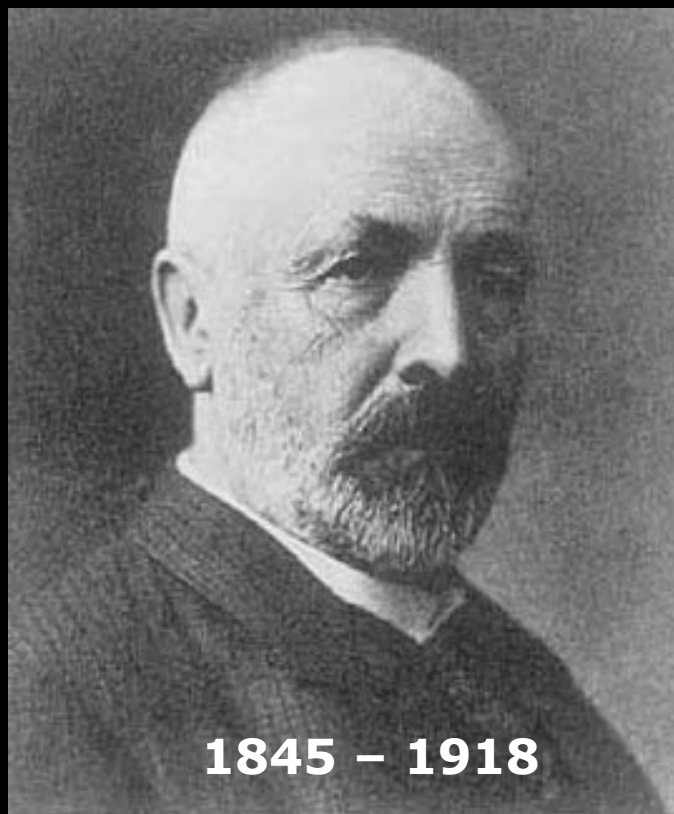


楽しい数学 -- MaruLabo数理ナイト

カントール没後百年



1845 – 1918

第二夜 集合論入門
「数える」と「個数」の数理

はじめに

- 集合論は、19世紀後半に、ドイツの数学者ゲオルグ・カントールが創り出した数学の一分野です。今年は、カントール没後100年にあたります。
- それまでの数学が、微分や積分や無限級数や幾何学的図形や物理的な運動を対象にしていたのに対して、集合論が対象とするのは、より抽象的な「集合」そのものです。その意味では、集合論の登場は、現代数学の一つの特徴である「抽象化」の歴史的な第一歩といっていると思います。
- ただ、集合論の基本的考え方は、決して抽象的なものではありません。それは、極めて具体的な、「集める」「数える」といった操作を基礎にしています。集合とは、いろいろなものを集めてできたものに、一つのまとまりを与えることです。逆に、いろいろなもの(これを「要素」といいます)は、この集合に「属する」と考えます。

はじめに

- 集合について大事な特徴の一つは、我々は、集合の要素の数を数えることができるということです。こうした考えは自然なもので、小学生に初めて足し算を教えるときには、この集合のモデルを使っています。「赤い石が三つのかたまりと、青い石が五つのかたまりを、一緒にすると、石はいくつ？ 数えてみましょう。」
- 問題は、こうした素朴な考えを進めていくと、あるところで、急に難しくなるということです。集合論の創始者のカントールが考えた一番難しい問題の一つは、次のようなものでした。答えられますか？

「線は、点を集めたもの。それでは、この線分の上に、点は何個あるのか数えてみよう。」

はじめに

- こうして、集合論は、主に、無限と連続というものを数学的に考える数学として出発します。ただ、その前途は、平坦なものではありませんでした。
-

Agenda

第二夜 集合論入門 -- 「数える」と「個数」の数理

思考実験:「 $1 = 0.9999999\ldots$ か？」

- 「数える」を考える
 - カントールの考えたこと 1 -- 無限に数え続ける方法
 - カントールが考えたこと 2 -- 無限集合の要素の個数
 - カントールが証明できなかったこと - 連続体仮説
 - 集合論の体系の整備
 - 非カントールの集合論の発見
 - 数学の基礎を基礎付ける試みの発展
-

思考実験:

$1 = 0.99999999\dots$ か？ あるいは、

$1 > 0.99999999\dots$ か？

1 = 0.99999999 ... の証明

$$\begin{aligned}0.333\ldots &= \frac{1}{3} \\0.333\ldots \times 3 &= \frac{1}{3} \times 3 \\0.999\ldots &= 1\end{aligned}$$

1/3 > 0.333... ではないか？
1/3 = 0.333... に「確信」を
もてるのは、我々が、1/3の
「計算」を実際に行った経験が
あるから。ただし、途中まで。

$$\begin{aligned}c &= 0.999\ldots \\10c &= 9.999\ldots \\10c - c &= 9.999\ldots - 0.999\ldots \\9c &= 9 \\c &= 1\end{aligned}$$

無限の桁に数字をかけたり、
無限の桁同士の引き算を
している。こうした計算が
疑わしい結果をもたらすことを
次の例は示している。

$1+2+3+4+5+6+ \dots = -1/12$ の証明

次のような三つの数列 A,B,Cを考える。

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 0, 1, \text{不定}, 1/2 ?$$

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

B+Bを計算する。

この時、一桁位置をずらして足しあわせる。

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

$$\begin{array}{r} +) B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ \hline 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{array}$$

この $B+B=2B$ は、Aに等しいことがわかる。

$$2B = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = A$$

$$B = A/2$$

$1+2+3+4+5+6+ \dots = -1/12$ の証明

今度は、CからBを引いてみる。

$$\begin{array}{r} C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\ -) B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ \hline 4 + 8 + 12 + \dots \end{array}$$

そうすると、それは4Cに等しいことがわかる。

$$C - B = 4 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots) = 4C$$

$$C - B = 4C \text{ だから、} 3C = -B。C = -B/3$$

先の結果 $B = A/2$ から

$$C = -A/6。 \quad 1+2+3+\dots = - (1-1+1-1+\dots)/6$$

もし、 $A = 1/2$ なら、

$$C = - 1/12$$

$$1+2+3+4+5+6+ \dots = - 1/12$$

1 = 0.99999999 ... の証明

$$0.999 \dots = 9 \left(\frac{1}{10} \right) + 9 \left(\frac{1}{10} \right)^2 + 9 \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \dots = \frac{9 \left(\frac{1}{10} \right)}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

$$\begin{aligned} 0.999 \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.99 \dots 9}_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \underbrace{0.00 \dots 1}_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\} \\ &= 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

<https://goo.gl/rQ7W1j>

コーシー列による実数の構成から考える

- 2つの有理数 x と y に対して、距離 $d(x, y)$ を絶対値 $|x - y|$ で定義する。そして実数全体というものを、この距離 d に関する有理数のコーシー列全体を以下で定義する同値類で割ったものとして定義する。
- 有理数列 $\{x_n\}$ がコーシー列であるとは、
任意の正の数 ε に対して、番号 N が存在し、 N より大きいすべての m, n に対して $|x_m - x_n| < \varepsilon$ が成り立つことと定義される。(つまり、番号が十分先なら2項間の距離が限りなく小さくなるということ)
- 2つのコーシー列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が同値であることを、 $x_n - y_n$ が 0 に収束することと定める。

コーシー列による実数の構成から考える

- 小数 $b_0.b_1b_2b_3\cdots$ に対して、各位以降を順に切り捨てていくことにより得られる数列は有理数のコーシー列を定めるので、このコーシー列が、この小数展開の表している実数の真の値と定められることになる。
- この性質より $0.999\cdots = 1$ を証明するためにしなければならないことは、有理数のコーシー列

$$\{x_n\} := \{1, 1, 1, 1, \cdots\}$$

$$\{y_n\} := \{0, 0.9, 0.99, 0.999, \cdots\}$$

が同値である、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

が 0 に収束することを証明することである。

デデキントの切断による実数の定義から考える

- 任意の実数 x は、「 x より小さい有理数全体からなる無限集合」と定義される。実数 1 は「 1 より小さいすべての有理数の集合」となる。
- この方法で実数 $0.999\ldots$ というものが何であるかを考えるなら、 $r < 0, r < 0.9, r < 0.99, \ldots$ (つまり、ある自然数 n に対して、 $r < 1 - (1/10)^n$ を満たす有理数 r すべてが作る集合として定義されるということになる。
- $0.999\ldots$ より小さい有理数すべては 1 より小さいので、これは実数 1 の元に含まれる。

デデキントの切断による実数の定義から考える

□ 一方、実数 1 の元となる任意の有理数

$$\frac{a}{b} < 1$$

$(b \geq 1)$ を考えると、

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{b-a}{b} \leq 1 - \frac{1}{b} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^b$$

となるため、 a/b は $0.999\ldots$ の元になっている。

□ よって、 $0.999\ldots$ と 1 とは全く同じ有理数をすべて元として含み、これらは集合として等しい。つまり $0.999\ldots = 1$ である。

「数える」を考える

「数える」と「測る」

宇宙を埋め尽くす砂の数は？



by アルキメデス

....

また、砂粒の大きさに関しては、以下の仮定を立てた。

1個のケシ粒の体積は、1万個の砂粒の体積よりも大きくはない

1個のケシ粒の直径は、 $\frac{1}{40}$ デイジットよりも小さくはない

2. は自身の観測を元に、砂粒の大きさを小さめに見積もるように仮定したものである。

これらの仮定から、

直径1デイジットの球を満たす砂粒の個数は、6億4千万より少なく、故に10億 (10^9) より少ないことを導いた。また、

1スタディオン(スタディアの単数形)は1万デイジットよりも小さいことを用い、

直径1スタディオンの球を満たす砂粒の個数は、十万の第3級の数 (10^{21}) よりも少ないとした。上記の宇宙の大きさの見積もりと合わせ、

宇宙球を満たす砂粒の個数は、千の第7級の数 (10^{51}) よりも少ないと結論した。

「測る」と「数える」は違う

<https://goo.gl/KEXgQF>



by 日本野鳥の会

まず、道に沿って、森の中を歩き、

たとえば左右25メートルの範囲内で目撃した野鳥の数を数えます。

次に、調査した範囲の面積と森全体の面積から、

野鳥の数を割り出します。

さらに、鳥と観察者が出会う確率(遭遇率)と、

出会った鳥が観察者に発見される確率(発見率)も考えて微調整します。

これを式で表すと、

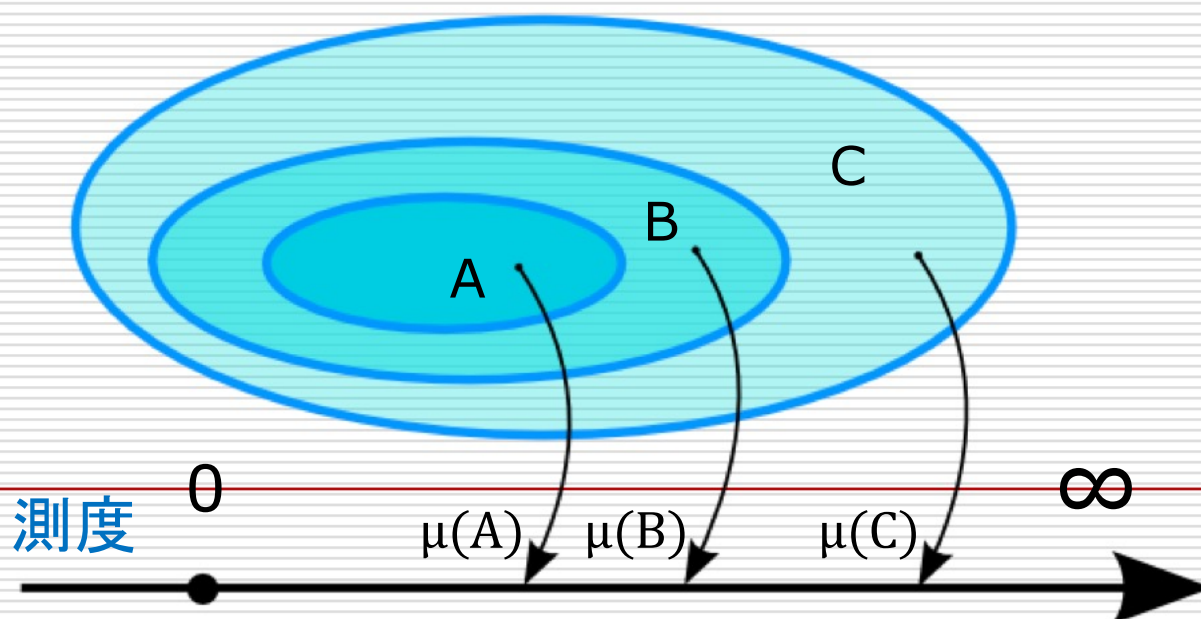
総数＝発見率÷(遭遇率×発見率×面積率)ということになります。

この画像の鳥の数は、この方法では数えられない！

<https://goo.gl/8c7sRP>

「測る」-- 測度の性質

- 測度は、長さ、面積、体積等に関係した量。実数値をとる
- A が B の部分集合なら、 A の測度 $\mu(A)$ は B の測度 $\mu(B)$ より小さい。(あとで見るが、無限集合の要素の「個数」は、この性質を満たさない)
- 空集合の測度は、ゼロである。



「測る」-- 測度の性質

ある集合が、互いに共通部分を持たない部分に分割されるなら、その集合の測度は、分割された部分の測度の和になる。

$$\mu(\text{[shaded region with curve]}) = \mu(\text{[shaded trapezoid]}) + \mu(\text{[shaded trapezoid]}) + \mu(\text{[shaded trapezoid]}) + \dots$$

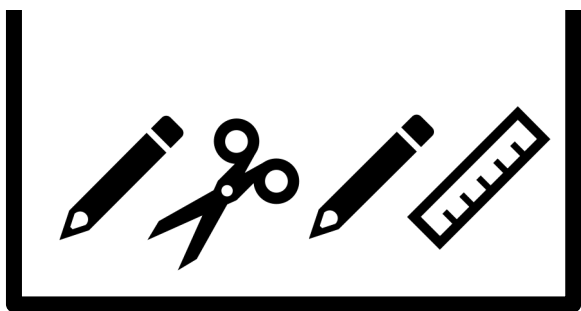
「数える」を分析する

「数える」を考える

- ある箱に何かが入っているとしよう。箱に入っているものが、何個かを数えることを考える。いろいろな場合がある。
 - 同じ形の白い玉が入っている。
 - 白い玉に、赤い玉が混じっている。
 - いろんな色の同じ大きさの玉が入っている。
 - 大きさの違う、様々の色の玉が入っている。
 - 様々な形の、いろいろな色の物体が入っている。
 - 仔犬と仔猫が入っている。
 - 仔犬と仔猫と鳩が入っている。
 - 仔犬と仔猫と鳩とゴキブリが入っている。
 -
-

「数える」には、いくつかの前提・特徴がある

- 前提：数える範囲が明確（例えば「箱」の中にある）で、かつ、その数が、数える間に変化しないこと。
 - 数えられる「もの」の具体的な形状・性質は、数えることには影響を与えない。数えるときに、それらは捨象される。
 - どれを先に数えるか、同じことだが、数える順番は、数えることには影響を与えない。
 - ただ、すでに数えたものと、まだ数えていないものとの区別は必要である。数えるというのは、対象をすでに数えたものとまだ数えていないものに二分することなしには実行できない。
 - 最初に数えたとき1と数え、次に2と数え、順次、それを続ける。
数えることは、自然数の順番に対応している。
-

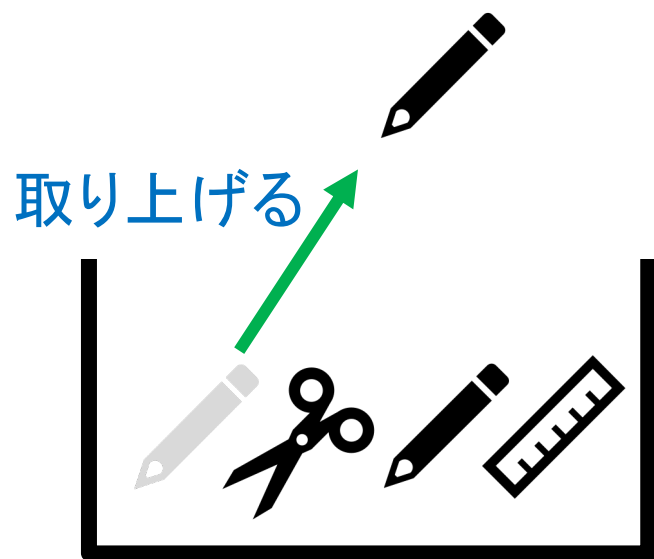


まだ数えてないもの



すでに数えたもの

1, 2, 3, 4, 5, ...



取り上げる

まだ数えてないもの

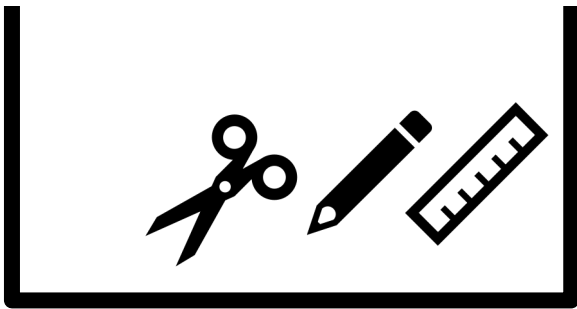


すでに数えたもの

性質を捨象



1, 2, 3, 4, 5, ...



まだ数えてないもの



すでに数えたもの



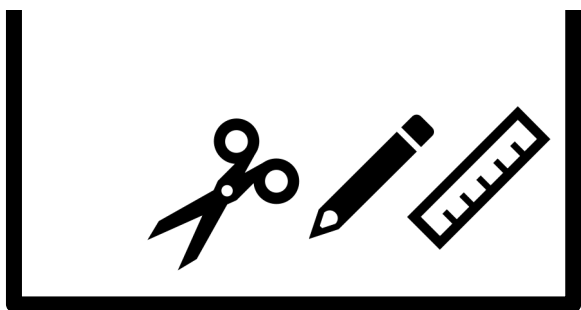
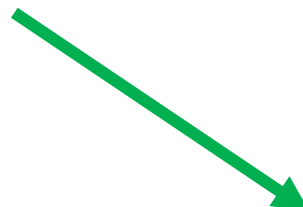
1, 2, 3, 4, 5, ...

自然数を対応



1

一つ目のもの
the first



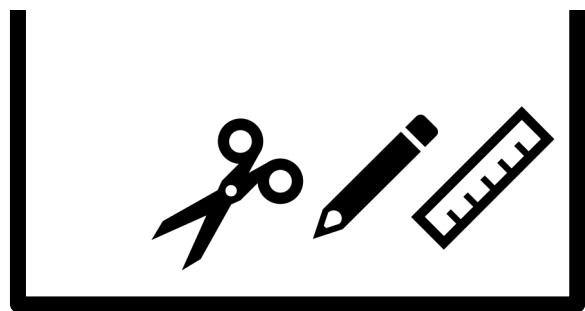
まだ数えてないもの



すでに数えたもの

1, 2, 3, 4, 5, ...

