。
- でも、そうしてみると、目の前にいるアメリカ人は、どちらかの候補を支持していることがわかります。そこでは「重ね合わせ」は、消えています。もしも、候補者が3人いて、観測されるべきものが、三つの状態の重ね合わせだとしても、このスタイルで観測すれば、同じように重ね合わせの状態は破れてしまいますね。

## 観測と確率

- 先の二つの状態の重ね合わせの式の数字の部分TとBを、それぞれトランプとバイデンを支持する人の人数と考えると、先の「観測」の意味ははっきりするかもしれません。
- ただ、すこし変なところもありますね。ある時点では、確定しているTとBの値を、事後的に時間をかけて数え上げるのですから。数えている間に、TとBの値は、変わってもおかしくありません。
- 次のような解釈も可能です。アメリカの総人口をNとして、TとBをNで割った値を、再び、T, Bと呼ぶことにします。この時、T, Bは、アメリカの中でトランプ、バイデンを支持する人の数ではなく、アメリカの中でトランプ、バイデンを支持する人の割合になります。

## 観測と確率

- この解釈では、ある観測をした時（それは、個人に対してインタビューをしてトランプ支持かバイデン支持かを聞くことでした）、トランプ支持である確率はT、バイデン支持である確率はBであるということになります。
- 何度も繰り返し観測すれば、どんどん正確に確率Tと確率 Bを推測することが可能になります。

# qubitと支持状態の 観測モデルの比較

## qubitの状態の観測は、次のような特徴を持つ

- qubitを「観測」すると、「重ね合わせ」の状態は失われて、0または1いずれかの状態、すなわち、普通のビットが観測される。
- 一回の観測では、0か1しか返ってこないのだが、繰り返し観測すれば、0が観測される確率と1が観測される確率は一定の値に近づいていく。これが、元の量子ビットの0の状態と1の状態の「重ね合わせ」の情報を与えると考えることができる。

先の「支持状態」観測モデルは、多くの点で、これらの特徴を共有する

ただ、大きな違いが存在する

- 次の式で、 $T, B$ は、 $T \geq 0, B \geq 0$ を満たす実数である。  
 $T$ は、状態  $|\text{トランプ支持}\rangle$  が観測される確率を  
 $B$ は、状態  $|\text{バイデン支持}\rangle$  が観測される確率を表す。  
 $T + B = 1$  である。

$$\begin{aligned} & |\text{アメリカ人の大統領候補支持の状態}\rangle \\ & = T|\text{トランプ支持}\rangle + B|\text{バイデン支持}\rangle \end{aligned}$$

- qubitの状態を表す次の式で、 $\alpha, \beta$ は複素数である。  
 $|\alpha|^2$  は、状態  $|0\rangle$  が観測される確率を  
 $|\beta|^2$  は、状態  $|1\rangle$  が観測される確率を表す。  
 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  である。

$$|\text{qubitの状態}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

# 古典的な重ね合わせ

$T \geq 0, B \geq 0$ を満たす実数: 確率を表す

$$\begin{aligned} & |\text{アメリカ人の大統領候補支持の状態}\rangle \\ &= T |\text{トランプ支持}\rangle + B |\text{バイデン支持}\rangle \end{aligned}$$

## 量子論的重ね合わせ

$\alpha, \beta$ は複素数:  $|\alpha|^2, |\beta|^2$  が確率を表す  
こうした $\alpha, \beta$ を「確率振幅」という

$$|\text{qubitの状態}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

## 古典的な重ね合わせ

$T \geq 0, B \geq 0$ を満たす実数: 確率を表す

|アメリカ人の大統領候補支持の状態>  
=  $T$ |トランプ支持> +  $B$ |バイデン支持>

## 量子論的重ね合わせ

$\alpha, \beta$ は複素数:  $|\alpha|^2, |\beta|^2$  が確率を表す

|qubitの状態> =  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

確率はどこからでてくるのか？

裏か表か？  
量子コインの話

## 量子コイン

- 0と1の状態が、完全に同じ割合で重ね合わされているqubitの状態Hを考えましょう。
- このqubitの状態Hを観測するたびに、0または1の値が返ってきます。一見なんのルールもなしに0と1の値が返ってくるように見えるのですが、この観測をずっと続けると、0が現れる確率と、1が現れる確率は、限りなく等しいものになっていきます。
- それは、コインを投げて裏が出るか表が出るかを決めるのと同じです。こうしたqubitの状態Hを、「量子コイン」と呼ぶことができます。

## 「量子コイン」を式で表す

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \text{ としよう。}$$

0 が観測される確率は、 $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

1 が観測される確率は、 $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

だから、0と1は、同じ確率で観測される。

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \text{ としよう。}$$

0 が観測される確率は、 $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

1 が観測される確率は、 $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

ここでも、0と1は、同じ確率で観測される。

また、観測では、状態  $|+\rangle$  と状態  $|-\rangle$  との区別がつかないことがわかる。

# 確率と確率振幅

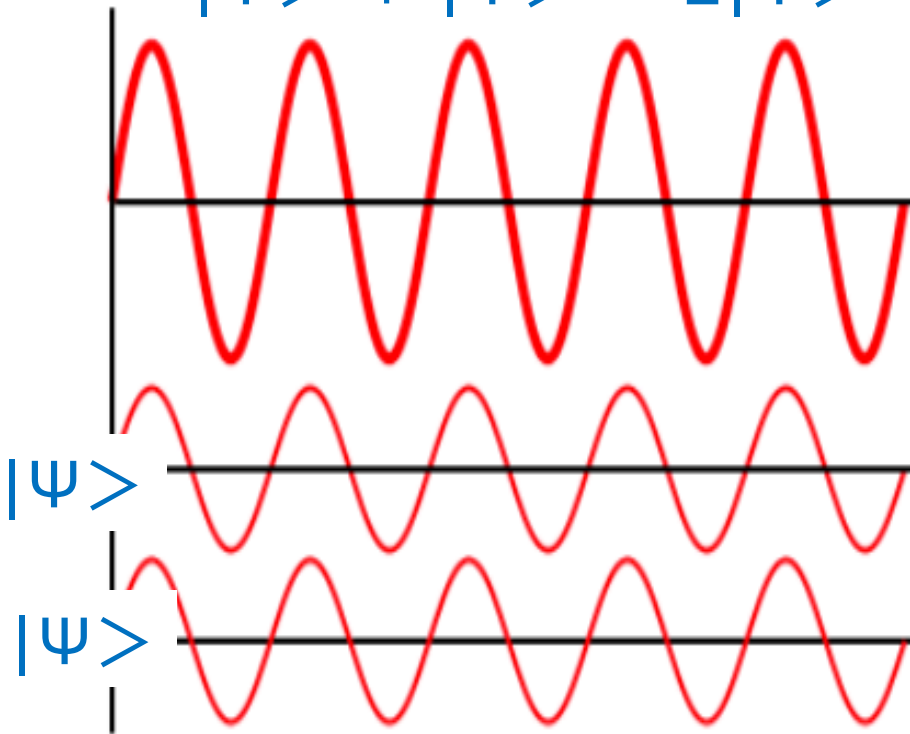
## 確率と確率振幅

- 確率は、ゼロか正の値を取る実数です。それに対して確率振幅は、複素数です。二つは、全く違うタイプの数に値をとるので、別のものです。
- それでも、両者はつながりを持ちます。複数の状態の重ね合わせとして量子の状態を捉えた時、重ね合わせを構成する個々の基底の成分である複素数である確率振幅の絶対値の二乗が、その基底が観測される確率として解釈できるのです。
- 確率振幅の「振幅」という言葉は、量子が波の性質を持っていることと関係しています。そのことは、量子の状態を波として記述するシュレジンガーの波動方程式で説明するのがダイレクトでいいのですが、ここでは、別のやりかたを考えてみましょう。

