

Surface code と Stabilizer 2



Agenda

Surface code と Stabilizer 2

Part 1

Surface code Measure qubit

Data qubit と Measure qubit

Z-Measure qubit の働きとパリティ

X-Measure qubit とアダマール基底とCNOT

Z-Measure qubit と X-Measure qubit

Part 2

Logical qubit と Logical operator

Two-level quantum system
Logical qubit と Logical operator
Quiescent state

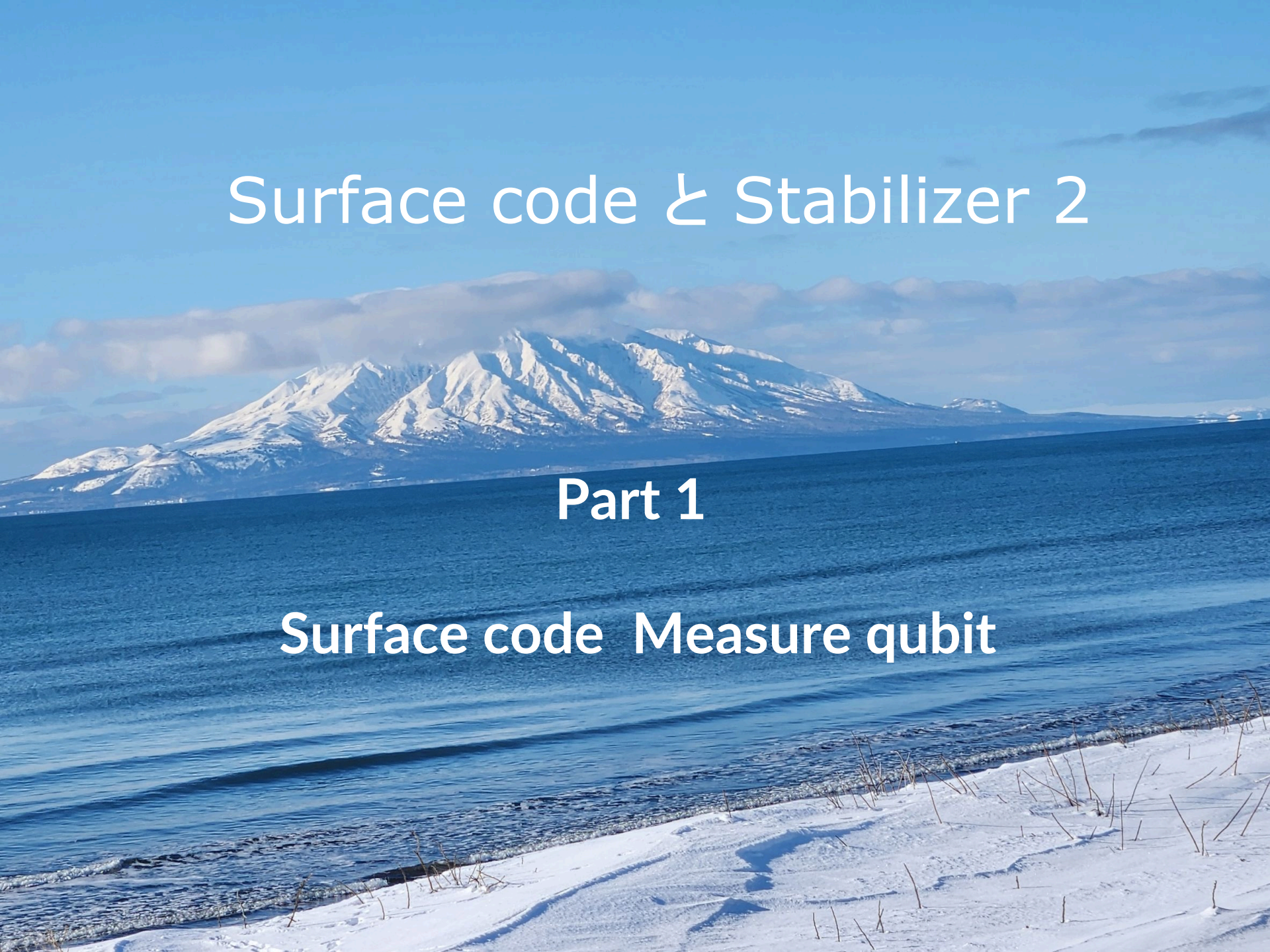
Part 3

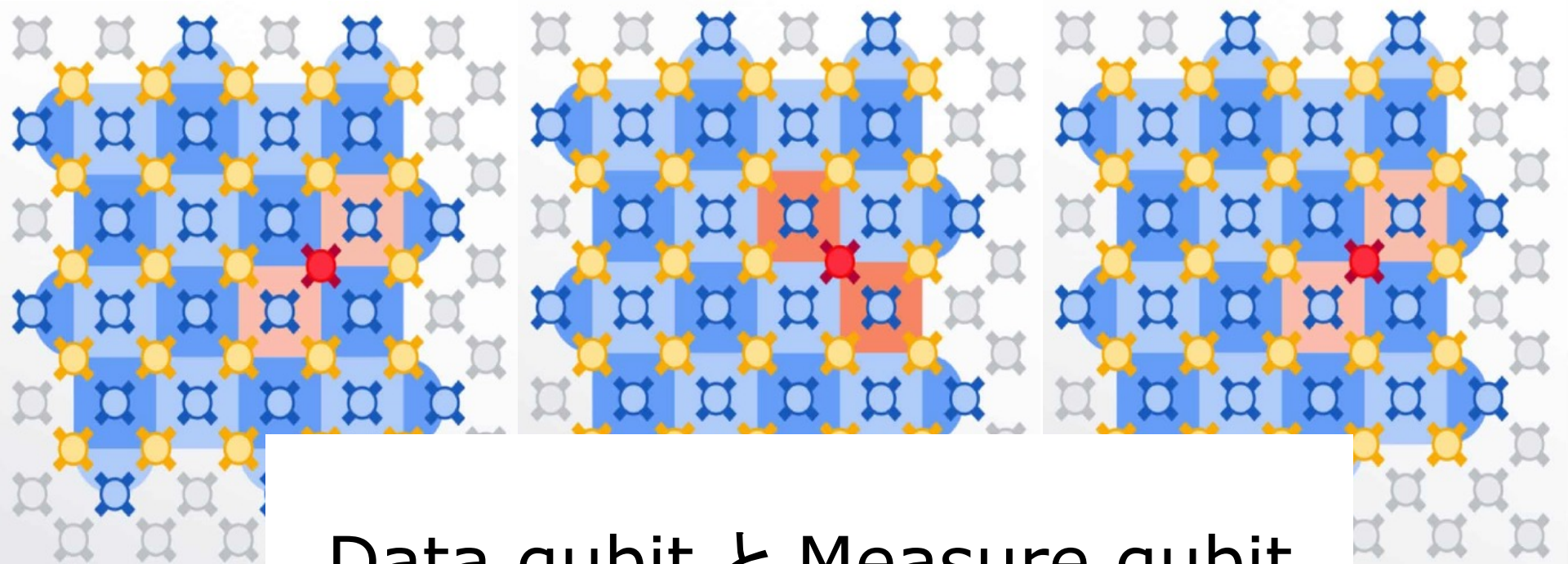
Surface code Logical qubit

Surface code と Stabilizer 2

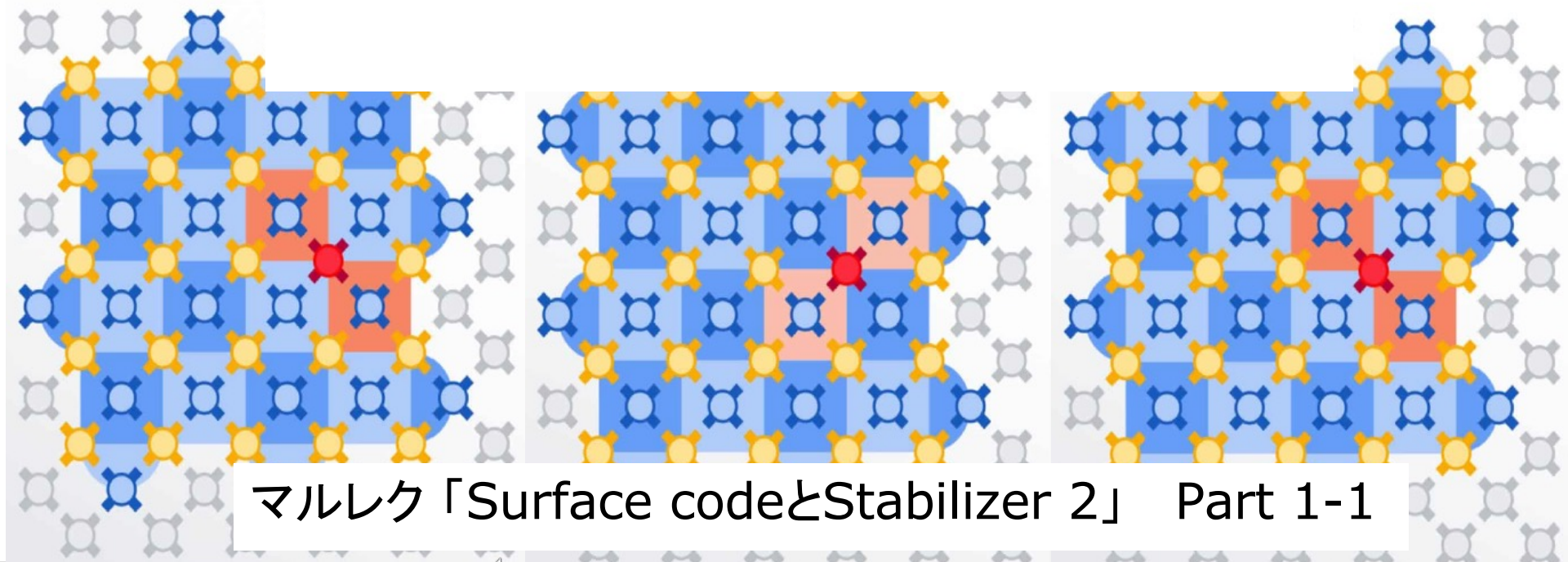
Part 1

Surface code Measure qubit





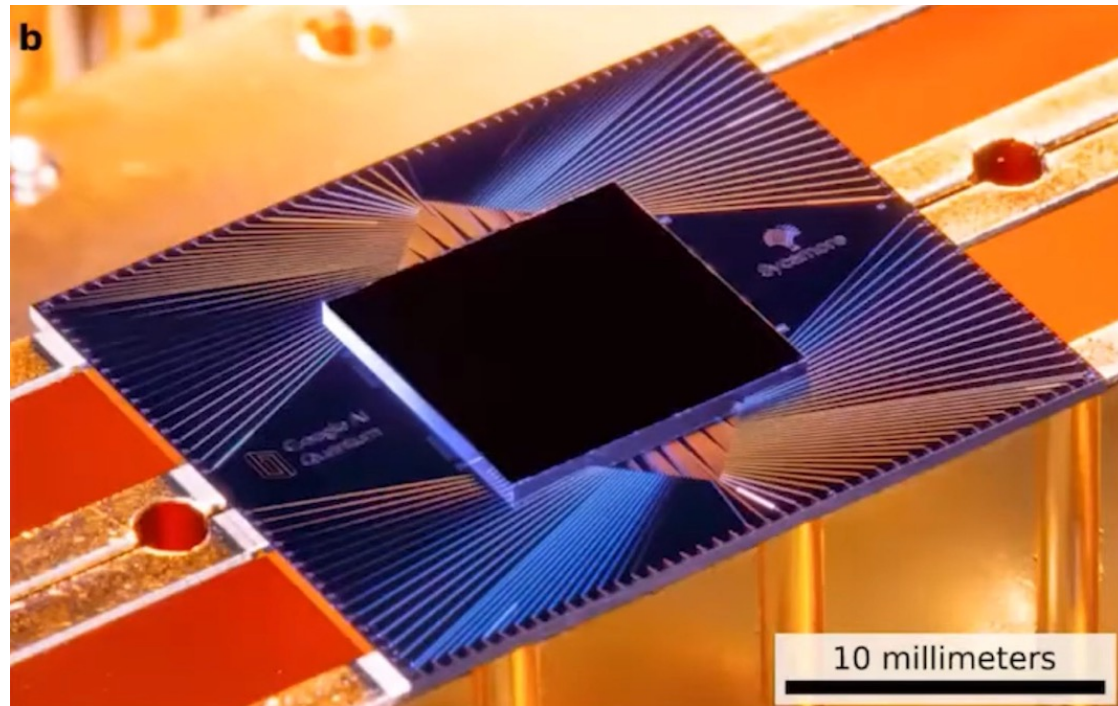
Data qubit と Measure qubit



マルレク「Surface codeとStabilizer 2」 Part 1-1

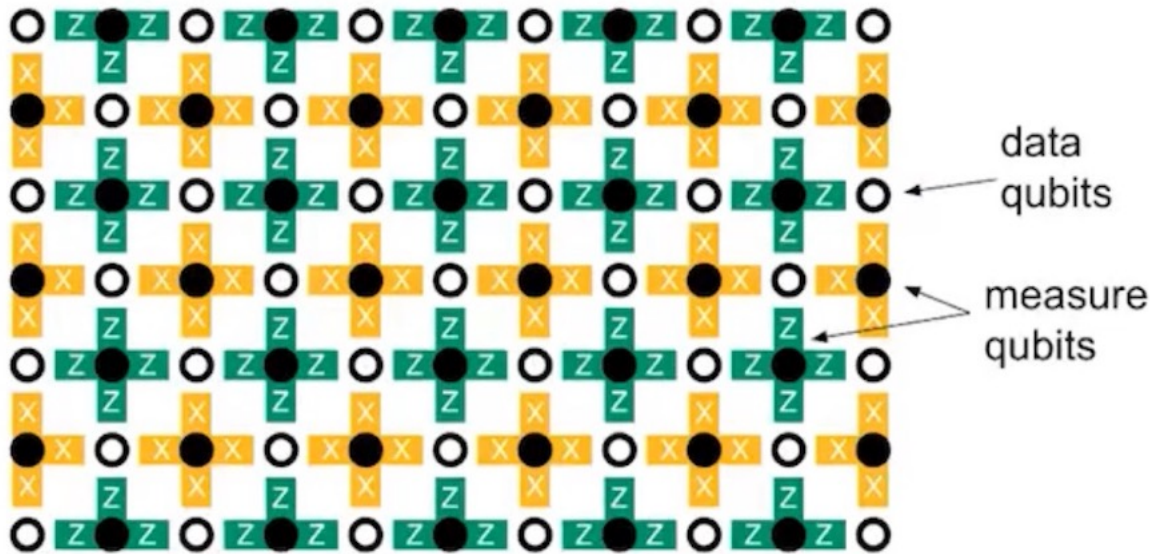
振り返り(前々回のセミナー) ハードウェアの構成

このセッションでは、量子エラー訂正技術のsurface codeを実装しているGoogleの53-qubitの量子プロセッサ Sycamore のハードウェアの構成を振り返ります。



Sycamore

data qubit と measure qubit

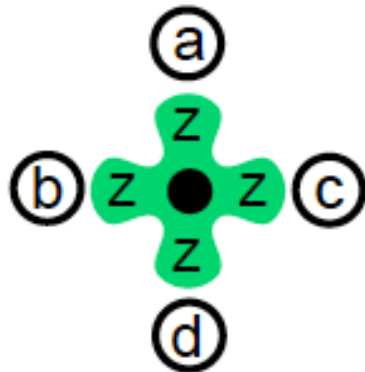


配置されているqubitには、二つの種類があります。

一つは、データを保持するdata qubitで、図では白丸で表されています。

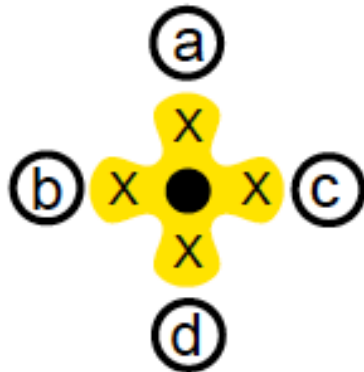
もう一つは、周囲のdata qubitの状態を監視するmeasure qubitです。図では、黒丸で表されています。

二種類の measure qubit



図をよく見ると、黒丸で表される measure qubitにも、二つの種類があることがわかります。

一つは、Zと記された緑の十字の中央にある黒丸の measure qubit です。



もう一つは、Xと記された黄色の十字の中央にある黒丸の measure qubit です。

いずれの measure qubit でも、十字の先にある a, b, c, d は、data qubit になっています。

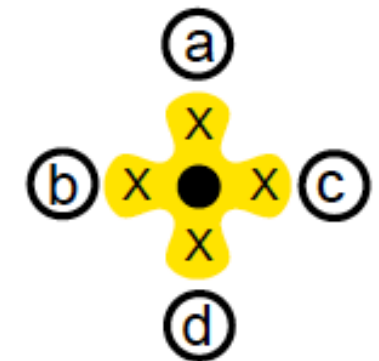
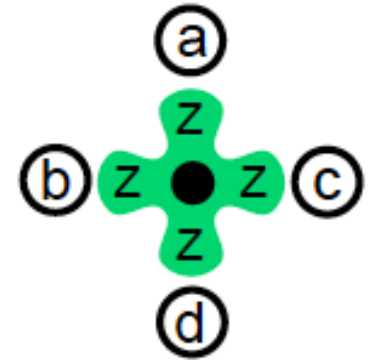
二種類の measure qubit の役割