自然数を対応



まだ数えてないもの

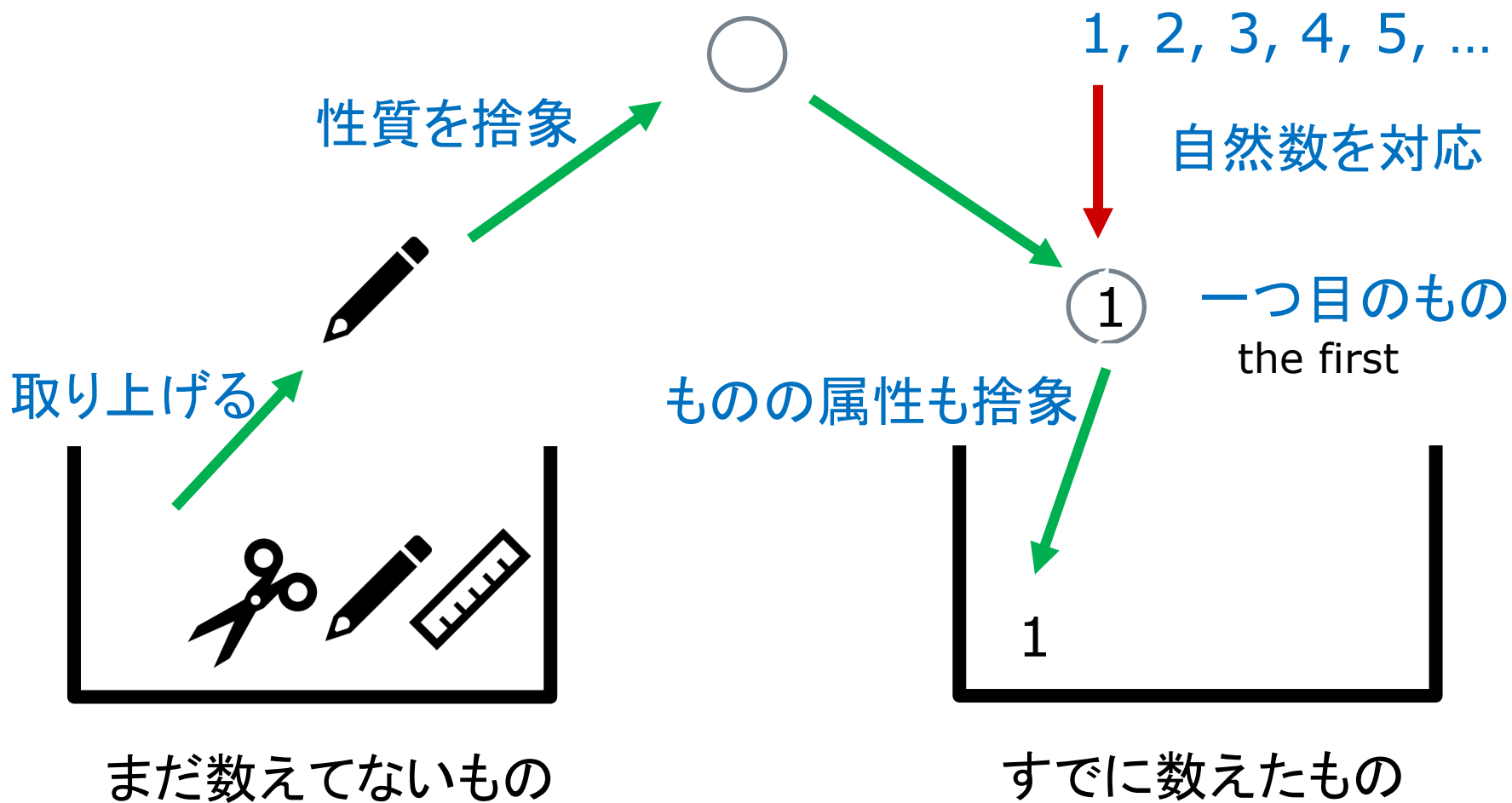
ものの属性も捨象

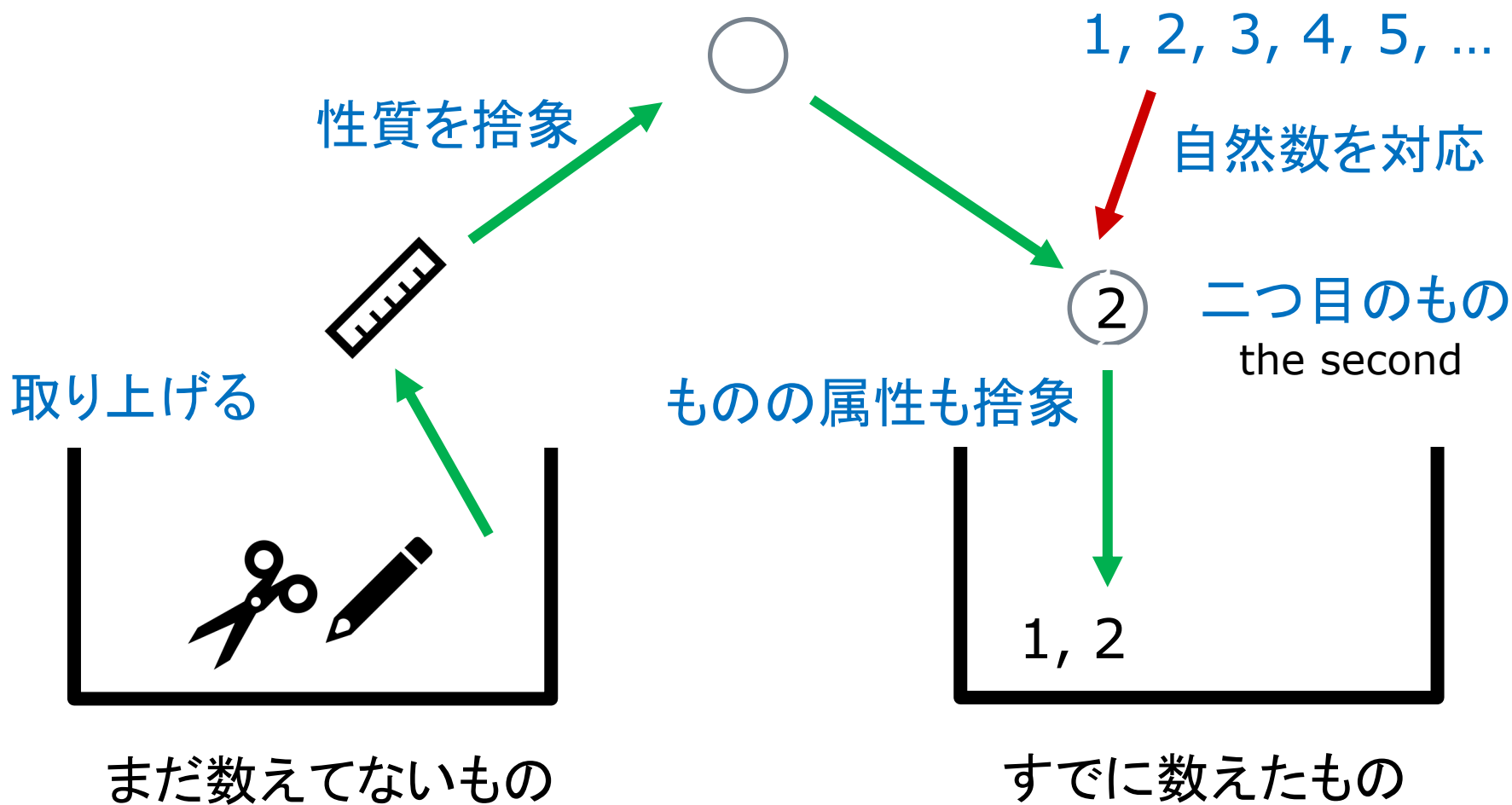
①

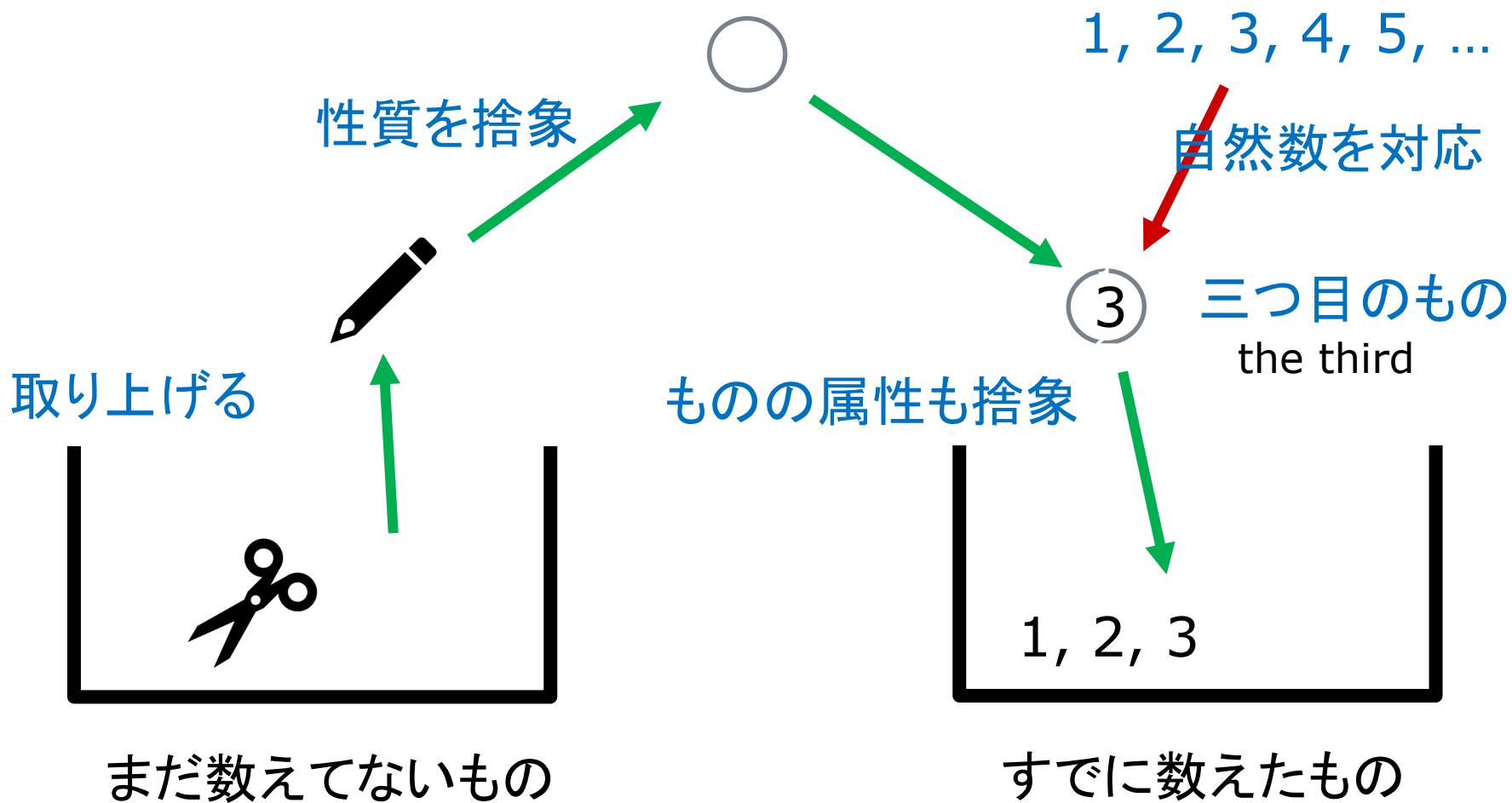
一つ目のもの
the first

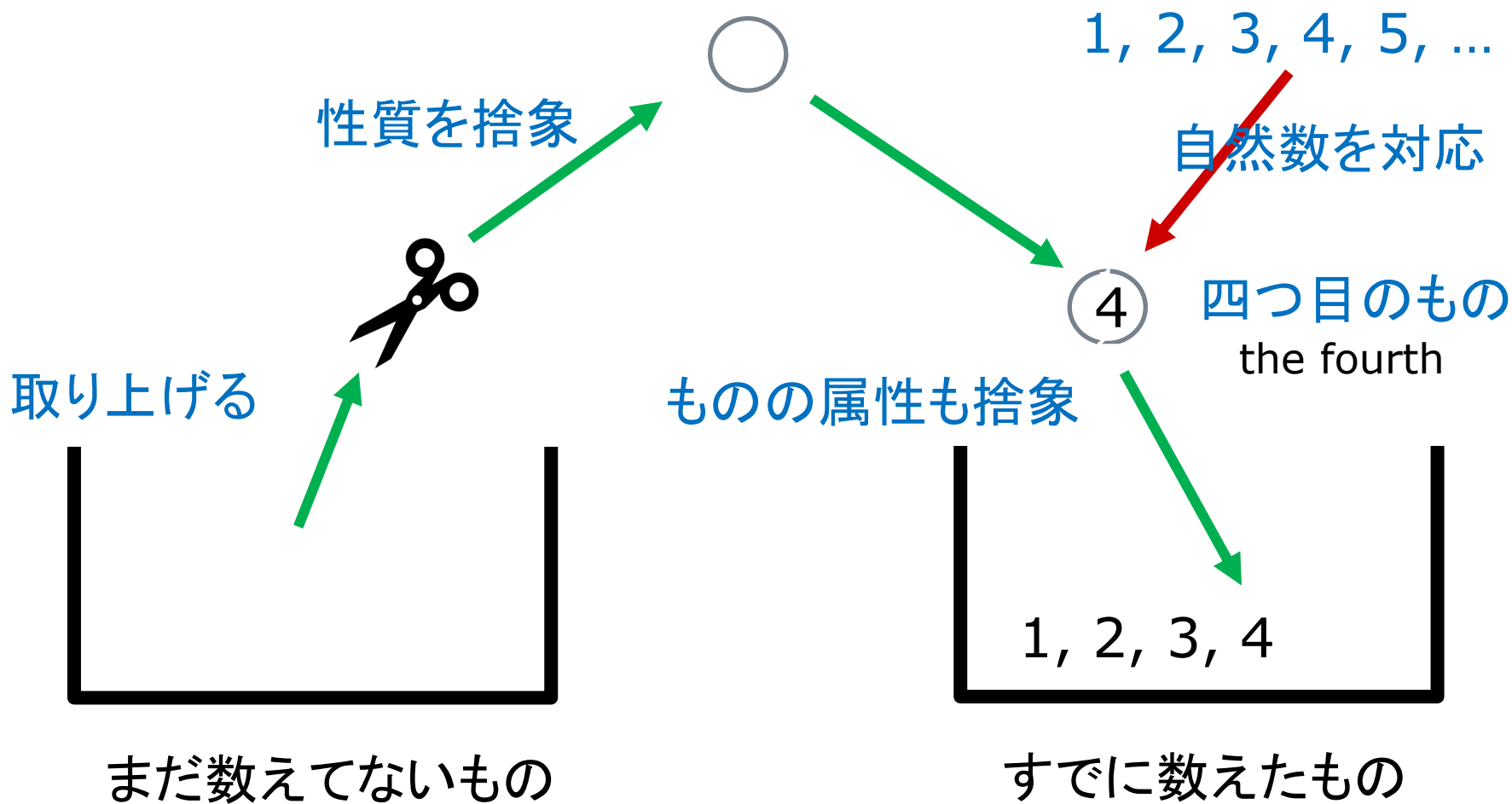


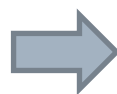
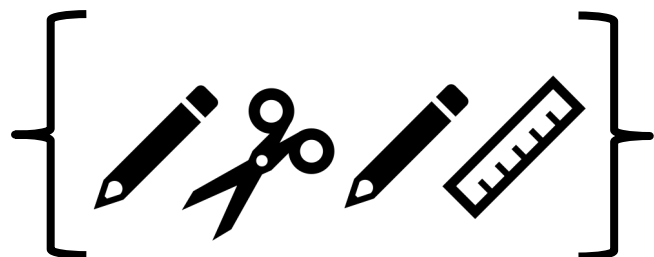
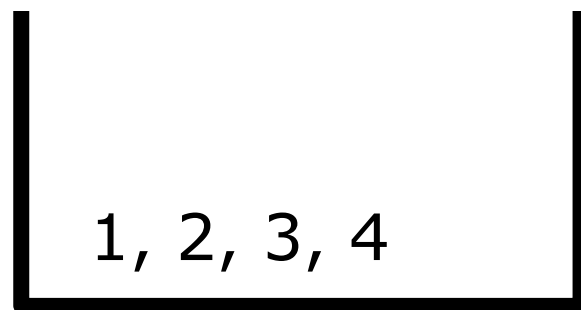
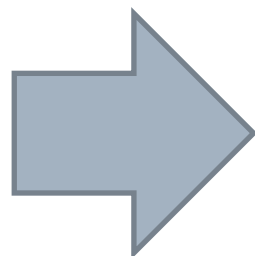
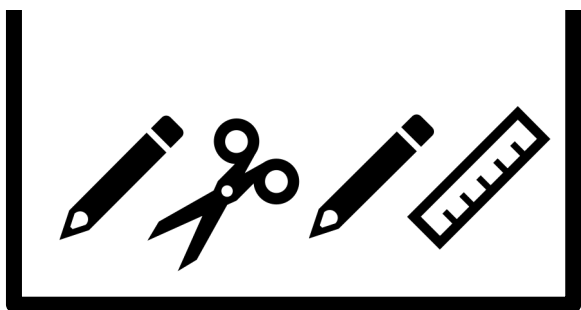
すでに数えたもの









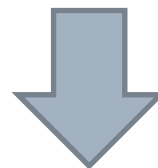


{ 1, 2, 3, 4 }

数える

順序数

Ordinals



4 個

個数

基数

Cardinals

順序の重要性 「時そば」

「おい、蕎麦屋さん。生憎と、細けえ銭つきや持ってねえんだ。落としちゃいけねえ、手え出してくれ」

「一(ひい)、二(ふう)、三(みい)、四(よう)、五(いつ)、六(むう)、七(なな)、八(やあ)」

「今何時(なんどき)でい!」

「へい、九(ここの)つでい」

「十(とう)、十一、十二、十三、十四、十五、十六、御馳走様」

$$\begin{array}{ccccccc} \{ 1,2,3,4,5,6,7,8 \} & + & \overset{\text{欠落}}{9} & + & \{ 10,11,12,13,14,15,16 \} \\ 8 & & + & & 7 & & = 15 \end{array}$$

「一、二、.....八、今何時でい」

$$\begin{array}{ccccccc} \{ 1,2,3,4,5,6,7,8 \} & + & 4 & + & \overset{\text{二重カウント}}{\{ 5,6,7,8,9,10,11, \\ & & & & & & 12,13,14,15,16 \}} \\ 8 & & + & & 12 & & = 20 \end{array}$$

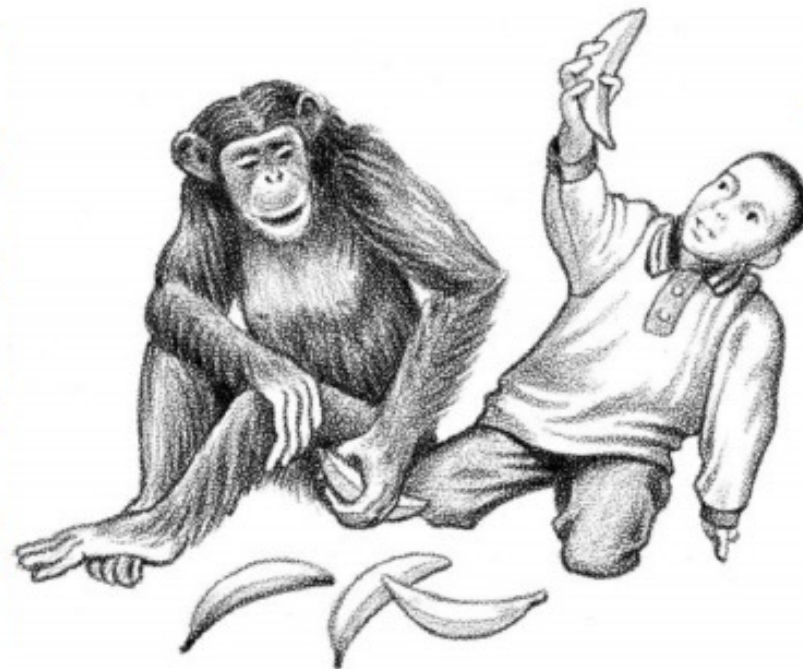


The Faculty of Language: What Is It, Who Has it, and How Did It Evolve?