波は重ね合わせると干渉を起こします。  
次のように考えるといいですね。

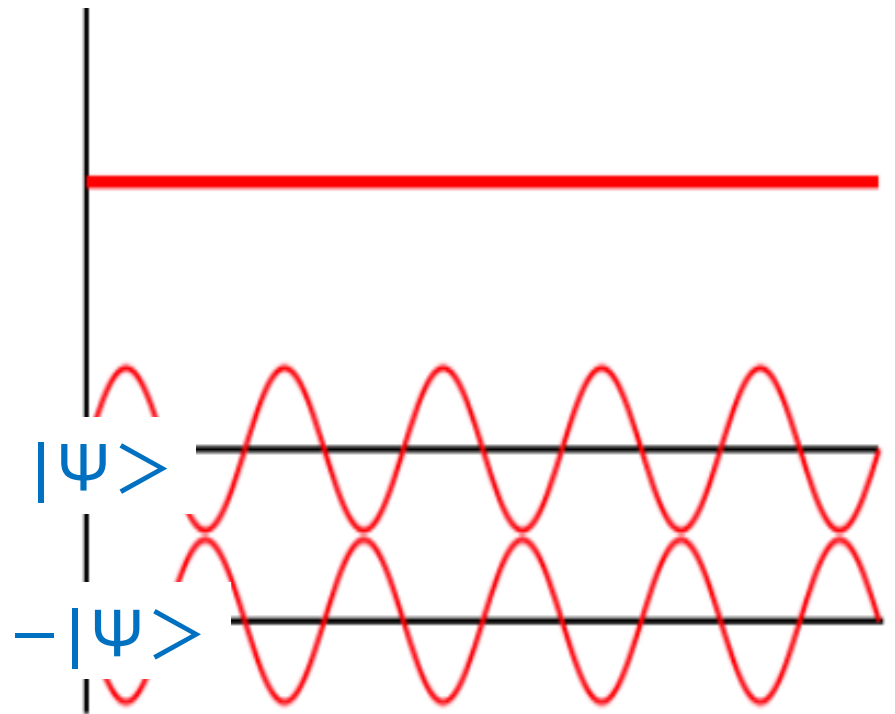
強めあう

$$|\psi\rangle + |\psi\rangle = 2|\psi\rangle$$



打ち消しあう

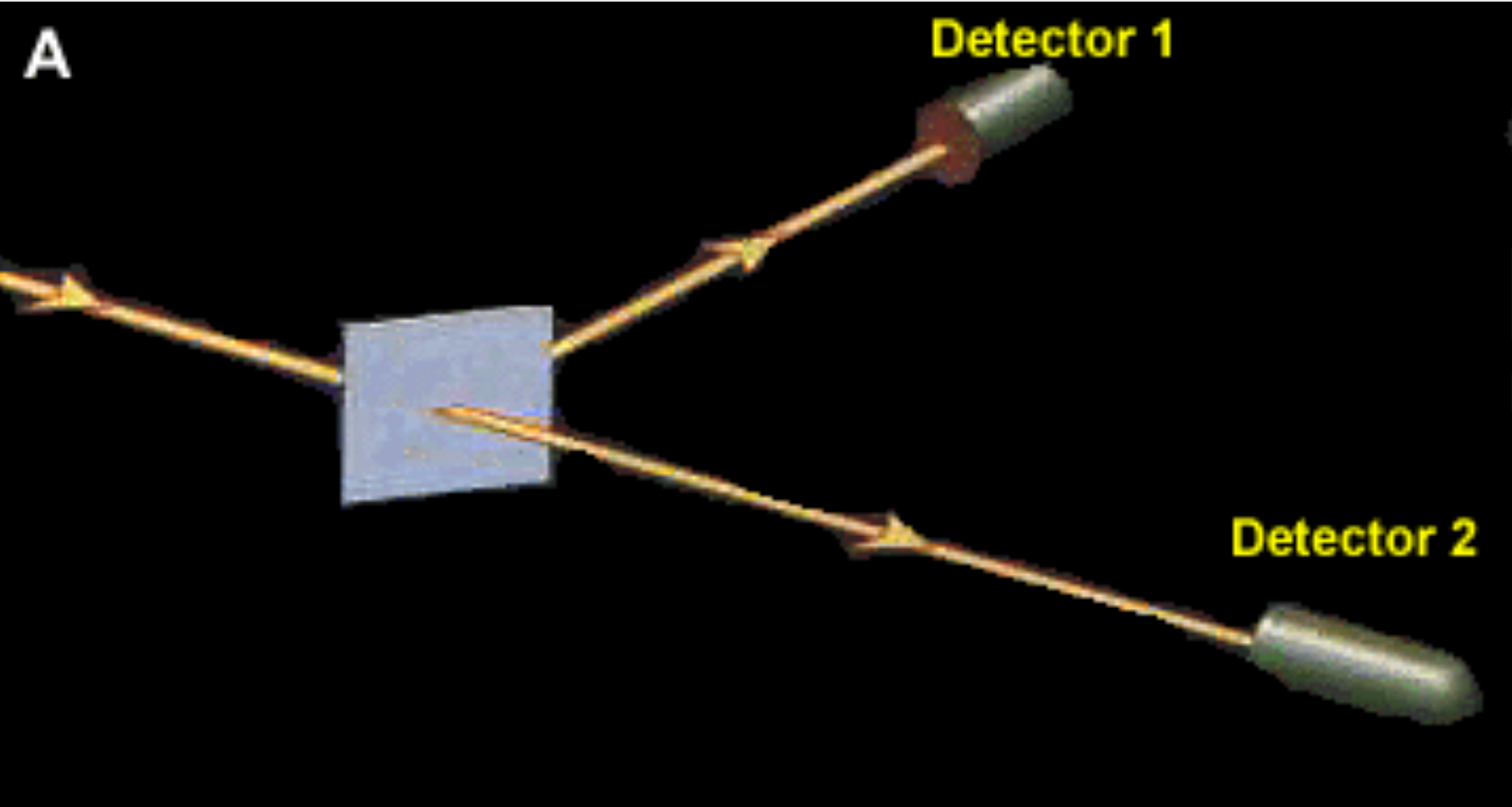
$$|\psi\rangle - |\psi\rangle = 0$$



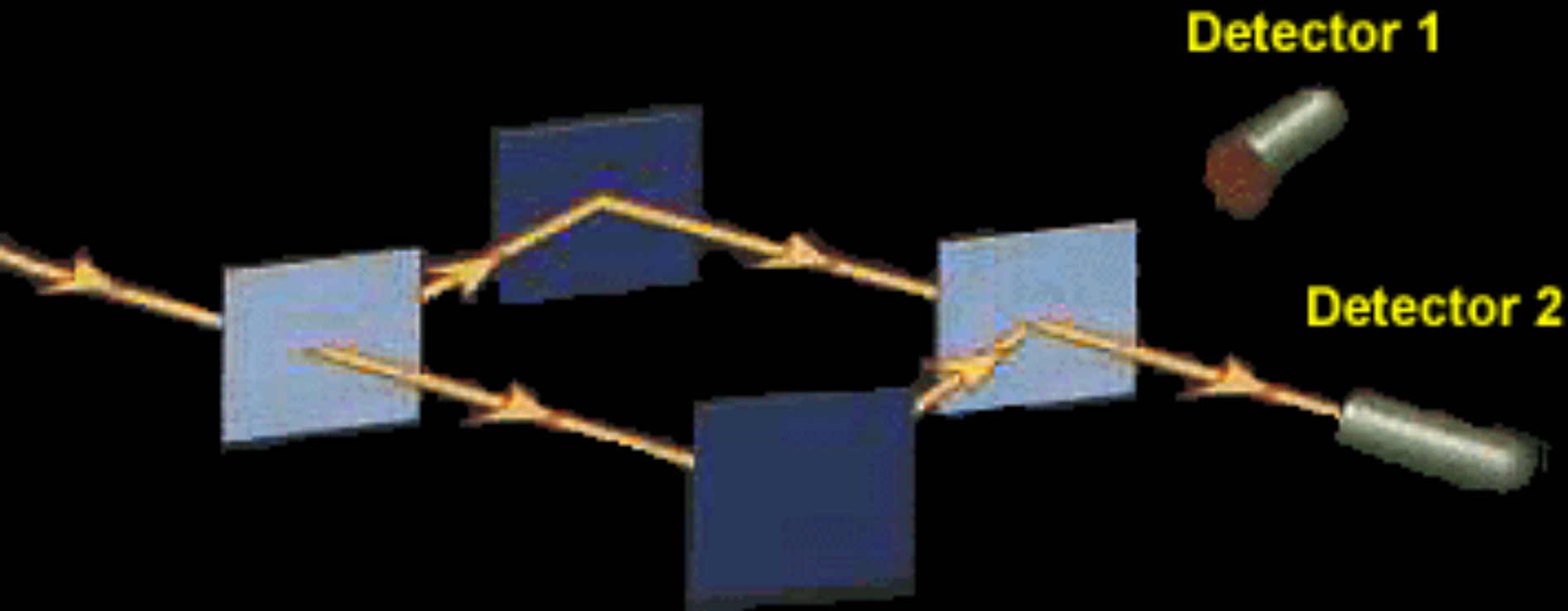
ただ、この干渉の例で、状態  $|\psi\rangle$  にかかっている数字は、 $+1, -1$  で実数です。  
状態  $|\psi\rangle$  に複素数がかかると何が起きるのでしょうか？

状態  $|A\rangle$  に複素数を掛ける

Mach-Zehnder 干渉計の実験の解釈

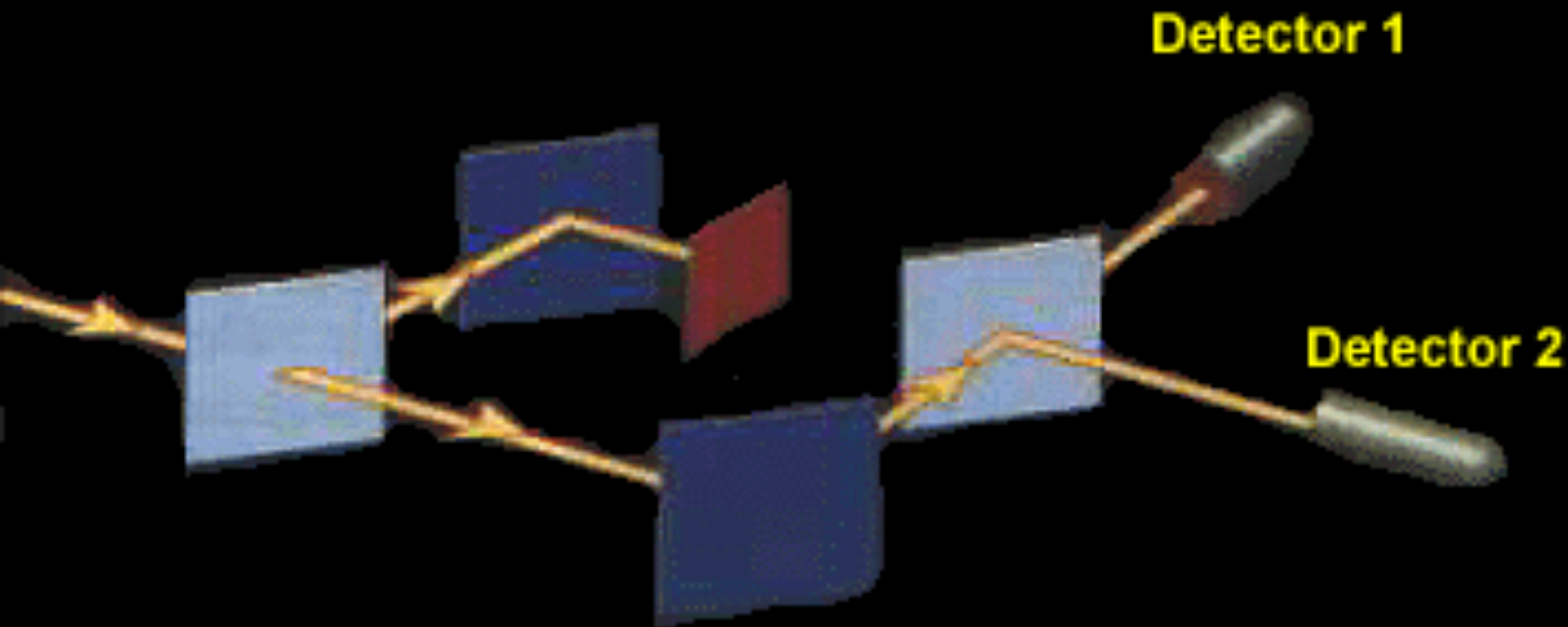


光を半分は通し半分は反射する、ハーフミラーを45度の角度で光の進路に置く。光は、二つの検出器に届く。光子一個で実験を繰り返すと、ある光子は検出器1に、ある光子は検出器2に届く。その確率は等しい。ここに不思議なことはない。

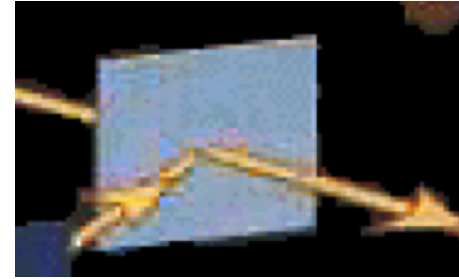
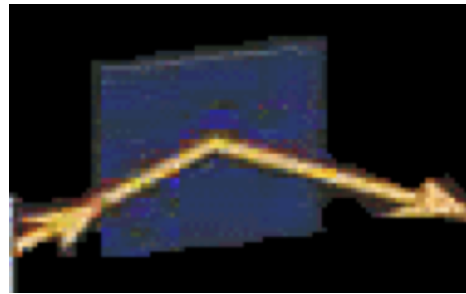
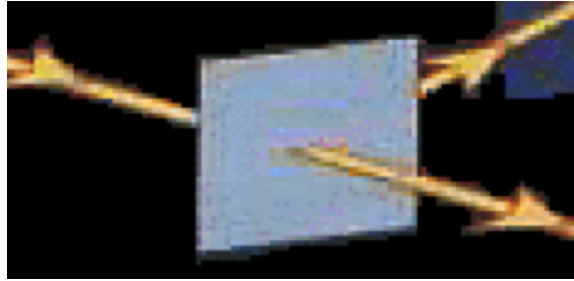
**B**

ハーフミラー二つと鏡二つを組み合わせて、上のような装置を作る。光は干渉をおこして、検出器の一方にしか届かなくなる。奇妙なことは、光子一個で実験しても、このことは変わらない。一個の光子は、二つの道を「同時」に通っている。

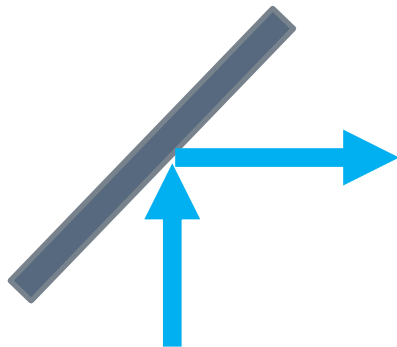
C



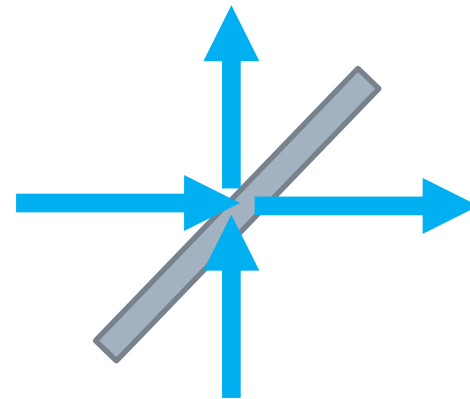
もっと奇妙なことは、**光路の一方を塞ぐと、光は両方の検出器に届くようになる。**光子一個で考えると、行く手を阻まれた光子は、そのことを、他方の光子に伝えて(どっちも自分自身なのだが)、その性質を変えているように見える。



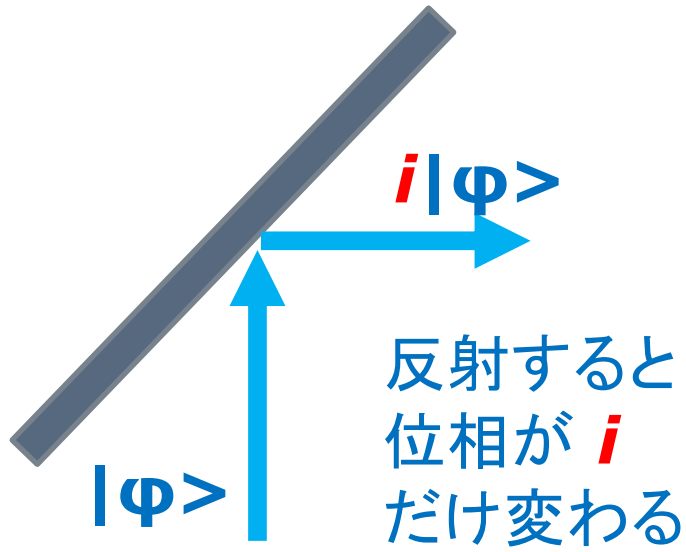
鏡



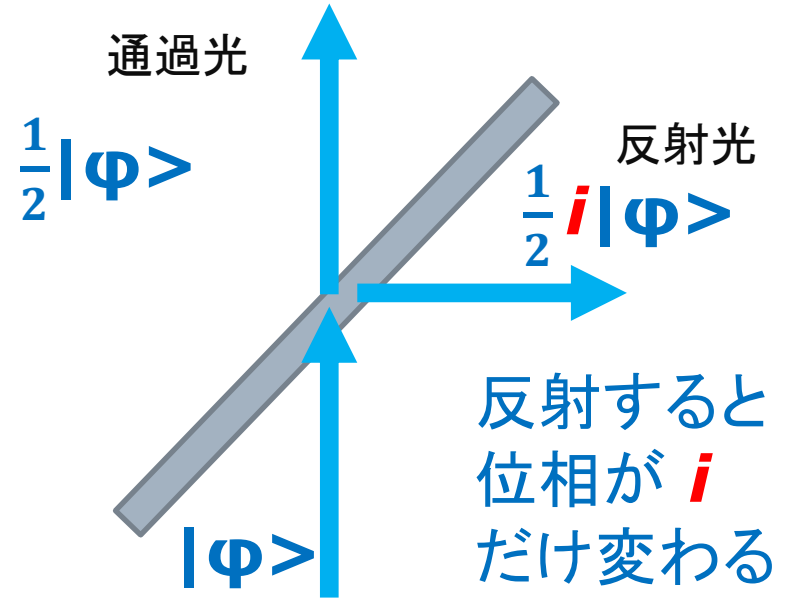
ビーム・スプリッター

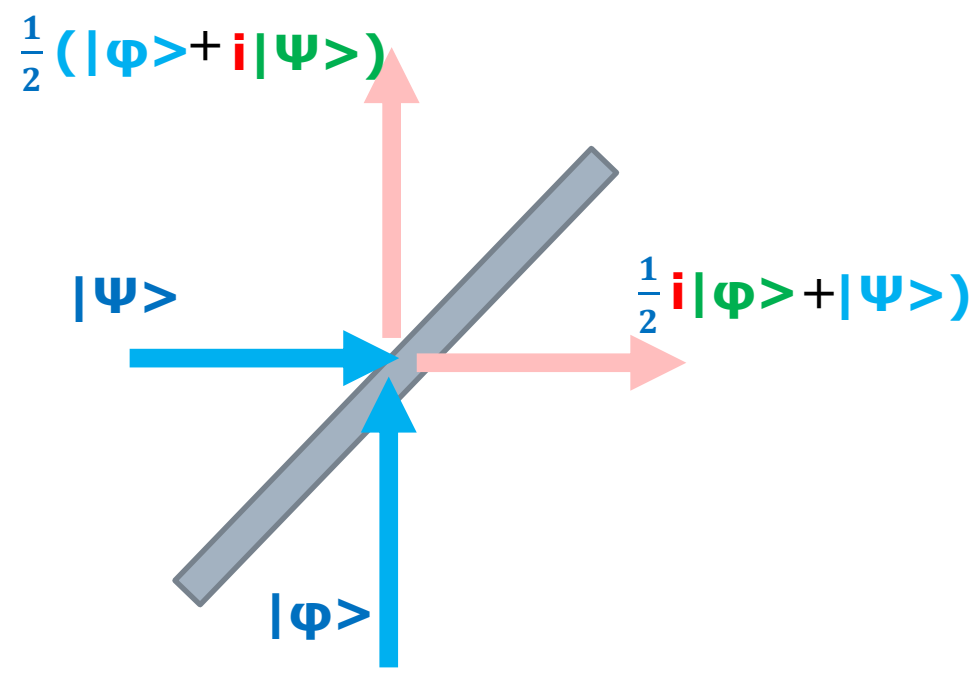
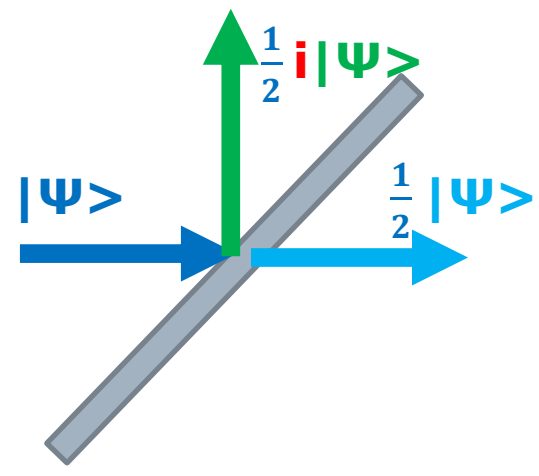
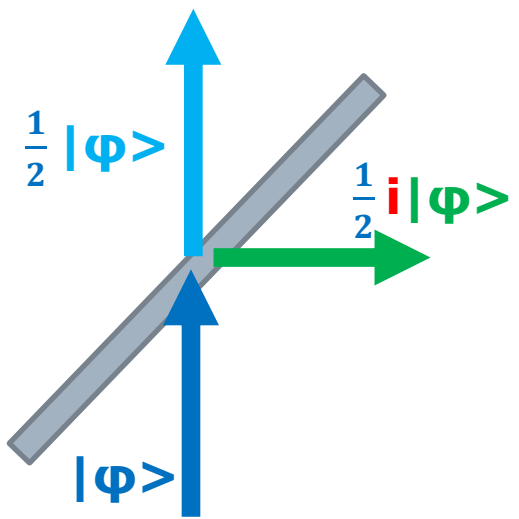