二種類の measure qubit は、それぞれ隣接している4つの data qubit a, b, c, d の状態をチェックしています。

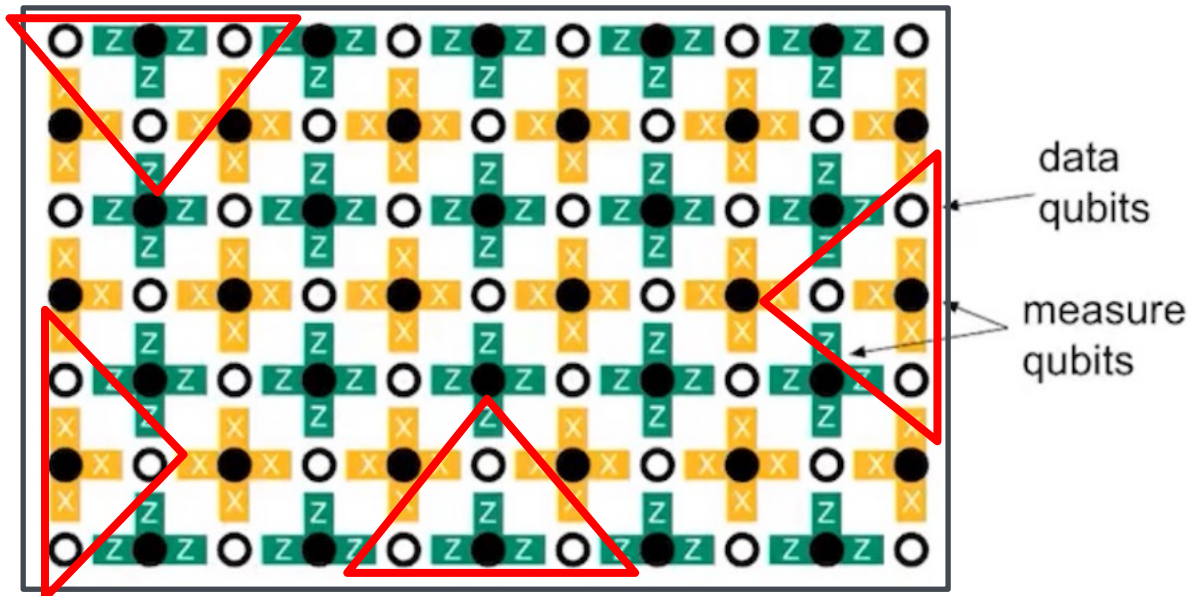
ただ、その役割は違っています。

緑の十字の中央の measure qubit は、隣接する4つの data qubit の中で、「bitの反転」が起きていないかを検知しています。

黄色の十字の中央の measure qubit は、隣接する4つの data qubit の中で、「phaseの反転」が起きていないかを検知しています。



境界上の measure qubit

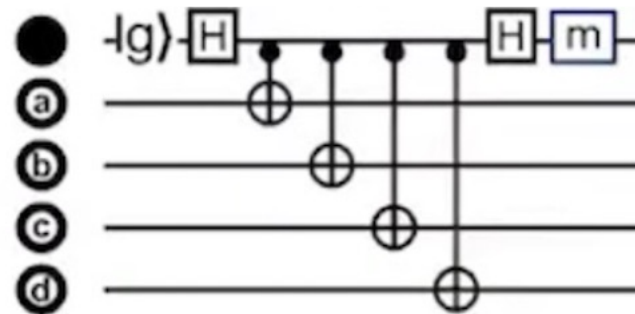
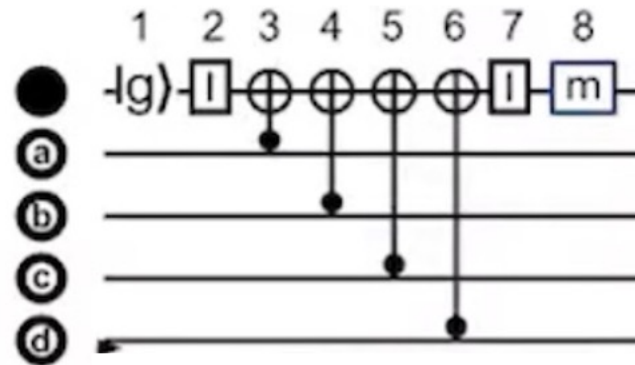


もっとよく見ると、二次元の平面の境界の近くでは、measure qubitは、4つではなく3つのdata qubitと繋がっていることがわかります。

Surface codeでは、「境界 (Boundary)」が重要な意味を持つのですが、それについては、後で触れることにします。

Measure Qubitの量子回路

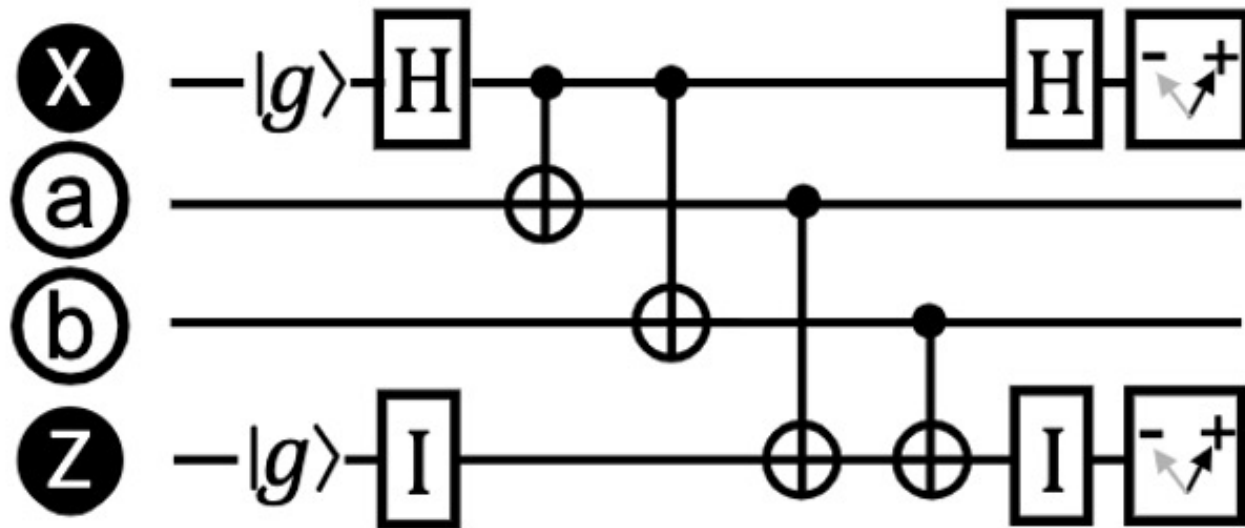
4つのData Qubit とつながるMeasure Qubitを量子回路の形でかくと次のようになります。



振り返り(前回のセミナー)

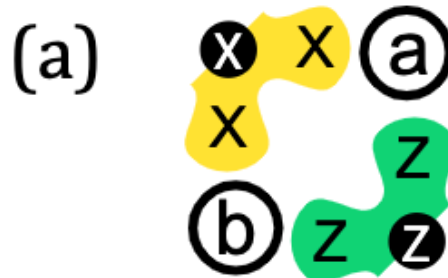
二つのqubitを観測する量子回路

このMeasure Qubitの量子回路の働きを理解するには、前回のセミナーで見てきた、二つのqubitを観測する次のような量子回路の働きを振り返ることが、役に立ちます。

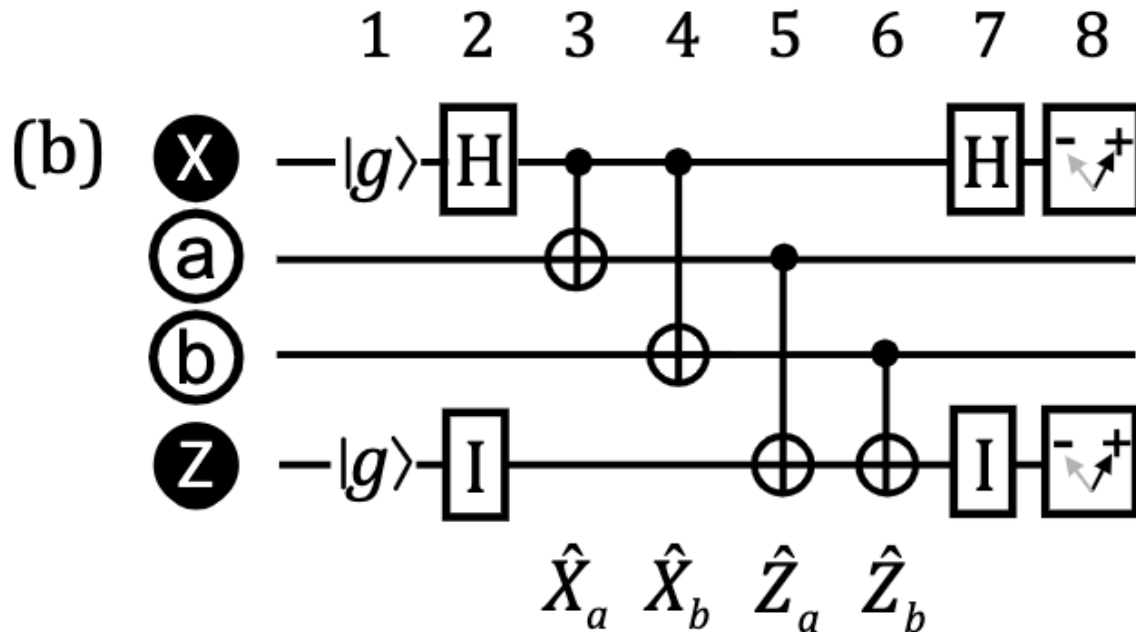


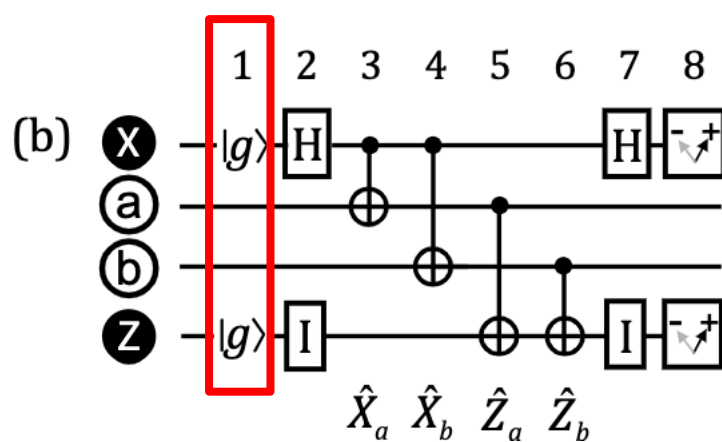
この量子回路 (b) とその模式図 (a)

a, b を
data qubit
という



X, Z を
measure qubit
という





Step 1

状態 $|\psi_1\rangle$

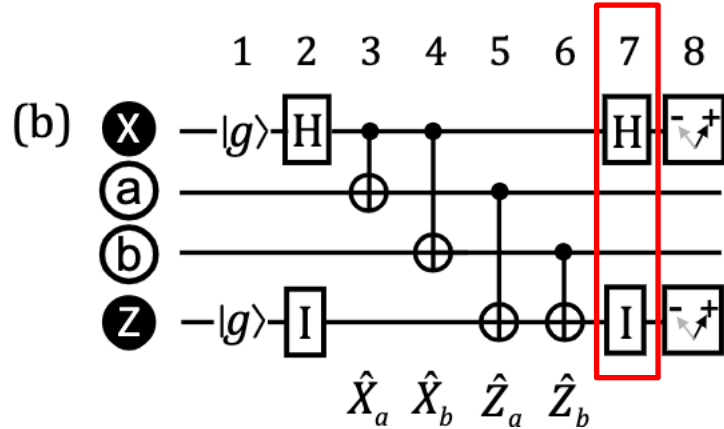
$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes |\psi_a\psi_b\rangle \otimes |0\rangle$$

2-qubit システムの状態 $|\psi_a\psi_b\rangle$ は一般に

$$|\psi_a\psi_b\rangle = A|00\rangle + B|01\rangle + C|10\rangle + D|11\rangle \text{ と表せる}$$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes (A|00\rangle + B|01\rangle + C|10\rangle + D|11\rangle) \otimes |0\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = A|0000\rangle + B|0010\rangle + C|0100\rangle + D|0110\rangle$$



Step 7

状態 $|\psi_7\rangle$

measure-X qubitは、アダマールHゲートの作用を受け、次のように変化する。

$$|0\rangle \rightarrow |+\rangle = |0\rangle + |1\rangle \text{ また、 } |1\rangle \rightarrow |-\rangle = |0\rangle - |1\rangle$$

Iゲートは、measure-Z qubitの状態を変えない。

$$|\psi_6\rangle =$$

$$\begin{aligned} & A|0000\rangle + A|1110\rangle \\ & + B|0011\rangle + B|1101\rangle \\ & + C|0101\rangle + C|1011\rangle \\ & + D|0110\rangle + D|1000\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |+\rangle &= |0\rangle + |1\rangle \\ |-\rangle &= |0\rangle - |1\rangle \end{aligned}$$

$$H|0\rangle = |+\rangle$$

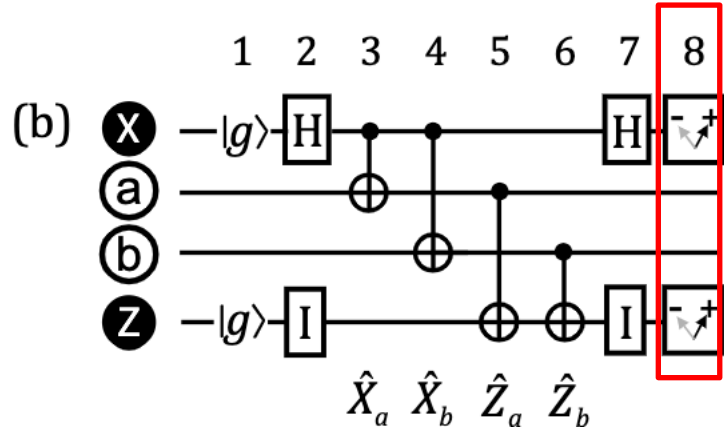
$$H|1\rangle = |-\rangle$$

$$|\psi_7\rangle =$$

$$\begin{aligned} & A|+000\rangle + A| -110\rangle \\ & + B|+011\rangle + B| -010\rangle \\ & + C|+101\rangle + C| -011\rangle \\ & + D|+110\rangle + D| -000\rangle \end{aligned}$$

$A 0000\rangle$	$+A 1000\rangle$
$A 0110\rangle$	$-A 1110\rangle$
$D 0110\rangle$	$+D 1110\rangle$
$D 0000\rangle$	$-D 1000\rangle$

$$\begin{aligned} &= (A + D)|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes |0\rangle \\ &+ (A - D)|1\rangle \otimes (|00\rangle - |11\rangle) \otimes |0\rangle \\ &+ (B + C)|0\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle) \otimes |1\rangle \\ &+ (B - C)|1\rangle \otimes (|01\rangle - |10\rangle) \otimes |1\rangle \end{aligned}$$



第一レジスタ

第二・第三レジスタ

第四レジスタ

Step 8

観測

$$\begin{aligned}
 & |\psi_7\rangle = \\
 & = (A + D) |0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes |0\rangle \\
 & + (A - D) |1\rangle \otimes (|00\rangle - |11\rangle) \otimes |0\rangle \\
 & + (B + C) |0\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle) \otimes |1\rangle \\
 & + (B - C) |1\rangle \otimes (|01\rangle - |10\rangle) \otimes |1\rangle
 \end{aligned}$$

第一レジスタ

第二・第三レジスタ

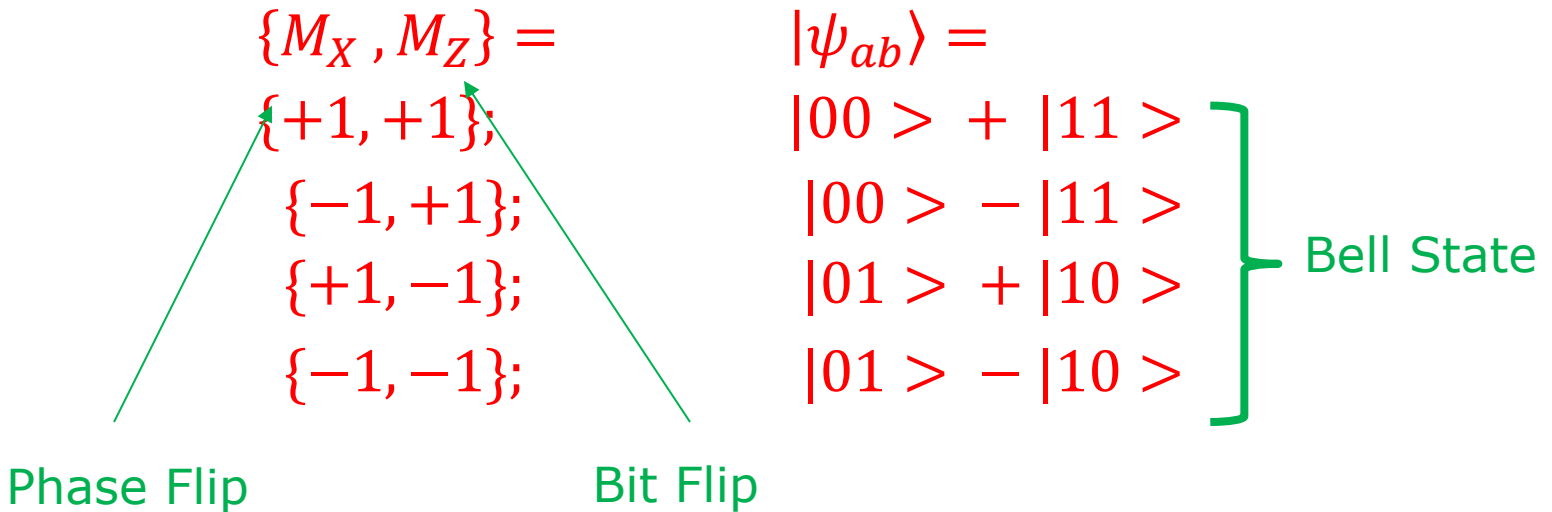
第四レジスタ

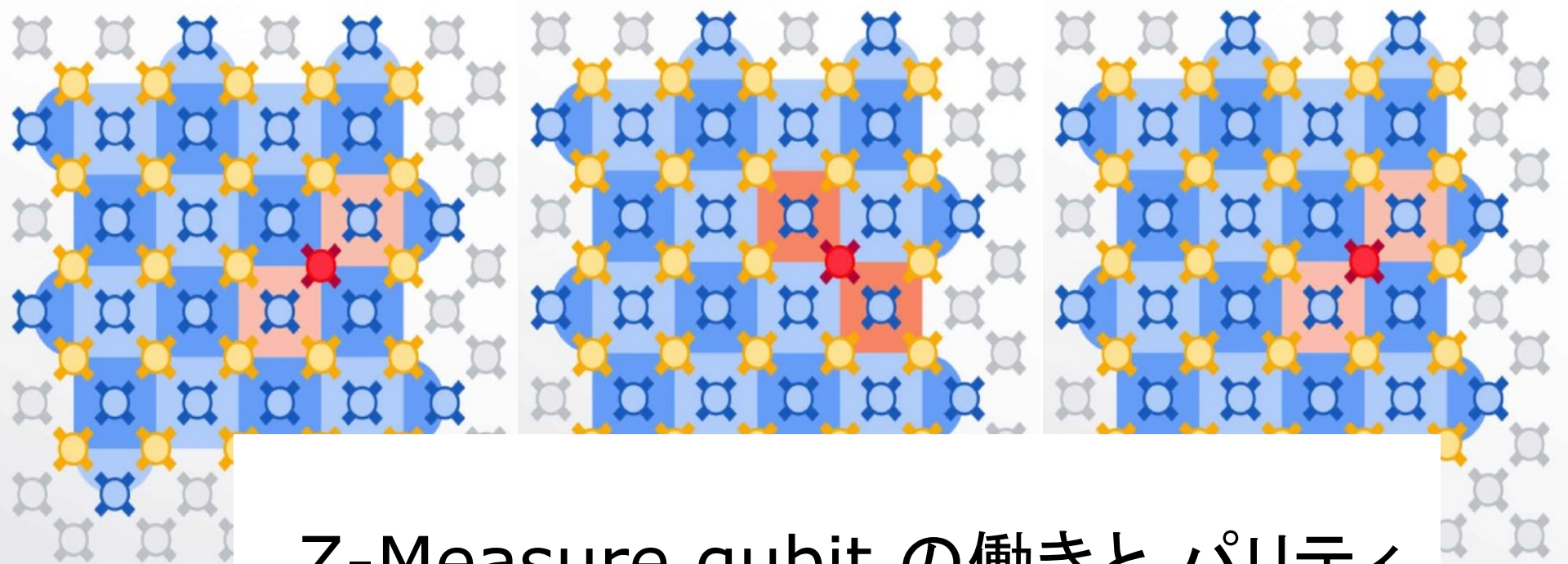
この状態は、エンタングルしたBell State である！

$X|+\rangle = |+\rangle$ 、 $X|-\rangle = -|-\rangle$ 、
 $Z|0\rangle = |0\rangle$ 、 $Z|1\rangle = -|1\rangle$ から、
 X, Z は固有値 $+1$ と -1 を持つことがわかる。