<http://www.chomsky.info/articles/20021122.pdf>

言語のRecursionの能力は、数の概念の形成能力とも結びついている。ハトは、3以上の数を区別出来ない。サルは、個別の数を個別に学ぶが、人間の子のように一般化出来ない。

5
4
3
2
1



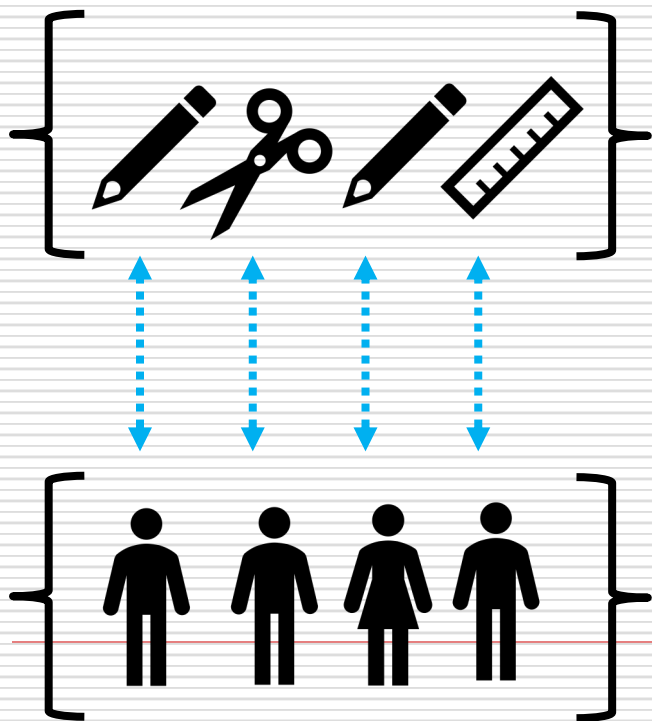
5
4
3
2
1

「個数」について考える

- 数えることと「個数」とは、もともと結びついていたが、そのうちに、数えることとは独立にでも、「個数」は存在するという考え方が、一般的になる。
 - 先のアルキメデスの宇宙を埋める砂の数や、日本野鳥の会のカウンティングは、実際には、数えていない。数えなくても、あるいは、数えられなくても、「個数」は存在すると思われる。
 - 超ミクロな世界の量子物理学でも、様々な「量子数」の保存法則というのは、基本的なものだ。最終的には、自然数の間の関係式として物理法則が記述される可能性はある。
 - ただ、そういう不変性が根本原理かどうかは、僕には、わからない。
-

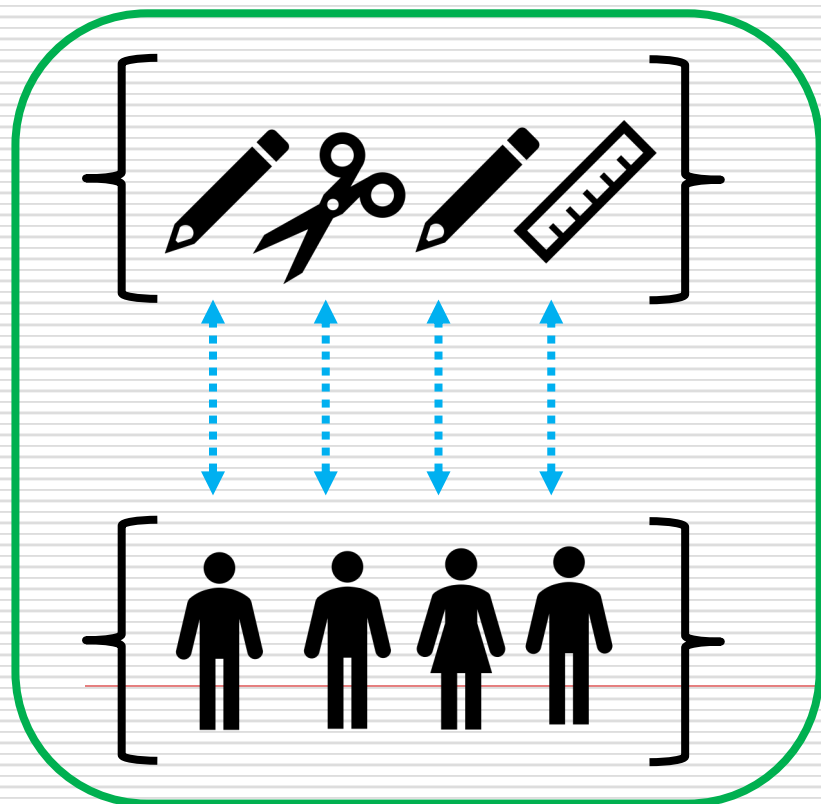
「数える」とは独立な「個数」の定義

二つの集合の要素が、「一対一対応」がつく時、
二つの集合の要素の個数は、等しいとする。



「数える」とは独立な「個数」の定義

二つの集合の要素が、「**一対一対応**」がつく時、
二つの集合の要素の個数は、等しいとする。



集合の要素の数が有限の時、両者の定義は一致する。**ただし、問題は無限集合の要素の数を考えた時に起きる。**



$\{ 1, 2, 3, 4 \}$



個数 4

カントールの考えたこと 1

無限に数え続ける方法 無限の順序数

ここでは、「無限に数え続ける方法」として、カントールが考えた「順序数」のことを振り返ろうと思う。

「順序」について

「数えることは、自然数の順番に対応している。」と先に書いた。ここでは、「順番」「順序」について、その構造を考えてみよう。

半順序と全順序

ある集合Pの要素 $x, y, z, \dots$ について、次の関係が成り立つ時、 P を $\leq$ についての半順序集合という

1. $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$
2. $x \leq x$
3. $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$

半順序

4. すべての x, y について
 $x \leq y$ あるいは $y \leq x$ が成り立つ時、**全順序**という

自然数・整数・有理数・実数は、普通の大小の順序について全順序である。(もちろん、半順序である) ただし、それにはとどまらない。

半順序の例

1. 数の大小の関係

$$1 \leq 2, 4.56 \leq 7.223, \dots$$

数の大小は、全順序である

2. $x \leq y$ を $x \subset y$ と考えた時の集合の包含関係

1. $x \subset y$ かつ $y \subset z$ なら $x \subset z$

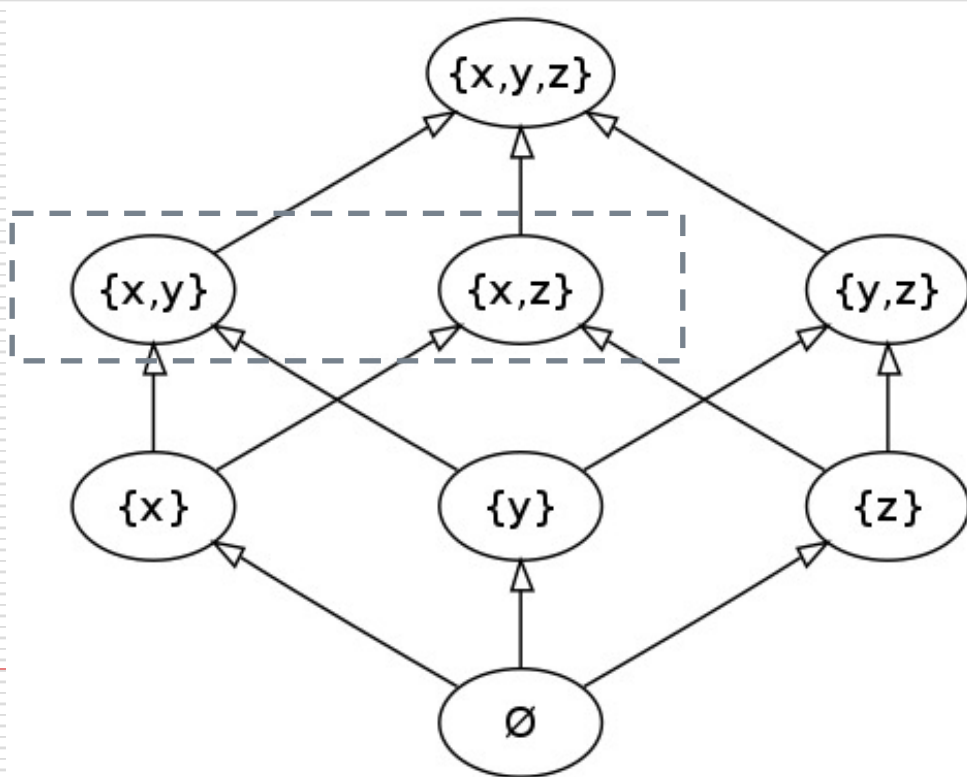
2. $x \subset x$

3. $x \subset y$ かつ $y \subset x$ なら $x = y$

3. $x \leq y$ を「 x は y の先祖である」と考えた時の先祖関係

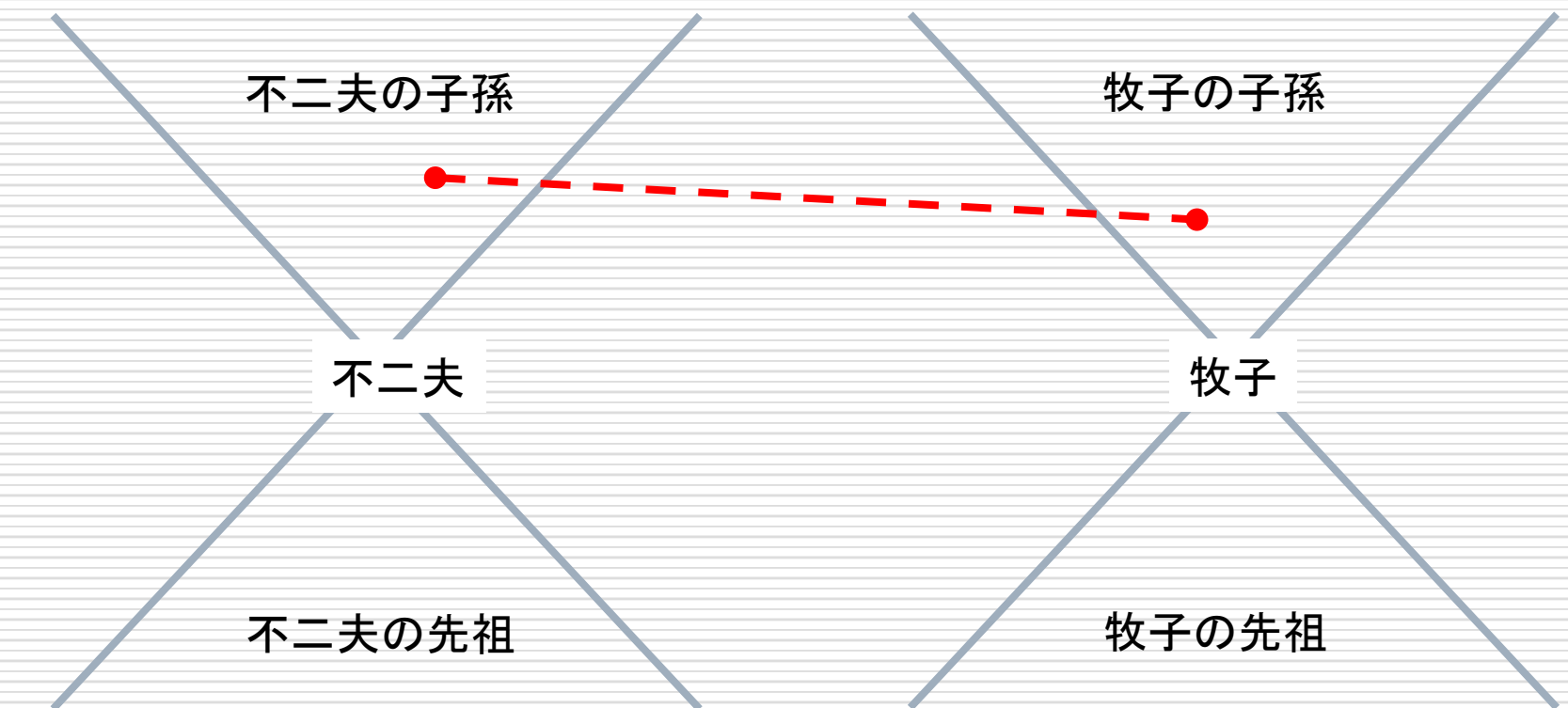
半順序だが全順序ではない例1

- 集合の包含関係は、全順序ではない。
次の図は、集合 $\{x, y, z\}$ の部分集合を全て書いたものだが、例えば、 $\{x, y\}$ と $\{x, z\}$ の間には包含関係はない。



半順序だが全順序ではない例2

□ 先祖(子孫)関係は、全順序ではない。



Well-Orderd (整列性) と順序数

ある集合は、その要素に次のような順序 $\leq$ が定義されている時、整列されているという。

1. $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$
2. $x \leq x$
3. $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$

半順序の条件

4. 全ての空でない部分集合は、この順序で最小の要素を持つ

順序数は、整列されている集合の大きさを表す。

整列集合の例

- 自然数全体の集合 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ は、通常的大小順序関係で、整列集合になる。
- 次の負数の集合は整列集合である。
 $\{-1, -1/2, -1/4, -1/8, -1/16, \dots, -1/2^n, \dots\}$
- 整数全体の集合 $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ は、通常的大小順序関係で、**整列集合にならない**。**負の整数の全体からなるZの部分集合は、最小元をもたないから。**
- Zに次のような順序関係を導入すれば、 Z_1 は整列集合になる。
 $Z_1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$ 順序型 $\omega + \omega$
- Zに次のような順序関係を導入しても、 Z_2 は整列集合になる。
 $Z_2 = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$ 順序型 ω

整列定理 by Cantor 「全ての集合Xについて、Xを整列集合にする整列順序が存在する」

順序数

「順序数」は、「自然数の順番に数える」ことをベースにした数の拡張である。もちろん、ベースになった自然数は、順序数である。この拡張は、無限に数え続けることを可能にすることを目的にしていると考えることができる。

ここでは、John Baezの “Large Countable Ordinals” に多くを負っている。 <https://goo.gl/h5HhrV>

順序数

□ ある順序数を、それより小さい全ての順序数の集合としてあらわす。

$$0 = \{\} \quad \phi$$

$$1 = \{0\} \quad 0$$

$$2 = \{0, 1\} \quad 0 < 1$$

$$3 = \{0, 1, 2\} \quad 0 < 1 < 2$$

$$4 = \{0, 1, 2, 3\} \quad 0 < 1 < 2 < 3$$

...

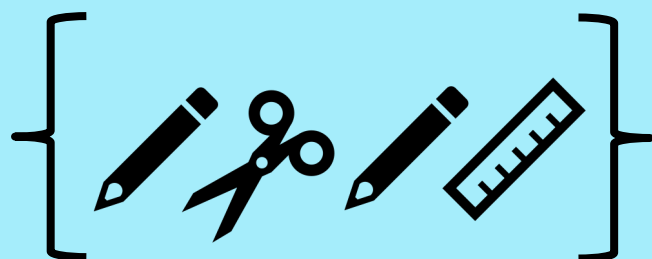
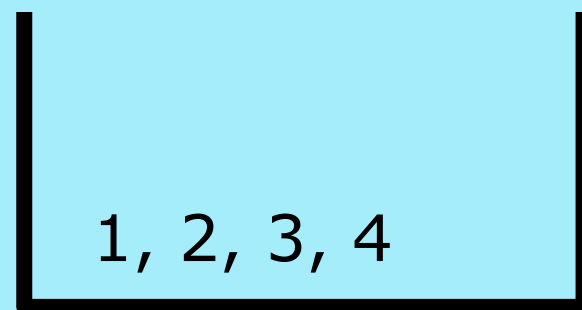
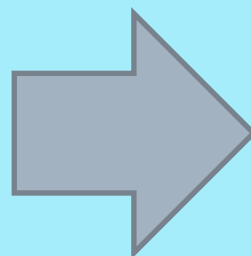
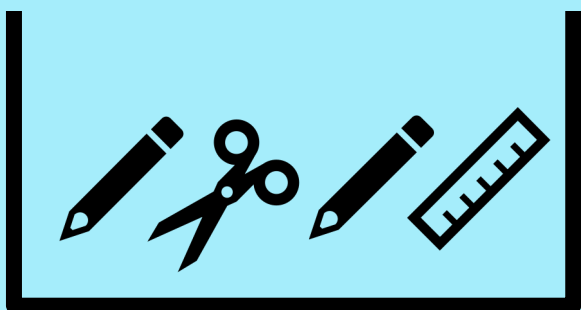
$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \quad 0 < 1 < 2 < \dots < n-2 < n-1$$

有限の順序数

- 順序数が有限の時、それは、ある自然数に一致する。
それはまた、その集合の要素の数(基数)とも一致する。
- 有限の時、
順序数 = 基数 = 順序数の要素の数 である

順序数の系列: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$

基数の系列: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$

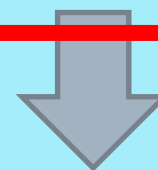


数える

{ 1, 2, 3, 4 }

順序数

Ordinals



4 個

個数

基数

Cardinals

「ある順序数を、それより小さい全ての順序数の集合としてあらわす。」という定義は、0から始まっているが、先に「数えるを考える」でみたこの図での説明は、1から始まっている。そうした違いはあるが、両者は同じものである。

ω : 有限な順序数全ての集合

- 全ての有限な順序数全ての集合 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ を考える。この集合を ω (omega) で表す。 ω は全ての自然数からなる無限集合である。

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- $0, 1, 2, 3, \dots < \omega$ である(どの自然数 n も ω より小さい)と考えれば、この ω の定義は、「ある順序数を、それより小さい全ての順序数の集合としてあらわす。」という順序数の定義に当てはまるので、 ω も順序数である。

- 今度は、 $\{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$ を考える。 $0, 1, 2, 3, \dots < \omega$ であるとすれば、この集合もある順序数に対応する。この順序数を $\omega+1$ で表す。

$$\omega+1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$$

ちょっと、ここで立ち止まろう。

□ $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ は、無限の要素を持っている。

この集合に終わりの要素はない。

□ また、 $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$ の右辺のオメガには、直前の要素はない。

□ ただし、 $0, 1, 2, 3, \dots < \omega$ とすれば、 $\omega + 1$ の要素すべてにきちんと順序が定義されている(整列されている)。だから、 $\omega + 1$ もまた、順序数である。

後継順序数と極限順序数／可算順序数

- ある順序数 α について、 $\beta=\alpha+1$ の形で表される順序数 β を、**後継順序数**という。「孤立点」
 - 自然数 1, 2, 3 等々、有限な順序数は、後継順序数である。
 - $\omega+1$ は、無限な順序数だが、後継順序数である。
 - $\omega+2$ は、無限な順序数だが、 $(\omega+1)+1$ で後継順序数である。
- ω は、直前の要素を持たず、 $\beta=\alpha+1$ の形では表されない。こうした順序数を、**極限順序数**という。「集積点」
- 順序数は、「数える」という操作と結びついている。それは、「順番に数える」という操作の無限への拡大である。この章で扱う順序数は、様々な無限の型をとるが、基本的にはすべて「可算 (Countable)」である。

順序数の和

- 順序数 α と順序数 β の和 $\alpha+\beta$ は、 α の後ろに β をつなげて、つなぎめのところで新しい順序関係を導入して、前後で一貫した順序が保たれるようにしたものと思えばいい。
- だから、 $\omega+1$ は、 $\{0, 1, 2, 3, \dots, 0\}$ となる。同じ0が2度出てきているように見えるが、緑色の0は α に属し、赤の0は β に属する。これを繋げて一つの順序にするには、 $0, 1, 2, 3, \dots < 0$ とすれば良い。これは、0が ω だと思っていことを示す。
- 逆に、 $1+\omega$ は、 $\{0, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ で、 $0 < 0$ という関係を導入すればいいのだが、この時、この順序関係は、 $\{0, 1, 2, \dots\}$ と同じものになる。よって $1+\omega=\omega$ である。
- こうして、 $1+\omega = \omega \neq \omega+1$ である。

順序数 $\omega + \omega$

□ この調子で、どんどん順序数を数えていこう。

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$$

$$\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \dots$$

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots\}$$

□ $\omega + \omega$ は、後継順序数の並びでない箇所が二箇所ある。
この $\omega + \omega$ を、 $\omega 2$ と表す。 ω が二つという意味である。

順序数の積

- 順序数 α と順序数 β の積 $\alpha\beta$ は、 α を β 個つなげたものと思えばいい。もちろん、つなぎめのところで新しい順序関係を導入して、前後で一貫した順序が保たれるようにする。
- 例) $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ だから
 $\omega 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
これを繋げて一つの順序にするには、 $0, 1, 2, 3, \dots < 0$ とすれば良い。これは、 0 が ω だと思っていことを示す。
だから、 $\omega 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots\}$
- $2\omega = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots [0, 1 \text{ の繰り返し } \omega \text{ 回}] \}$
ここで、 $1 < 0, 1 < 0, 1 < 0, \dots$ という順序を導入すればいい。
これは、結局、 $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ と同じ順序にできる。
だから、 $2\omega = \omega$
- $2\omega = \omega \neq \omega 2$

順序数 $\omega\omega (= \omega^2)$

□ どんどん順序数を数え続ける。

$$\omega^2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots\}$$
$$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots$$

$\omega^3.$

$\omega^4.$

ω^5

$\vdots$

$\omega\omega$

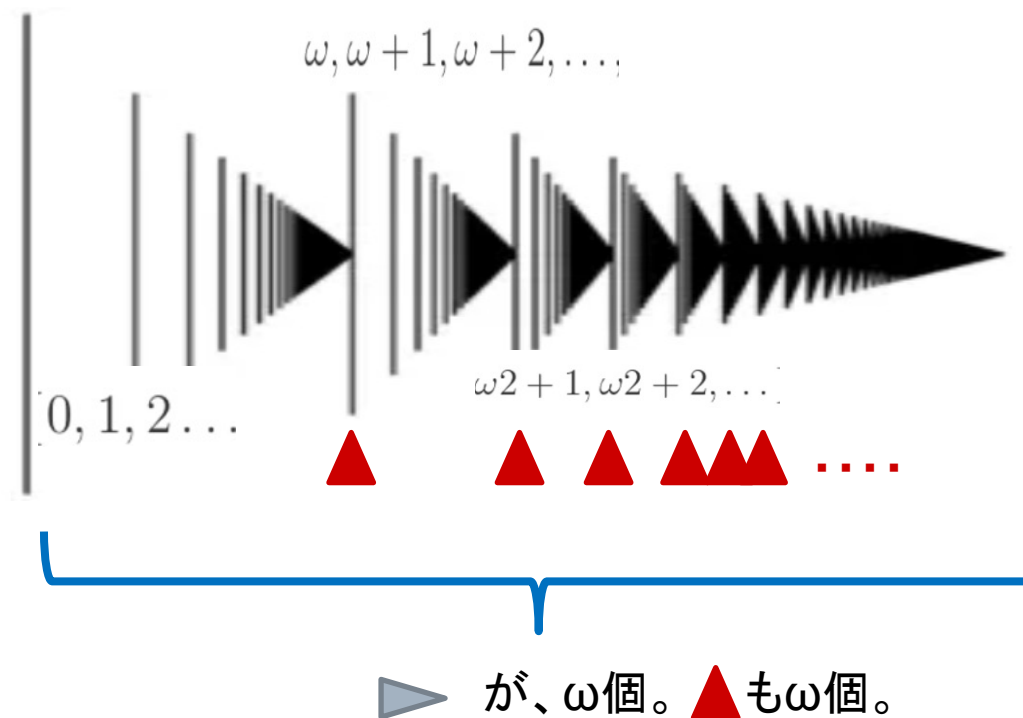
$$\omega^2 = \{0, 1, 2 \dots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots\}$$