# 鏡

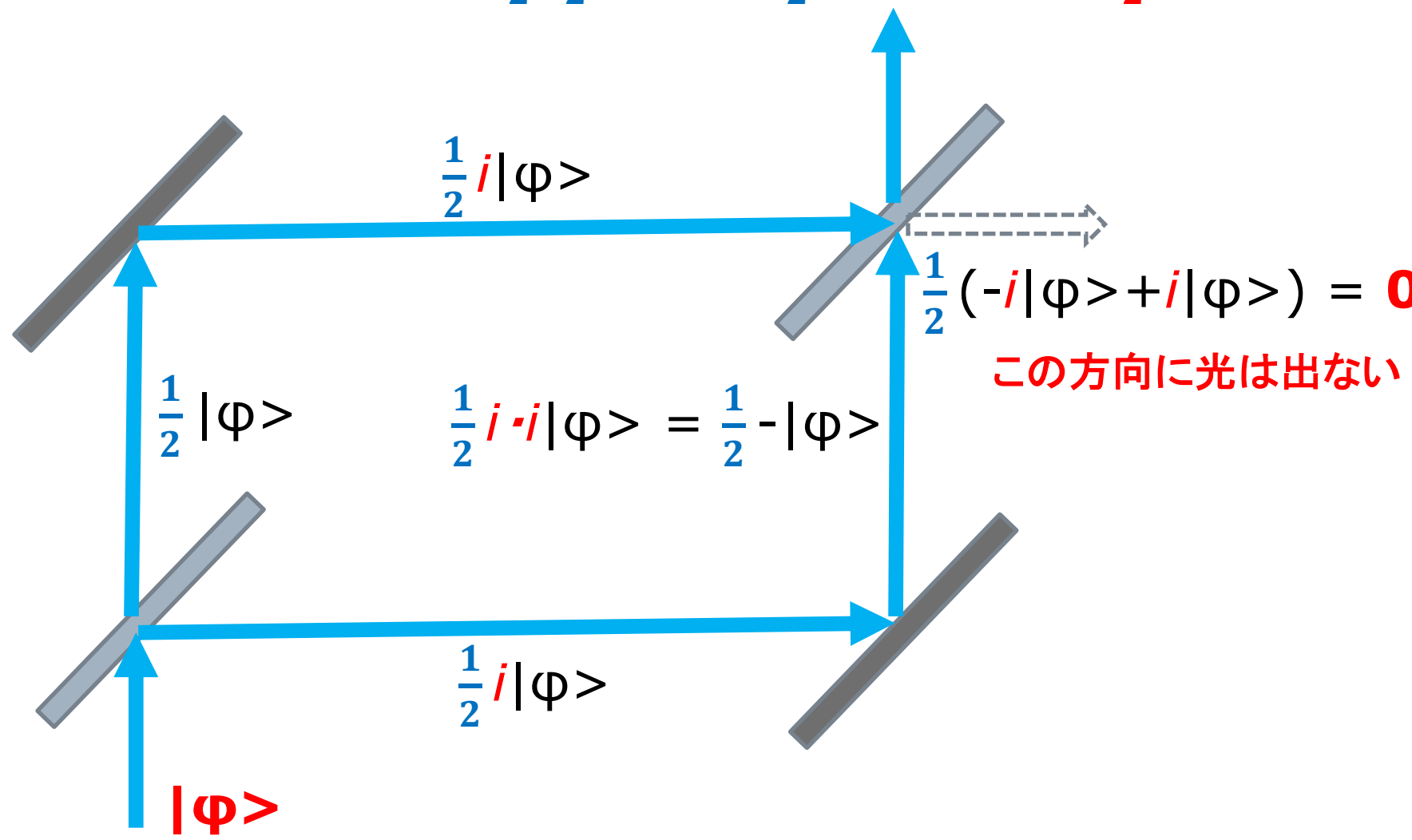


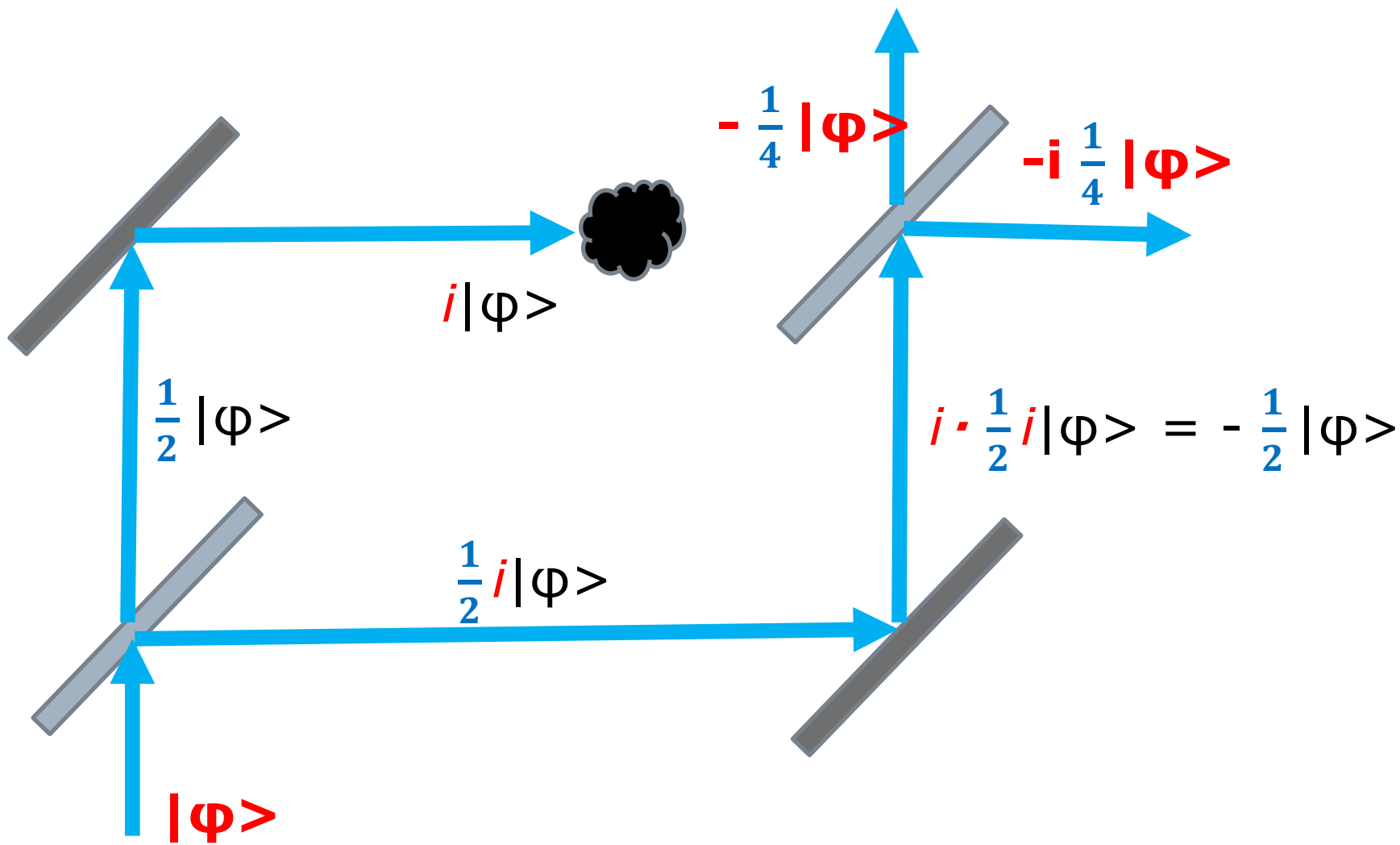
# ビーム・スプリッター





$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - |\varphi\rangle + \frac{1}{2} i \cdot i |\varphi\rangle \right) = -\frac{1}{2} |\varphi\rangle$$







# 第三話： 図形で理解する数の世界の拡大



# Agenda

## 第三話： 図形で理解する数の世界の拡大

- 量子の世界は複素数の世界
  - 数にもいろいろある
- スカラー、ベクトル、行列、テンソル、 ...
- 量子ゲートと量子コンピュータ
- 抽象化された巨大な対象を具体的・視覚的に把握する  
Tensor Network
  - ベクトル
  - 行列
  - テンソル
  - 何をしたいのか？

# 数の世界の拡大 1

量子の世界は複素数の世界

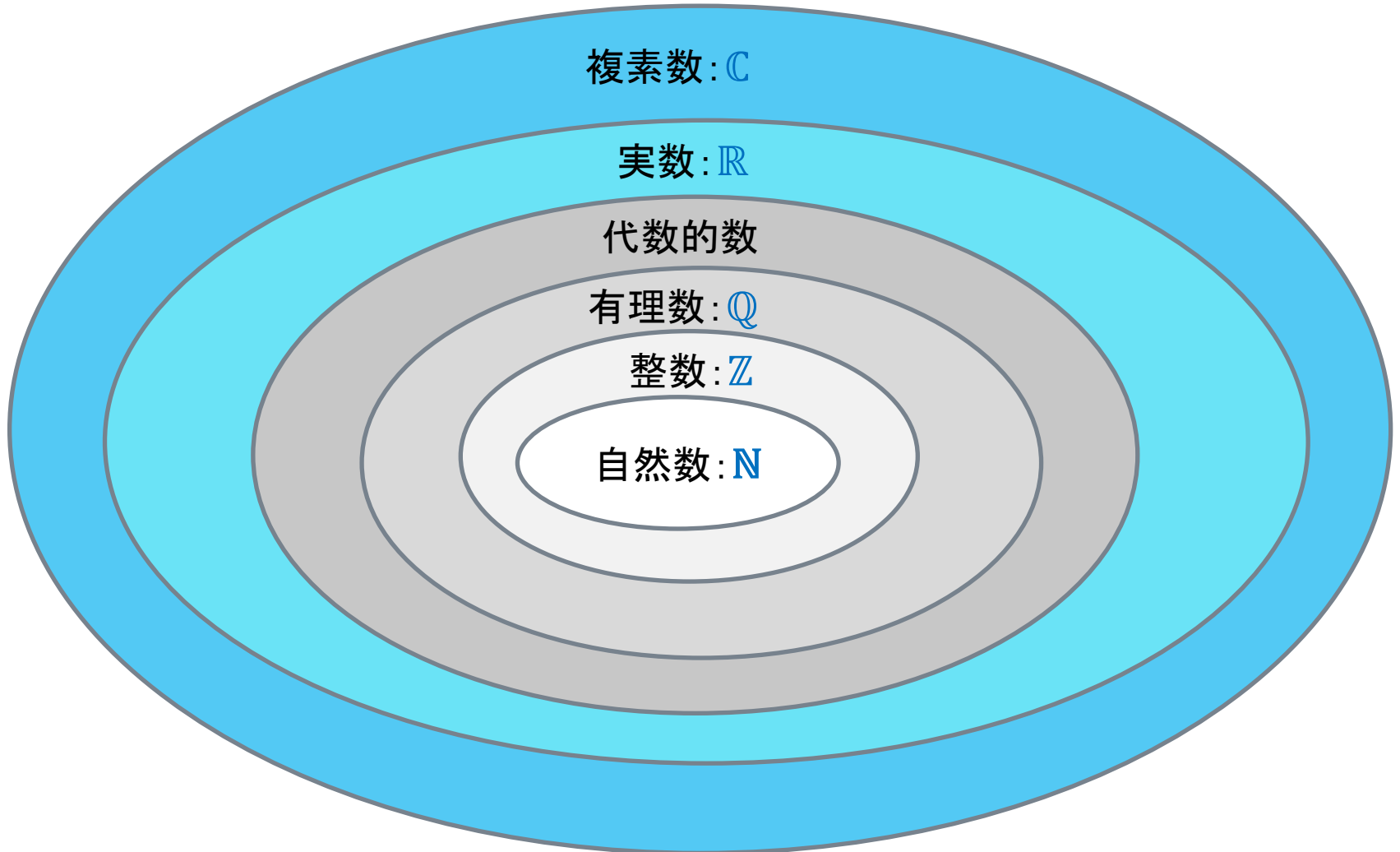
数にもいろいろある

# 量子の世界は複素数の世界

---

- 量子の世界を理解することの難しさの一つは、量子の世界が基本的に、複素数の世界であることがあります。数学的にはともかくとして、直感のレベルで言うなら、我々は複素数について十分な直感をもっているわけではありません。
  - 例えば、量的な状態 $|A\rangle$ について、それに正の実数をかけたり、マイナスの実数をかけたとしても、それについてある程度のイメージを持つことができます。ただ、 $|A\rangle$ に複素数をかけた時、その明確なイメージをもつのは、難しいのです。
  - それに対して、我々の日常は、自然数と実数の世界です。この二つの種類の数については、我々は十分な直感をもっています。
-