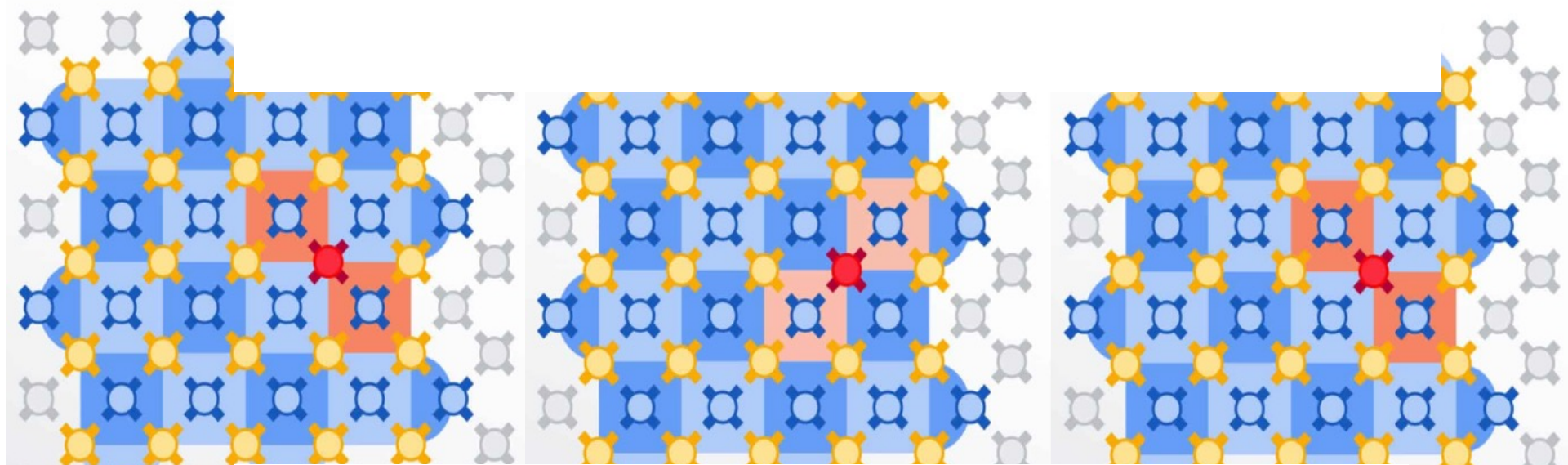
第一レジスタ measure-X qubitの $|0\rangle, |1\rangle$ の観測 M_x も
 第四レジスタ measure-Z qubitの $|0\rangle, |1\rangle$ の観測 M_z も、
 固有値 $+1, -1$ を観測値として得る。