ω^2 はどういう集合か？

- ω 巻からなる百科事典を考える。各巻が ω ページからなるとすると、この百科事典は、 ω^2 ページを持つ。
 - ただ、この集合はイメージできるかもしれないが、順序の様子を見るにはわかりにくい。大事なことは、全体で一つの順序をなしていることだから。
 - そこでこうする。この本のページは、すべて一つ前のページの $1/2$ の厚さを持ち、かつ、各巻は一つ前の巻の $1/2$ の厚さを持つとする。本当はページ数・巻数が大きくなるたびに、無限の値は大きくなるのだが、それでは、限られた紙面では表示できなくなる。進めば進むほど小さくなるように、「見える化」するのだ。
-

ω^2 のイメージ

$\omega^2 =$



超限順序数を「見える化」するサイトがある！

David Madore: <https://goo.gl/uv1uWq>

順序数 ω^ω

□ まだまだ続く。

$$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots$$

$$\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \dots$$

$$\omega^2 + \omega^2 = \omega^2 2$$

$$\omega^2 3$$

$$\omega^2 4$$

$\vdots$

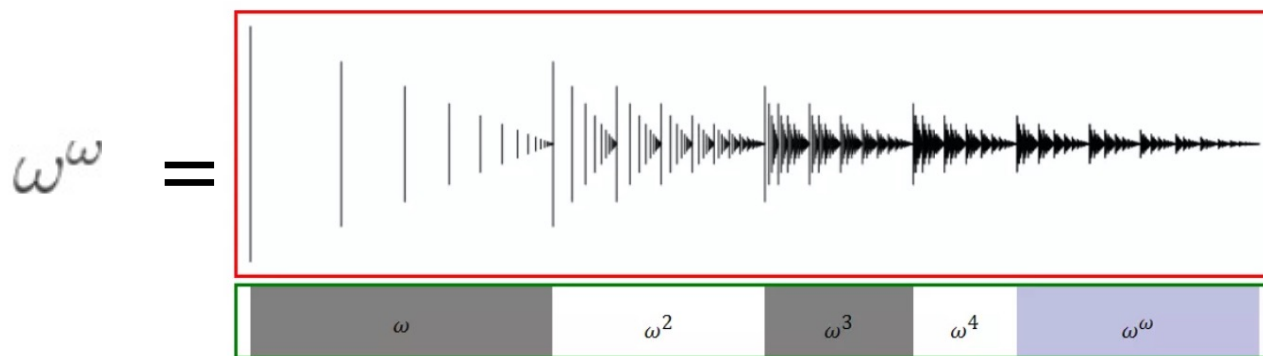
$$\omega^2 \omega = \omega^3$$

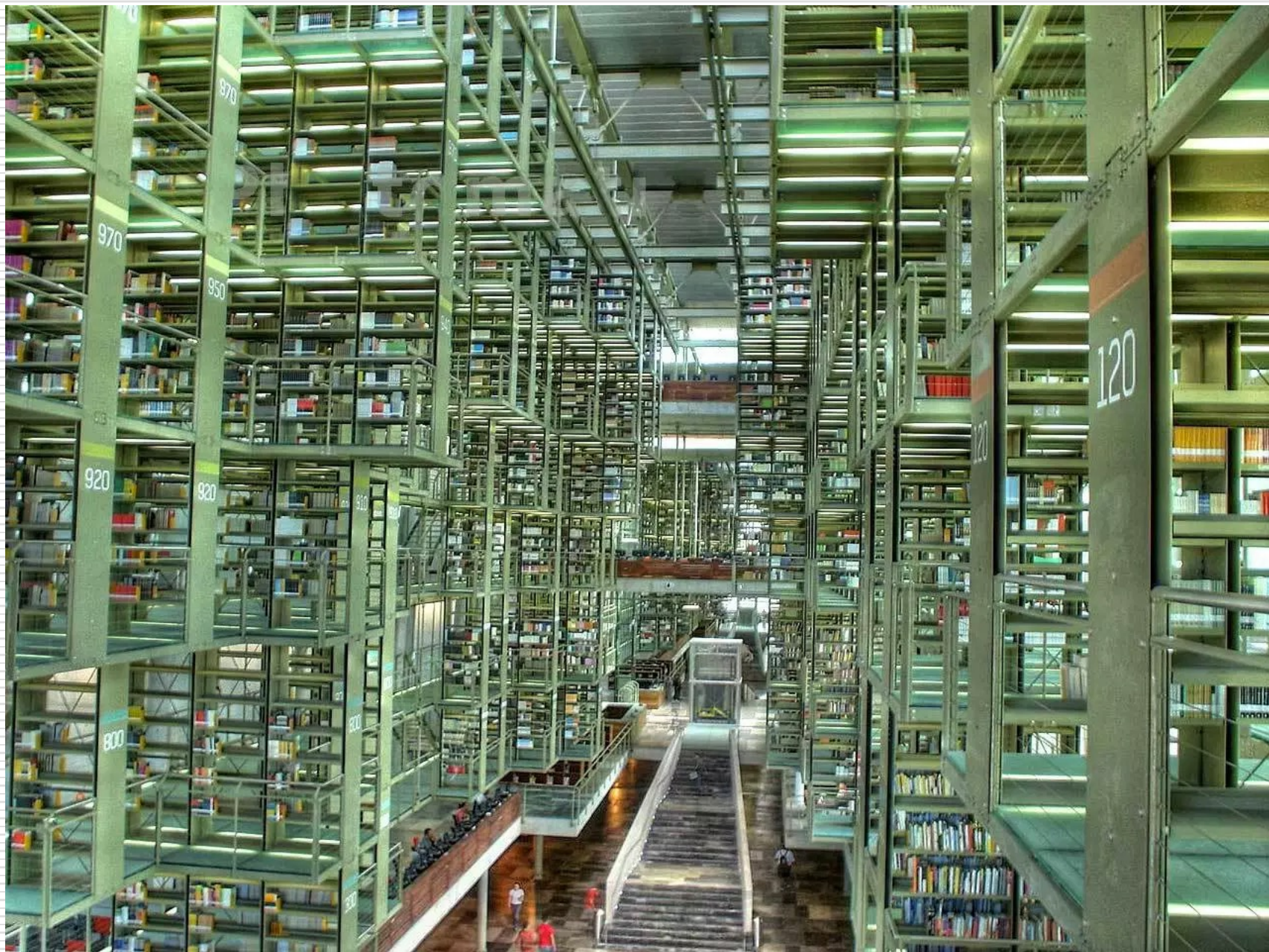
$\vdots$

$$\omega^\omega$$

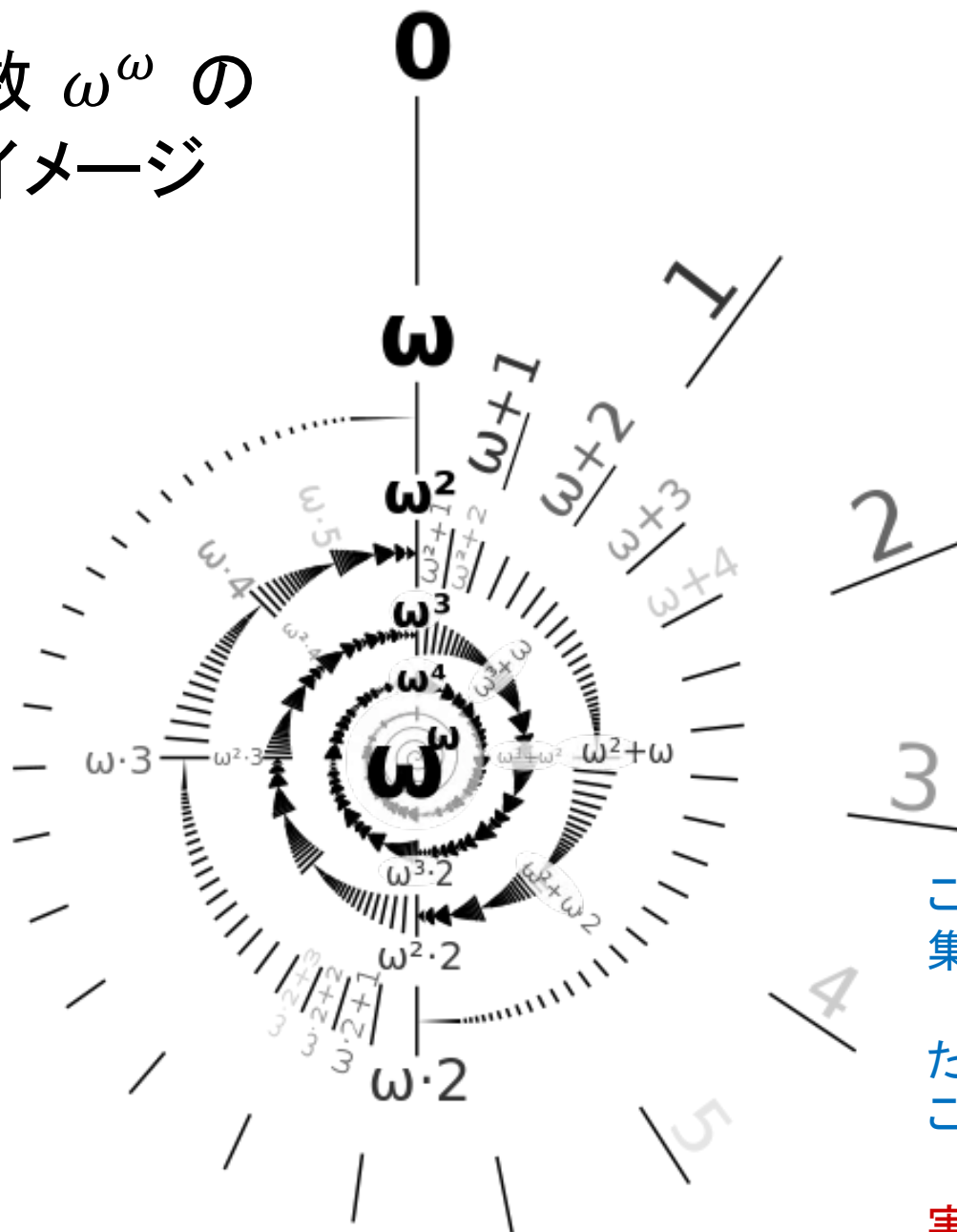
順序数 ω^ω のイメージ

- ω ページからなる本を考え、 ω 巻からなる百科事典を考え、 ω 種類の百科事典が入った入った本棚を考え、 ω 個の本棚が入ったフロアを考え、 ω 階のフロアからなる図書館を考え、 ω 個の図書館を持つ都市を考え、 ω 個の都市を持つ惑星を考え、 ω 個の惑星をもつ恒星系を考え、 ω 個の恒星系からなる銀河を考え、...こんなのが続く。
- でも、このシステムで、ある本のある一ページを、具体的に指定しようと思ったら、有限個の自然数の指定で、このページに行き当たるから、この順序数は可算である！





順序数 ω^ω の 別のイメージ



これは、なかなか秀逸。
集積点が直線上に並ぶ。

ただし、 ω^ω までなのだが。
これで終わりではない。

実は、まだまだ続く。

まだ、終わらない！

$$\omega^\omega.$$

$$\omega^\omega + 1$$

$$\omega^\omega 2, \dots, \omega^\omega 3, \dots, \omega^\omega 4, \dots$$

$$\omega^\omega \omega = \omega^{\omega+1}$$

$$\omega^\omega \omega^2, \dots, \omega^\omega \omega^3, \dots, \omega^\omega \omega^4, \dots$$

$$\omega^\omega \omega^\omega = \omega^{\omega+\omega} = \omega^{\omega 2}$$

$$\omega^{\omega 3}, \dots, \omega^{\omega 4}, \dots, \omega^{\omega 5}, \dots$$

$$\omega^{\omega \omega} = \omega^{\omega^2}$$

$$\omega^{\omega^3}, \dots, \omega^{\omega^4}, \dots, \omega^{\omega^5}, \dots$$

$$\omega^{\omega^\omega}$$

まだ、終わらない！

$$\omega^{\omega^{\omega}}$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} + 1, \omega^{\omega^{\omega}} + 2, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} + \omega, \dots, \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^2, \dots, \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^3, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^2, \dots, \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^3, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega}$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^{\omega}} = \omega^{\omega^{\omega}} 2$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} 3, \dots, \omega^{\omega^{\omega}} 4, \dots, \omega^{\omega^{\omega}} 5, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} \omega = \omega^{\omega^{\omega}+1}$$

そろそろやめたい

$$\omega^{\omega^\omega + \omega}, \dots, \omega^{\omega^\omega + \omega^2}, \dots, \omega^{\omega^\omega + \omega^3}, \dots$$

$$\omega^{\omega^\omega + \omega^2}, \dots, \omega^{\omega^\omega + \omega^3}, \dots, \omega^{\omega^\omega + \omega^4}, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega} = \omega^{\omega^{\omega}} 2$$

$$\omega^{\omega^{\omega}3}, \dots, \omega^{\omega^{\omega}4}, \dots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}} = \omega^{\omega^{\omega}+1}$$

$$\omega^{\omega^{\omega+2}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega+3}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega+4}}, \dots$$

$\omega^{\omega^{\omega}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}, \dots$

$$\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$$

べき乗についてのfixed point

$\epsilon_0 = \underbrace{\omega\omega\omega\omega\omega\omega}_{\omega\text{個}} \dots$

イプシロン・ゼロ

Cantor Normal Form

Theorem. Every ordinal α can be uniquely written as

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \cdots + \omega^{\beta_k} c_k$$

where k is a natural number, $c_1, c_2, \dots, c_k$ are positive integers, and $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k \geq 0$ are ordinals.

$$\omega^{\omega^{\omega^{1+1}+\omega+1}} + \omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega}} + \omega^{\omega+1+1} + \omega + 1$$

こんなのが、何か役に立つのであろうか？
そういう疑問を持った人が多いと思うが、
次のゲンツェンの仕事は、ひとつの回答になる。

ゲンツェンの数論の無矛盾性証明

- 1936年、ゲンツェンは、 ϵ_0 までの超限帰納法を利用して、ペアノ数論の無矛盾性を証明した。
- ゲーデルの不完全性定理で、数論の無矛盾性証明は不可能だと思っている人が多いのだが、それはその体系の内部ではできないということ。
- ϵ_0 までの超限帰納法は、ペアノ数論の内部には含まれていない。しかし、それは、「自然」な想定である。
- 残園なことに、ゲンツェンは、若くして夭折している。



<https://goo.gl/6s9K1R>

Gerhard Karl Erich Gentzen,
1909年11月24日 - 1945年8月4日

カテゴリー文法でのゲンツェンのシーケンスの利用

show	me	flights	to	Boston
S/N		N	PP/NP	NP
$\lambda f.f$		$\lambda x.flight(x)$	$\lambda y.\lambda x.to(x, y)$	$BOSTON$
			$\xrightarrow{\quad} PP$	
			$\lambda x.to(x, BOSTON)$	
			$\xrightarrow{\quad} N \backslash N$	
			$\lambda f.\lambda x.f(x) \wedge to(x, BOSTON)$	
			$\xleftarrow{\quad} N$	
			$\lambda x.flight(x) \wedge to(x, BOSTON)$	
			$\xrightarrow{\quad} S$	
			$\lambda x.flight(x) \wedge to(x, BOSTON)$	

行の上は、Syntax
行の下は、Semantics

SyntaxとSemanticsを
同時に扱うことができる

カントールが考えたこと 2

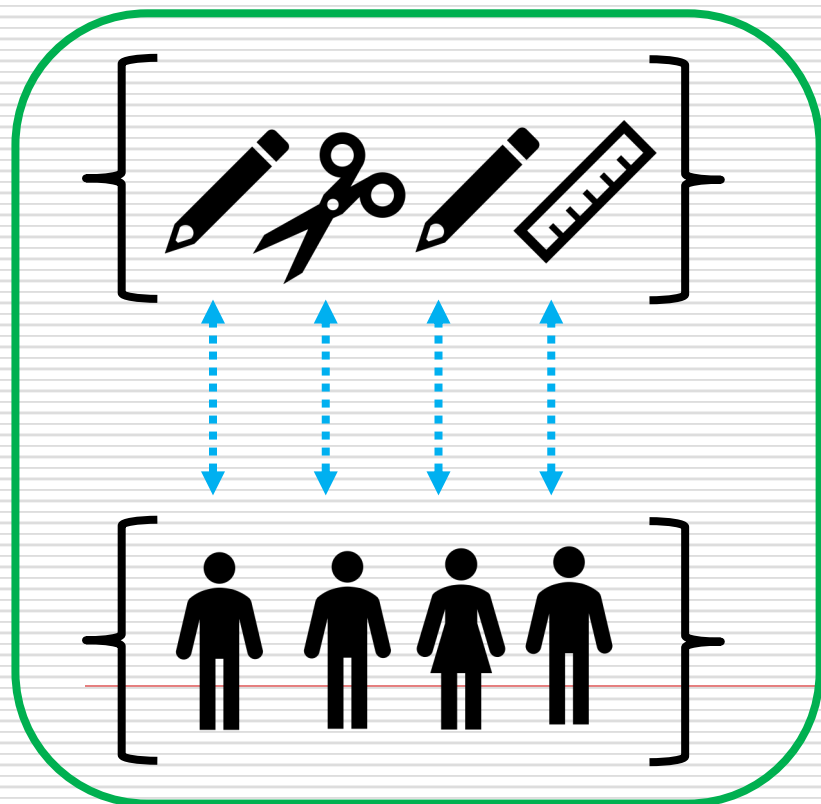
無限集合の要素の個数

「数える」こととは切り離して「個数」が存在すると書いた。

無限の順序数は、ただか「可算」なものの数え上げにしか使えない。数えられない(非可算な)ものを含めた個数の定義に、カントールは、「一対一対応」を採用する。そこで見えて来た世界は、直感を越えたものだった。

先に次のような、「数える」とは独立な「個数」の定義にあげた。**無限集合の場合**はどうなるか？

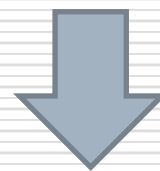
二つの集合の要素が、「**一対一対応**」がつく時、二つの集合の要素の個数は、等しいとする。



ただし、集合の要素の数が有限の時、両者の定義は一致する。**問題は無限集合の要素の数を考えた時に起きる。**



$\{ 1, 2, 3, 4 \}$



個数 4

無限の不思議

部分は、全体と同じ数の要素を持つ

ユークリッド「幾何学原論」
公理8 「全体は、部分より大きい」

無限の不思議

部分は、全体と同じ数の要素を持つ

奇数・偶数は、自然数の一部である。明らかに、自然数の数は、奇数や偶数の数より大きいように見える。

自然数: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

奇 数: 1, 3, 5, 7, 9, ...

偶 数: 0, 2, 4, 6, 8, ...

ただ、次のような対応で、奇数全体も偶数全体も、自然数全体と「一対一」に対応することがわかる。

自然数: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., n , ...

奇 数: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19..., $2n+1$, ...

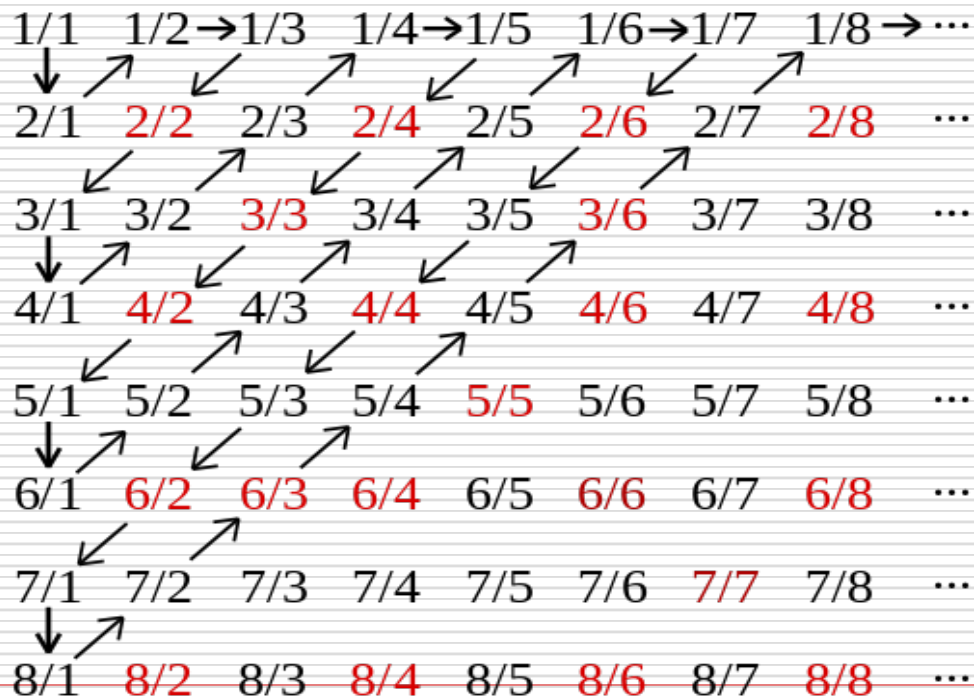
偶 数: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18..., $2n$, ...