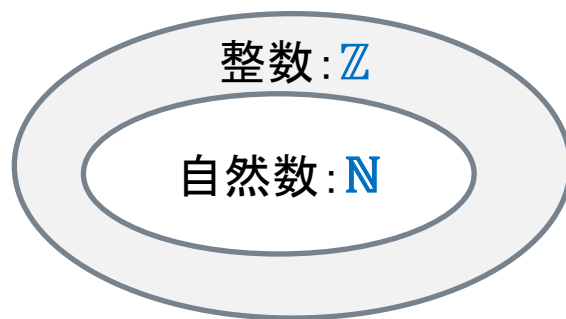
# 数の階層



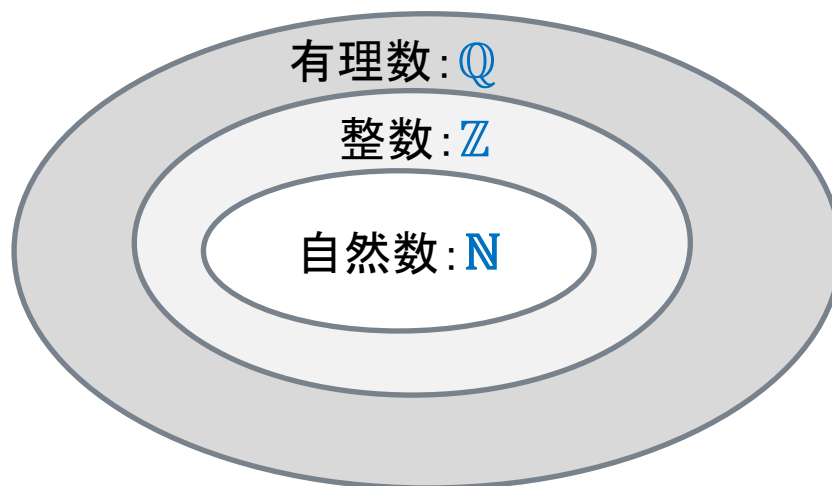
# 数の階層

自然数:  $\mathbb{N}$

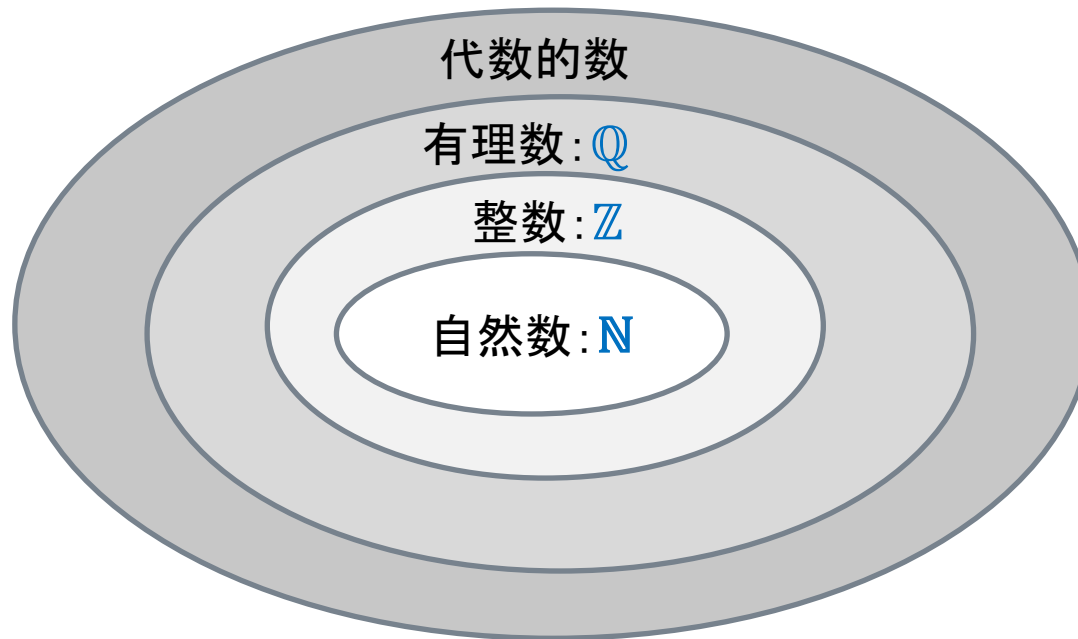
# 数の階層



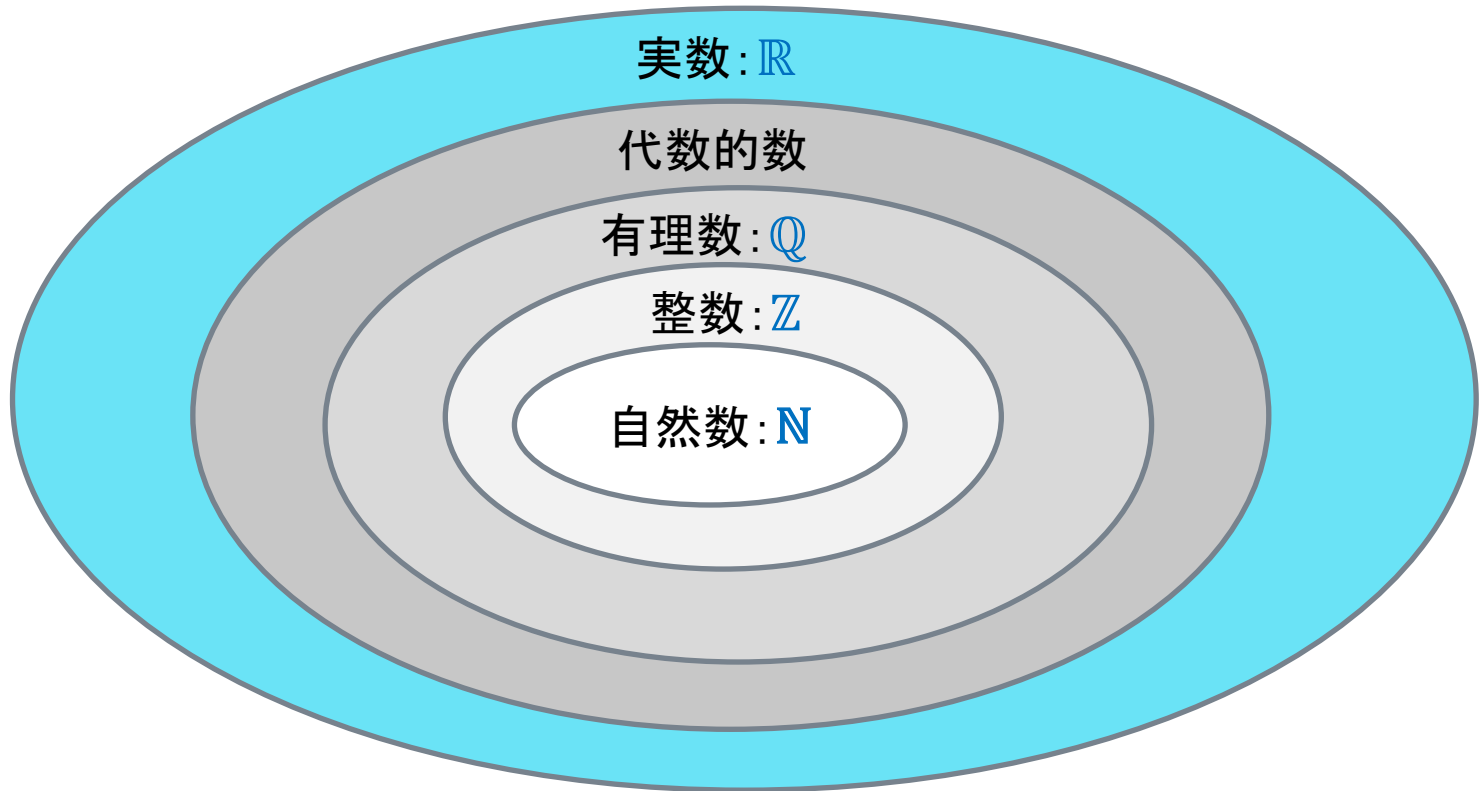
# 数の階層



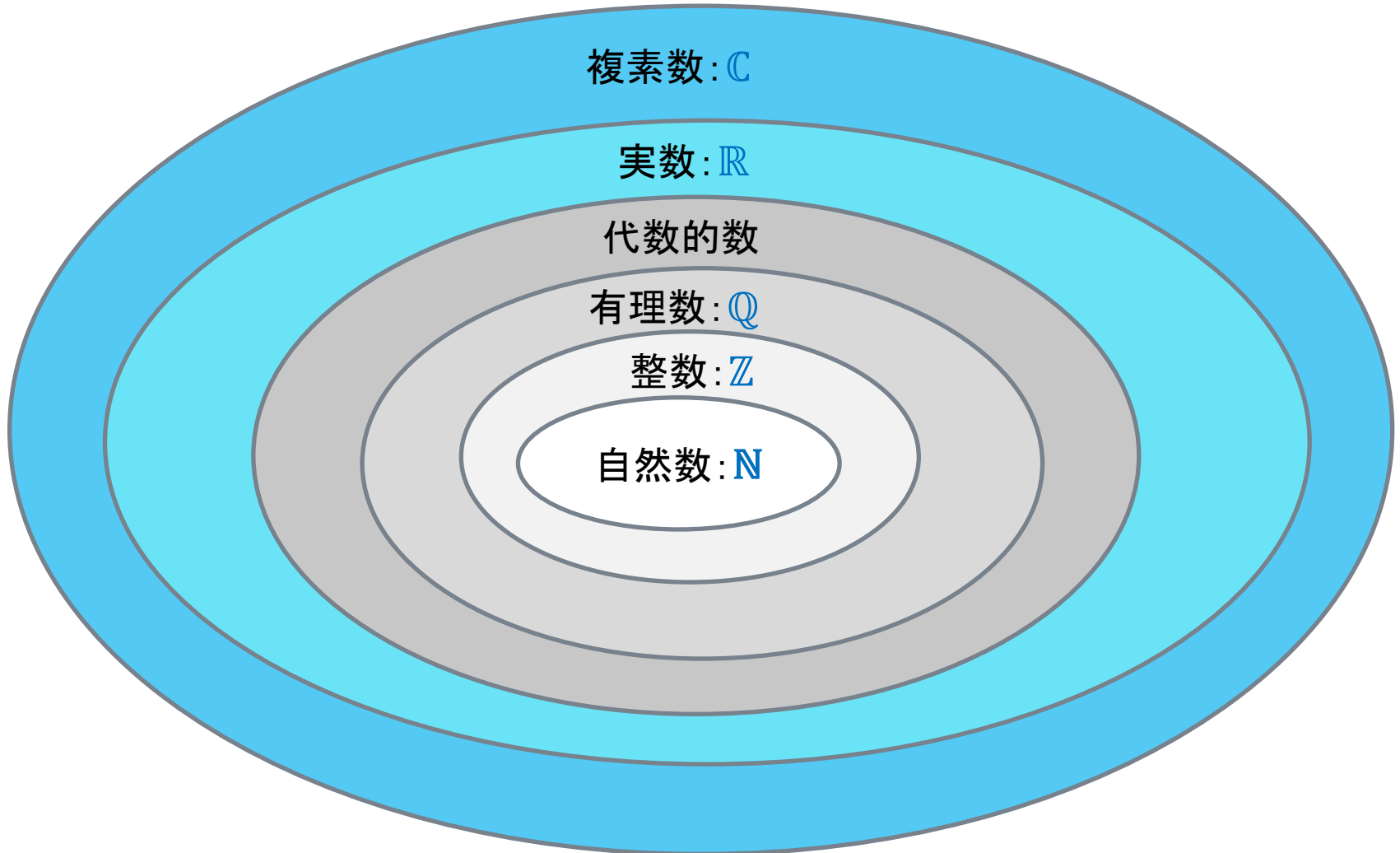
# 数の階層



# 数の階層



# 数の階層



# 数の世界の拡大 2

スカラー、ベクトル、行列、テンソル、...

## |状態>の数学的定義へ

- これまで、|状態> が物理的・数学的に何を表すか、明示的に定義することなく話を進めてきました。
- ただ、物理的・数学的な量的状態については、「一つの数字で表される状態」あるいは、「二つの数字で表される状態」があること、また、|状態>は、量を数字としてくり出せば、その量の「単位」と考えることができることを述べてきました。
- 物理量の「単位」は、物理的な対象に応じた質的なものです。|状態>を抽象的に定義する方法は、|状態>から、質的規定である「単位」を捨象することです。端的に言えば、数字と「単位」の組である物理量から、数字だけを取り出すことです。

# スカラーとベクトル

|状態>は、抽象的にはベクトルのことである

- |状態>を、数字一つ、あるいは数字二つ、状況に応じて、n個の数字そのもので定義します。もう少し、整理しましょう。
- 先に見た自然数から複素数までの数を「スカラー」と呼びます。
- スカラーのn個の並びを「n-ベクトル」と言います。数の並びだと思っていけます。横に並べたものを「行ベクトル」、縦に並べたものを「列ベクトル」といいます。
- |状態>を、「ベクトル」として定義します。  
一般に、量子の状態は、n次元の複素数ベクトルで表現されることになります。
- 全ての状態を表す無限次元の複素ベクトルの空間全体を「ヒルベルト空間」と言います。
- 状態に名前をつけるのに、 $|\cdot\rangle$  ket という記号を使います。

# 状態のket記法 |Ket> の例

- 状態(列ベクトル)を、 $|ID\rangle$  で表す。ここで、IDは状態の名前で、任意の文字列を用いることができる。

例

$$\square |A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; |B\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{2} \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$\square |4次元\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; |maru\rangle = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 1 - 2i \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\square |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |+\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; |-\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

# 行列とテンソル

## 抽象化のステップをさらに進める

- こうした抽象化を繰り返します。
- $m$ 個の $n$ -ベクトルを集めて並べて、それを「行列」といいます。どんな形をしているかを示すには、 $nm$ -行列と表せばいいです。「 $n$ 行 $m$ 列」の形で数字が並んでいるということです。
- 今度は、 $l$ 個の  $nm$ 行列を集めて、それを「テンソル」といいます。
- さらに、 $k$ 個の $lmn$ -テンソルを集めて並べます。このあたりから、これらの量を数の並びとして直感的に把握するのは難しくなりますね。
- さらに、...
- 視覚的に把握できる範囲の数の並びとして、ベクトル、行列、テンソルを描いてみましょう。

# ベクトル、行列、テンソルを、 数の並びとして表す

ベクトル

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

行列

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

テンソル

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{111} & \cdots & C_{1n1} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} C_{m11} & \cdots & C_{mn1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^L$$