この時、システムの固有状態 $|\psi_{ab}\rangle$ は、次のようになる。



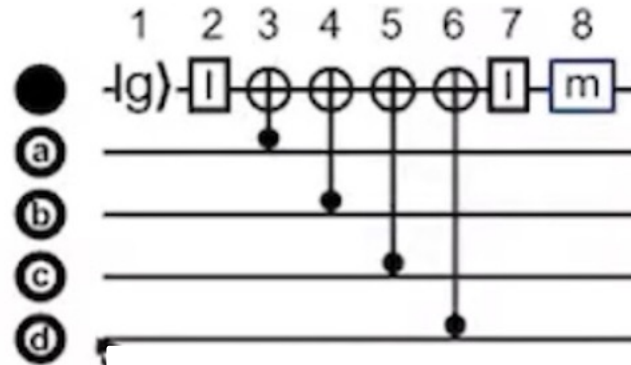


Z-Measure qubit の働きと パリティ

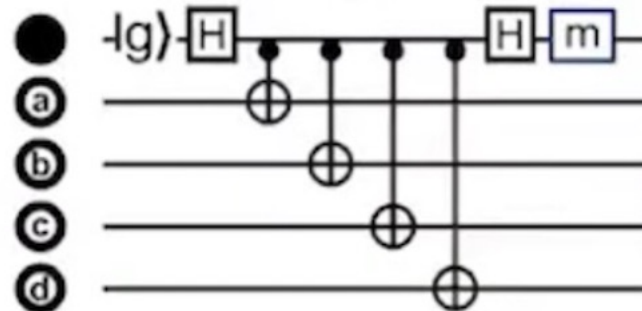


あらためて、次の二つの Measure Qubitの出力を考える

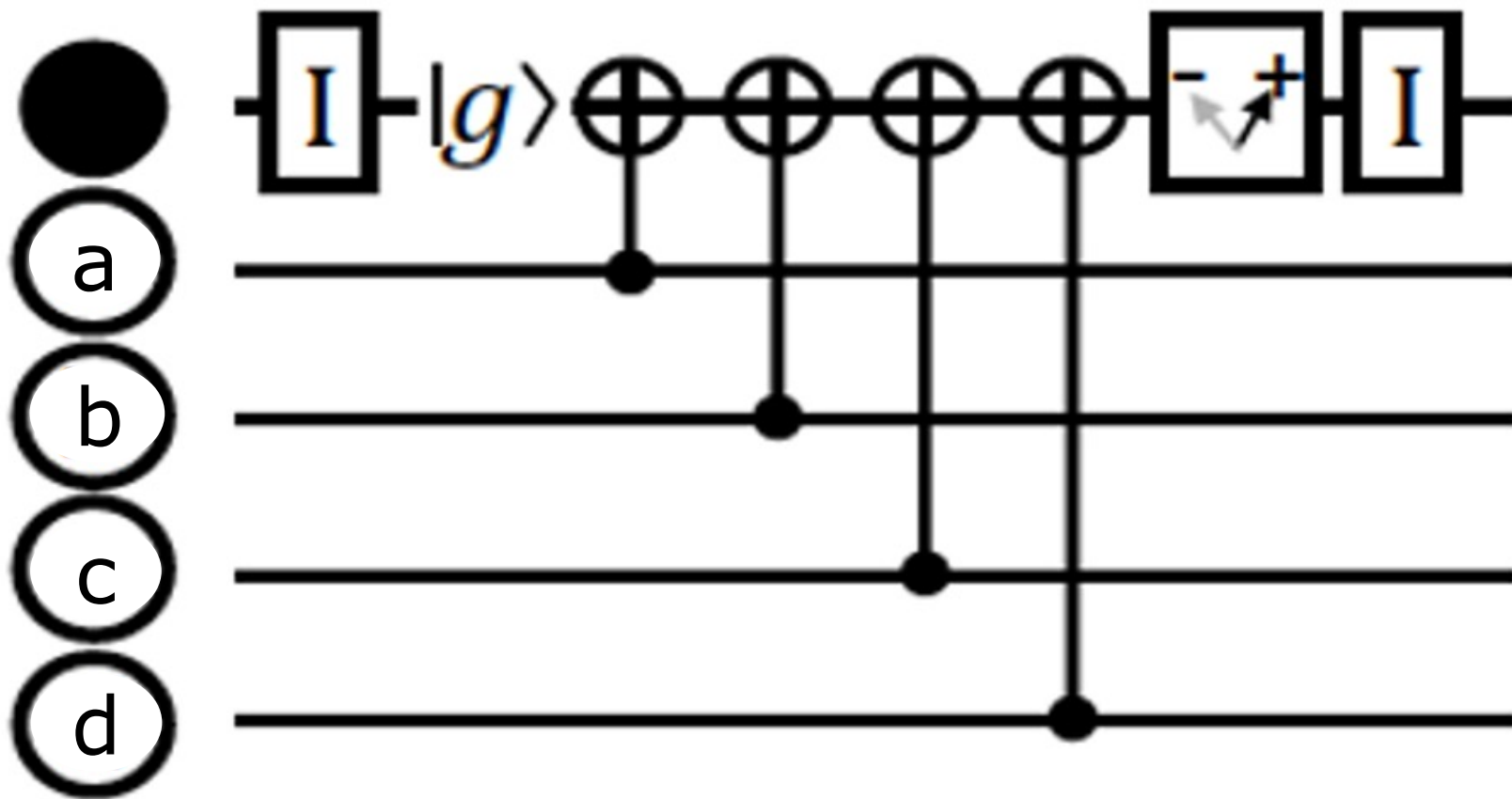
Z-Measure qubit



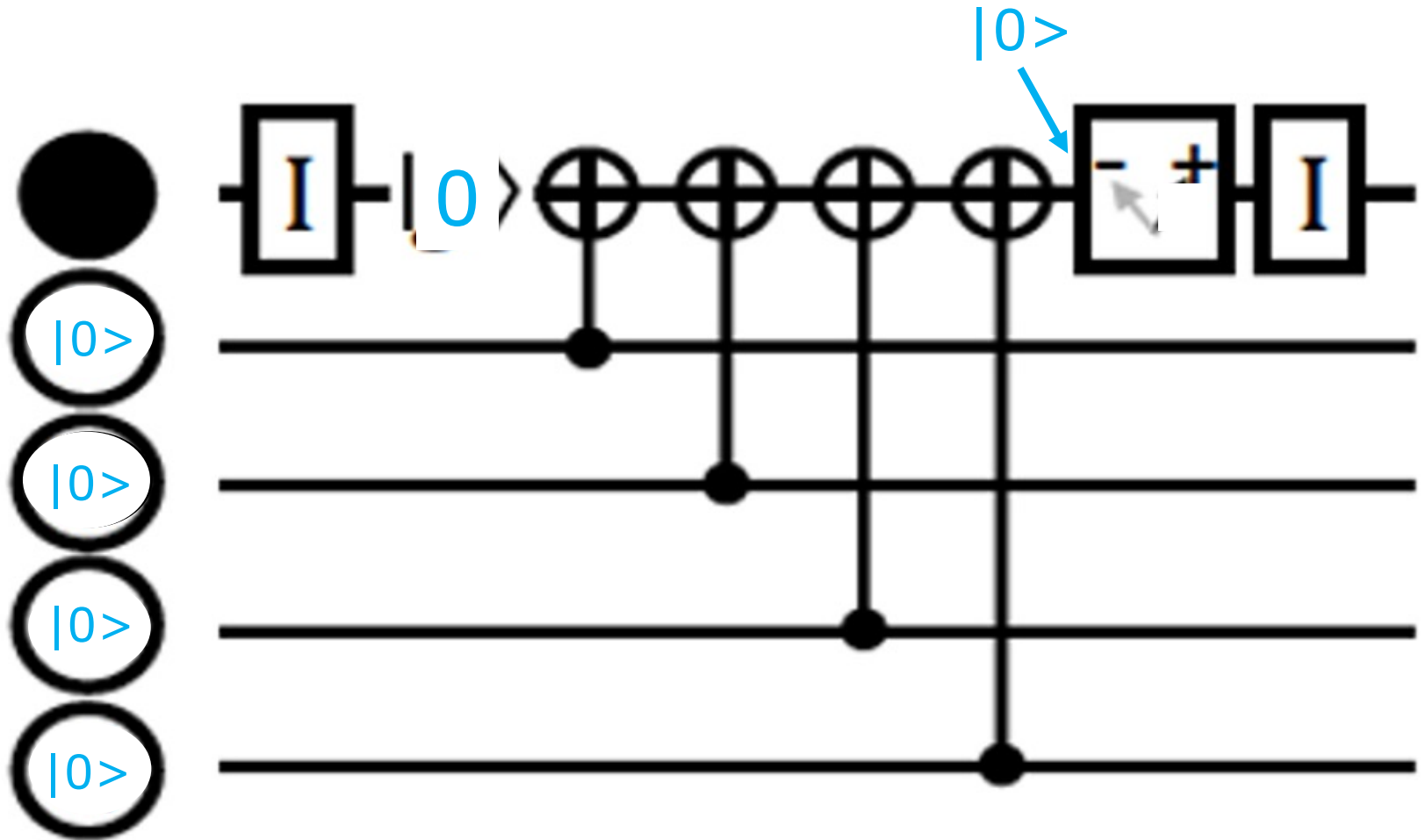
X-Measure qubit



Hadamardを含む X-measure qubit 回路は
少し複雑なので、Z-Measure qubit 回路から考える

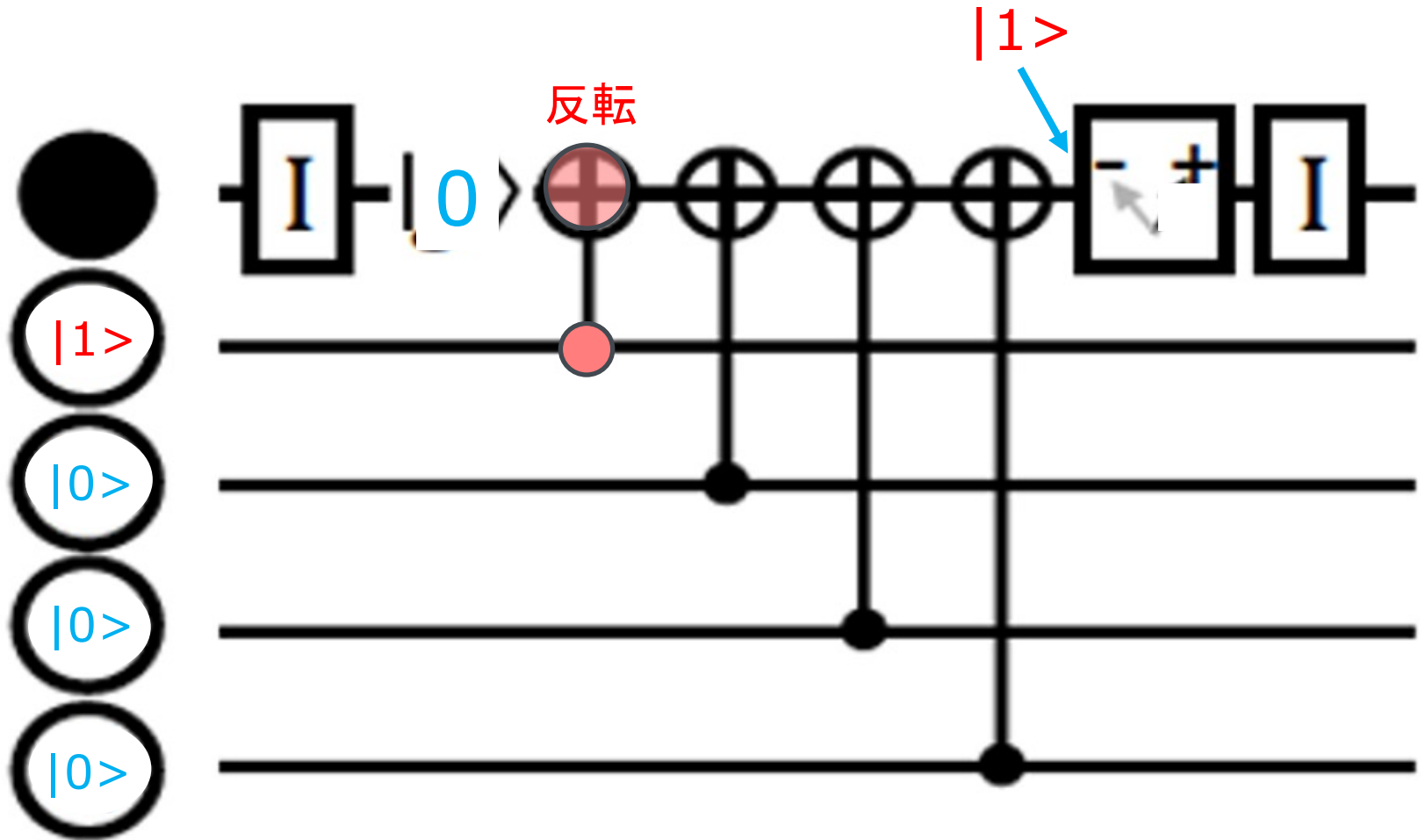


$|g\rangle = |0\rangle$ である。
 a, b, c, d 全てが $|0\rangle$ の場合。



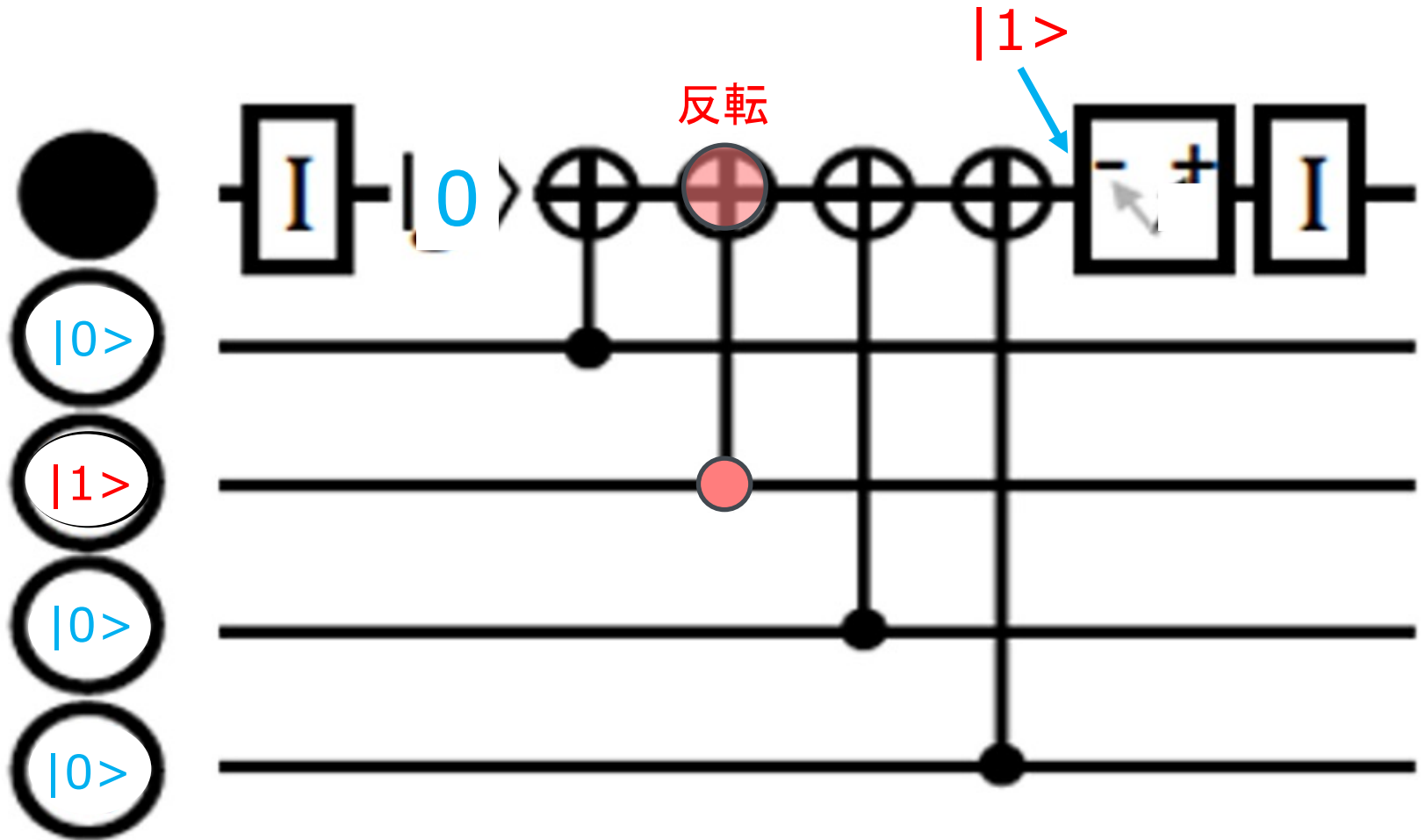
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d のうち一つだけが $|1\rangle$ で
 残り三つが $|0\rangle$ の場合



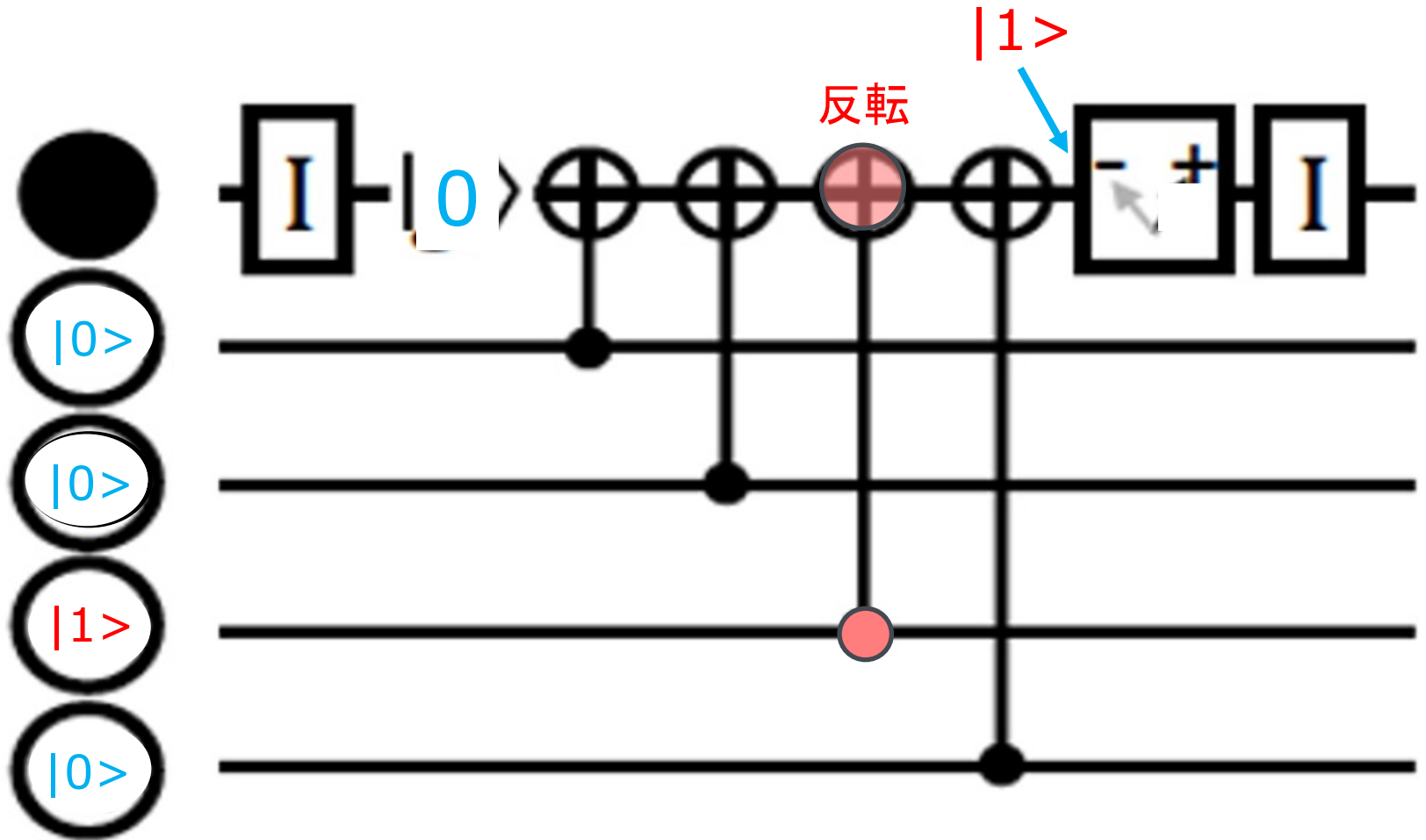
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d のうち一つだけが $|1\rangle$ で
 残り三つが $|0\rangle$ の場合



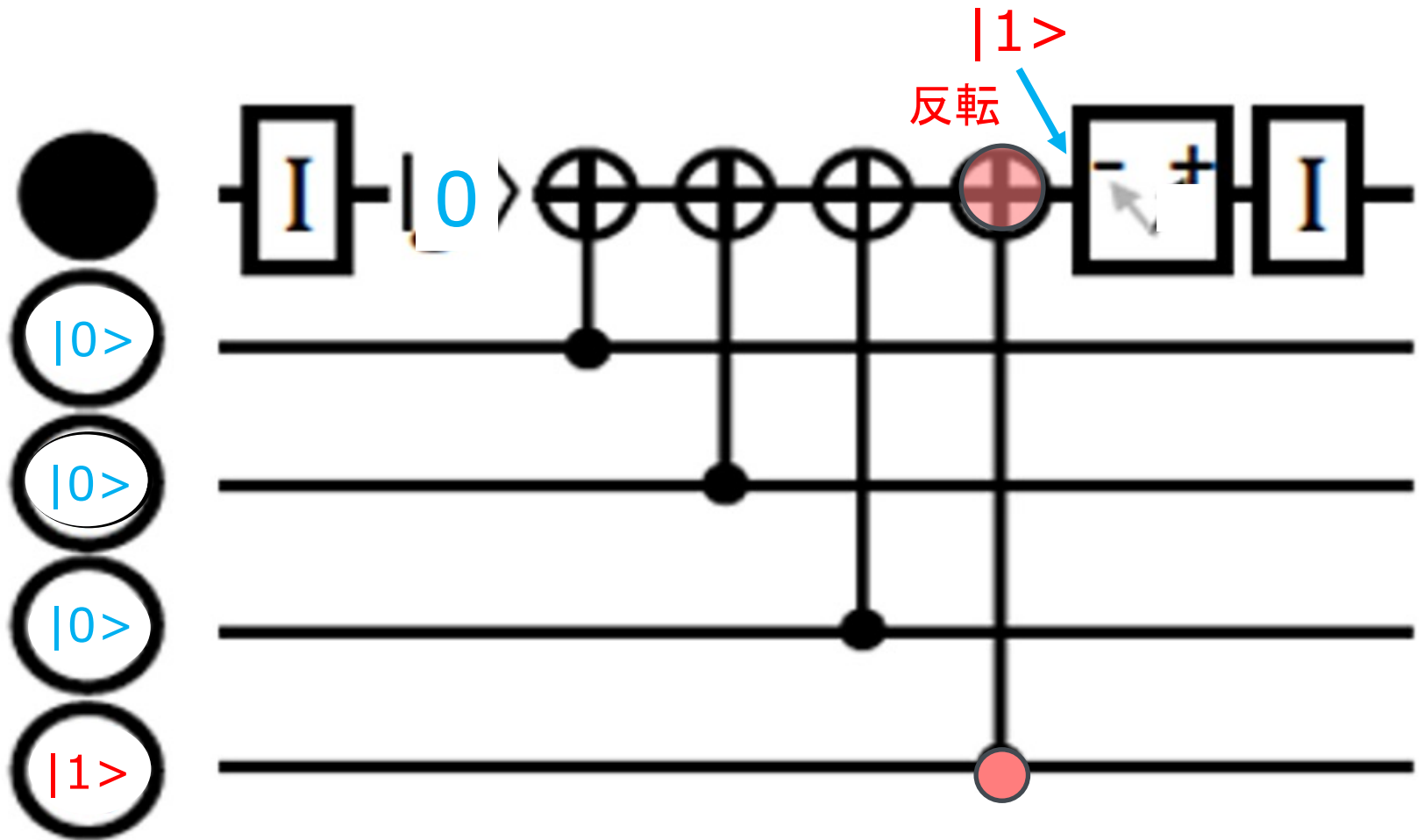
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d のうち一つだけが $|1\rangle$ で
 残り三つが $|0\rangle$ の場合



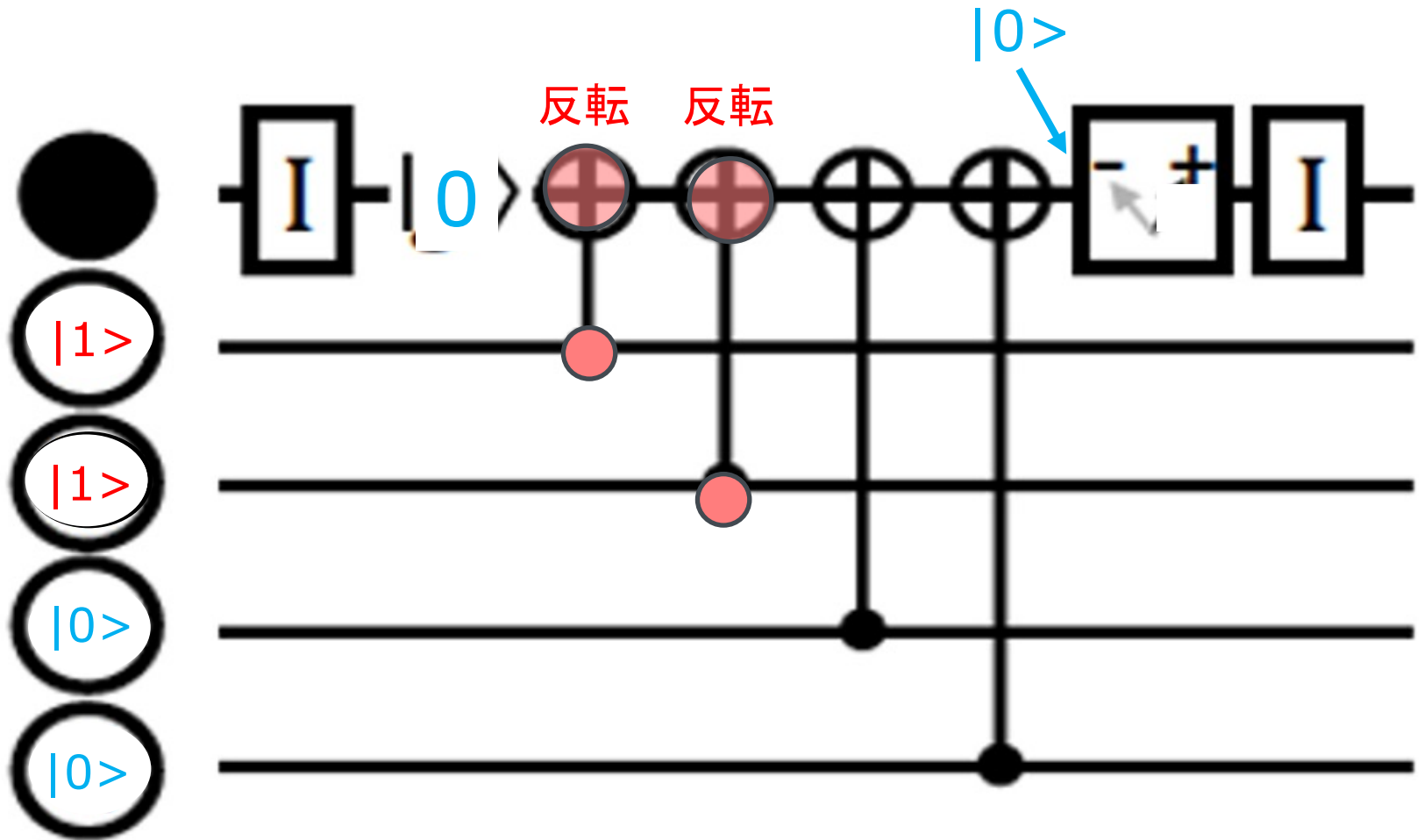
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d のうち一つだけが $|1\rangle$ で
 残り三つが $|0\rangle$ の場合



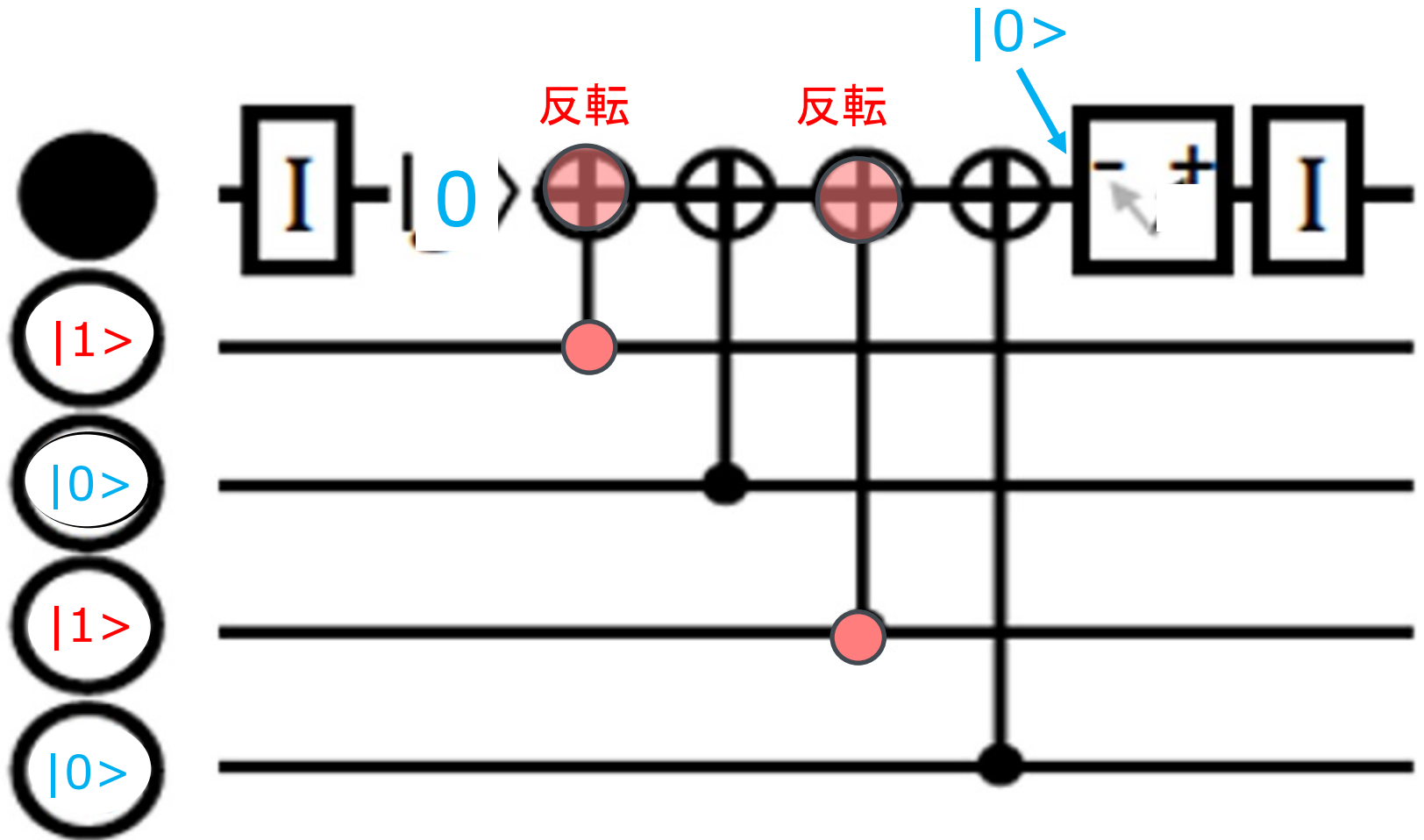
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d のうち二つが $|1\rangle$ で
 残り二つが $|0\rangle$ の場合