よって、「一対一」対応で、要素の数を考えれば、自然数の数と奇数の数と偶数の数は等しい。

無限の不思議

部分は、全体と同じ数の要素を持つ

- 有理数は、0以外の二つの自然数 p, q について、 p/q で表される数である。0と1の間にも、有理数は無限に存在する。
- ところが、次のように有理数を全て数え上げることができる。



すなわち、自然数全体と有理数全体とは、一対一に対応する

n個の自然数の組の全体と、自然数との対応

□ 有理数は、ゼロでない二個の自然数の組と考えることができるが、ゼロでない自然数のn個の組も、次のように一つの自然数に対応づけることができる。

□ 以下で、i番目の素数を p_i で表すとする。

$$p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7, p_5=11, p_6=13, \dots$$

この時、自然数のk個の組 $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ に、次の数Aを対応づける。

$$A = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$$

たとえば、4個の自然数の組 $(23, 100, 1, 13)$ は、次の自然数に対応づけられる。

$$(23, 100, 1, 13) \rightarrow 2^{23} \cdot 3^{100} \cdot 5^1 \cdot 7^{13}$$

□ この対応は、一対一である。

$$2^{23} \cdot 3^{100} \cdot 5^1 \cdot 7^{13} \rightarrow (23, 100, 1, 13)$$

無限の不思議

ヒルベルトの無限ホテル



1862年1月23日 - 1943年2月14日

無限の不思議

ヒルベルトの無限ホテル

「客室が無限にあるホテルを考える。現実にある客室が有限のホテルの場合には、「満室である」ということと「もう1人も泊められない」ということは同値である。しかし「無限ホテル」ではそうはならない。無限ホテルが「満室である」としよう。この場合でも次のようにして新たな客を泊めることができる。客室数は無限とはいえ $1, 2, 3, \dots$ と番号を付けられる。客が1人来たら、1号室にいた客を2号室へ、2号室の客を3号室へ、3号室の客を4号室へ、 $\dots$ 、 n 号室の客を $n + 1$ 号室へ、 $\dots$ と順番に移す。客室は無限にあるのだから誰もあぶれることはない。新たな客は1号室に泊めればよい。」

無限の不思議

ヒルベルトの無限ホテル

「新たな客は1人どころか、複数でも、(可算)無限でもよい。例えば、1号室の客を2号室へ、2号室の客を4号室へ、3号室の客を6号室へ、...、 n 号室の客を $2n$ 号室へ、...と移せば、1号室、3号室、5号室、...つまり奇数号室は空室になるから、無限の客を新たに泊めることができる。」

0と1を結ぶ直線上の点の数

実数の濃度は非可算であるという発見。

1874年 最初の証明

1891年 対角線論法での証明

0と1との間の実数全てを、次のように自然数と一対一に対応付けることが出来たでしょう。

$$1 \quad 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5}a_{1,6}a_{1,7}a_{1,8}a_{1,9}a_{1,10}a_{1,11} \dots$$
$$2 \quad 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}a_{2,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{2,9}a_{2,10}a_{2,11} \dots\dots$$

3 $0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}a_{3,5}a_{3,6}a_{3,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{3,10}a_{3,11} \dots\dots$

4 $0.a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}a_{4,5}a_{4,6}a_{4,7}a_{4,8}a_{4,9}a_{4,10}a_{4,11} \dots\dots$

$$5 \quad 0.a_{5,1}a_{5,2}a_{5,3}a_{5,4}a_{5,5}a_{5,6}a_{5,7}a_{5,8}a_{5,9}a_{5,10}a_{5,11} \dots$$

6 $0.a_{6,1}a_{6,2}a_{6,3}a_{6,4}a_{6,5}a_{6,6}a_{6,7}a_{6,8}a_{6,9}a_{6,10}a_{6,11} \dots$

7 $0.a_{7,1}a_{7,2}a_{7,3}a_{7,4}a_{7,5}a_{7,6}a_{7,7}a_{7,8}a_{7,9}a_{7,10}a_{7,11} \dots$

8 $0.a_{8,1}a_{8,2}a_{8,3}a_{8,4}a_{8,5}a_{8,6}a_{8,7}a_{8,8}a_{8,9}a_{8,10}a_{8,11} \dots\dots$

9 $0.a_{9,1}a_{9,2}a_{9,3}a_{9,4}a_{9,5}a_{9,6}a_{9,7}a_{9,8}a_{9,9}a_{1,10}a_{9,11} \dots$

[illegible]

この自然数と実数の対応関係で、対角線上の要素を選び出す。

$$1 \quad 0.\textcolor{red}{a}_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5}a_{1,6}a_{1,7}a_{1,8}a_{1,9}a_{1,10}a_{1,11} \dots\dots$$
$$2 \quad 0.a_{2,1} \mathbf{a_{2,2}} a_{2,3} a_{2,4} a_{2,5} a_{2,6} a_{2,7} a_{2,8} a_{2,9} a_{2,10} a_{2,11} \dots$$

3 0.a_{3,1}a_{3,2}**a_{3,3}**a_{3,4}a_{3,5}a_{3,6}a_{3,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{3,10}a_{3,11}

4 0.a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}**a_{4,4}**a_{4,5}a_{4,6}a_{4,7}a_{4,8}a_{4,9}a_{4,10}a_{4,11}

$$5 \quad 0.a_{5,1}a_{5,2}a_{5,3}a_{5,4}a_{5,5}a_{5,6}a_{5,7}a_{5,8}a_{5,9}a_{5,10}a_{5,11} \dots$$

6 0.a_{6,1}a_{6,2}a_{6,3}a_{6,4}a_{6,5}**a_{6,6}**a_{6,7}a_{6,8}a_{6,9}a_{6,10}a_{6,11}

7 0.a_{7,1}a_{7,2}a_{7,3}a_{7,4}a_{7,5}a_{7,6}**a_{7,7}**a_{7,8}a_{7,9}a_{7,10}a_{7,11}

8 0.a_{8,1}a_{8,2}a_{8,3}a_{8,4}a_{8,5}a_{8,6}a_{8,7}**a_{8,8}**a_{8,9}a_{8,10}a_{8,11}

9 0.a_{9,1}a_{9,2}a_{9,3}a_{9,4}a_{9,5}a_{9,6}a_{9,7}a_{9,8}**a_{9,9}**a_{1,10}a_{9,11}

[illegible]

実数は、自然数とは、「一対一」で対応しない
実数の個数は自然数の個数より大きい！

- こうしてできた対応表の対角線上の桁の数字からなる実数を、Aとしよう。

$$A = 0.a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}a_{6,6}a_{7,7}a_{8,8}a_{9,9} \dots$$

- Aの小数点以下の各桁の数字 $a_{n,n}$ を、各桁の数字に1を加えた数字 $a'_{n,n}$ で置き換える(9の桁は0にする)。この数字をBとする。置き換えたのだから $a'_{n,n} \neq a_{n,n}$ である。例えば、

$$A = 0.341980675597 \dots \text{ならば、}$$

$$B = 0.452091786608 \dots \text{となる。}$$

- この数字

$$B = 0.a'_{1,1}a'_{2,2}a'_{3,3}a'_{4,4}a'_{5,5}a'_{6,6}a'_{7,7}a'_{8,8}a'_{9,9} \dots$$

は、先の対応表の中には存在しない。なぜなら先の対応表の中の数字とは、少なくとも一箇所では異なるから。

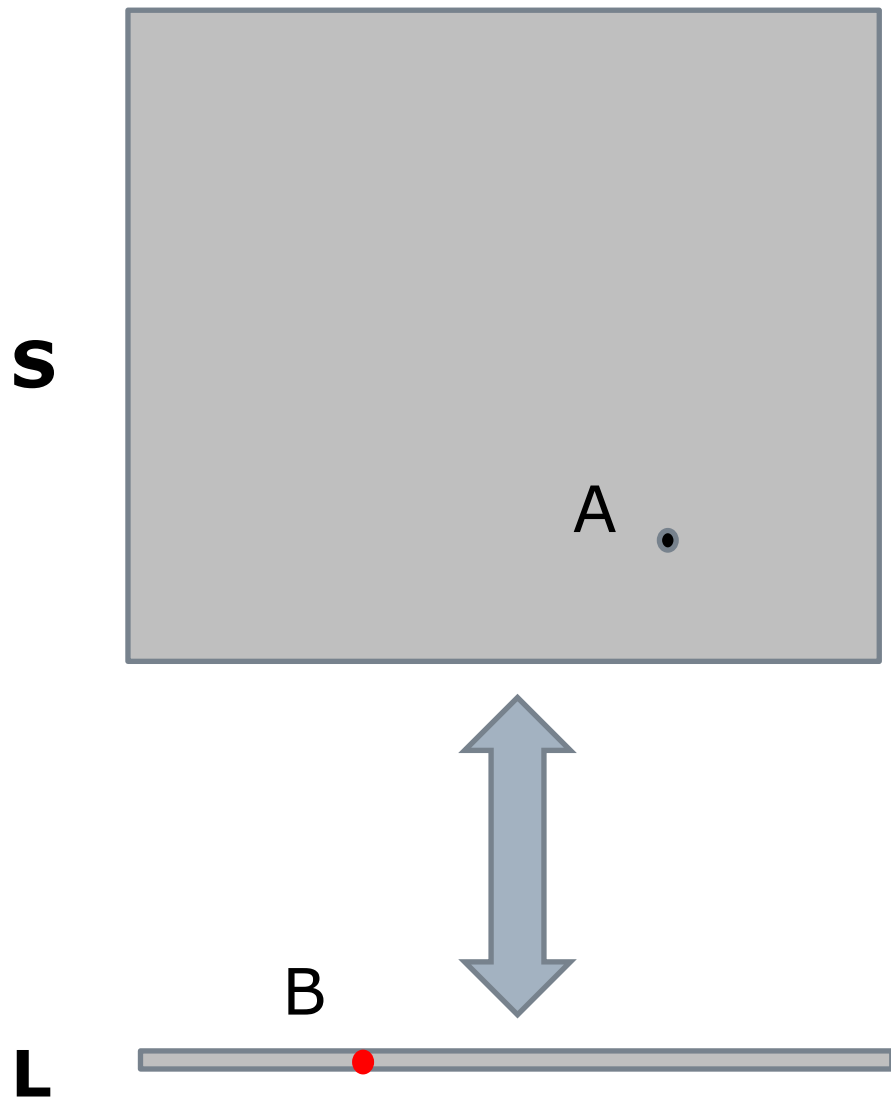
平面上の点の数

n 次元のユークリッド空間 R^n は、実数 R と同じ濃度を持つ。

1878年

“Je le vois, mais je ne le crois pas!” (“I see it, but I don't believe it!”) Dedekindへの手紙

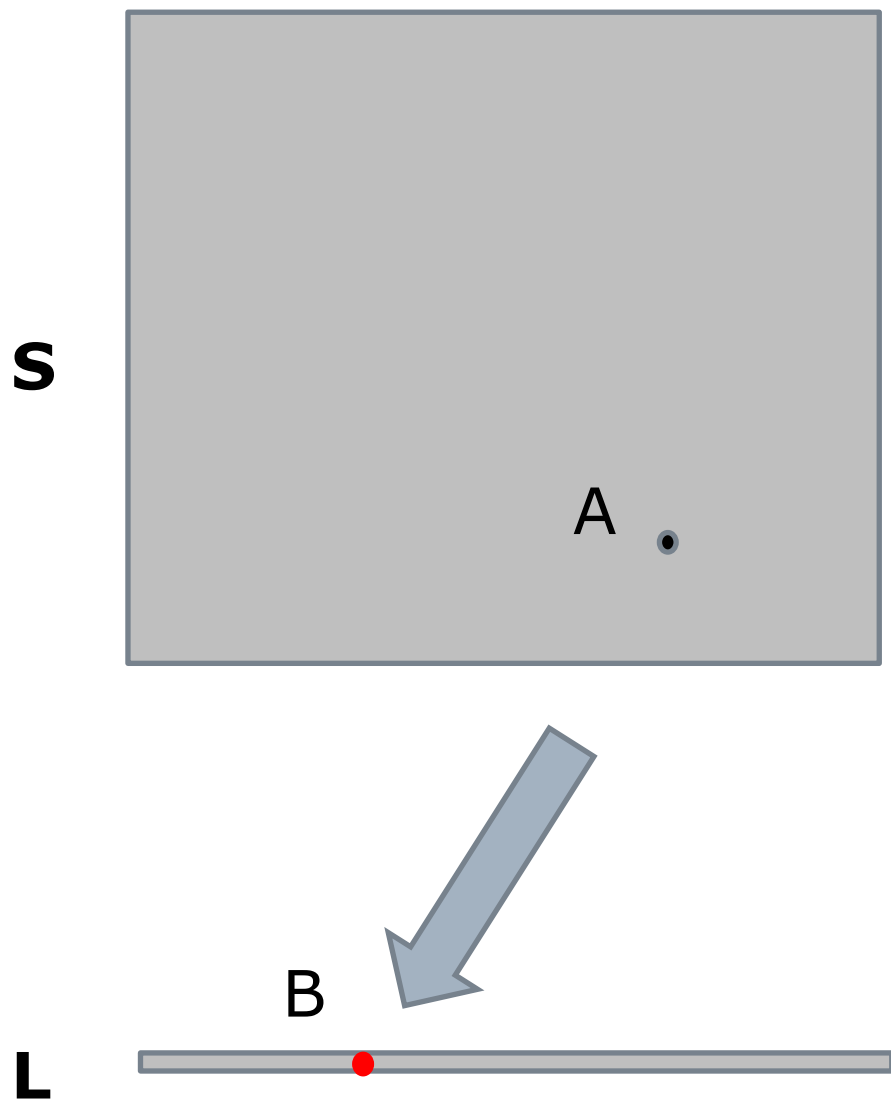
平面と直線の点の濃度



1×1 の大きさを持つ正方形 S と、
長さ 1 の直線 L を考えよう。

S 上の点の数と、 L 上の点の数は
どちらが大きだろうか？

平面と直線の点の濃度



平面上の点Aの座標を (x, y) とする。

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9\ldots$$

$$y = 0.y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9\ldots$$

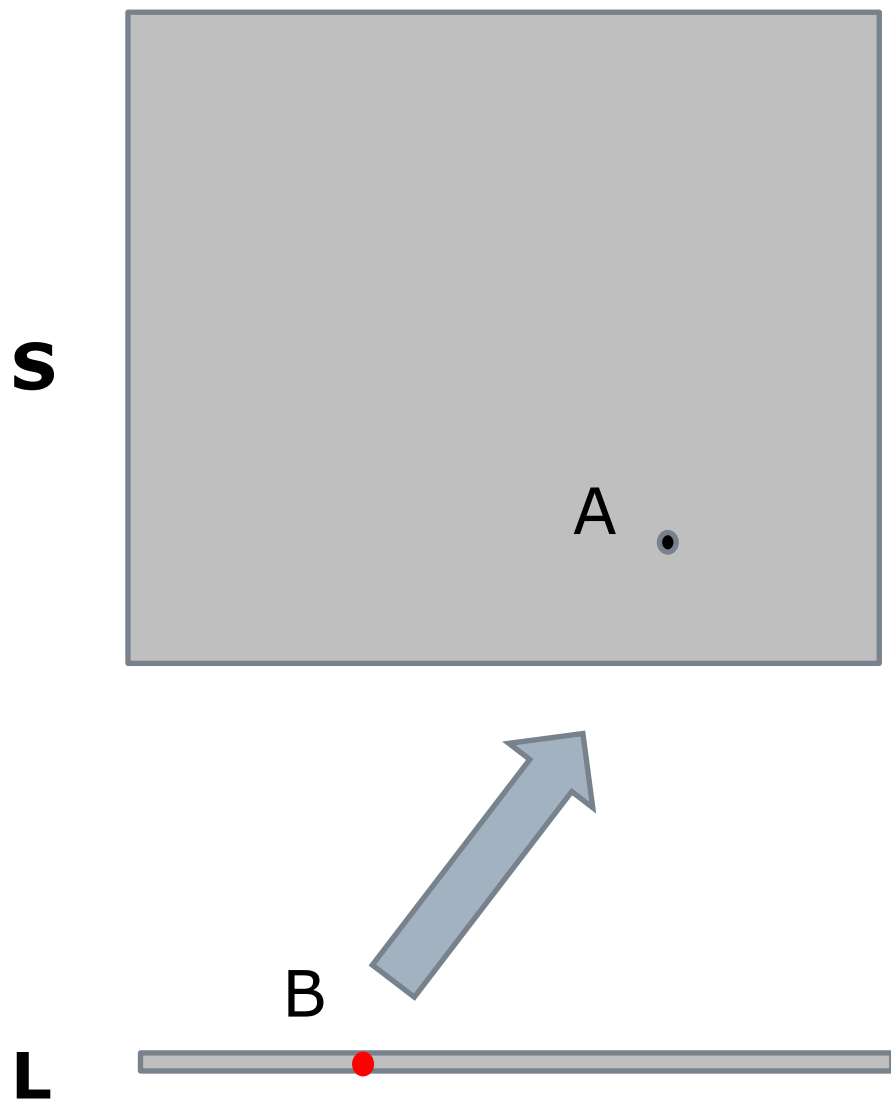
この時、次の実数 z を考える

$$z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4x_5y_5\ldots$$

この z は、直線上の一点Bに対応する。

こうして、平面上の任意の点を、直線上の点に対応付けすることができる。

平面と直線の点の濃度



直線上の点Bに対応する実数を z とする。

$$z = 0.x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9\ldots$$

この時、次の実数 x と y を考える

$$x = 0.x_1x_3x_5x_7x_9x_{11}x_{13}x_{15}x_{17}\ldots$$

$$y = 0.x_2x_4x_6x_8x_{10}x_{12}x_{14}x_{16}x_{18}\ldots$$

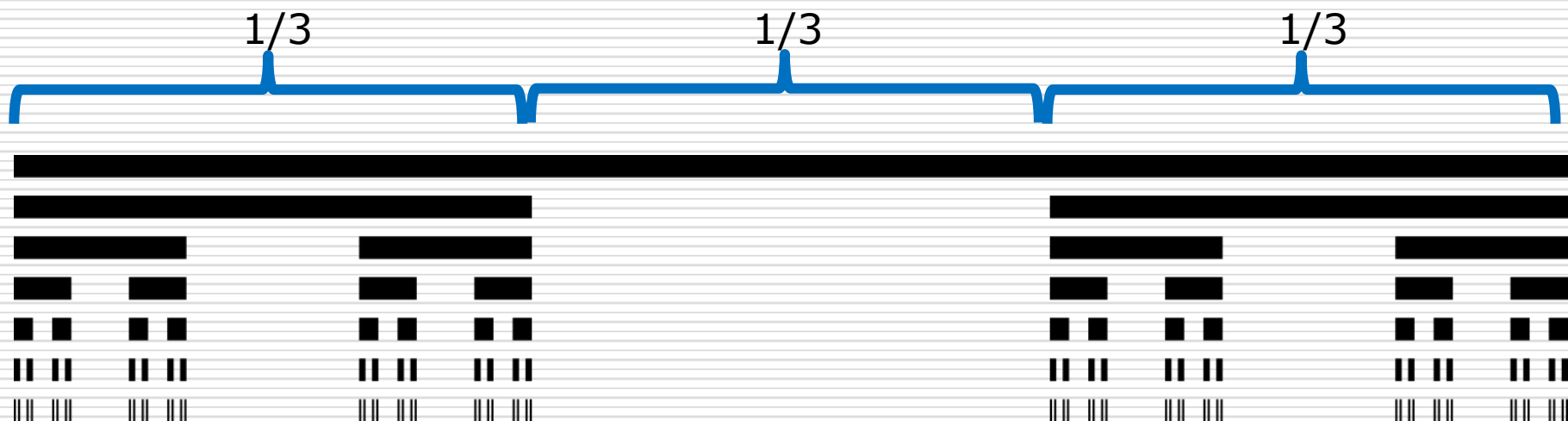
平面上で、 (x, y) を座標とする点を A とすれば、直線上の点 B を、平面上の点 A に対応させることができる。