これらを構成している、個々の要素はすべて数 **スカラー** である

# 抽象化・一般化された概念の具体的な意味

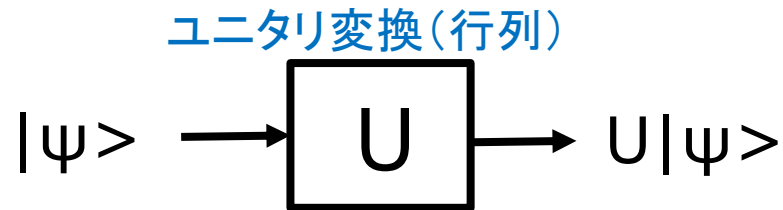
## 例えば、行列は、状態 $|A\rangle$ を状態 $|B\rangle$ に変える

- 数学的な考え方の特徴は、その抽象化・一般化をどこまでも追求できるところにあります。ただ、数学が強力な認識の手段になりうるのは、そうした一般化・抽象化が、具体的な問題・物理的な問題を解く手段を与えるからです。
- 先のスカラーからテンソルへの概念の拡大も、直接には、その具体的な意味は分かりにくいのですが、この抽象化の最初の段階で生まれたベクトルと行列には、こんな意味があります。
- ベクトルは状態です。行列  $M$  はベクトルに作用してベクトルを生み出します。行列は、ある状態を別の状態に変えるのです。
- より具体的に量子の状態に限れば、量子の状態を変えるという特別な特徴を持つ行列があるのです。こうした行列を「ユニタリ行列」と言います。

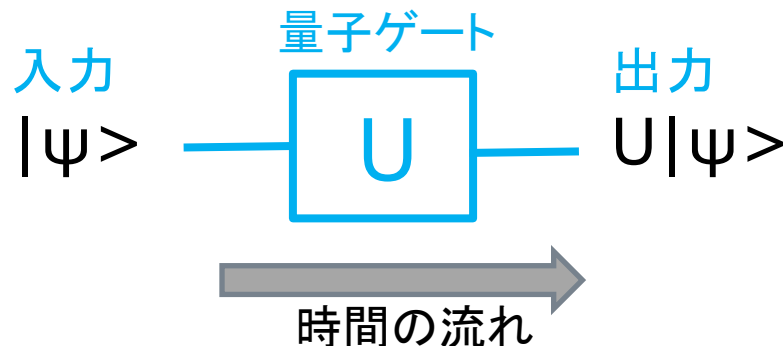
# 量子ゲートと量子コンピュータ

# 量子ゲートとユニタリ行列

- 量子の状態  $|\psi\rangle$  は、ユニタリ変換  $U$  (ユニタリ行列) の作用を受けて、状態  $U|\psi\rangle$  に変化する。
- この変化  $|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$  を、次のように表そう。



- この時、 $U$  を、 $|\psi\rangle$  を入力、 $U|\psi\rangle$  を出力とする回路と考えることができる。これを、「量子ゲート」と呼ぶ。

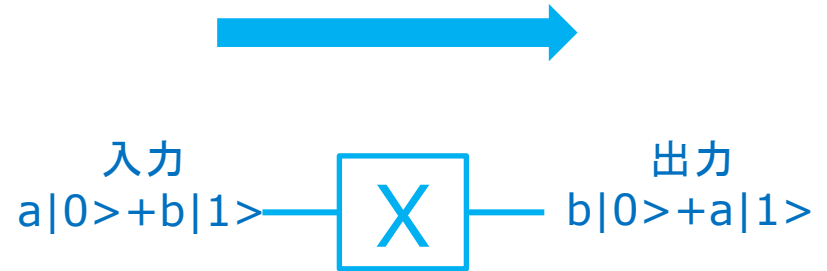


量子ゲートは  
ユニタリ行列と  
一対一に対応する

# X, Z, H の行列と対応する量子ゲートの働き

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  なので、

$$X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$



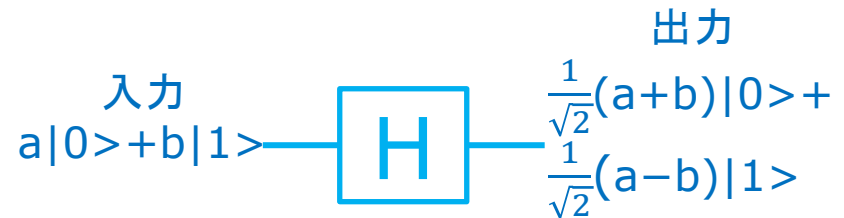
$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  なので、

$$Z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$



$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  なので、

$$H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}$$



# 代表的な1-qubitのゲート X, Z, H

入力  出力



## Bit Flipper

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle + a|1\rangle$$



## Phase Flipper

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle - b|1\rangle$$

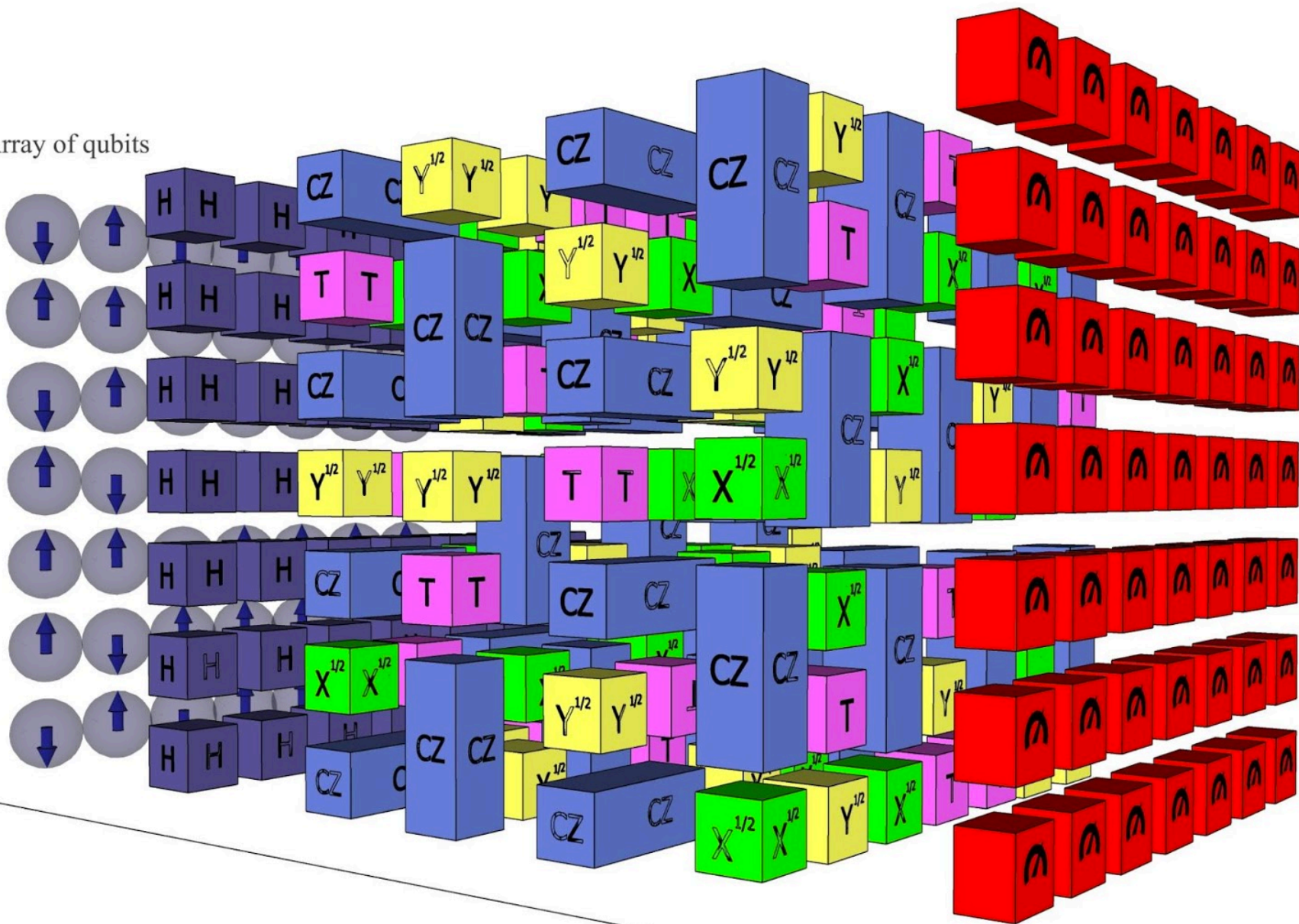


## Hadamard

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|1\rangle$$

$|0\rangle, |1\rangle$  基底から  
 $|+\rangle, |-\rangle$  基底への変換

Array of qubits

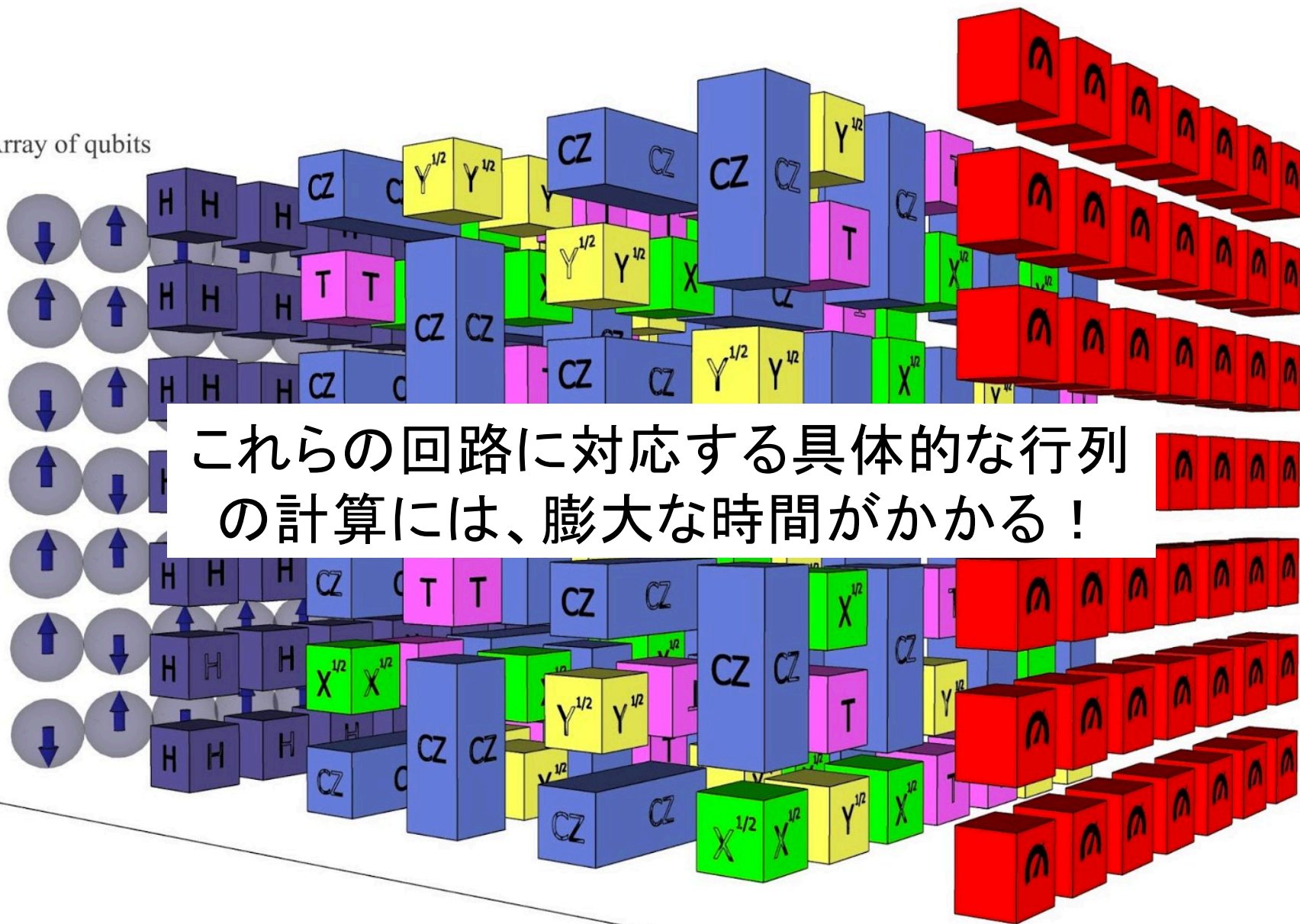


“The Question of Quantum Supremacy” より

<http://ai.googleblog.com/2018/05/the-question-of-quantum-supremacy.html>

Circuit depth

Array of qubits



これらの回路に対応する具体的な行列  
の計算には、膨大な時間がかかる！

“The Question of Quantum Supremacy” より

<http://ai.googleblog.com/2018/05/the-question-of-quantum-supremacy.html>

Circuit depth

抽象化された巨大な対象を  
具体的・視覚的に把握する

Tensor Network

# ベクトル、行列、テンソルを図形で表す

ベクトル

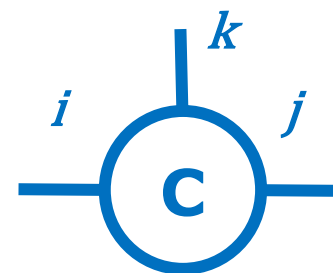
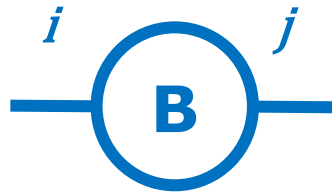
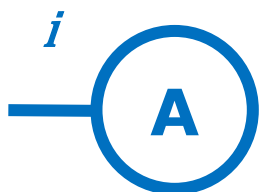
行列

テンソル

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{111} & \cdots & C_{1n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m11} & \cdots & C_{mn1} \end{bmatrix}^L \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} C_{111} & \cdots & C_{1n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m11} & \cdots & C_{mn1} \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}^3$$



# ベクトル編

# ベクトル

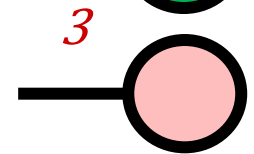
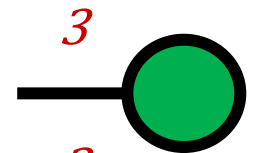
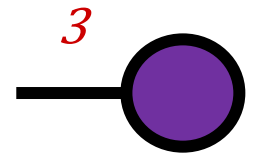
ベクトルとは、数字の  $j$  個の並びである。