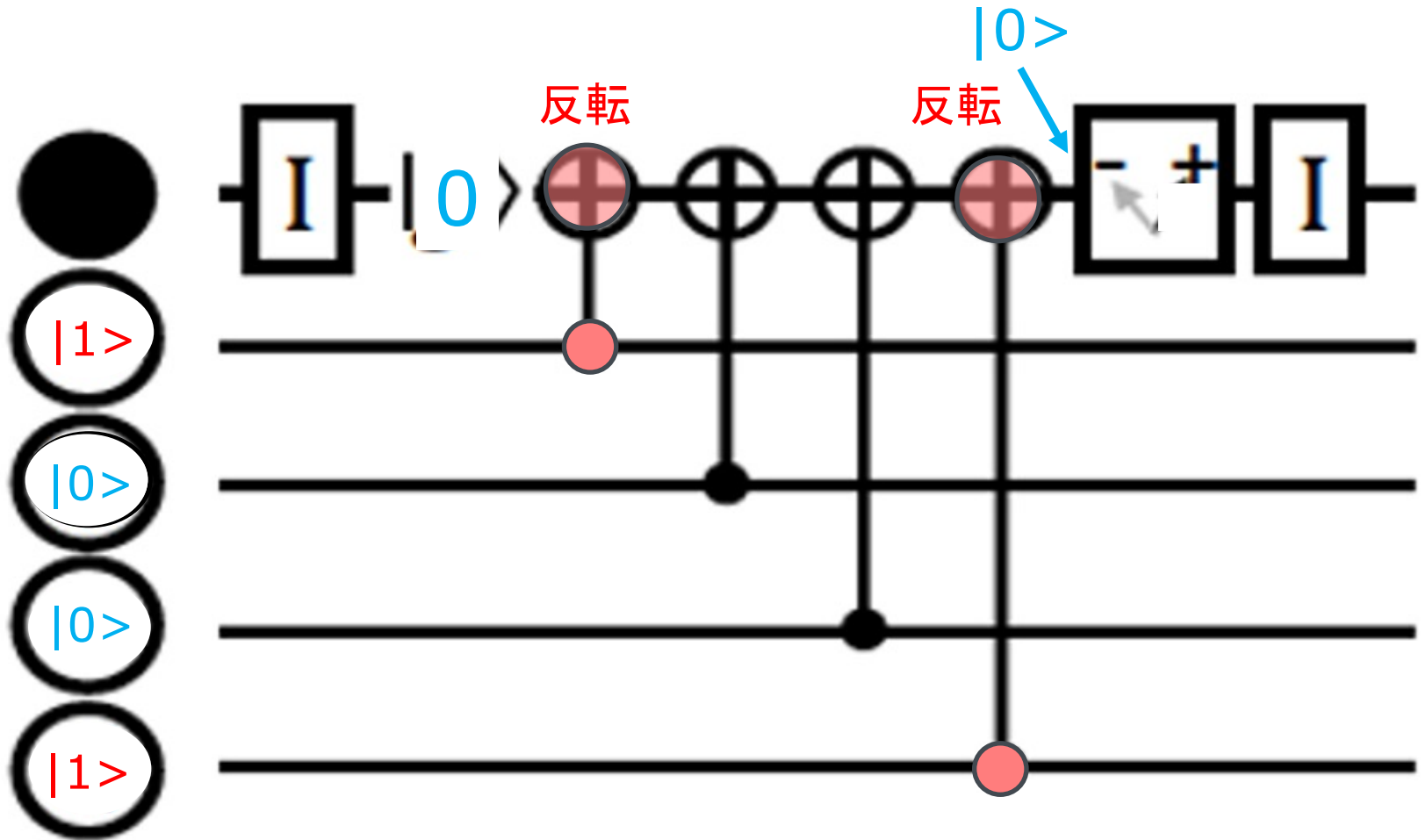
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a, b, c, d のうち二つが $|1\rangle$ で
残り二つが $|0\rangle$ の場合



$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a, b, c, d のうち二つが $|1\rangle$ で
残り二つが $|0\rangle$ の場合



$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |abcd\rangle$$

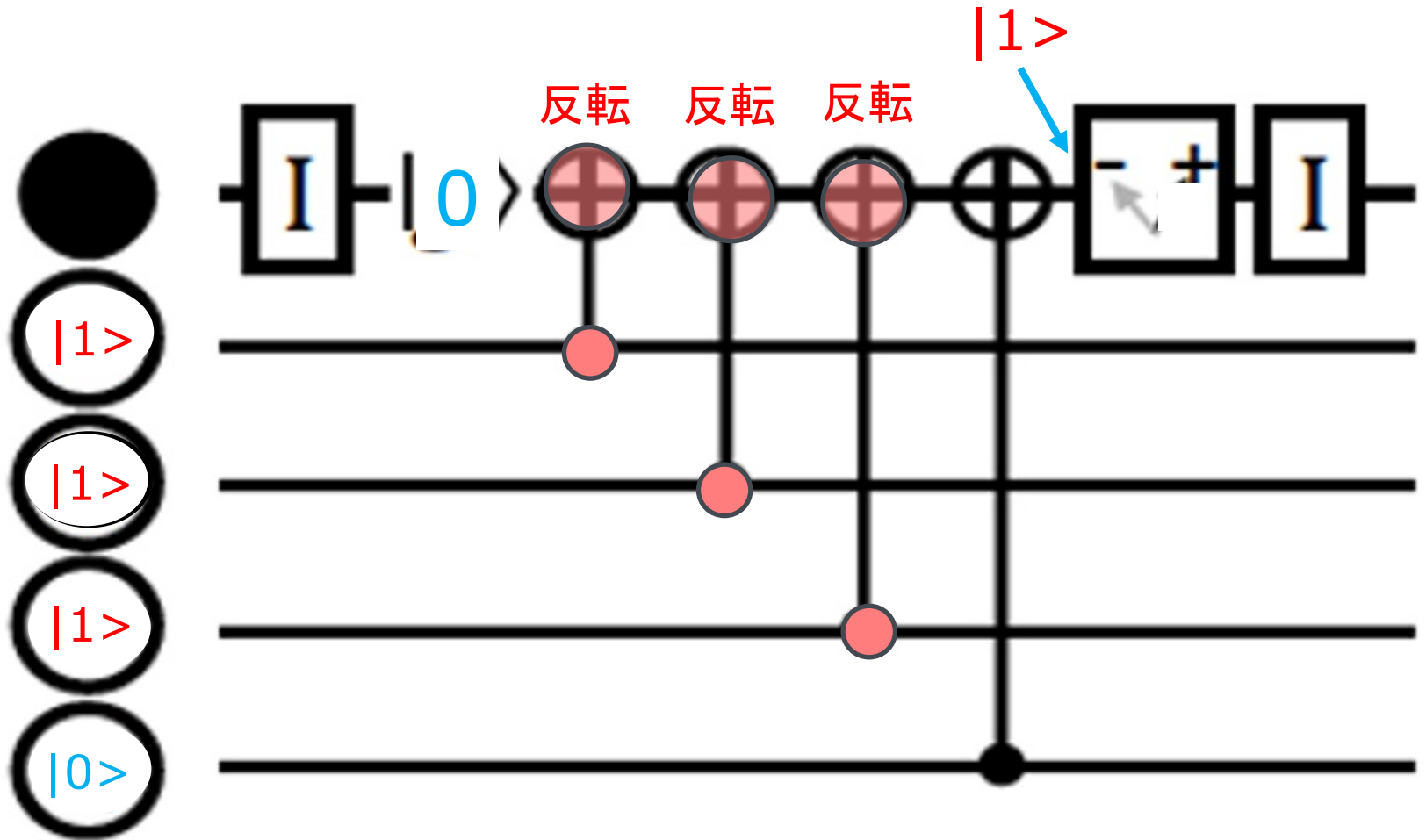
a,b,c,d のうち二つが $|1\rangle$ で
残り二つが $|0\rangle$ の場合

先に見た例の他にも、a,b,c,d の状態が $|0110\rangle$, $|0101\rangle$,
 $|0011\rangle$ の場合がある。

いずれの場合も、二つの C-NOT で状態が反転し、最終的には、
第一レジスタの元の入力 $|0\rangle$ は同じ $|0\rangle$ を返す。

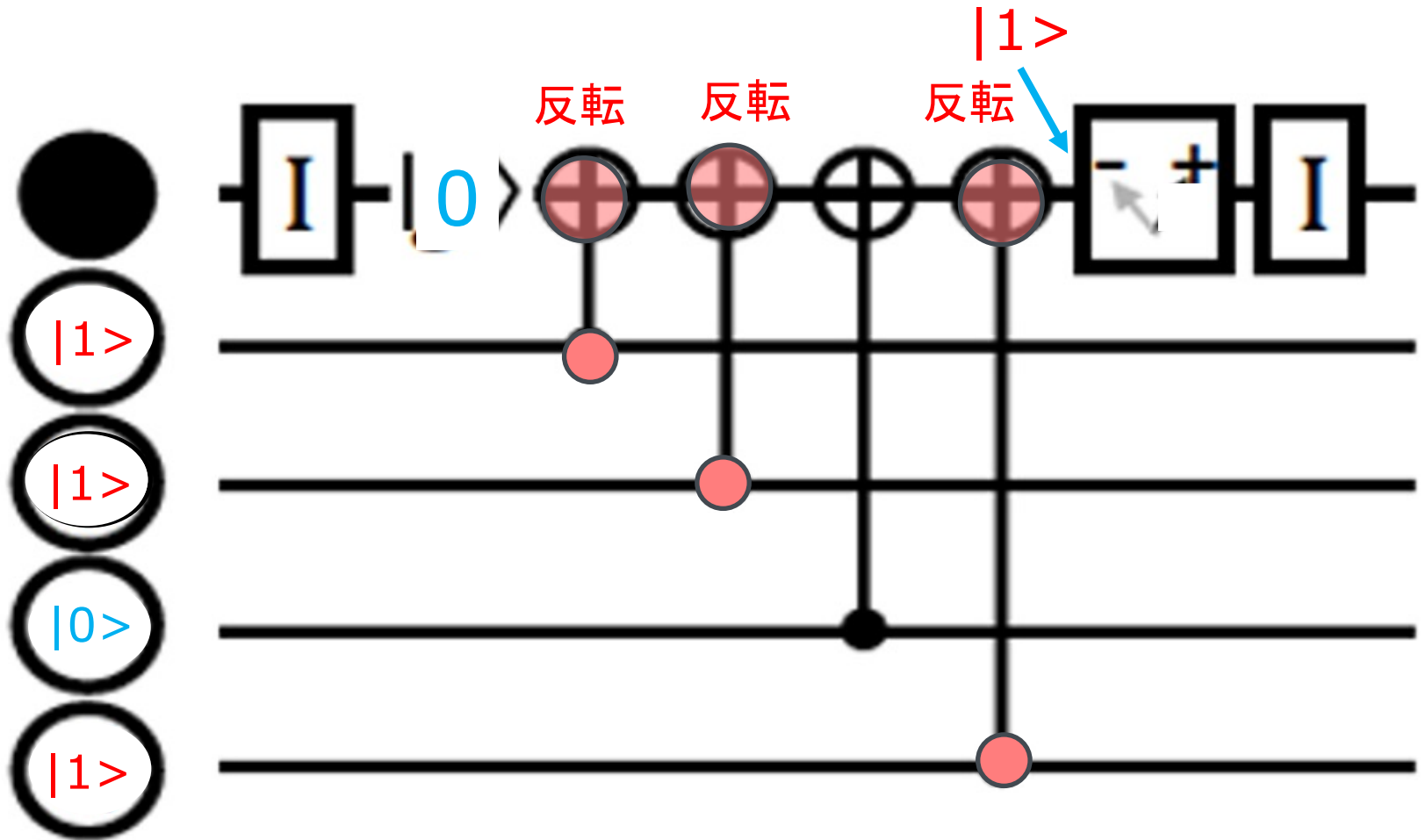
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \longrightarrow |0\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d のうち三つが $|1\rangle$ で
残りが一つが $|0\rangle$ の場合



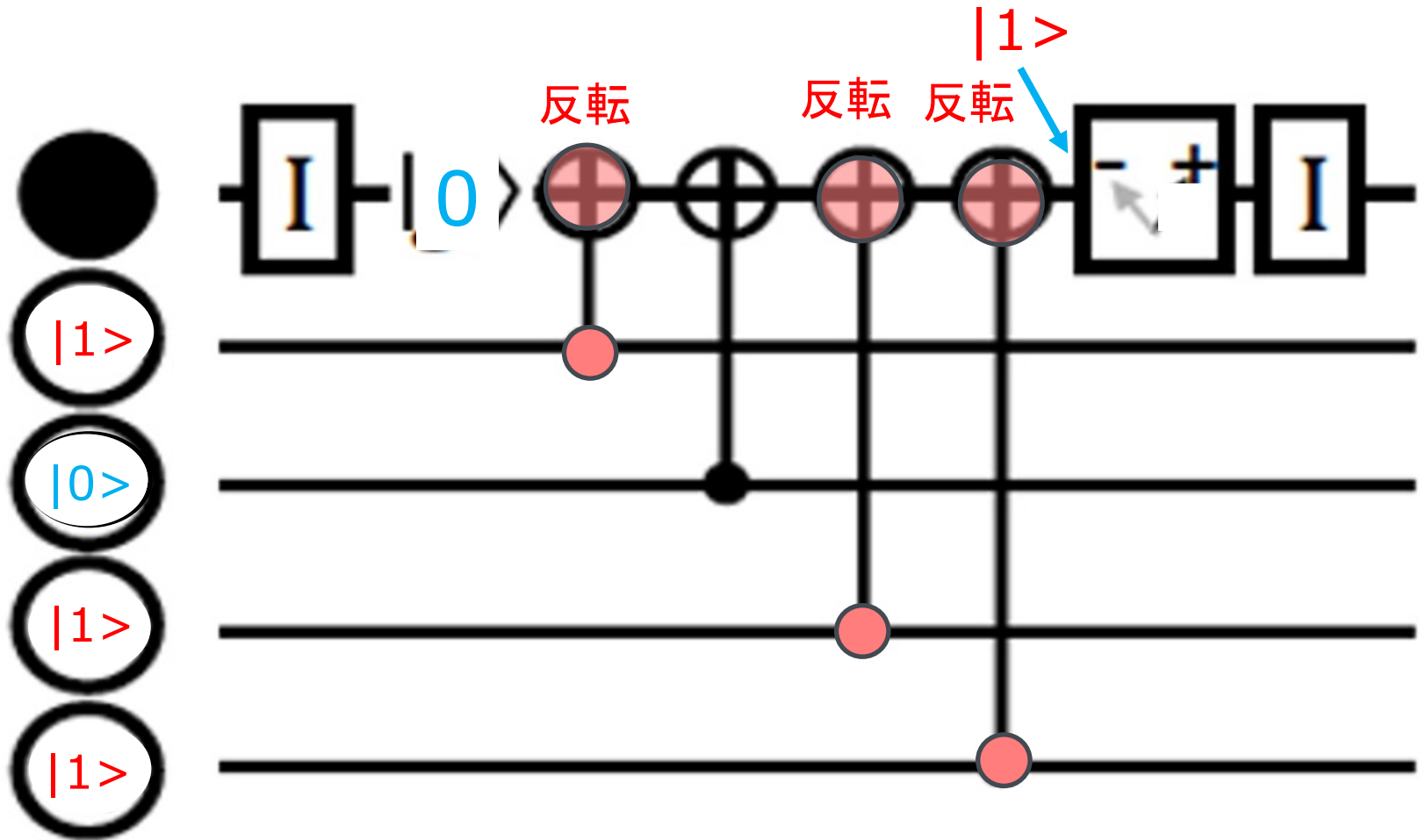
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a, b, c, d のうち三つが $|1\rangle$ で
残りが一つが $|0\rangle$ の場合