こうして、平面上の点は、直線上の点に
一対一で対応する。

カントール集合：奇妙な図形上の点の数

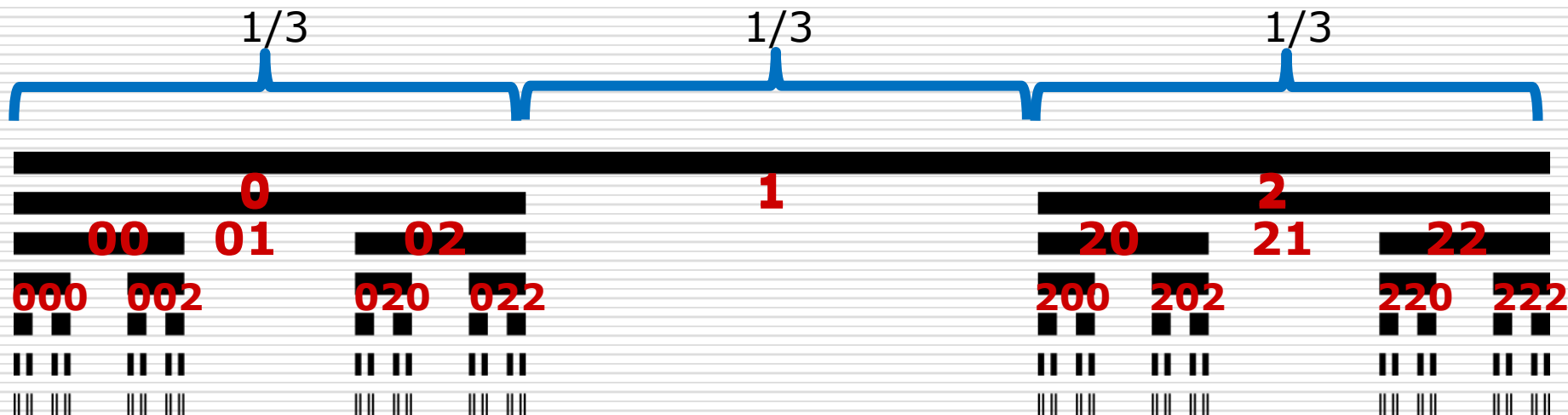
Discovered in 1874 by Henry John Stephen
Smith and introduced by Cantor in 1883

コントロール集合



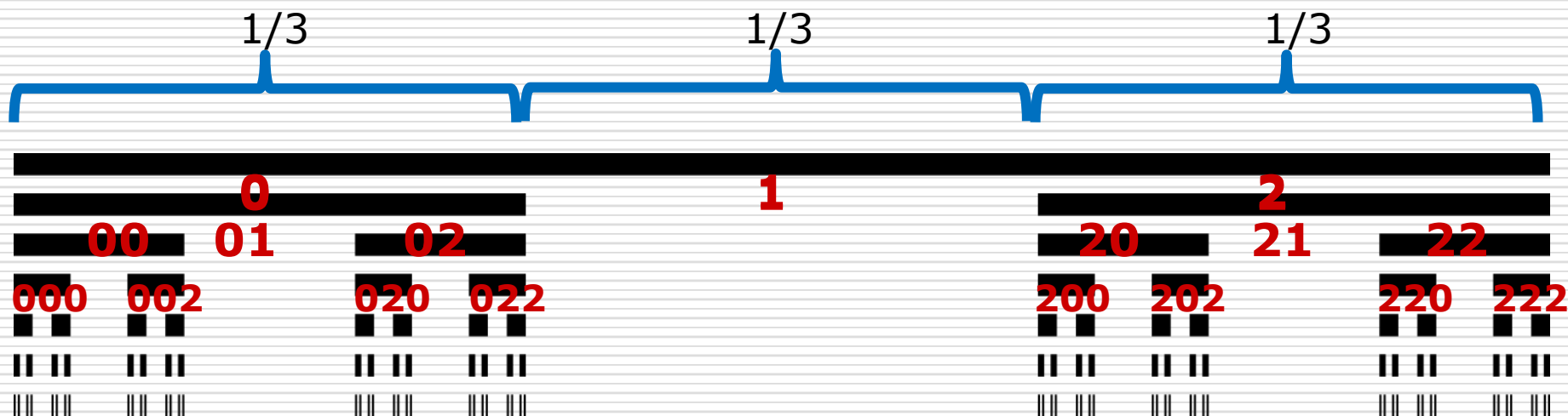
区間 $[0, 1]$ を三等分して、真ん中の部分を切り落とす。左右に残った二つの部分に対しても、真ん中の $1/3$ を落とす操作を、無限回繰り返して残ったのが**コントロール集合**。この図では、その操作を6回ほど繰り返している。

コントロール集合の表現 0,1,2 の三進数



三等分した区間を、左から **0, 1, 2** とラベルをつける。
一回目の操作で、**1**の部分が落ちて、**0**と**2**の部分が残る。
二回目の操作を残った0と2の部分に同じように行う。そこで残った部分は、**00, 02, 20, 22** というラベルをつけることができる。同様な操作を繰り返す。
結局、コントロール集合上の点は、1が現れない0と2からなる無限列で表現されることがわかる。

カントール集合 長さ=0



このカントール集合は、操作を繰り返すたびに、
長さが $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \frac{4}{27}, \dots$ ずつ切り取られていく。
無限回の操作の後には、切り取られた部分の長さは、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1$$

となる。もとの長さが1だから、この図形の長さは
 $1 - 1 = 0$ となる。

コントロール集合の濃度

驚くべきことに、この長さ0のコントロール集合は、実は、実数と同じ濃度を持っている！ そのことは、次のようにして分かる。

この集合上の点 x が、0,1,2の三進表記(ただし、1は現れない。)で、例えば、次のように表現されたとしよう。

$$x = 0.22020022020002022.....$$

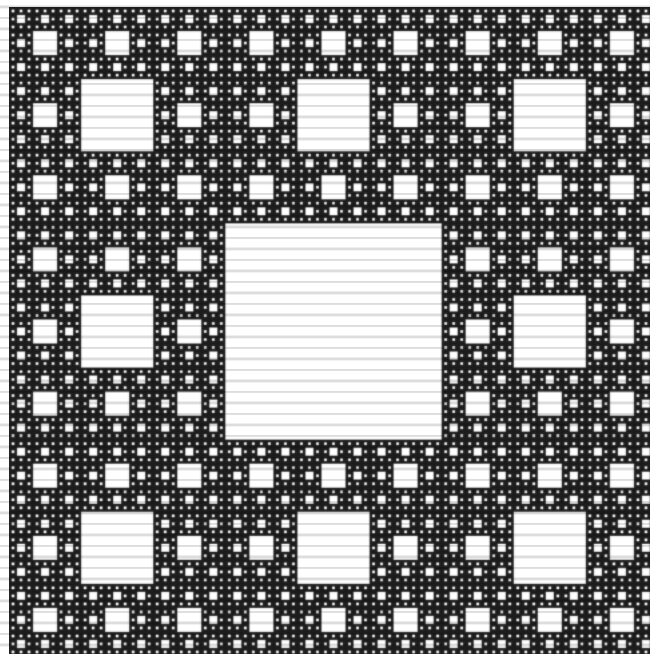
この時、ここで現れる 2 を全て1に置き換えた数を y とする。

$$y = 0.11010011010001011.....$$

x と y は、一対一で、対応している。

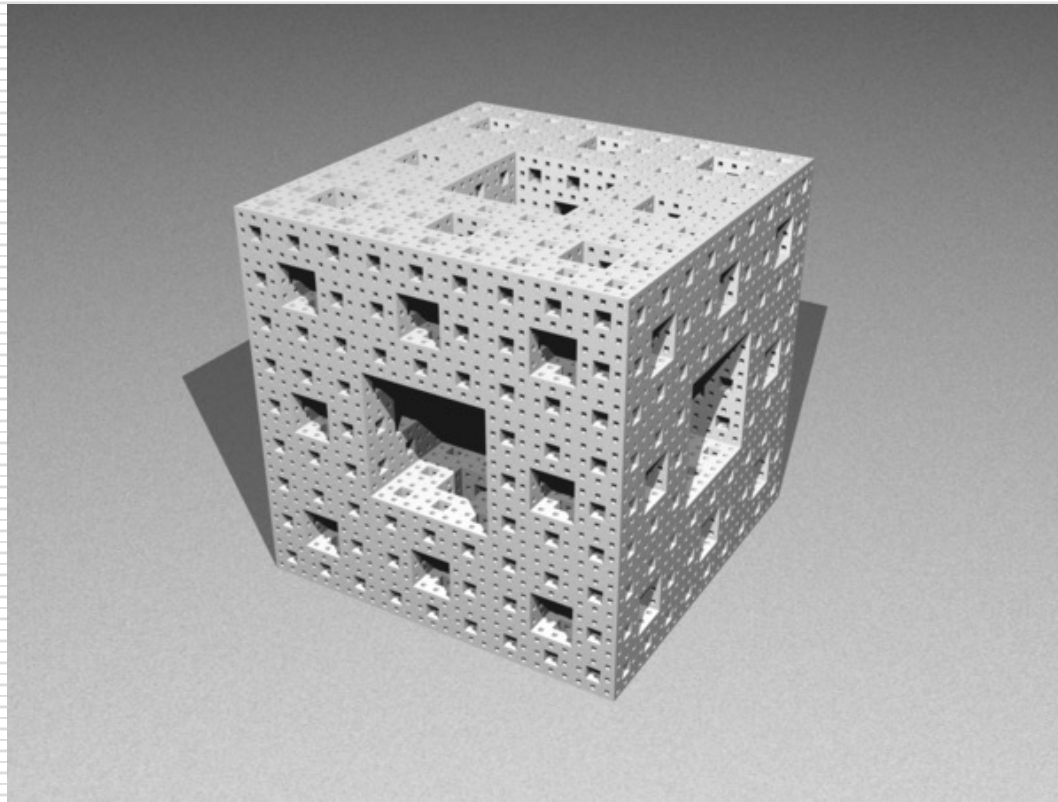
この y を、 $[0,1]$ 区間の実数の二進表記だと考えれば、コントロール集合上の点 x は、 $[0,1]$ 区間の実数の一つに対応していることが分かる。逆に、 $[0,1]$ 区間の実数の二進表記で、1を2に置き換えれば、この実数のコントロール集合上の対応する点がわかる。

カントール集合の二次元版 シェルピンスキーのカーペット



この図形も、測度(面積)ゼロだが、実数と同じ濃度を持つ。

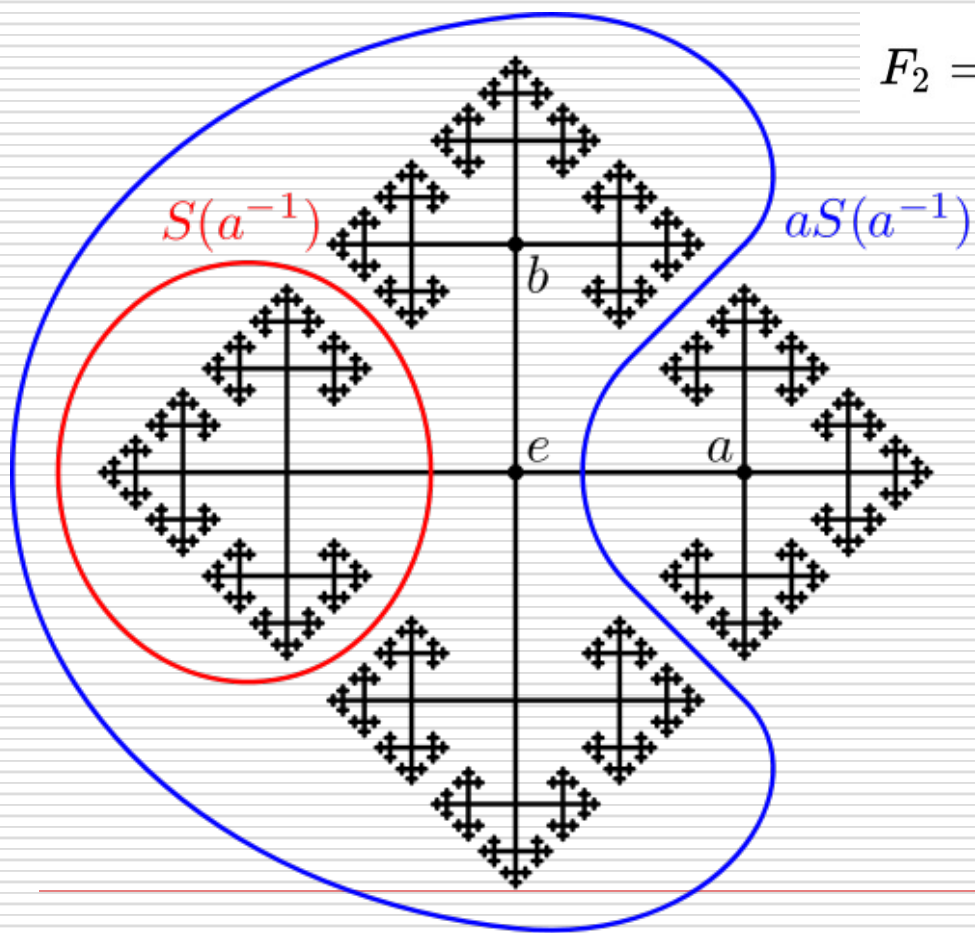
カントール集合の三次元版 メンガーのスポンジ



この図形も、測度(体積)ゼロだが、実数と同じ濃度を持つ。
しかし、表面積は無限大である。

[illegible]

F_2 の分割



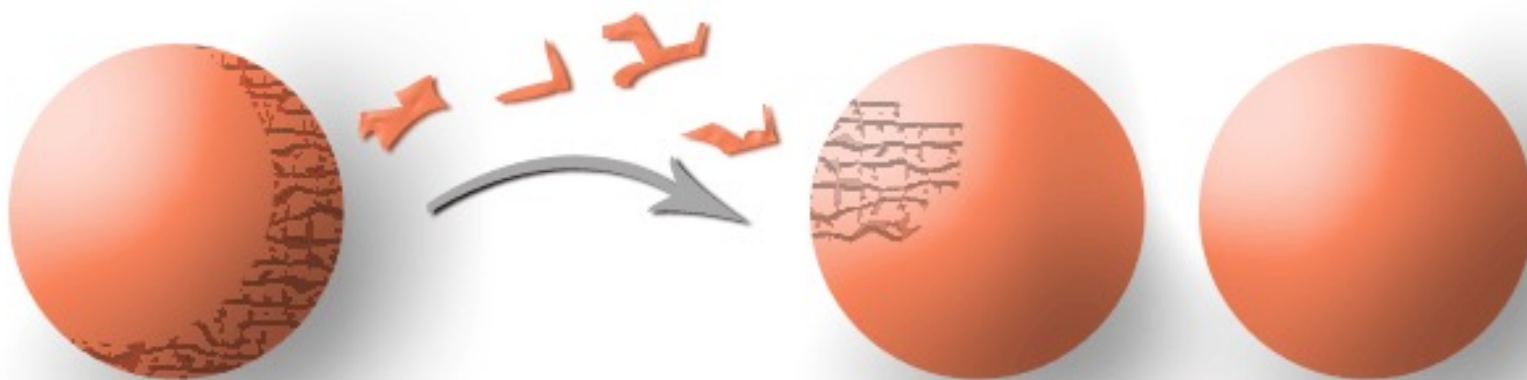
$$F_2 = \{e\} \cup S(a) \cup S(a^{-1}) \cup S(b) \cup S(b^{-1})$$

$$F_2 = aS(a^{-1}) \cup S(a)$$

$$F_2 = bS(b^{-1}) \cup S(b)$$

Banach–Tarski paradox

- 球を3次元空間内で、有限個の部分に分割し、それらを回転・平行移動操作のみを使ってうまく組み替えることで、元の球と同じ半径の球を2つ作ることができるという定理



コントロールが証明できなかったこと：
「連続体仮説」

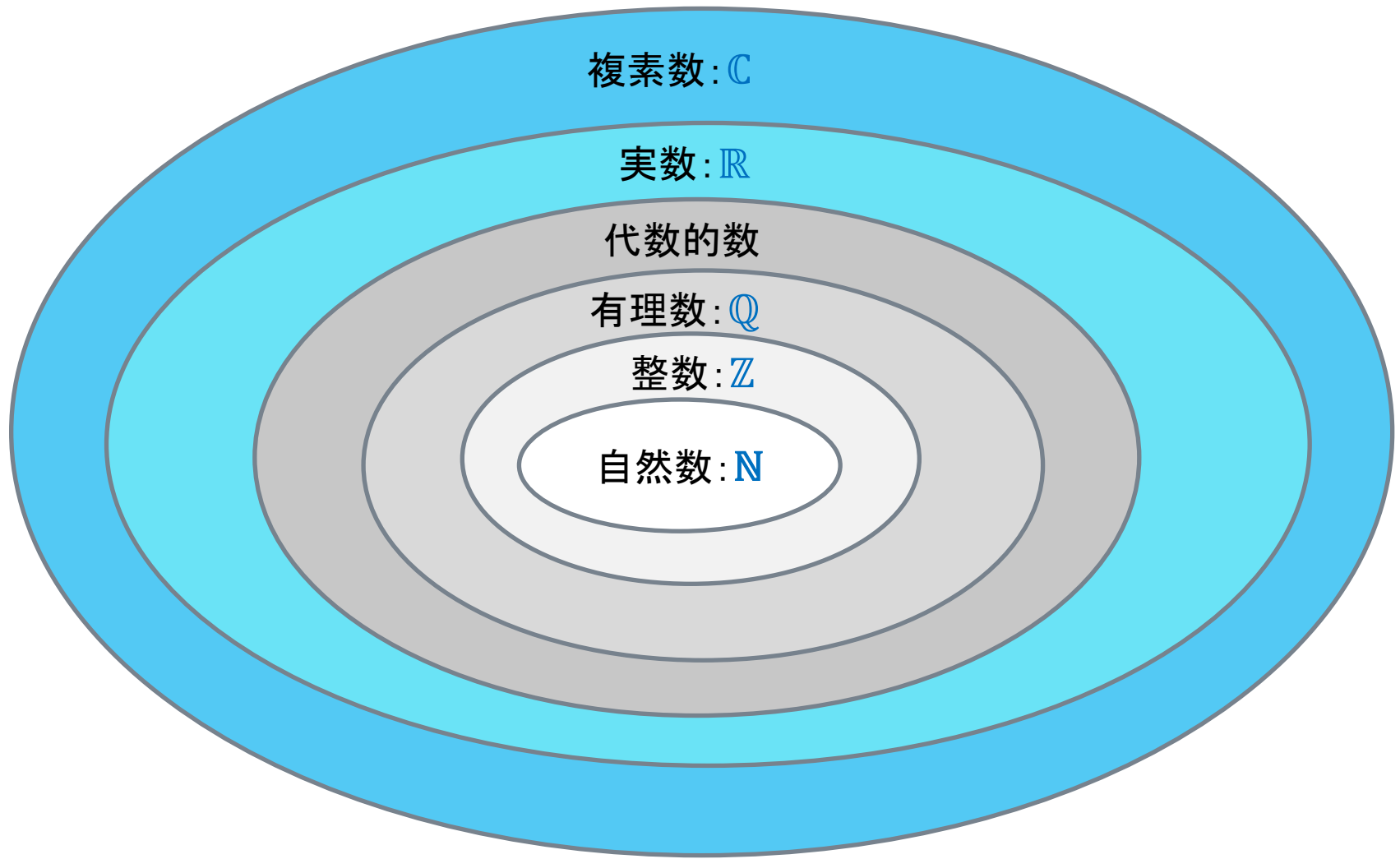
無限の二つの系列

- 可算無限集合の濃度を $\aleph_0$ (アレフゼロ) と呼ぶ。
- 集合 A の濃度 (要素の数) を $|A|$ で表すとする。
 $|\omega| = \aleph_0$ である。
- 任意の濃度 $\aleph_\alpha$ について、 $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$ を示すことはできるので、無限の濃度にも無限の階層があることがわかる。
- こうして、順序数と基数の二つの無限の系列があることになる。
有限集合の時、両者は、ある自然数に一致する。