例えば、

3個の数字の並び  $\{1, 2, 3\}$  は、ベクトルである。  
右のような図で表す。ここで3は、並びの個数である。

だから、3個の数字からなる  $\{4, 5, 6\}$  も、  
同じ3個の数字からなる  $\{3.15, 0.999, 100\}$  も  
同じ図形で表現される。

5個の数字からなる  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  は  である。

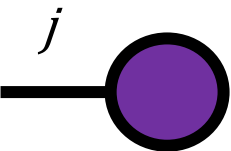


5



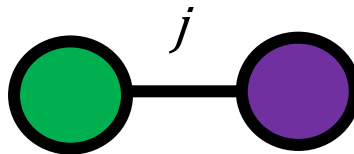
# ベクトル同士の積

同じ  $j$  個の要素を持つ

ベクトル  $x$   と

ベクトル  $y$  

の積  $x \cdot y$  を次のように表す。

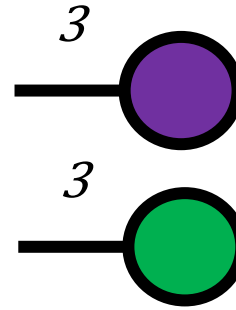


ベクトル  $x$  とベクトル  $y$  の積が定義できるためには、それぞれのベクトルの要素の数  $j$  が等しくなければならない。

# ベクトル同士の積の例

$x = \{1, 2, 3\}$  と

$y = \{4, 5, 6\}$  の



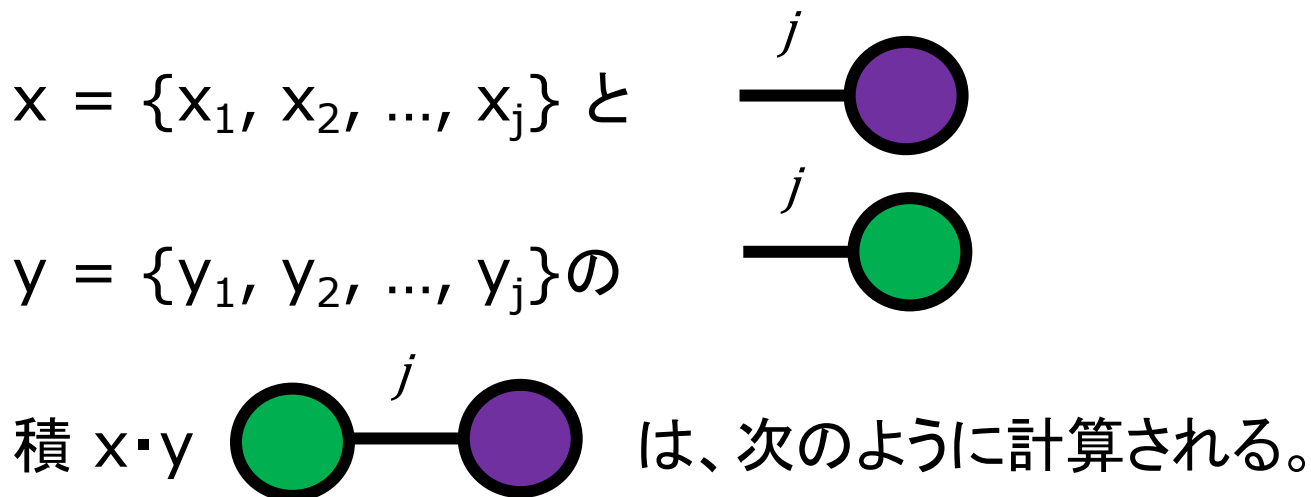
積  $x \cdot y$   は、次のように計算される。

$$x = \{1, 2, 3\}$$

$$y = \{4, 5, 6\}$$

$$x \cdot y = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

# ベクトル同士の積の一般の定義



$$\begin{array}{c} x = \{x_1, x_2, \dots, x_j\} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ y = \{y_1, y_2, \dots, y_j\} \\ \swarrow \quad \updownarrow \quad \searrow \\ x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_j y_j \end{array}$$

対応する要素をかけて、全部足したものである。

# 行列編

# 行列

行列とは、 $i$  個の同じタイプのベクトル  $v_j$  の並びである。

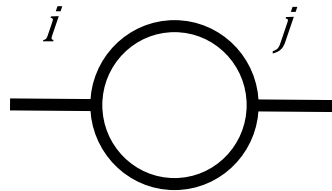
例えば、 $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,2,4\}\}$  は、  
4個のベクトル $v_3$ の並びであるので、行列である。

$v_2$        $v_4$        $v_3$        $v_3$   
 $\{\{1,2\},\{4,5,6,7\},\{7,8,9\},\{1,2,4\}\}$  は、行列ではない。  
なぜなら、この並びの一項目、二項目、三項目、四項目の  
ベクトルのタイプが、 $v_2, v_4, v_3, v_3$ とそれぞれ異なっているからで  
ある。

## 行列を表す図形

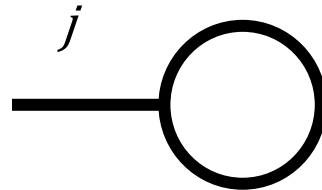
行列とは、 $i$  個の同じタイプのベクトル  $v_j$  の並びである。

この時、この行列を、次のような図形で表そう。

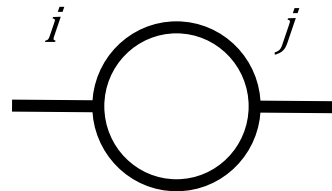


これは、直感的には、 $i$ 行 $j$ 列の行列と考えればいい。

## 「ベクトル」と「行列」の定義



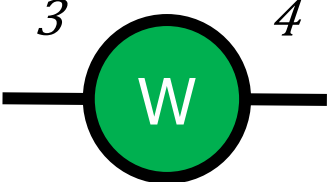
という図形で表されるものを「ベクトル」という



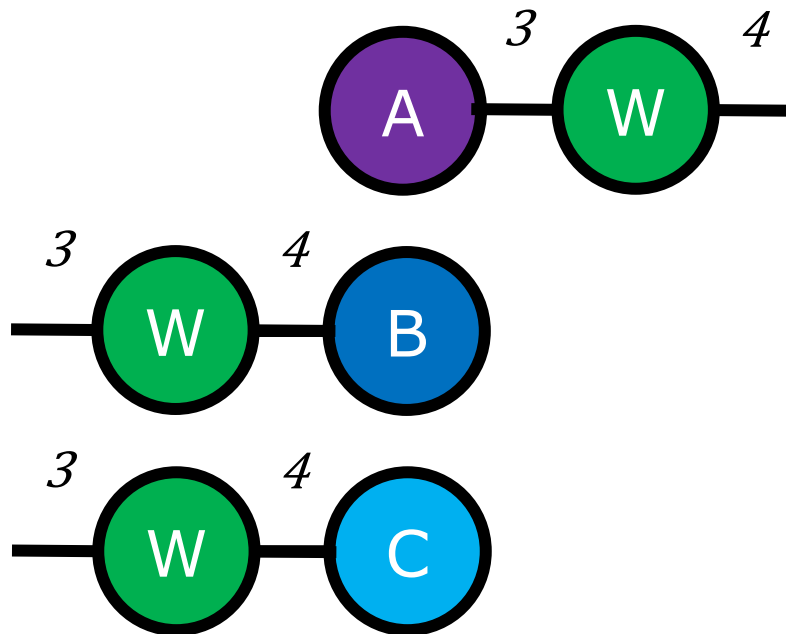
という図形で表されるものを「行列」という

丸から出ている腕についている  $i, j$  等の数字を  
その腕の**指数**と呼ぶことにしよう。

# 「行列」と「ベクトル」の積を考える

「行列」 $W$   は、指数が3と4の腕を持つから、

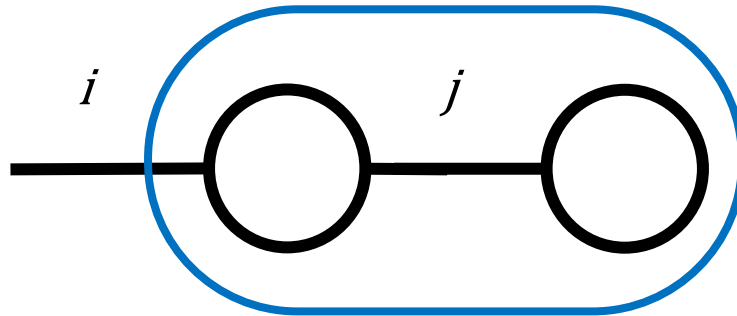
指数が、3または4を持つ次の「ベクトル」とつながることができる。



# 「行列」と「ベクトル」の積の意味を考える



次のような形をしている。

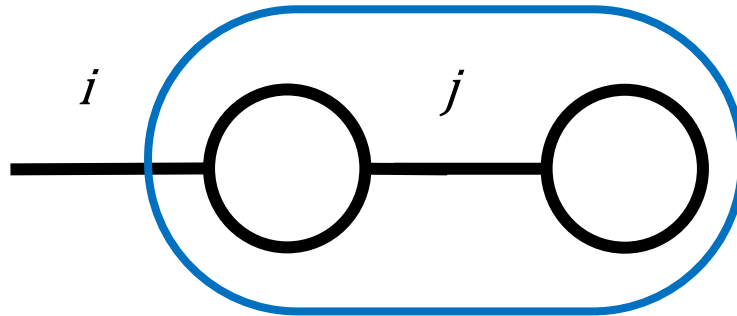


これは、このように考えれば、

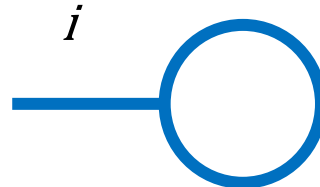
# 「行列」と「ベクトル」の積の意味を考える



次のような形をしている。



これは、このように考えれば、

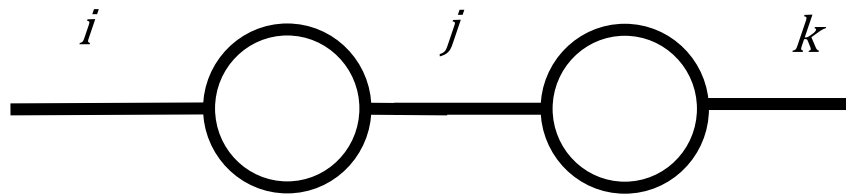


とみなすことができる

# 「行列」と「行列」の積の意味を考える



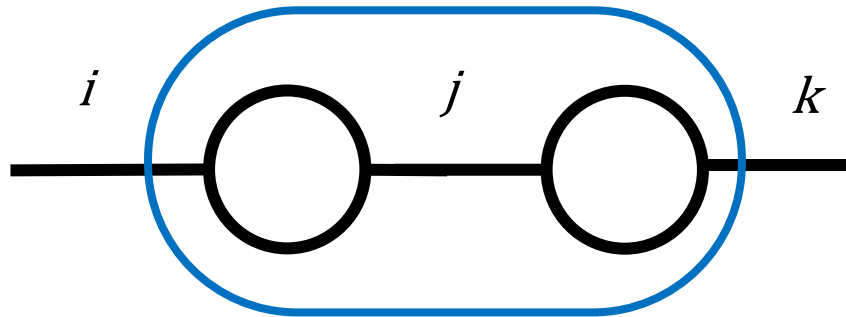
次のような形をしている。



# 「行列」と「行列」の積の意味を考える



次のような形をしている。

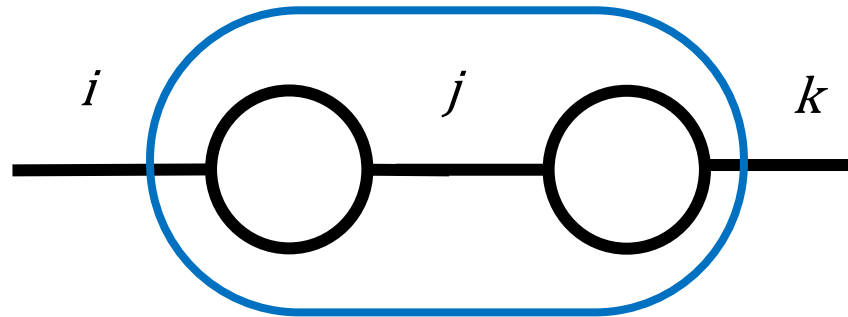


これは、このように考えれば、

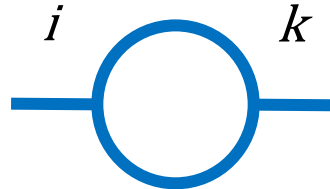
# 「行列」と「行列」の積の意味を考える



次のような形をしている。



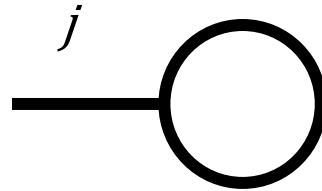
これは、このように考えれば、



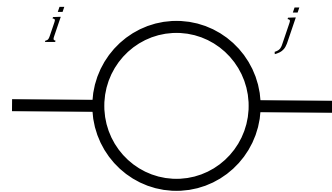
とみなすことができる

# テンソル編

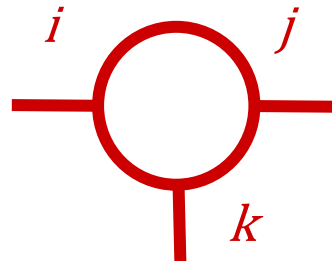
## 「3-テンソル」の定義



という図形で表されるものを「ベクトル」という

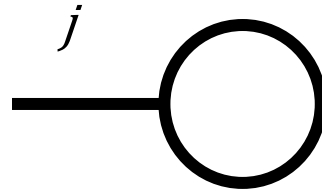


という図形で表されるものを「行列」という

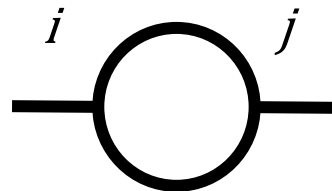


という図形で表されるものを「3-テンソル」という

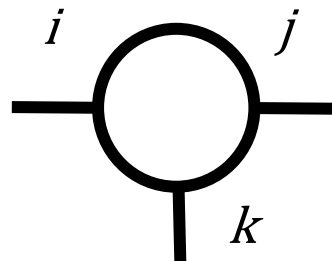
「ベクトル」は腕を1本持ち、「行列」は腕を2本持ち、  
「3-テンソル」は腕を三本持つ