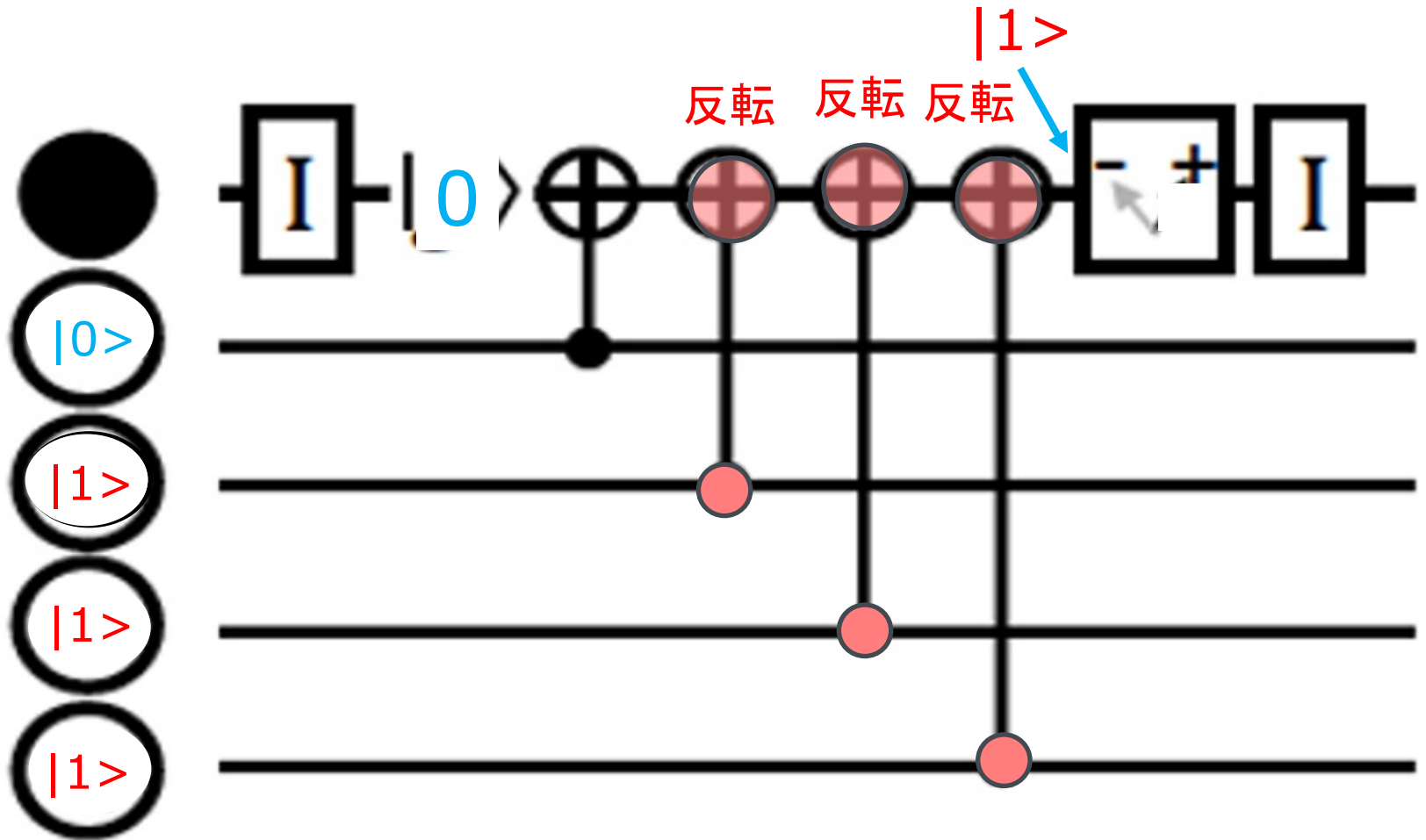
$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a, b, c, d のうち三つが $|1\rangle$ で
残りが一つが $|0\rangle$ の場合



$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \xrightarrow{\text{green arrow}} |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

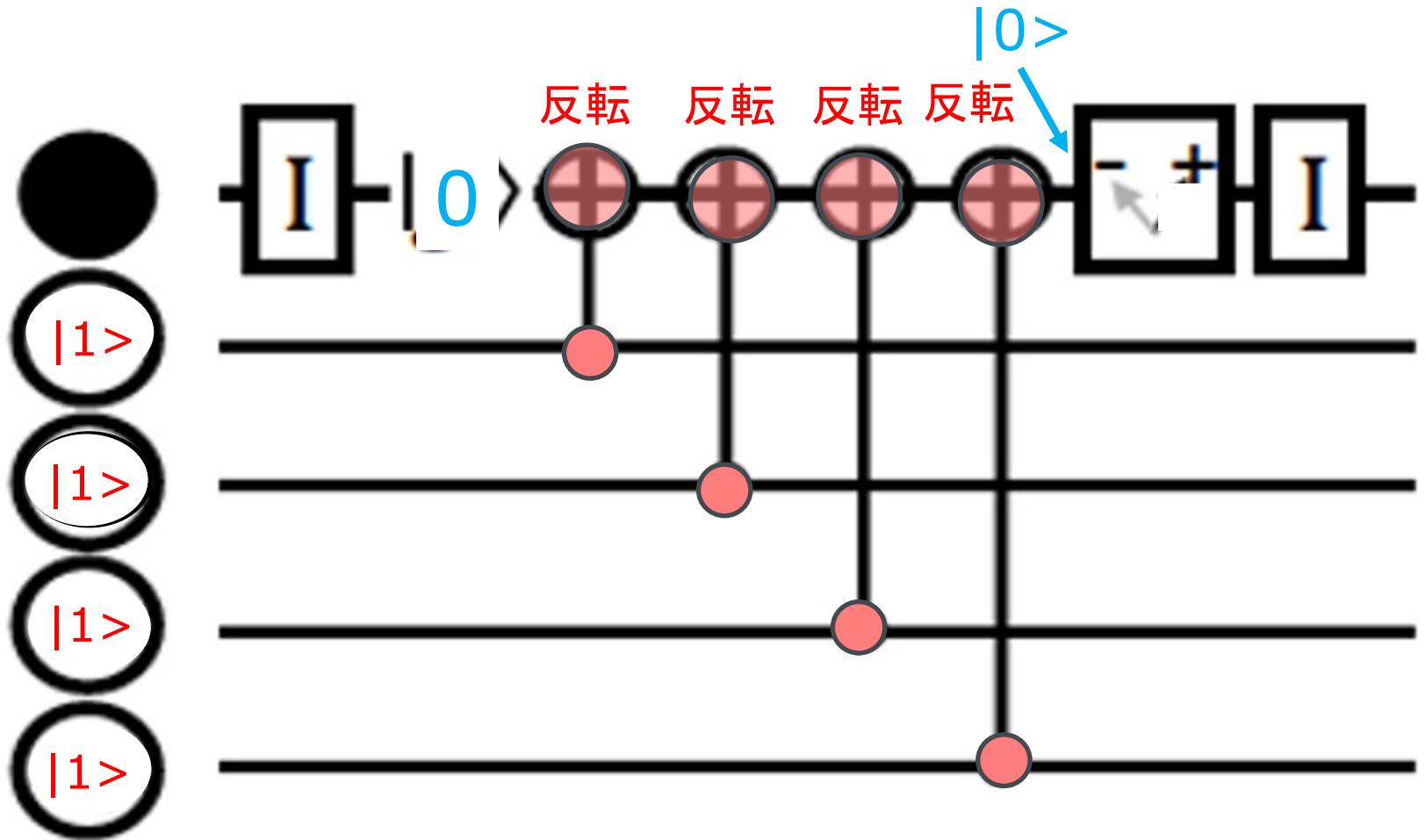
a, b, c, d のうち三つが $|1\rangle$ で
残りが一つが $|0\rangle$ の場合



$$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |abcd\rangle$$

a,b,c,d 全てが $|1\rangle$ の場合

。



$|0\rangle \otimes |abcd\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |abcd\rangle$

第一レジスター への出力

Z-measure qubitは、4つのdata qubit a, b, c, d の状態をチェックしている。Z-measure qubit が一つの観測サイクルで最終的に観測する値は、回路の第一レジスターに出力される。(サイクルについては後で述べる)

第一レジスターには、 a, b, c, d の値でコントロールさせる、値を反転させるされる回路上のC-Notが何回呼び出されるかに応じて $|0\rangle$ または $|1\rangle$ が現れる。

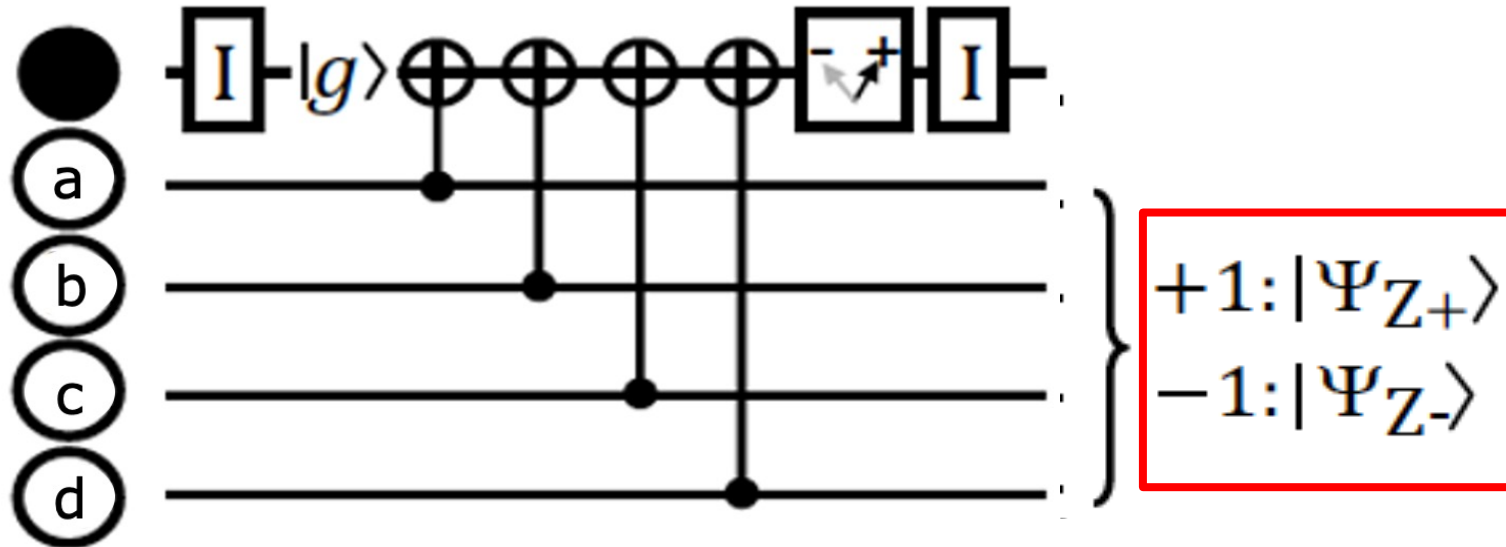
Z-measure qubitの第一レジスターは、 $|0\rangle$ で初期化されているので、C-Notが偶数回呼び出されれば $|0\rangle$ が、奇数回呼び出されれば $|1\rangle$ が出力されることになる。

先の例で見たように、 a, b, c, d が $|0\rangle$ または $|1\rangle$ のいずれかの値を取るとすれば、 $|0\rangle$ を0とし $|1\rangle$ を1とした、 a', b', c', d' を合わせたもののパリティ(偶奇)を計算すれば、第一レジスタの出力が $|0\rangle$ になるか $|1\rangle$ になるかは、簡単にわかる。

パリティが0(+)の時、第一レジスタには $|0\rangle$ が出力され、その固有値+1が観測される。

パリティが1(-)の時、第一レジスタには $|1\rangle$ が出力され、その固有値-1が観測される。

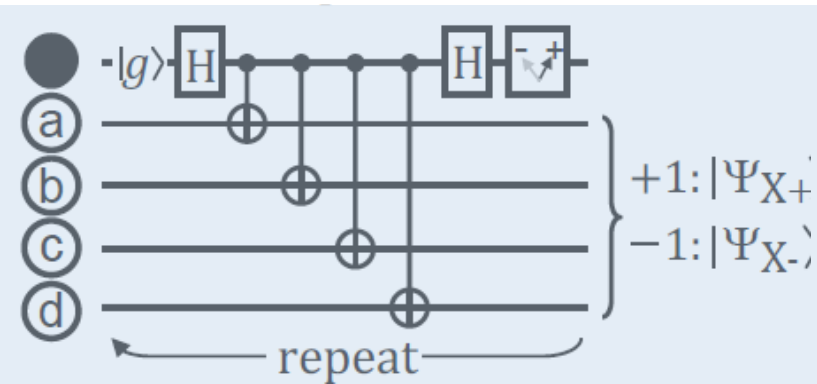
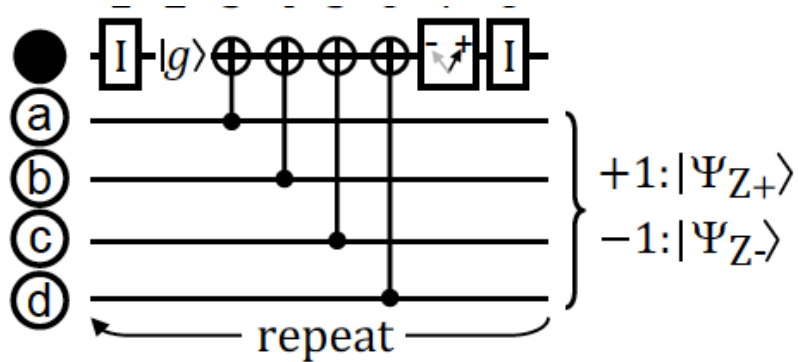
これは、どういう意味だろうか？



$|\Psi_{Z+}\rangle$ は、 a, b, c, d のパリティが 0 となる状態 $|abcd\rangle$ を表し、
 $|\Psi_{Z-}\rangle$ は、 a, b, c, d のパリティが 1 となる状態 $|abcd\rangle$ を表す。

$|abcd\rangle \in |\Psi_{Z+}\rangle$ の時、観測値は +1,
 $|abcd\rangle \in |\Psi_{Z-}\rangle$ の時、観測値は -1 となる。

これは、どういう意味だろうか？



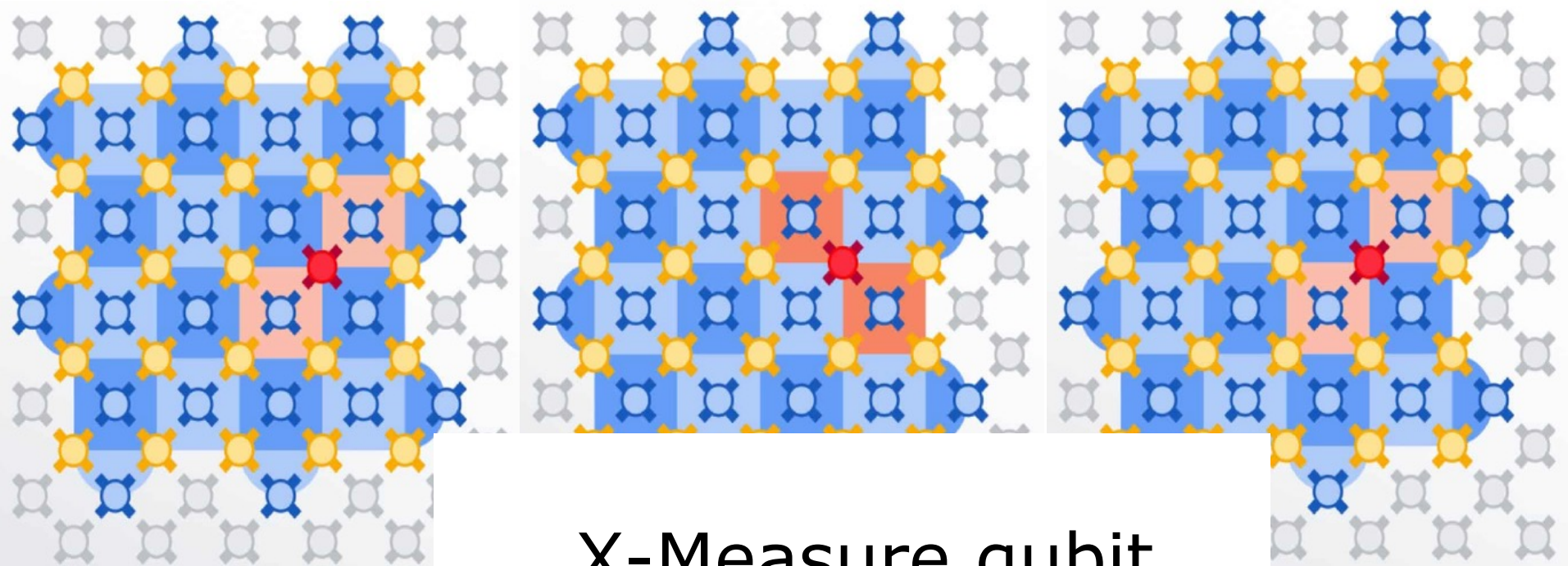
Eigenvalue	$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$	$\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$
+1	$ gggg\rangle$	$ ++++\rangle$
	$ ggee\rangle$	$ ++--\rangle$
	$ geeg\rangle$	$ +- -+\rangle$
	$ eegg\rangle$	$ - - ++\rangle$
	$ egge\rangle$	$ - + + -\rangle$
	$ gege\rangle$	$ + - + -\rangle$
	$ egeg\rangle$	$ - + - +\rangle$
	$ eeee\rangle$	$ - - - -\rangle$
-1	$ ggge\rangle$	$ +++ -\rangle$
	$ ggeg\rangle$	$ ++ - +\rangle$
	$ gegg\rangle$	$ + - ++\rangle$
	$ eggg\rangle$	$ - + ++\rangle$
	$ geee\rangle$	$ + - - -\rangle$
	$ egee\rangle$	$ - + - -\rangle$
	$ eege\rangle$	$ - - + -\rangle$
	$ eeeg\rangle$	$ - - - +\rangle$