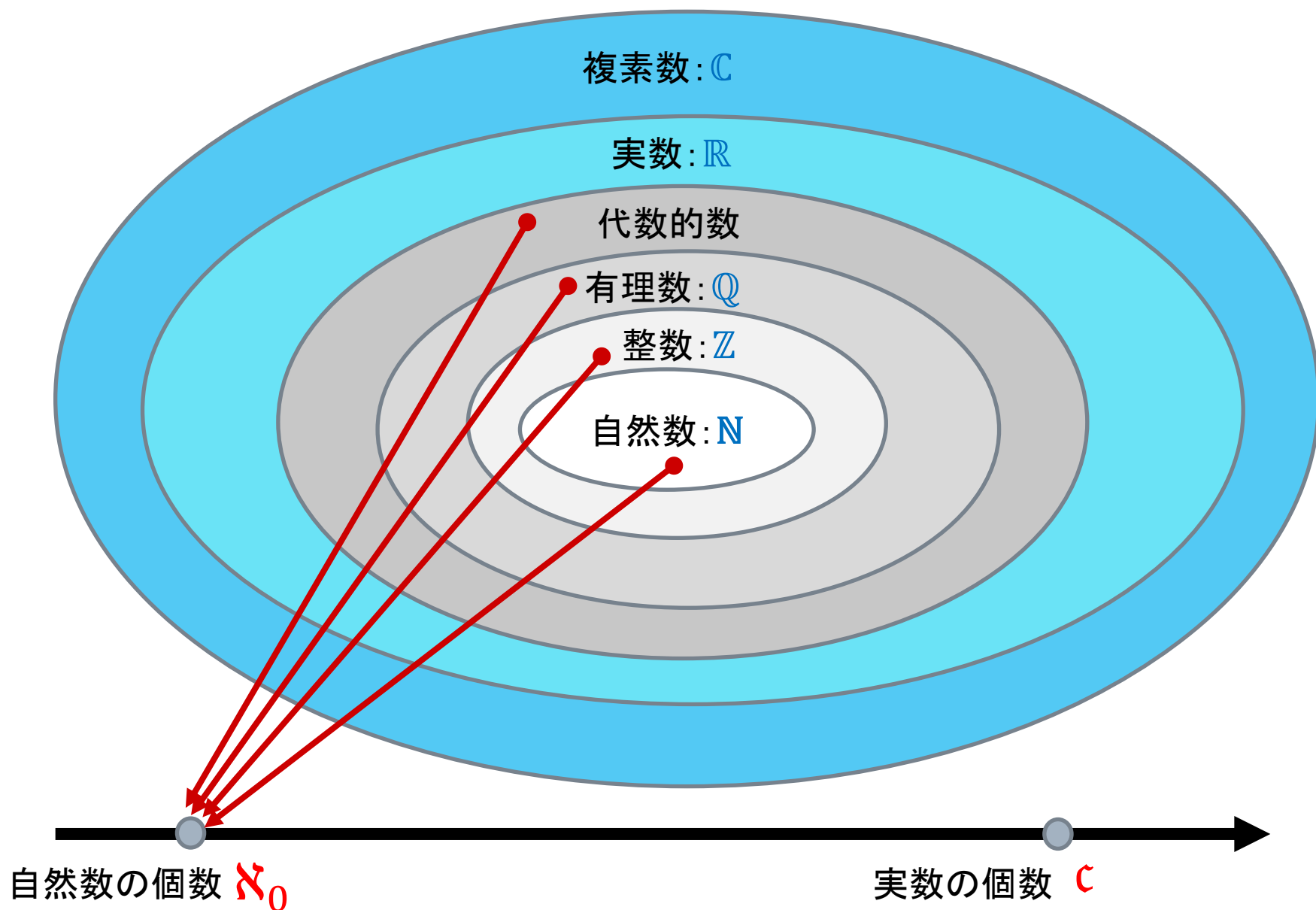
順序数の系列: $0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \dots$

基数の系列 : $0, 1, 2, 3, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$

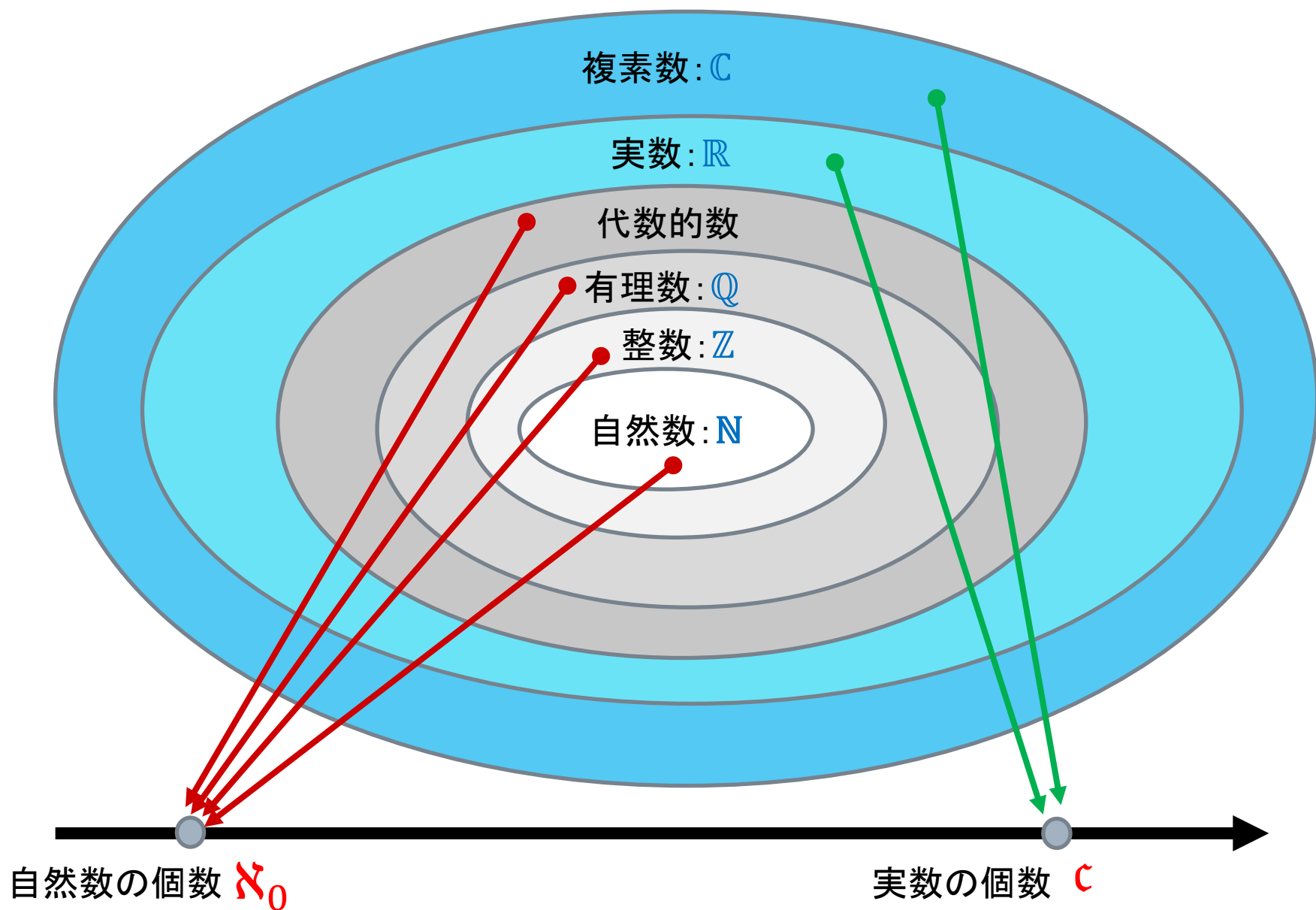
数の階層



無限の数の濃度についてカントールが示したこと



無限の数の濃度についてカントールが示したこと



連続体仮説 1878年

- カントールは、彼が見つけた可算無限の濃度 $\aleph_0$ より大きな実数の無限の濃度 c を、無限濃度の階層の次の無限 $\aleph_1$ に等しいと見当をつけた。またこれが、 $2^{\aleph_0}$ に等しいと予想した。これが、カントールの「連続体仮説 CH(Continuum Hypothesis)」である。

$$c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

- さらに、一般に、次の関係が成り立つとした。それを「一般連続体仮説 GCH(General Continuum Hypothesis)」という

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

- しかし、彼はこの問題を解くことが出来なかった。

ヒルベルトの23の問題 1900年

- ヒルベルトは、1900年に、20世紀の数学が解くべき23の問題のリストを発表した。その問題提起は、20世紀の数学に少なくない影響を与えた。カントールの「連続体仮説」は、この23の問題の第一番目の問題に取り上げられている。

1. CANTOR'S PROBLEM OF THE CARDINAL NUMBER OF THE CONTINUUM.

- Two systems, i. e , two assemblages of ordinary real numbers or points, are said to be (according to Cantor) equivalent or of equal cardinal number, if they can be brought into a relation to one another such that to every number of the one assemblage corresponds one and only one definite number of the other. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving.
-

ヒルベルトの23の問題 1900年

- Every system of infinitely many real numbers, i. e., every assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,... or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line ; as regards equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum.
-

整列性定理も取り上げられている

- Let me mention another very remarkable statement of Cantor's which stands in the closest connection with the theorem mentioned and which, perhaps, offers the key to its proof.
 - Now Cantor considers a particular kind of ordered assemblage which he designates as a well ordered assemblage and which is characterized in this way, that not only in the assemblage itself but also in every partial assemblage there exists a first number.
-

集合論の体系の整備

ラッセルが見つけた集合論の矛盾

Fregeの公理

□ Cantorの集合概念

「集合とは、我々の直観あるいは思考の明確で異なった対象を一つの全体にした集まりである。その対象は、集合の要素と呼ばれる。」

□ Fregeの定式化 (Comprehension Axiom)

ある述語 Φ について $\Phi(x)$ が成り立つ全ての要素 x を集めた集合 y が存在する。

$$\exists y \forall x [(x \in y) \Leftrightarrow \Phi(x)]$$

Russellの逆理

- 先の $\Phi(x)$ に、 $\sim(x \in x)$ を取ろう。
この Φ によって定義される集合を R とすれば、
 $R = \{ x \mid \sim(x \in x) \}$
 R は、自分自身を要素として含まない全ての要素からなる集合になる。
- $R \in R$ だろうか？ この時、 R は自分自身を要素に含んでいるので、 R の要素ではない。だから、 $R \in R$ ならば $\sim(R \in R)$ となって矛盾する。
- それでは、 $\sim(R \in R)$ だろうか？ この時、 R の定義から、この R は R の要素でなければならない。 $\sim(R \in R)$ ならば $R \in R$ となって矛盾する。

Russellの矛盾の分析

- Russellは、定義されるべきクラス自身を含んだ、全てのクラスからなるクラスを考える自己参照的な定義、非述語的な定義(*impredicative definition*)が問題の原因だと考えた。
 - 「全体は、その全体という言葉によってのみ定義される要素を含んではいけない。ある全体の全ての要素という言葉によってのみ定義されうるものは、その全体の要素にはなり得ない。」
 - Russellは、対象と述語に型(*degree*と*order*からなる)を導入して、こうした述語の適用を排除しようとした。
-

Russellの型の理論

- 全ての個体は型 i を持つ。
 - 述語 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ がそれぞれ持つ型 $i_1, i_2, \dots, i_n$ に応じて、型 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ を持つ。
 - ある型を持つ述語 P は、この型の階層構造の中で、その型以下の型を持つ個体に対してのみ適用出来る。
 - 「全て」を表す全称記号は、その型以下の型を持つ個体の上を走る。
-

集合論の逆理に対する もうひとつのアプローチ

- Russellの型の理論とは、別のスタイルでの集合論の逆理に対する対応が、Zermelo–Fraenkelの公理的集合論 (ZF) では、行われている。
- ZFでは、FregeのComprehension Axiomにかえて、次の公理が採用されている。

$$\exists y \forall x [(x \in y) \Leftrightarrow (x \in z) \wedge \Phi]$$



$$\exists y \forall x [(x \in y) \Leftrightarrow \Phi(x)]$$

ZF: ツェルメロ＝フランクелの公理的集合論

現代の集合論は、ツェルメロとフランクелによって、公理的に整理された。彼らの頭文字をとってZFと呼ばれる。(あるいは、「選択公理 Axiom of Choice」を加えて ZFCと呼ばれる) ここでは、その公理の一部を紹介する。

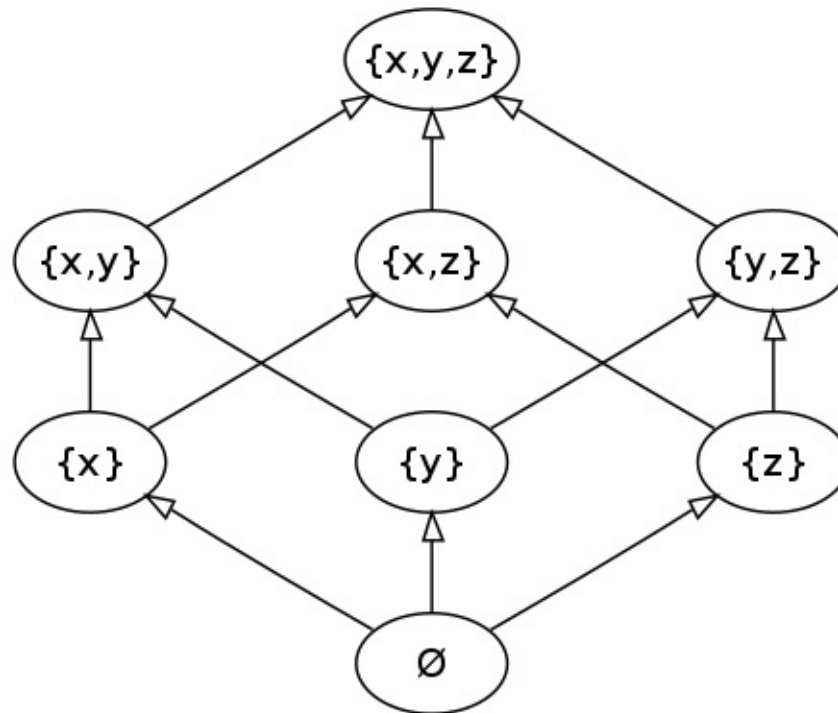
Axiom of extensionality

- 全ての集合A,Bについて、集合XがAの要素であるのは、XがBの要素である時に限るならば、集合Aと集合Bは等しい。

$$\forall A \forall B (\forall X (X \in A \iff X \in B) \Rightarrow A = B)$$

Axiom of power set

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \iff \forall w (w \in z \Rightarrow w \in x)]$$



Axiom of infinity

$$\exists \mathbf{I} (\emptyset \in \mathbf{I} \wedge \forall x \in \mathbf{I} ((x \cup \{x\}) \in \mathbf{I})).$$

First few Von Neumann ordinals

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Axiom schema of specification (also called the axiom schema of separation or of restricted comprehension)

- どの集合Aについても、 x がAに属し、かつ x が φ を満たすような x からなる集合Bが存在する。

$$\forall w_1, \dots, w_n \forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \wedge \varphi(x, w_1, \dots, w_n, A)])$$

- Axiom scheme of Comprehension(Unrestricted)

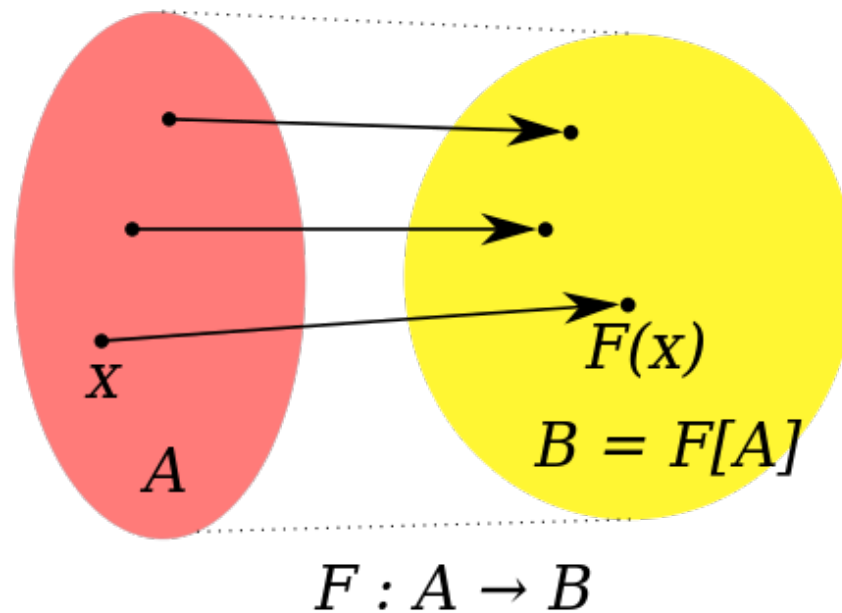
$$\forall w_1, \dots, w_n \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow \varphi(x, w_1, \dots, w_n))$$

- Axiom scheme of Replacement

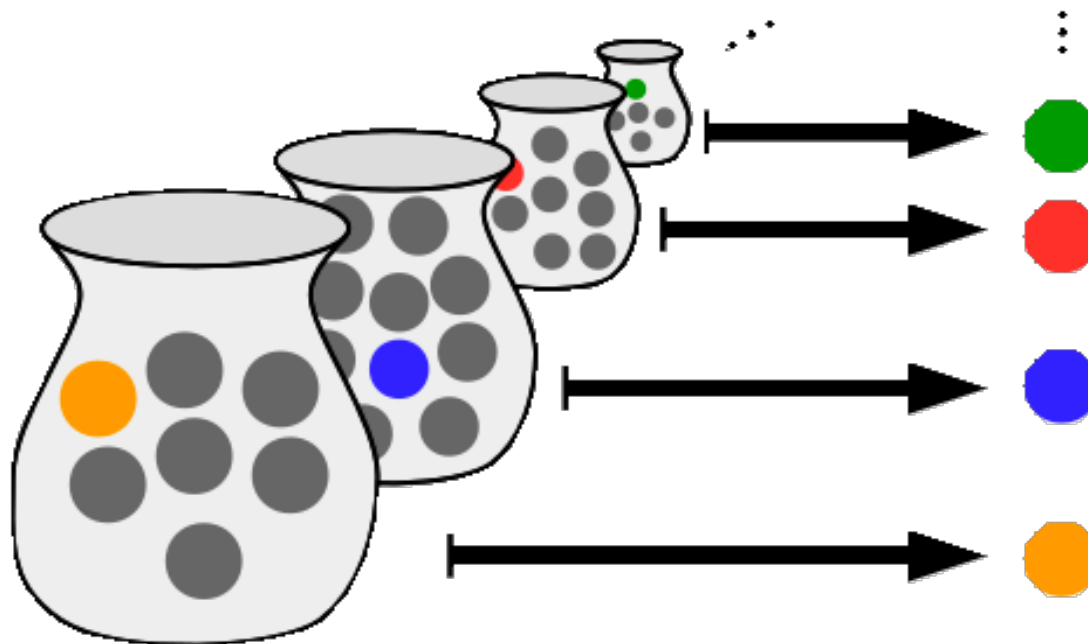
$$\forall A \exists B \forall C (C \in B \iff \exists D [D \in A \wedge C = F(D)])$$

Axiom schema of replacement

$$\forall w_1, \dots, w_n \forall A ([\forall x \in A \exists! y \phi(x, y, w_1, \dots, w_n, A)] \\ \Rightarrow \exists B \forall y [y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A \phi(x, y, w_1, \dots, w_n, A)])$$