という図形で表されるものを「ベクトル」という

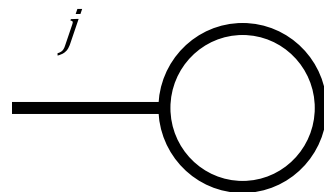


という図形で表されるものを「行列」という



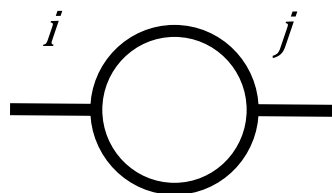
という図形で表されるものを「3-テンソル」という

## だから、次のように考える



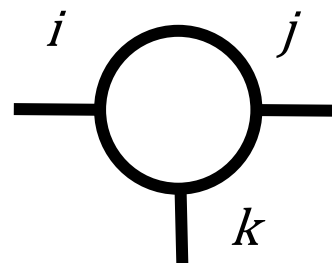
「ベクトル」は、  
「1-テンソル」である

- 1 本の腕を持つ図形で表されるものを「1-テンソル」という



「行列」は、  
「2-テンソル」である

- 2 本の腕を持つ図形で表されるものを「2-テンソル」という

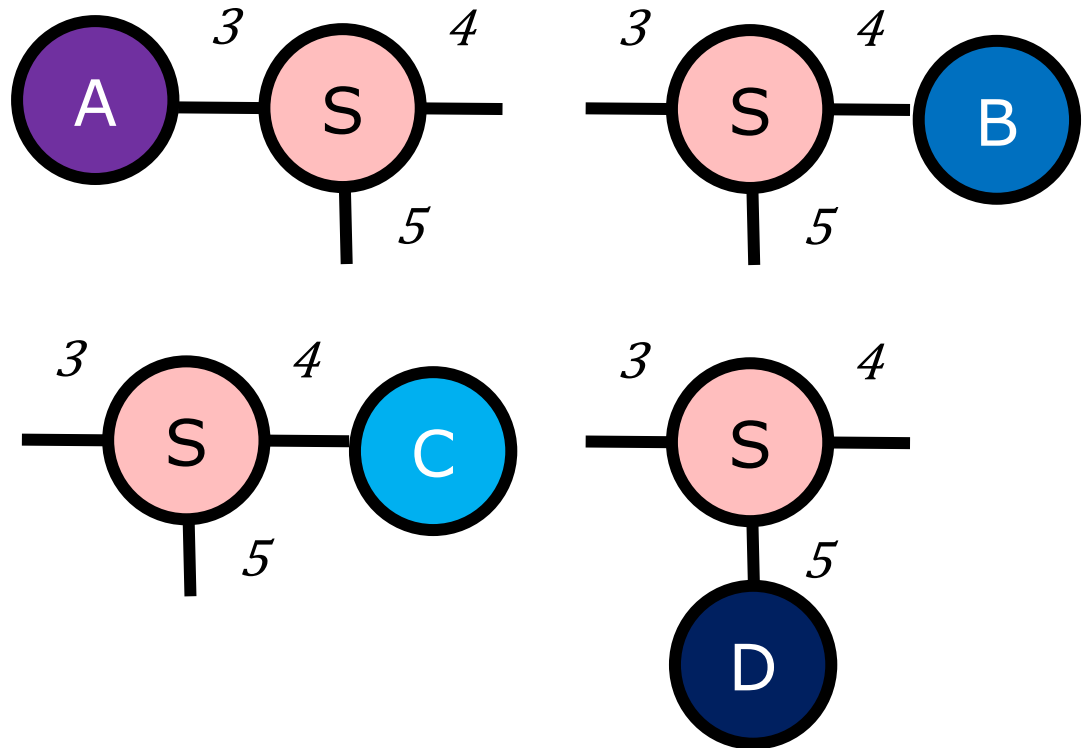


3本腕は、  
「3-テンソル」である

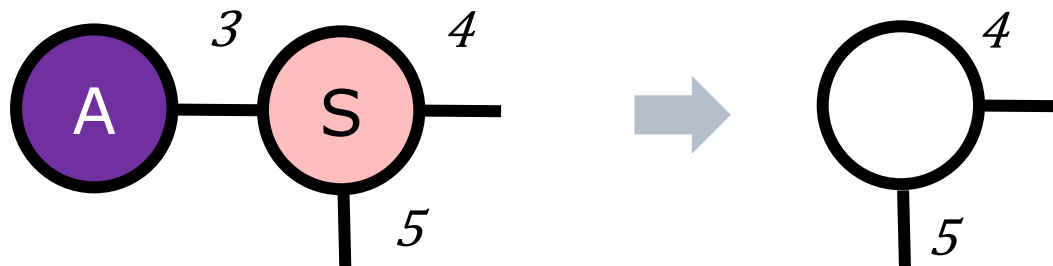
- 3 本の腕を持つ図形で表されるものを「3-テンソル」という

# 「3-テンソル」と「ベクトル」の積の形を考える

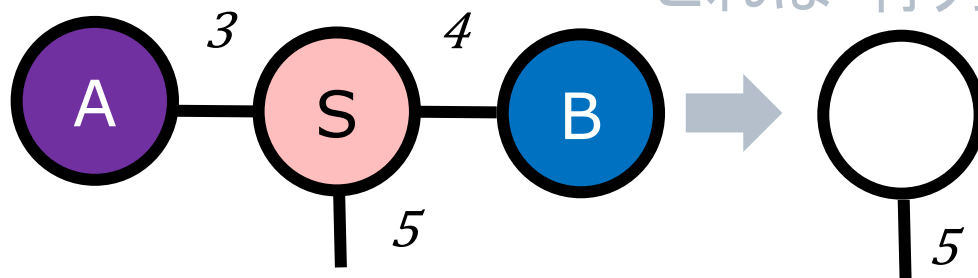
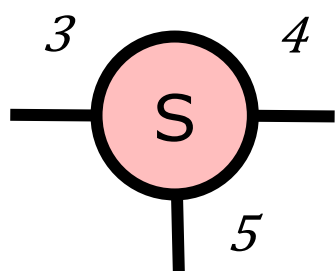
次のものは、「3-テンソル」Sと「ベクトル」との積である。



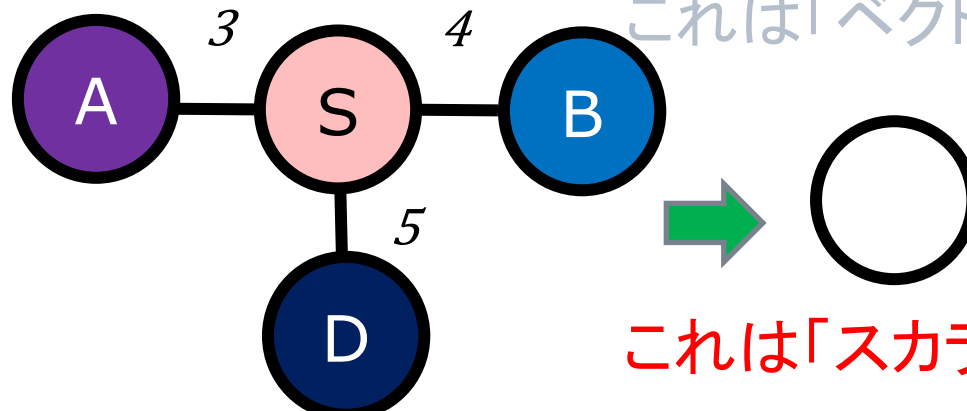
# 3-テンソルSの腕に、 もっとベクトルをぶら下げてみよう



これは「行列」である



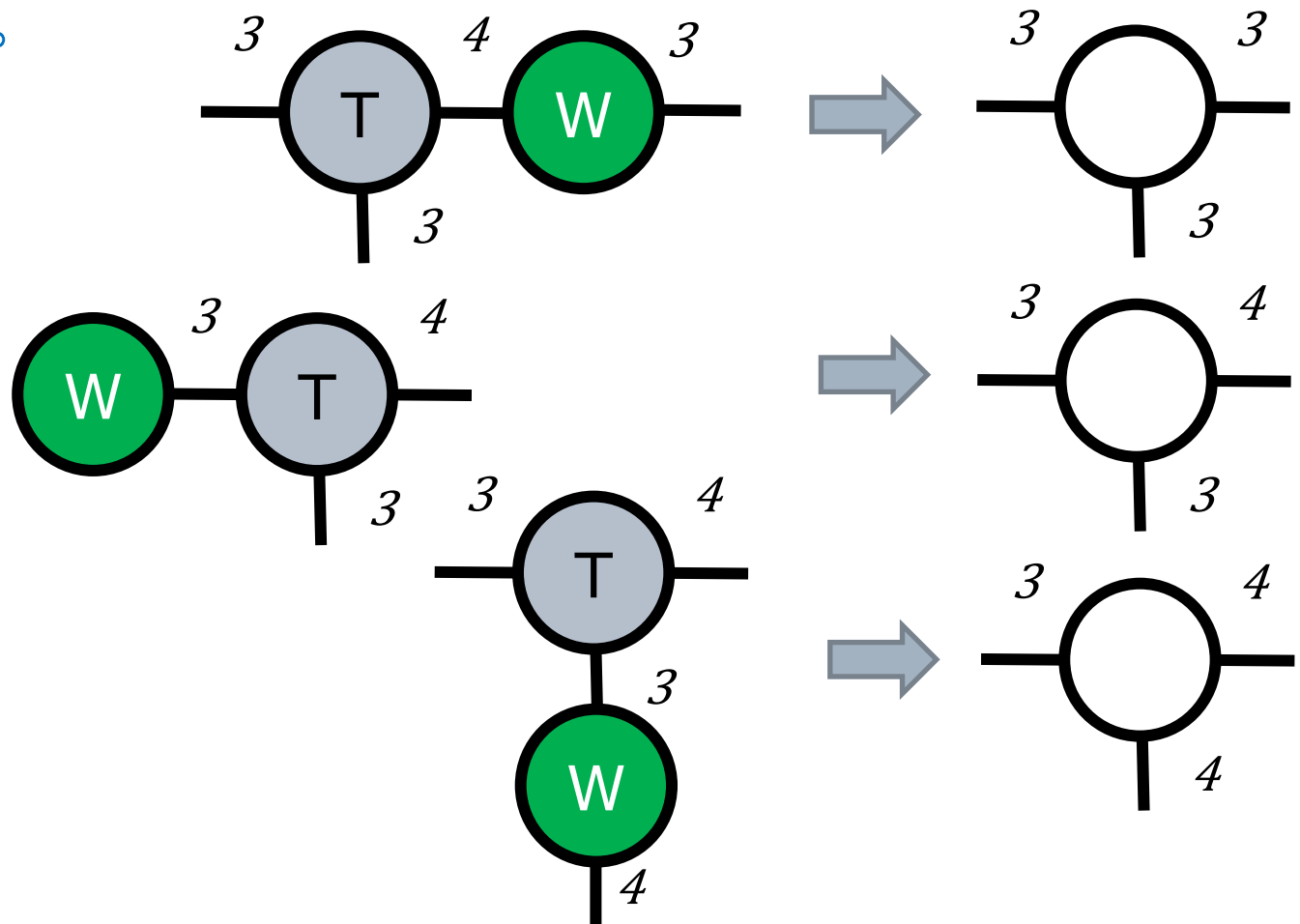
これは「ベクトル」である



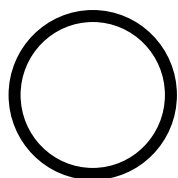
これは「スカラー」である

# 「3-テンソル」と「行列」の積の形を考える

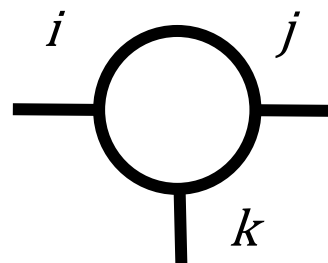
「3-テンソル」と「行列」の積は、腕が3本残っているので、「3-テンソル」である。



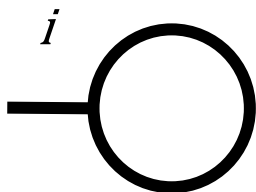
## これまでのまとめ



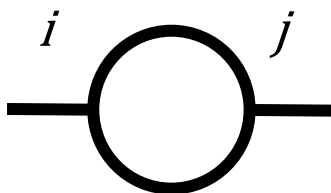
0-テンソル  
スカラー



3-テンソル

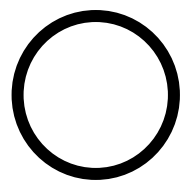


1-テンソル  
ベクトル

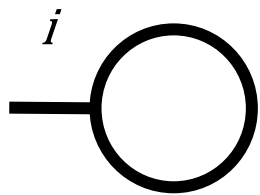


2-テンソル  
行列

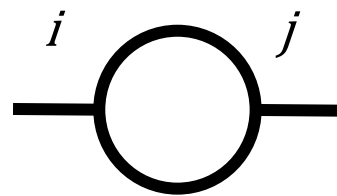
# n-テンソル への拡大



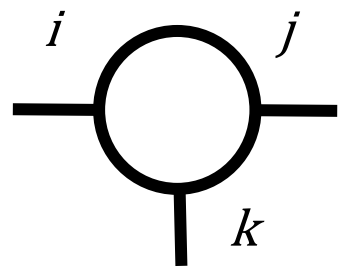
0-テンソル  
スカラー



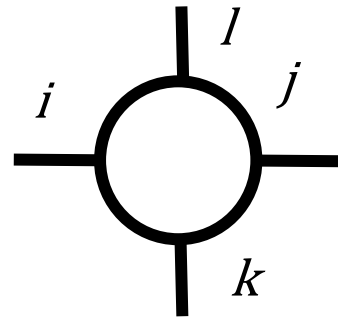
1-テンソル  
ベクトル



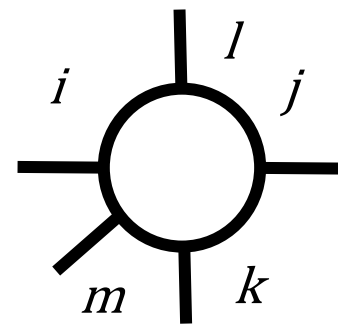
2-テンソル  
行列



3-テンソル



4-テンソル



5-テンソル

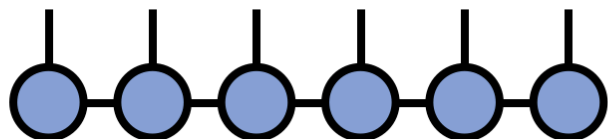
何をしたいのか？

ヒルベルト空間は、あまりに巨大である。

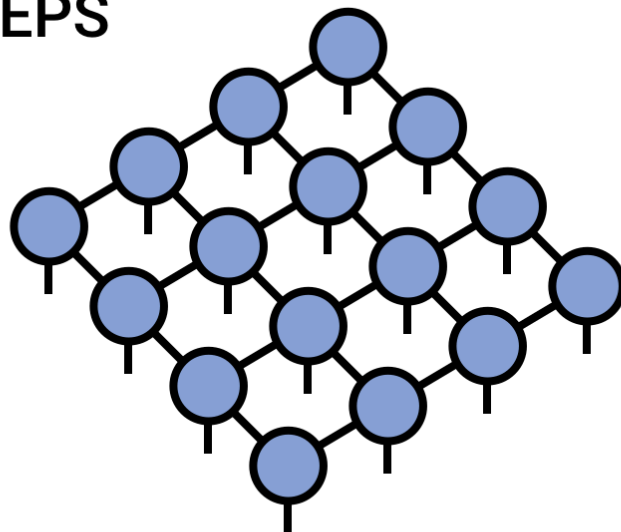
- ヒルベルト空間は、あまりに巨大である。
- ヒルベルト空間中で定義される、具体的で物理的な意味のある演算は、限られている。
- ただし、そうしたものに対しても行列の要素から計算していくのには膨大な時間がかかり、現実的には不可能。それに、理論的な見通しが悪い。
- 一つの解は、計算に量子コンピュータを使うこと。ただ、それは、いま、ようやく立ち上がったばかり。