先のテーブルが表していること

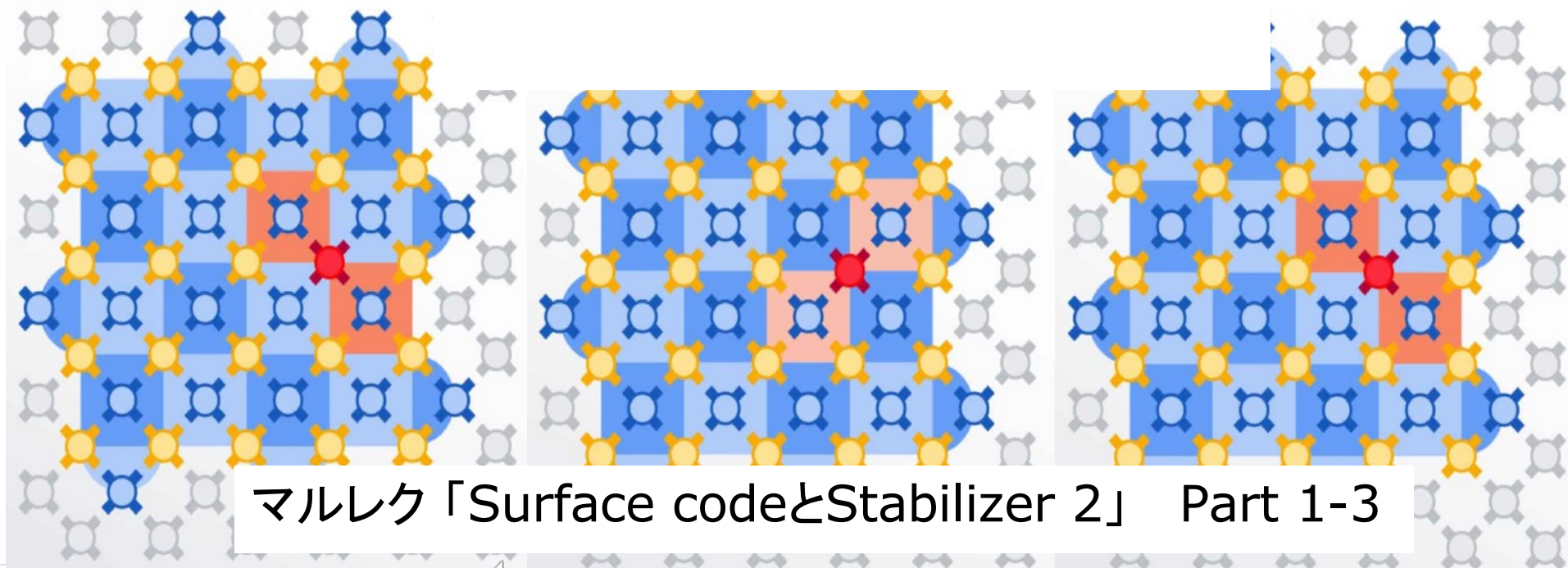
先のテーブルの $Z_a Z_b Z_c Z_d$ の列の各行は、Stablizer $Z_a Z_b Z_c Z_d$ の固有ベクトルを表している。

g を0、 e を1と読み替えると、列の上半分のパリティは0, 下半分のパリティは1であることがわかる。

上半分の固有ベクトルの固有値すなわち観測値は、+1であり、下半分の固有ベクトルの固有値すなわち観測値は、-1である。



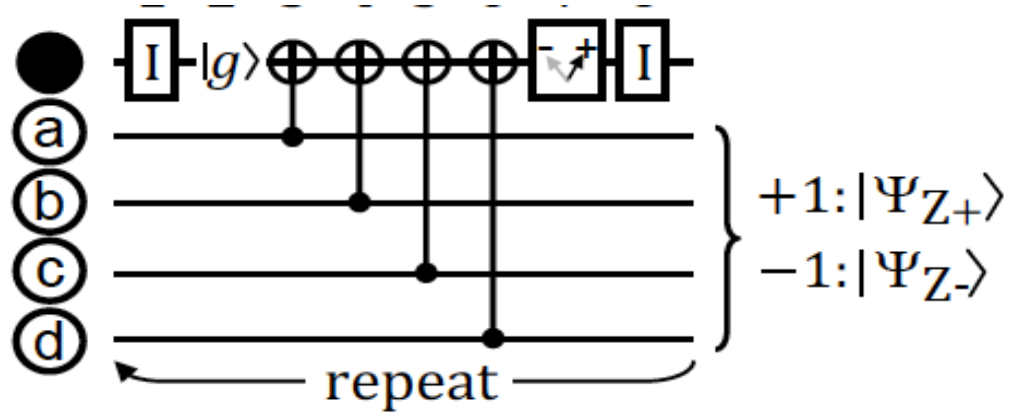
X-Measure qubit



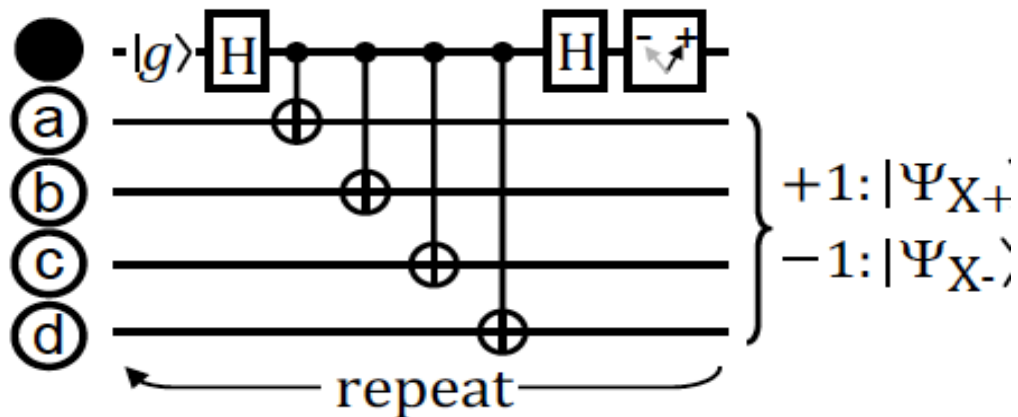
マルレク「Surface codeとStabilizer 2」 Part 1-3