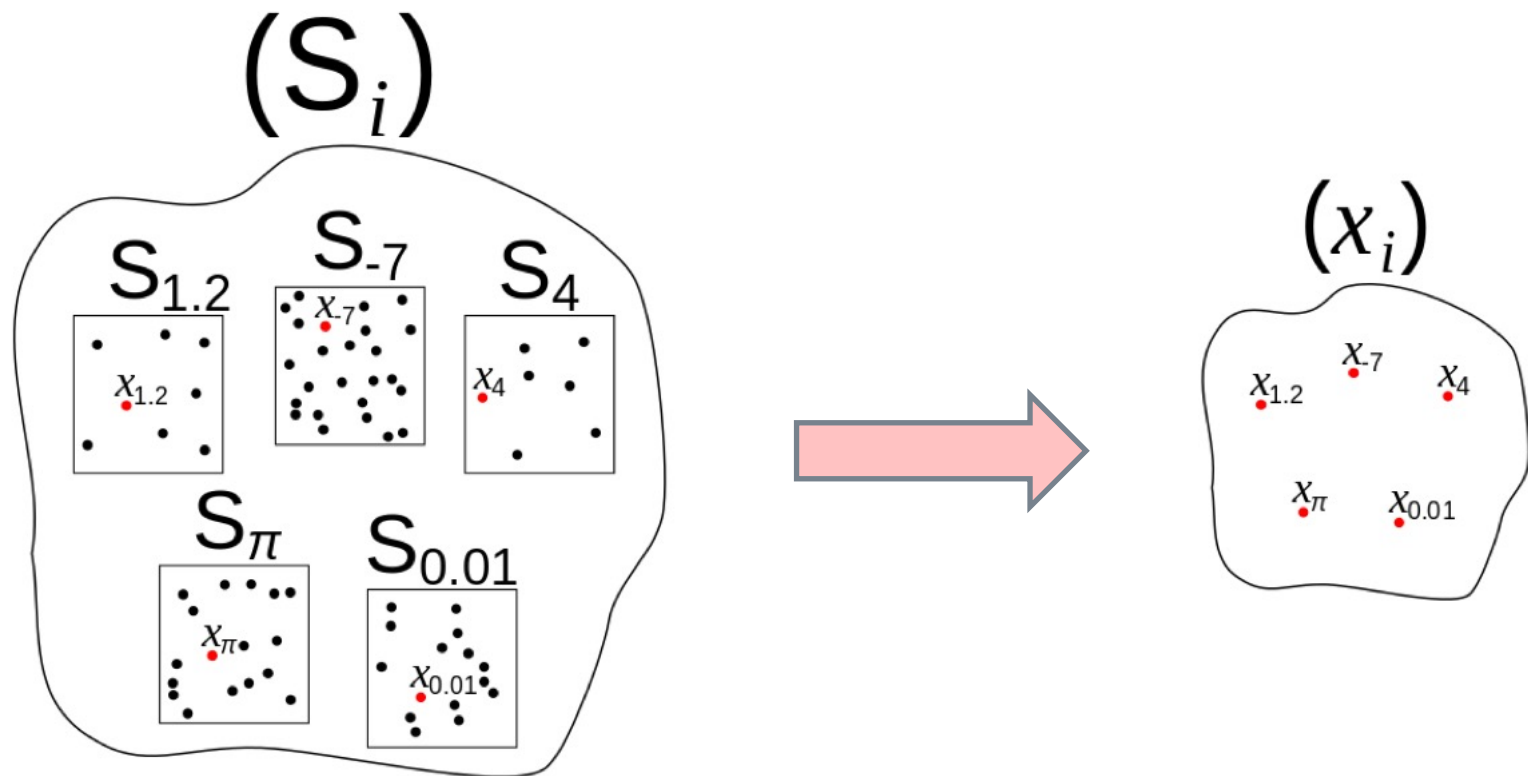


Axiom of choice (選択公理)



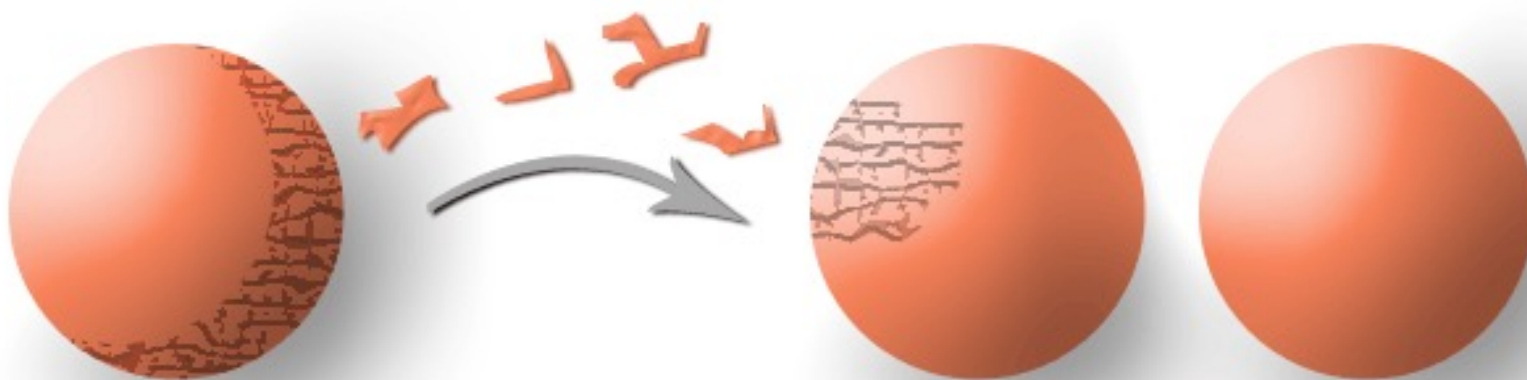
Axiom of choice

非可算無限集合での選択公理の利用



Banach–Tarski paradox

- 球を3次元空間内で、有限個の部分に分割し、それらを回転・平行移動操作のみを使ってうまく組み替えることで、元の球と同じ半径の球を2つ作ることができるという定理



非コントロール的集合論の発見

ゲーデル 1940年
連続体仮説と集合論の無矛盾性の証明

ゲーデル

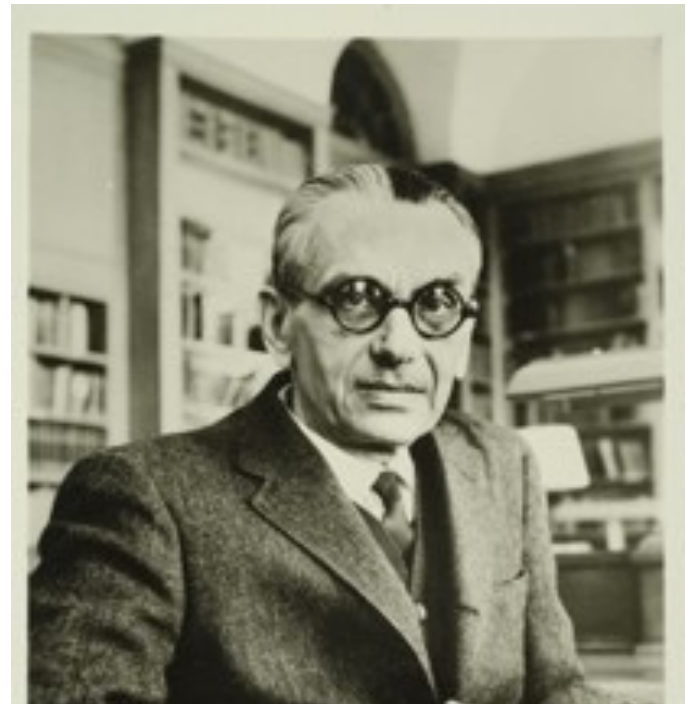
連続体仮説と集合論の無矛盾性の証明

- 「世紀の難問」と呼ばれた連続体仮説の問題で、大きな前進があったのは、1940年のことだ。クルト・ゲーデルが、連続体仮説と選択公理の二つを満たす集合論のモデルを実際に構成して見せたのだ。この集合論のモデルの中では、連続体仮説は「真」である。
 - この結果は、連続体仮説を直接に証明したものではないことに注意しよう。それは、集合論と連続体仮説には矛盾がないこと、すなわち、集合論の中では連続体仮説の否定は証明できないことを意味している。
-

THE CONSISTENCY
OF THE
CONTINUUM HYPOTHESIS

KURT GÖDEL

ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
PRINCETON UNIVERSITY PRESS



ゲーデル 完全性定理 1929年

「無矛盾な理論はモデルを持つ」

- ゲーデルは、ある形式的体系の中に、その証明もその否定の証明も、その形式的体系の中では与えることができない命題Pが存在するという「不完全性定理」(1930年)で有名である。特に、その形式的体系が「無矛盾」であることを主張する命題自身が、この形式的体系では証明できないという発見は、よく知られている。
 - ゲーデルには、もう一つ、重要な業績がある。それは「無矛盾な理論はモデルを持つ」というもので、「完全性定理」と呼ばれる。ある形式体系のある命題Pが、その形式的体系のすべてのモデルで妥当する時、その命題Pは証明可能となる。
-

レーベンハイム・スコーレムの定理

「モデルをもつなら、可算モデルも持つ」

- Skolem's paradox is that every countable axiomatisation of set theory in first-order logic, if it is consistent, has a model that is countable. This appears contradictory because it is possible to prove, from those same axioms, a sentence that intuitively says (or that precisely says in the standard model of the theory) that there exist sets that are not countable. Thus the seeming contradiction is that a model that is itself countable, and which therefore contains only countable sets, satisfies the first order sentence that intuitively states "there are uncountable sets".
-

コーエン 1963年
連続体仮説と集合論の独立性の証明

コーエン 1963年

連続体仮説と集合論の独立性の証明

- 連続体仮説を最終的に解決したのは、J.P.コーエンだった。彼は、「強制法(Forcing Method)」というモデル構成法を創出し、連続体仮説の否定が成り立つモデルを構成した。
 - 先のゲーデルの結果と合わせると、連続体仮説は、集合論の公理群からは独立であることが証明されたことになる。連続体仮説は、集合論の公理群からは証明できないのだ。
 - 結果から見ると、カントールが、全力で連続体仮説を証明しようとして、成功しなかったのには理由があったのである。
-



J.P.Cohen
1934-2007

- ²⁰ Gardner, R. S., A. J. Wahles, C. Basilio, R. S. Miller, P. Lengyel, and J. F. Speyer, these PROCEEDINGS, **48**, 2087 (1962).
- ²¹ Balph, R. K., and H. G. Khorana, *J. Am. Chem. Soc.*, **83**, 2926 (1961).
- ²² Ames, B. N., and D. T. Dubin, *J. Biol. Chem.*, **235**, 769 (1960).
- ²³ Chen, P. S., Jr., T. Y. Toribara, and H. Warner, *Anal. Chem.*, **28**, 1756 (1956).
- ²⁴ Heppel, L. A., D. R. Harkness, and R. J. Hilmeo, *J. Biol. Chem.*, **237**, 841 (1962).
- ²⁵ Russell, W. E., and H. G. Khorana, *J. Biol. Chem.*, **234**, 2114 (1959).
- ²⁶ Kay, E. R. M., N. S. Simmons, and A. L. Doucet, *J. Am. Chem. Soc.*, **74**, 1724 (1952).
- ²⁷ Sherman, J. R., and J. Adler, *J. Biol. Chem.*, **238**, 873 (1962).
- ²⁸ Waley, S. G., and J. Watson, *Biochem. J.*, **55**, 328 (1953).
- ²⁹ Akabori, S., K. Ohno, and K. Narita, *Bull. Chem. Soc. Japan*, **25**, 214 (1952).
- ³⁰ Lowry, O. H., N. J. Rosebrough, A. L. Farr, and R. J. Randall, *J. Biol. Chem.*, **193**, 265 (1951).
- ³¹ Nakamoto, T., and S. B. Weiss, these PROCEEDINGS, **48**, 880 (1962).
- ³² Fox, C. F., W. S. Robinson, and S. B. Weiss, *Fed. Proc.*, **22**, 463 (1963).
- ³³ Krakow, J. S., and S. Oshon, these PROCEEDINGS, **49**, 88 (1963).

THE INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS

By PAUL J. COHEN*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STANFORD UNIVERSITY

Communicated by Kurt Gödel, September 30, 1963

This is the first of two notes in which we outline a proof of the fact that the Continuum Hypothesis cannot be derived from the other axioms of set theory, including the Axiom of Choice. Since Gödel¹ has shown that the Continuum Hypothesis is consistent with these axioms, the independence of the hypothesis is thus established. We shall work with the usual axioms for Zermelo-Fraenkel set theory,² and by Z-F we shall denote these axioms without the Axiom of Choice, (but with the Axiom of Regularity). By a model for Z-F we shall always mean a collection of actual sets with the usual ϵ -relation satisfying Z-F. We use the standard definitions³ for the set of integers ω , ordinal, and cardinal numbers.

THEOREM 1. *There are models for Z-F in which the following occur:*

- (1) *There is a set a , $a \subseteq \omega$ such that a is not constructible in the sense of reference 3, yet the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis both hold.*
- (2) *The continuum (i.e., $\mathcal{P}(\omega)$ where $\mathcal{P}$ means power set) has no well-ordering.*
- (3) *The Axiom of Choice holds, but $\aleph_1 \neq 2^{\aleph_0}$.*
- (4) *The Axiom of Choice for countable pairs of elements in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ fails.*

Only part 3 will be discussed in this paper. In parts 1 and 3 the universe is well-ordered by a single definable relation. Note that 4 implies that there is no simple ordering of $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$. Since the Axiom of Constructibility implies the Generalized Continuum Hypothesis,⁴ and the latter implies the Axiom of Choice,⁵ Theorem 1 completely settles the question of the relative strength of these axioms.

Before giving details, we sketch the intuitive ideas involved. The starting point is the realization^{6, 7} that no formula $\phi(x)$ can be shown from the axioms of Z-F to have the property that the collection of all x satisfying it form a model for Z-F in which the Axiom of Constructibility ($V = L$,⁸) fails. Thus, to find such models, it seems natural to strengthen Z-F by postulating the existence of a set which is a

非カントールの集合論の発見

- コーエンの結果は、始祖のカントールが構想した、いわばカントールの集合論とは異なる、非カントールの集合論が存在することを明らかにした衝撃的なものだった。
 - ユークリッド幾何学の「第五公準」が、他のユークリッド幾何学の公理群からは独立で、それらから証明できないことの認識の成立が、非ユークリッド幾何学を成立させたのと同じことが、「数学の基礎」である集合論で起きたのである。
 - コーエンの結果とその方法は、1960年代の中頃には、集合論の構造についての認識を飛躍的に発展させた。
-

数学の基礎を基礎付ける試みの発展

変貌する「集合論」

- 60年代のコーエンの仕事によって大きく射程を拡大した「集合論」だが、その後も大きな変化が続いている。
 - 70年代には、LawvereのTopos Theoryが登場し、カテゴリー論の上に「集合論」は再構築され拡大した。代数幾何をはじめとする、他の数学の諸分野との関係も、一層密接なものとなった。
 - 21世紀に入ってから、VoevodskyのUnivalent Theory / Homotopy Type Theory の動きは重要である。惜しいことに、Voevodskyは、昨年(2017年)亡くなった。
 - 数学の基礎としての「集合論」は、時代とともに、そのスタイルを変えている。これらの動きは、数学の基礎について、新たな洞察を提供している。
-

Lawvere's Topos Theory

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \downarrow \overline{x} & \searrow x & & & \\
 E & \xrightarrow{i} & A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B & \xrightarrow{q} & Q \\
 & & \searrow y & & \downarrow \overline{y} \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X_y & \xrightarrow{p^{-1}[y]} & X \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 1 & \xrightarrow{y} & Y
 \end{array}$$



William Lawvere
1937-

Voevodsky's Univalent Theory



Vladimir Voevodsky
1966-2017

dim 0: Sets have elements/objects.

dim 1: Categories also have arrows between objects

dim 2: 2-categories have in addition arrows between those arrows.

⋮

⋮

Identity between elements/objects

dim 0: standard equality between elements of a set.

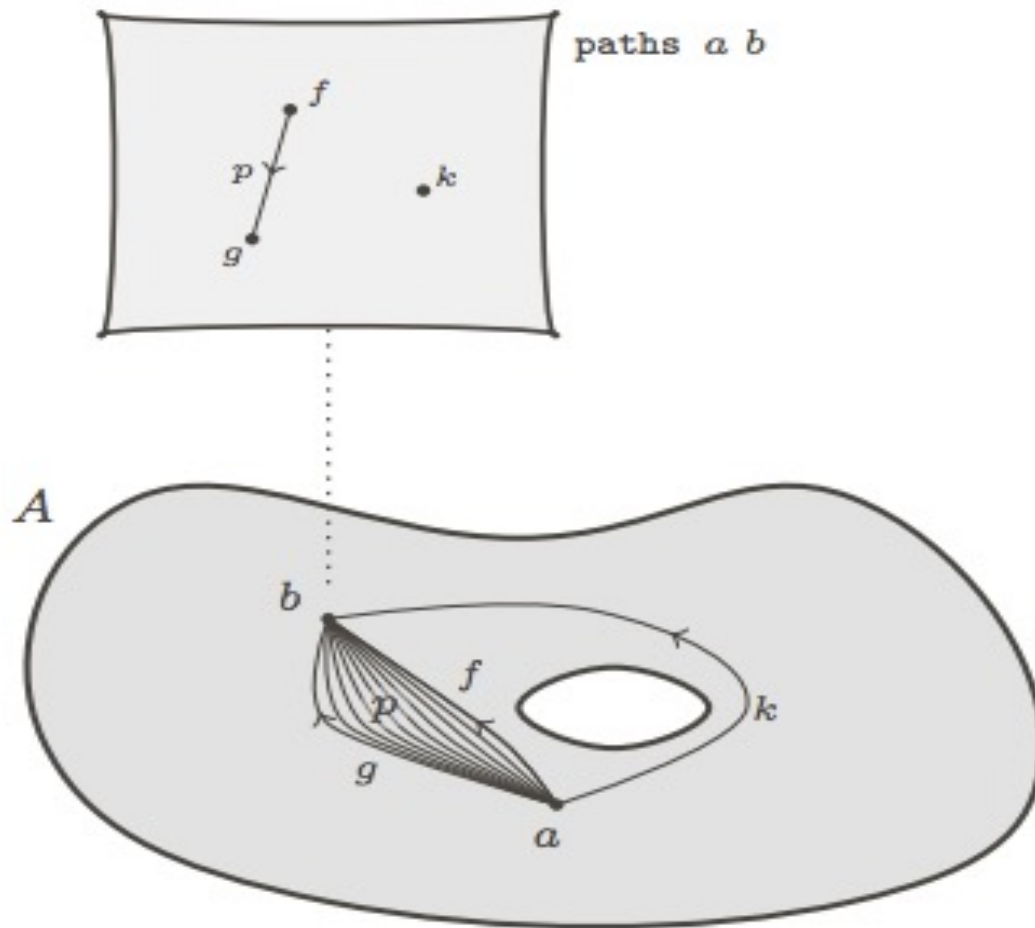
dim 1: isomorphism between objects of a category

dim 2: equivalence between objects of a 2-category

⋮

⋮

HoTTでの同一性の解釈



空間Aの中で、
点aと点bをつな
ぐ「道」がある時、
aとbは、同じもの
と見なす。
「道」自体は、連続
的に変化しうる。
その同一性は、
homotopyが
与える

Module u0.

Definition UU:=Type.

Inductive paths (X:UU)(x:X): X -> UU := idpath: paths X x x.

Inductive total2 (X:UU) (P:X -> UU) : UU := tpair: forall x:X, forall p: P x, total2 X P.

Definition pr21 (X:UU) (P:X -> UU) (z: total2 X P) : X :=

match z with tpair x p => x end.

Definition pr22 (X:UU) (P:X -> UU) (z: total2 X P) : P (pr21 _ _ z):=

match z with tpair x p => p end.

Definition iscontr (X:UU) : UU := total2 X (fun cntr:X => forall x:X, paths X x cntr).

Definition iscontrpair (X:UU) (cntr: X) (e: forall x:X, paths X x cntr) : iscontr X :=

tpair X (fun cntr:X => forall x:X, paths X x cntr) cntr e.

Definition hfiber (X:UU)(Y:UU)(f:X -> Y)(y:Y) : UU := total2 X (fun pointover:X => paths Y (f pointover) y).

Definition hfiberpair (X:UU)(Y:UU)(f:X -> Y)(y:Y) (x:X) (e: paths Y (f x) y): hfiber _ _ f y :=

tpair X (fun pointover:X => paths Y (f pointover) y) x e.

Definition isweq (X:UU)(Y:UU)(F:X -> Y) : UU := forall y:Y, iscontr (hfiber X Y F y) .

Lemma idisweq (X:UU) : isweq X X (fun t:X => t).

Proof. intros. unfold isweq. intros. assert (y0: hfiber X X (fun t : X => t) y).

apply (tpair X (fun pointover:X => paths X ((fun t:X => t) pointover) y) y (idpath X y)). split with y0.

intros.

destruct y0. destruct x. induction p. induction p0. apply idpath. Defined.

Definition weq (X:UU)(Y:UU) : UU := total2 (X -> Y) (fun f:X->Y => isweq X Y f) .

Definition weqpair (X:UU)(Y:UU)(f:X-> Y)(is: isweq X Y f) : weq X Y :=

tpair (X -> Y) (fun f:X->Y => isweq X Y f) f is.

Definition idweq (X:UU) : weq X X := tpair (X-> X) (fun f:X->X => isweq X X f) (fun x:X => x) (idisweq X) .

Definition invmap (X:UU) (Y:UU) (f:X-> Y) (isw: isweq X Y f): Y->X.

Proof. intros. unfold isweq in isw. apply (pr21 _ _ (pr21 _ _ (isw X0))). Defined.

Definition weqfg (X:UU) (Y:UU) (f:X-> Y) (is1: isweq _ _ f): forall t2:Y, paths Y (f ((invmap _ _ f is1) t2)) t2.

Proof. intros. unfold invmap. simpl. unfold isweq in is1. apply (pr22 _ _ (pr21 _ _ (is1 t2))). Defined.

End u0.

おわりに

- 小論は、「順序数」と「基数」という概念を中心において、カントールが考えたいわば「古典的」な集合論の骨組みをできるだけ分かりやすく説明しようとしたものである。
- 残念ながら、小論では、連続体仮説の独立性を証明したコーエンの方法や、Topos, Univalent Theory といった、集合論に代わって数学の基礎を基礎付けようとする新しい動きについては紹介のみで、ほとんど説明できなかった。
- これらについては、是非、別の機会を設けたいと考えている。