# こんな図形を考える

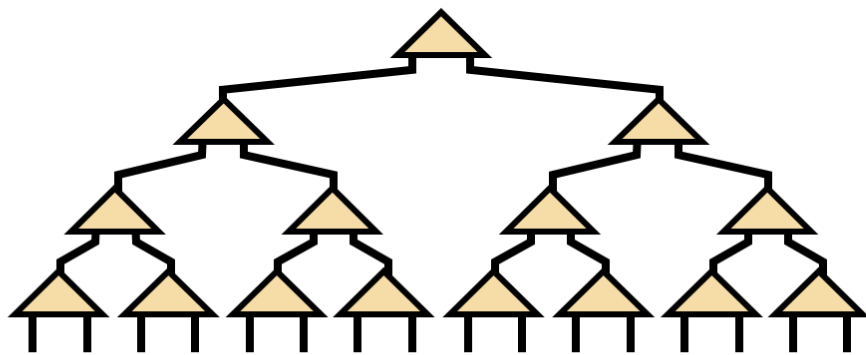
Matrix Product State /  
Tensor Train



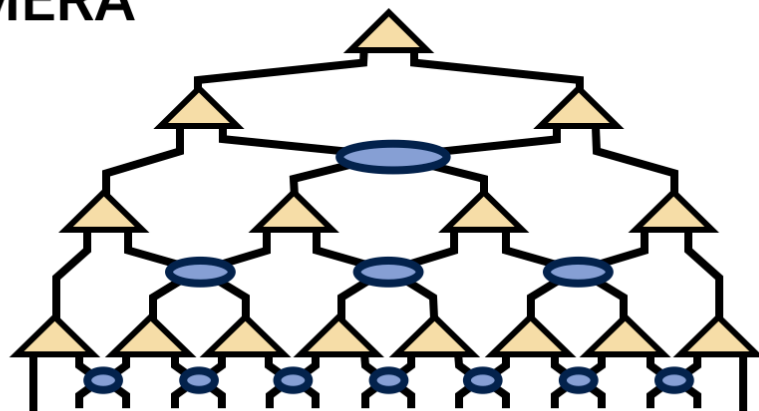
PEPS

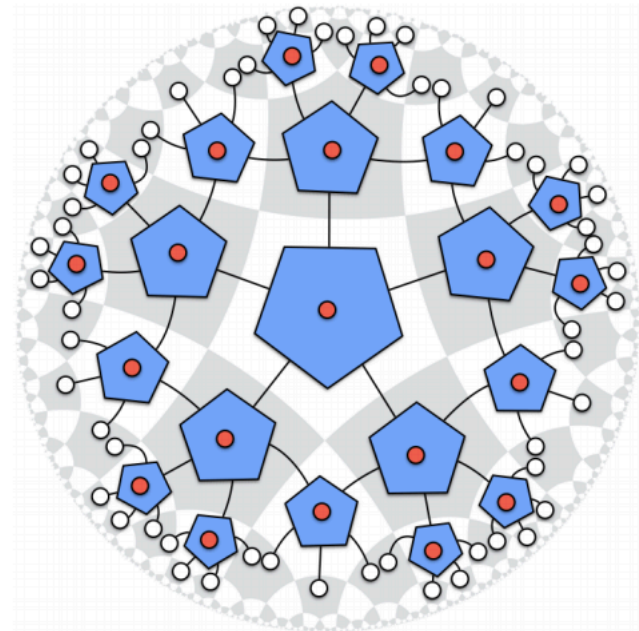
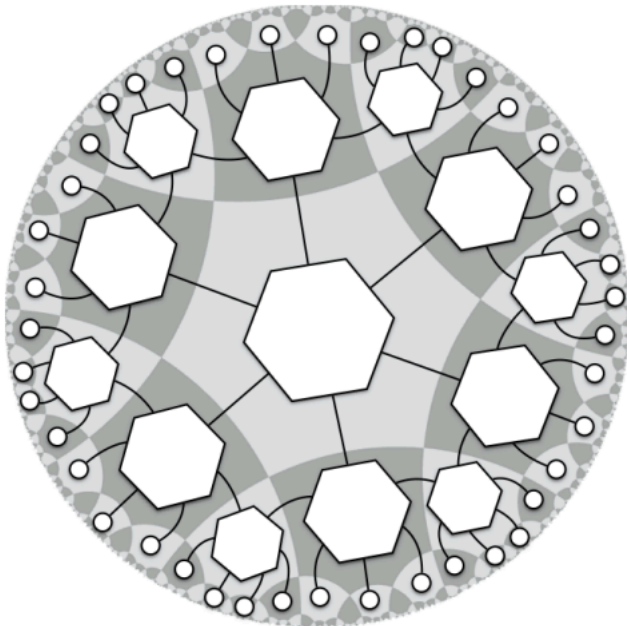
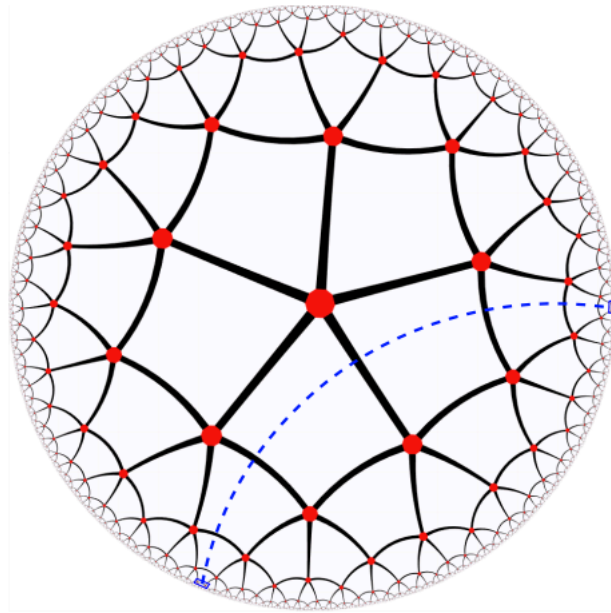


Tree Tensor Network /  
Hierarchical Tucker



MERA





# AdS/CFT 対応

J. M. Maldacena,

“The large N limit of superconformal field theories  
and supergravity”

<https://arxiv.org/pdf/hep-th/9711200.pdf>

1998年1月

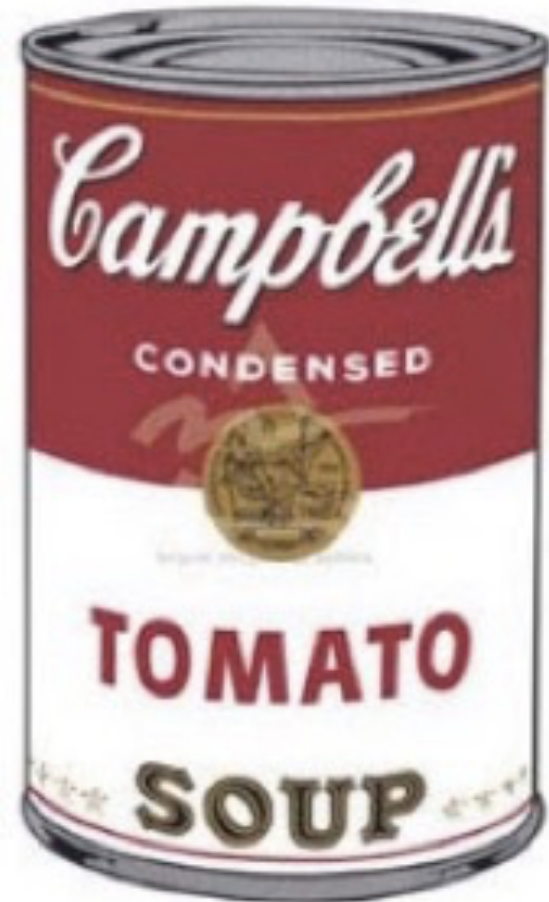
## 量子論と相対論の統一の課題

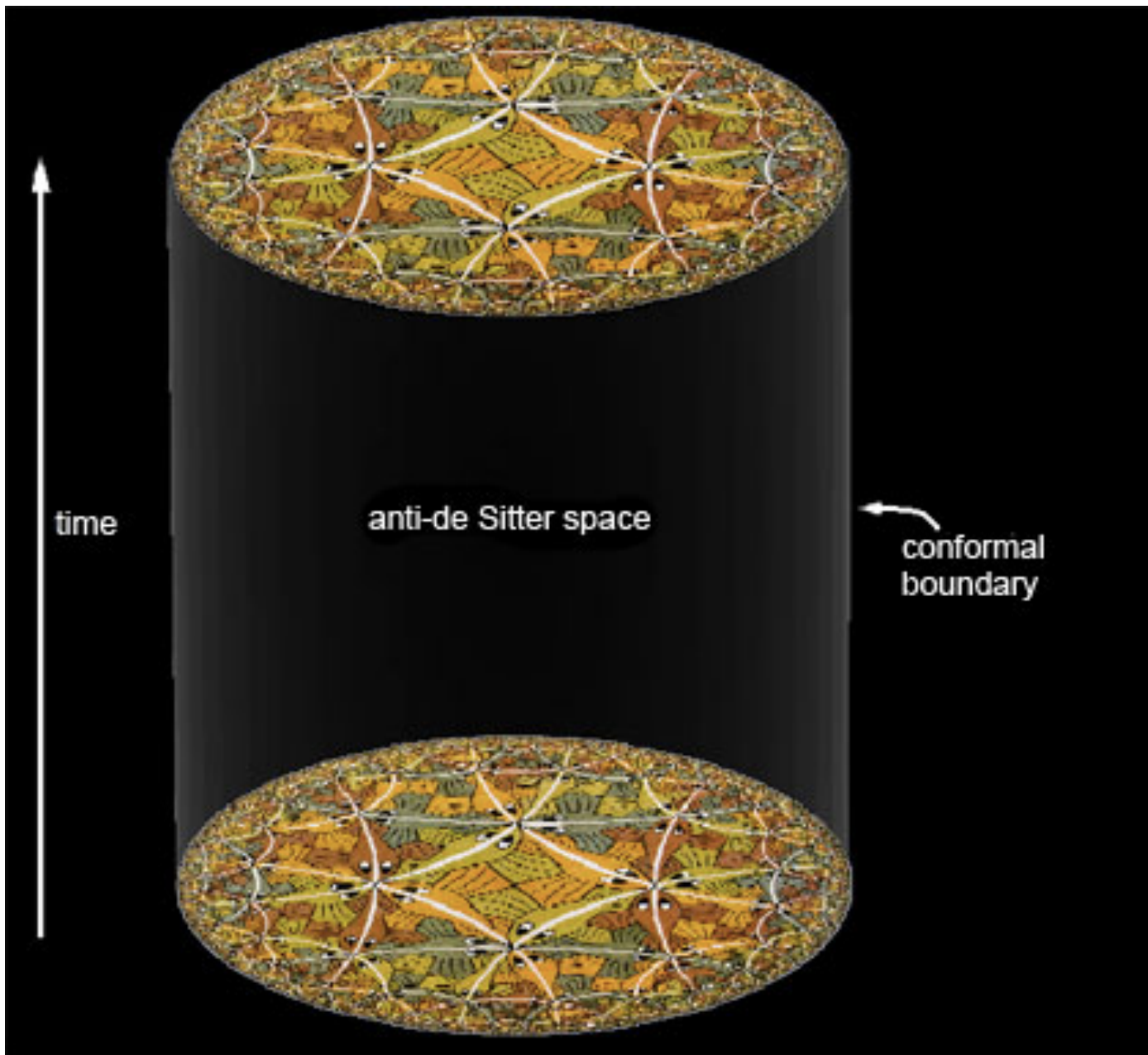
---

- 極微な世界を記述する量子力学と巨大な時空を記述する重力の理論である相対論との統一は、物理学の難問である。二つの理論は、それぞれの領域では、100年近くの間、大きな成功をおさめてきたのだが。それぞれ異なる理論体系に基づく、物理学が二つある？ それは、奇妙なことだ。
- このところ、この問題が解決できるのではという希望が生まれているように見える。もっとも重要な飛躍は、物理学者マルデセーナによる次のような発見である。(だいぶ、テキトーにまとめている)
- 「キャンベルのスープ缶にたとえば、重力理論はスープの理論で、量子論は缶の理論である。」
- ブリキの缶の外側をいくらなぞっても、スープのことはわからない。逆に、いくらスープを舐めても、缶のことはわからない。

## 量子論と相対論の思わぬ接点

- マルデセーナがエライのは、そうではないことを見つけたことである。「スープと缶は、無関係ではなく関係がある。缶を調べれば、スープのことがわかり、スープを調べれば缶のことがわかる！」
- それは、文字通り「接点」だった。重力理論(スープ)に「境界」を接して量子論(缶)が、棲んでいたのだから。これは、「境界」の重要性の発見でもあった。





<https://goo.gl/imCz3r>