二つのMeasure qubit

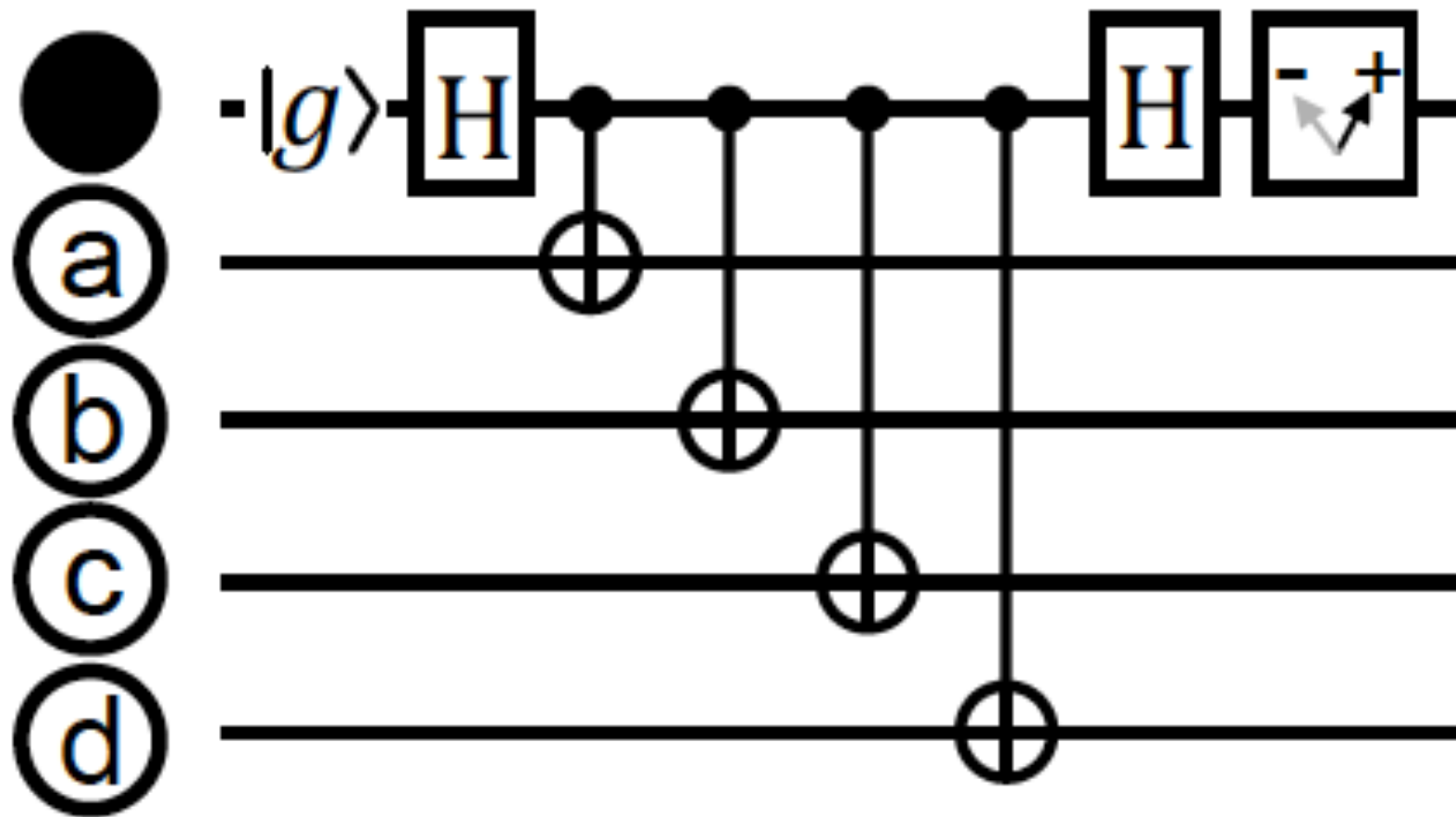
Z-Measure qubit



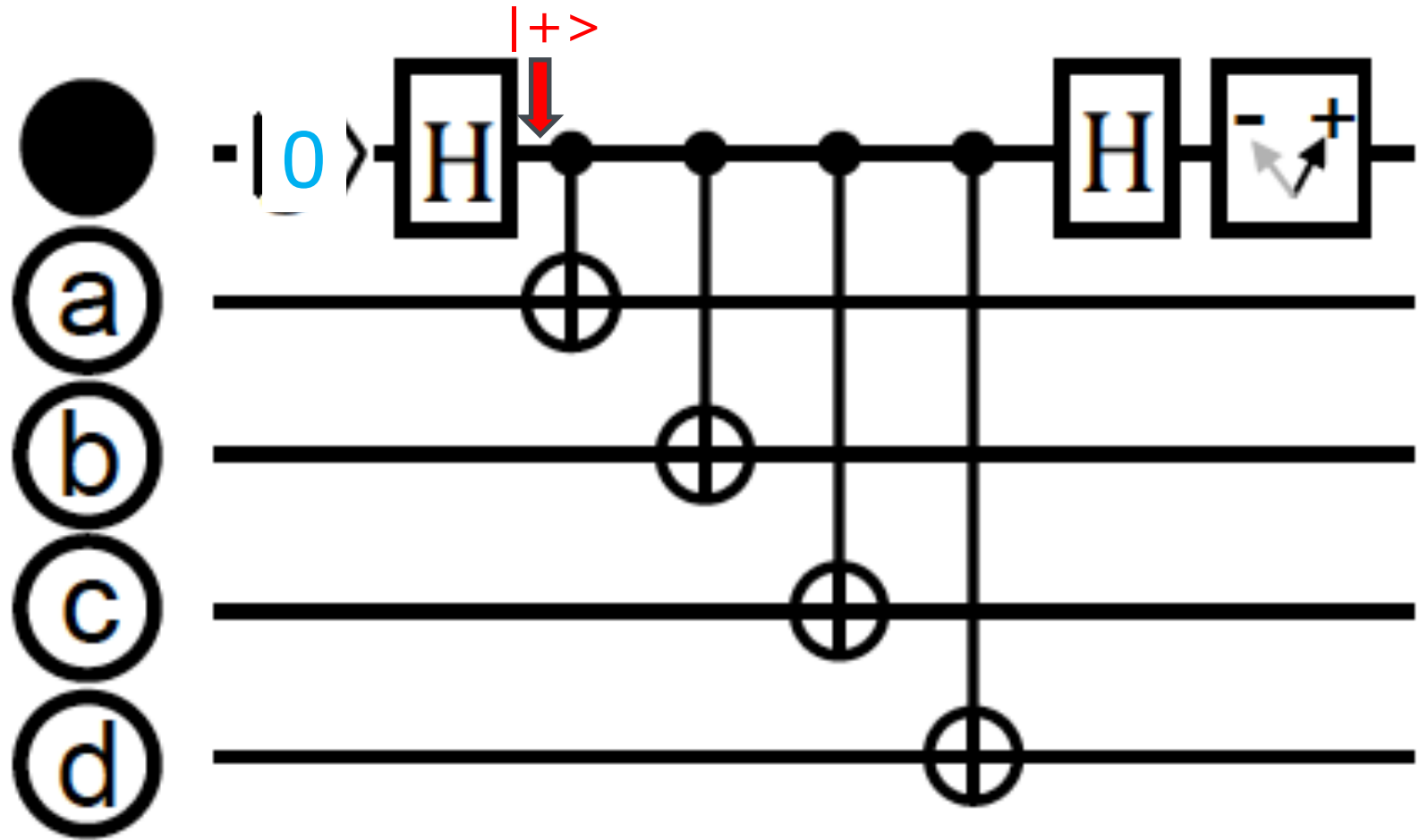
X-Measure qubit



X-Measure qubit 回路

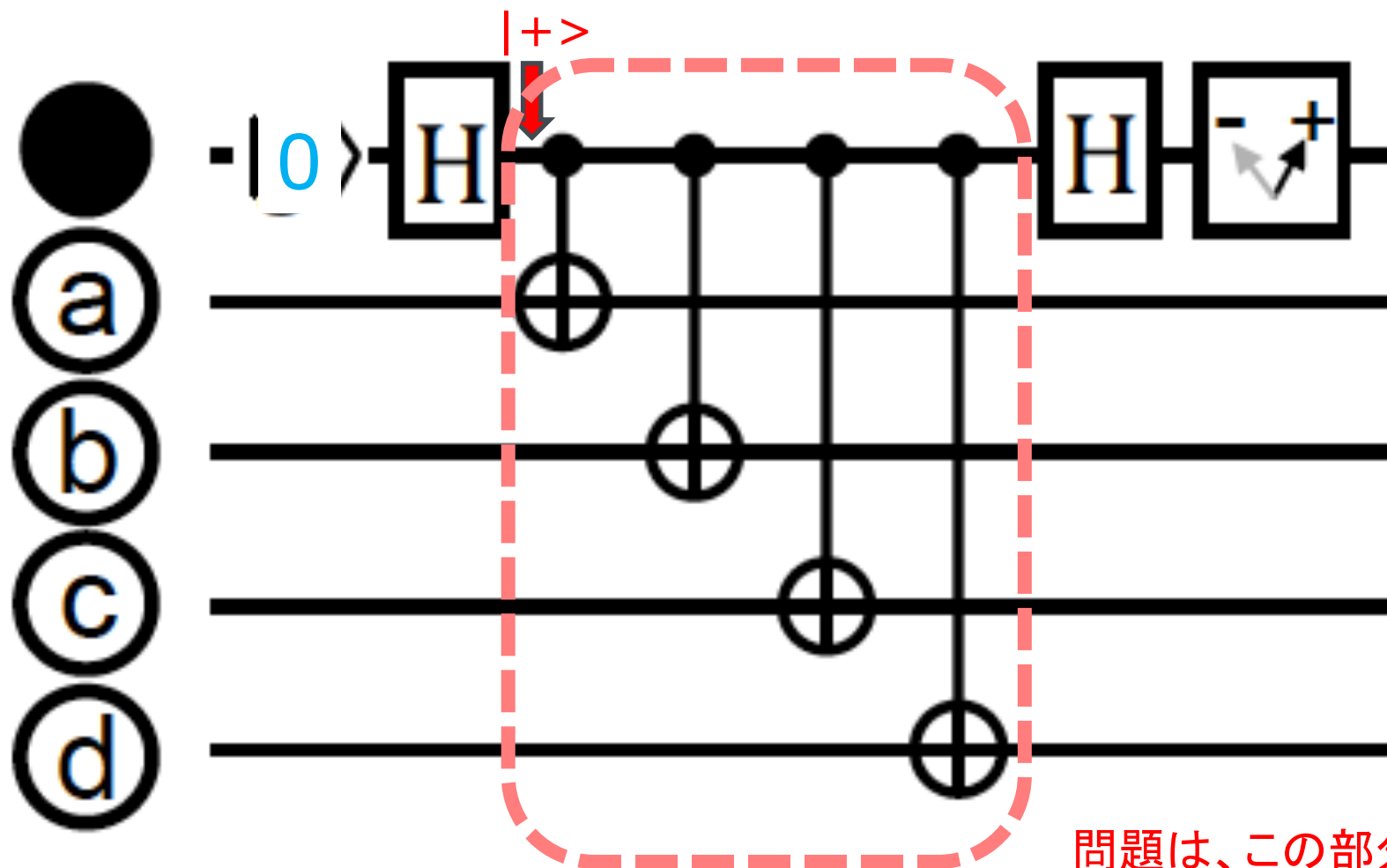


X-Measure qubit 回路
 $|g\rangle = |0\rangle$ で、 $H|0\rangle = |+\rangle$



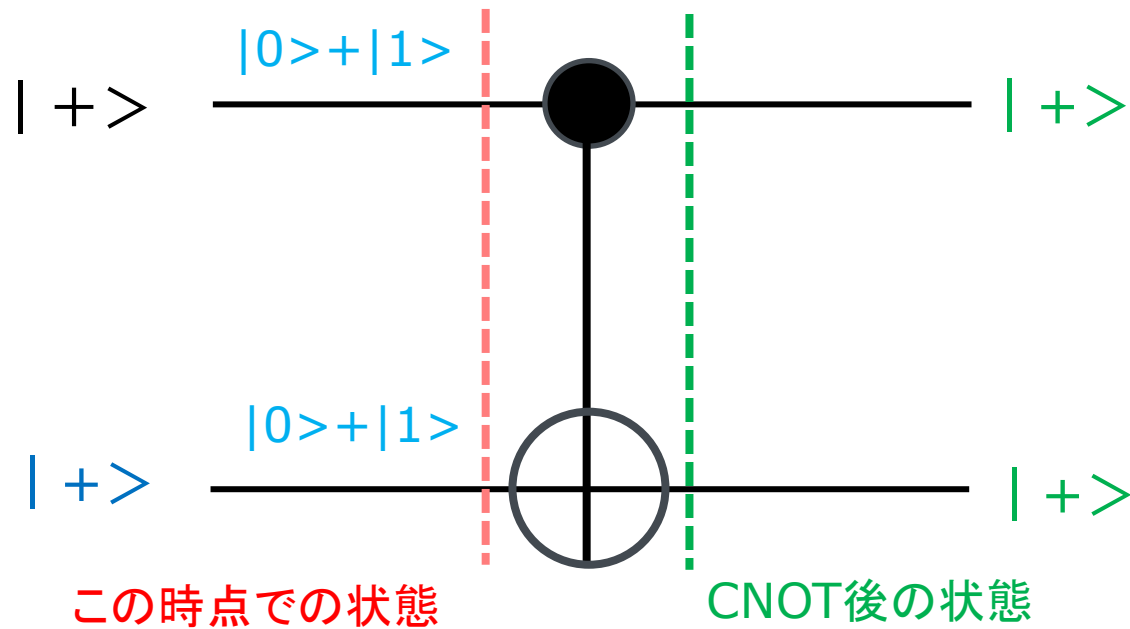
X-Measure qubit 回路

$|g\rangle = |0\rangle$ で、 $H|0\rangle = |+\rangle$



問題は、この部分の
CNOTの振る舞い

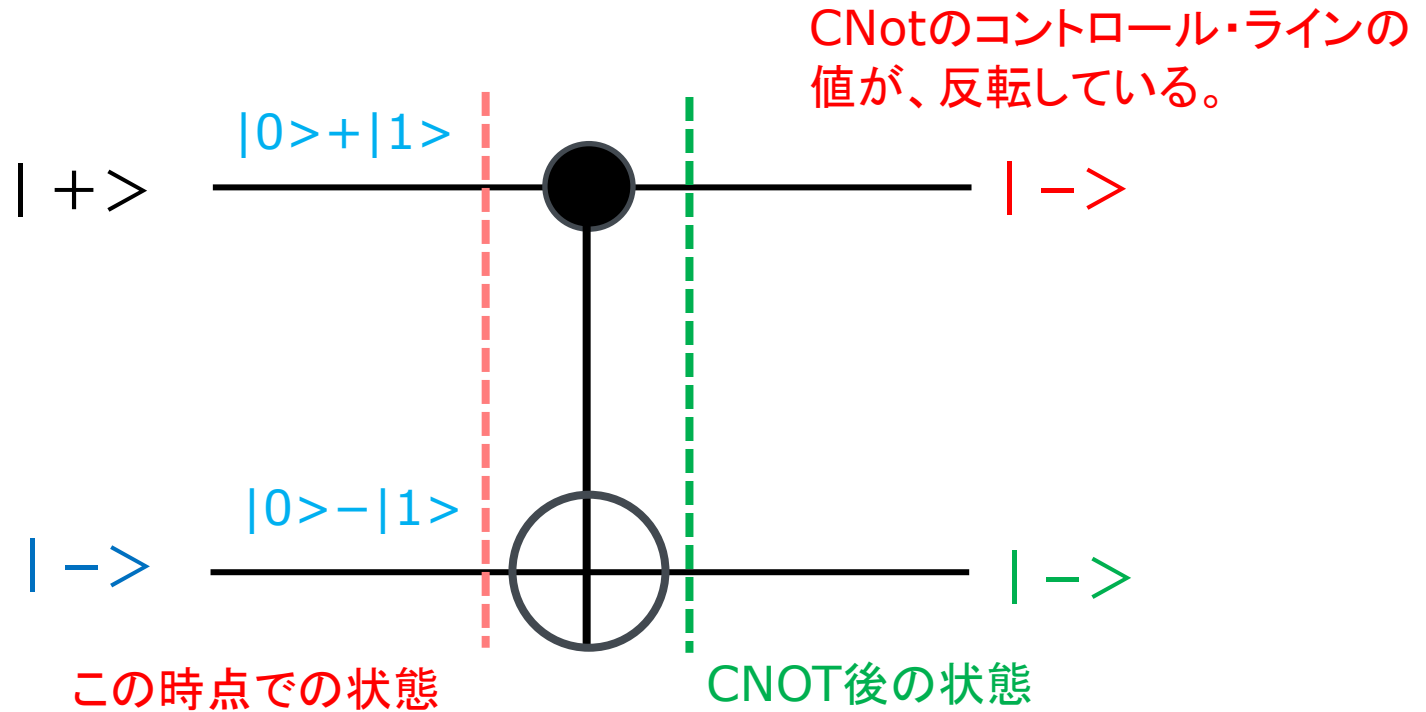
Hadamard基底 $|+\rangle, |-\rangle$ とCNOT



$$\begin{aligned}
 |++\rangle &= (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \\
 &= |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \\
 &= |00\rangle + |01\rangle + |11\rangle + |10\rangle \\
 &= |++\rangle
 \end{aligned}$$

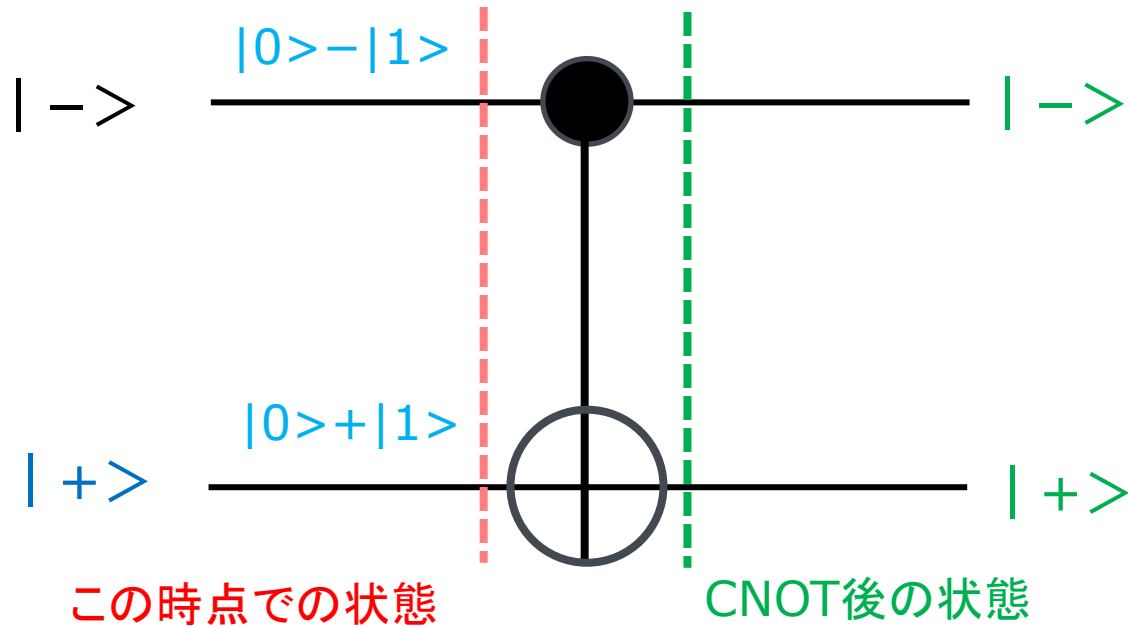
Hadamard基底 $|+\rangle, |-\rangle$ とCNOT



$$\begin{aligned}
 |+-\rangle &= (|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle-|1\rangle) \\
 &= |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT}(|+-\rangle) &= |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\
 &= |00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle \\
 &= |--\rangle
 \end{aligned}$$

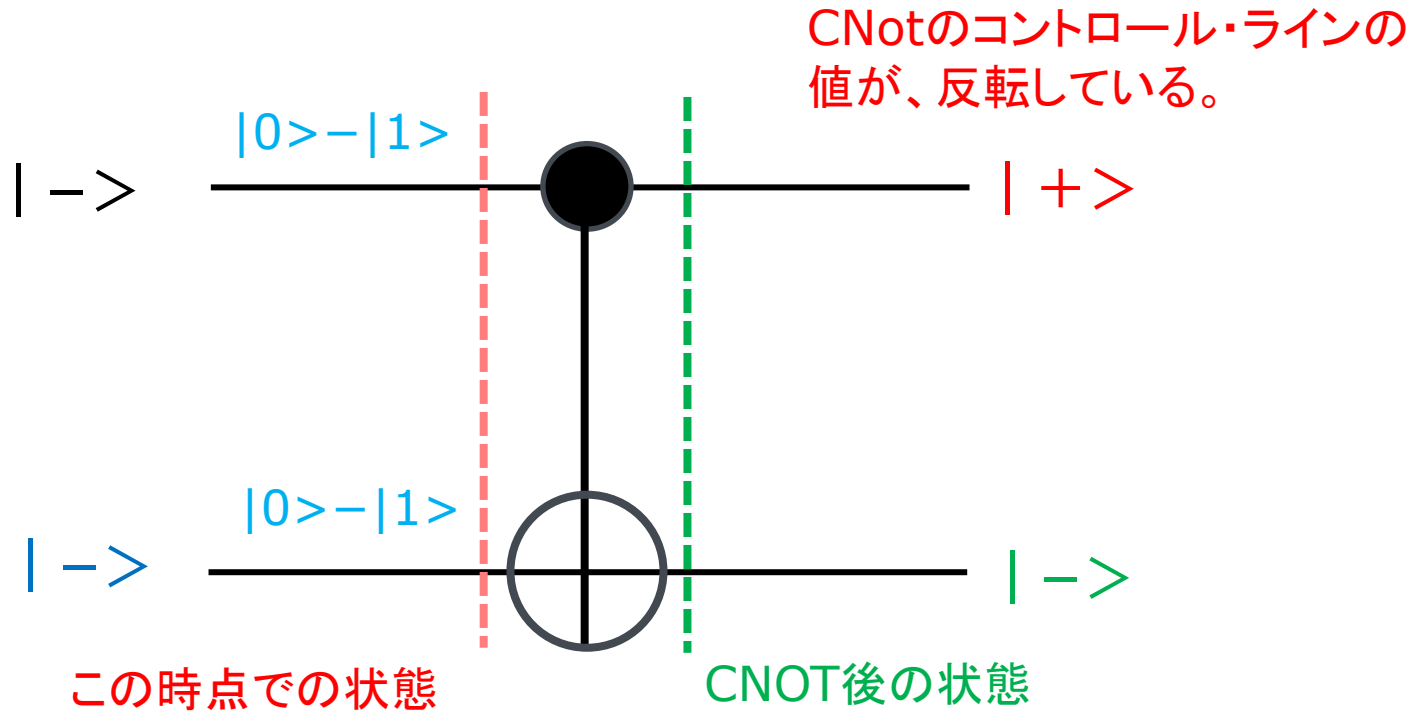
Hadamard基底 $|+\rangle, |-\rangle$ とCNOT



$$\begin{aligned}
 |-\rangle|+\rangle &= (|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \\
 &= |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \\
 &= |00\rangle + |01\rangle - |11\rangle - |10\rangle \\
 &= |-\rangle|+\rangle
 \end{aligned}$$

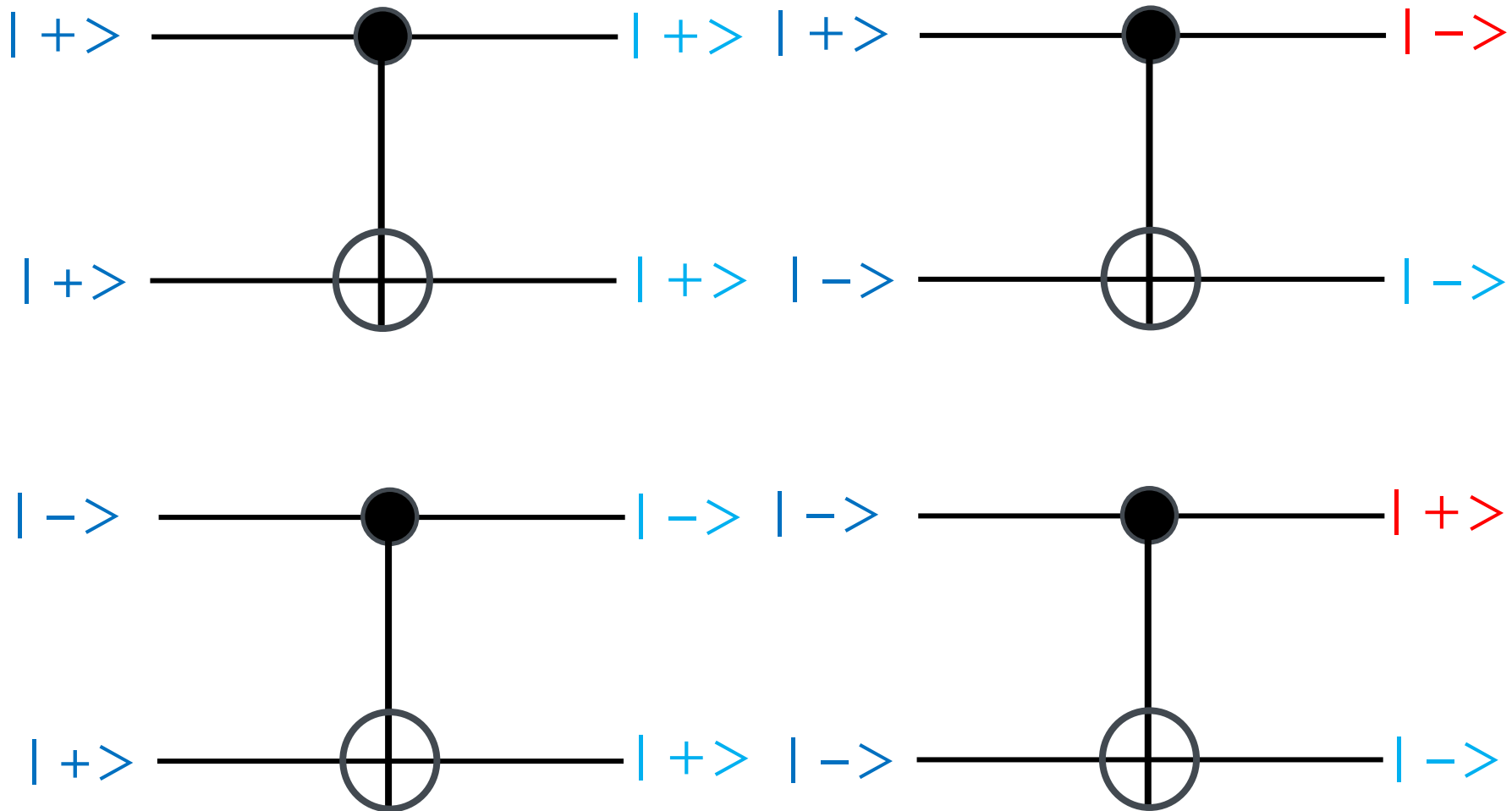
Hadamard基底 $|+\rangle, |-\rangle$ とCNOT



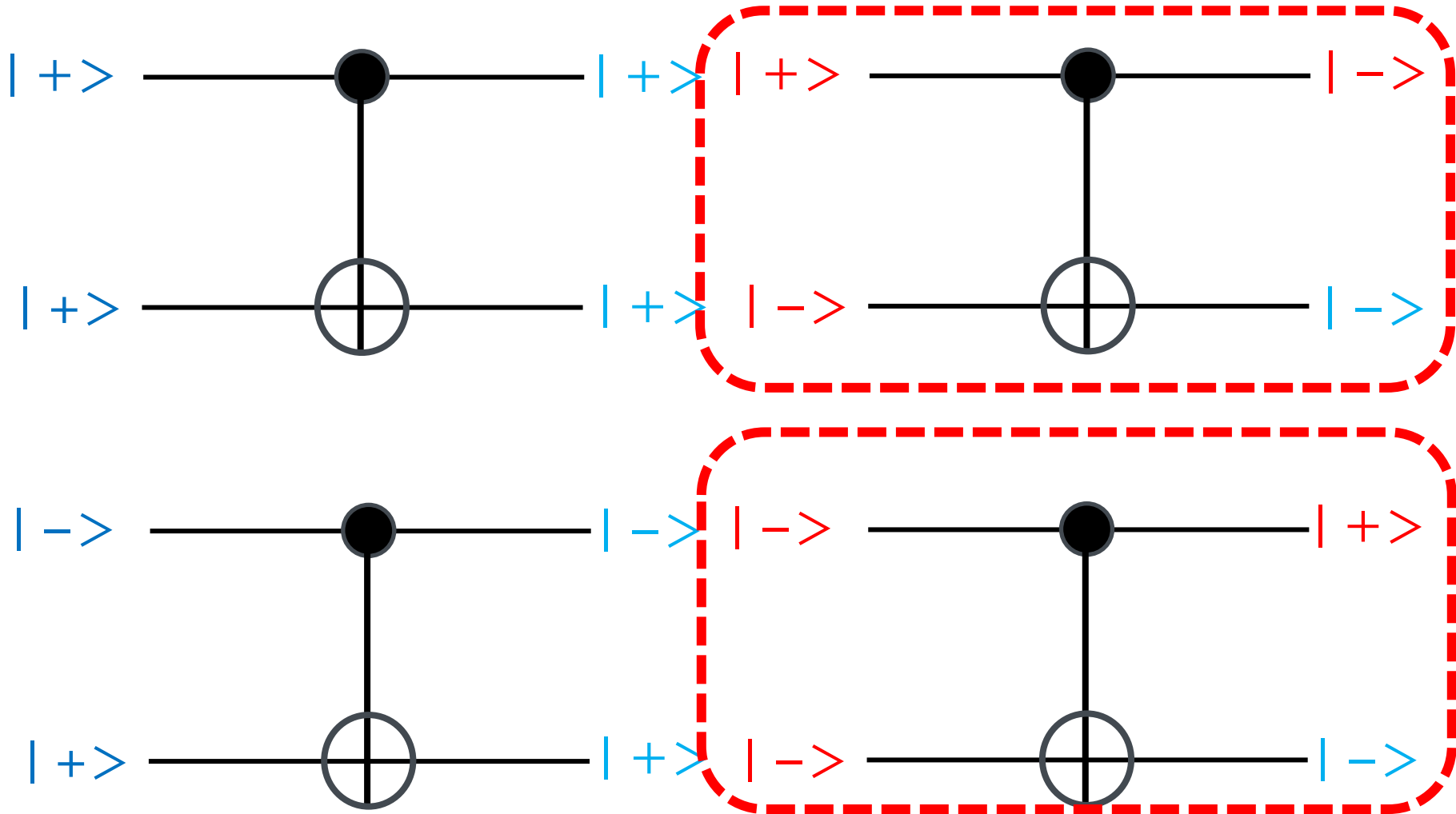
$$\begin{aligned}
 |--\rangle &= (|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
 &= |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) & \\
 &= |00\rangle - |01\rangle - |11\rangle + |10\rangle \\
 &= |+-\rangle
 \end{aligned}$$

Hadamard基底 $|+\rangle, |-\rangle$ とCNOT まとめ

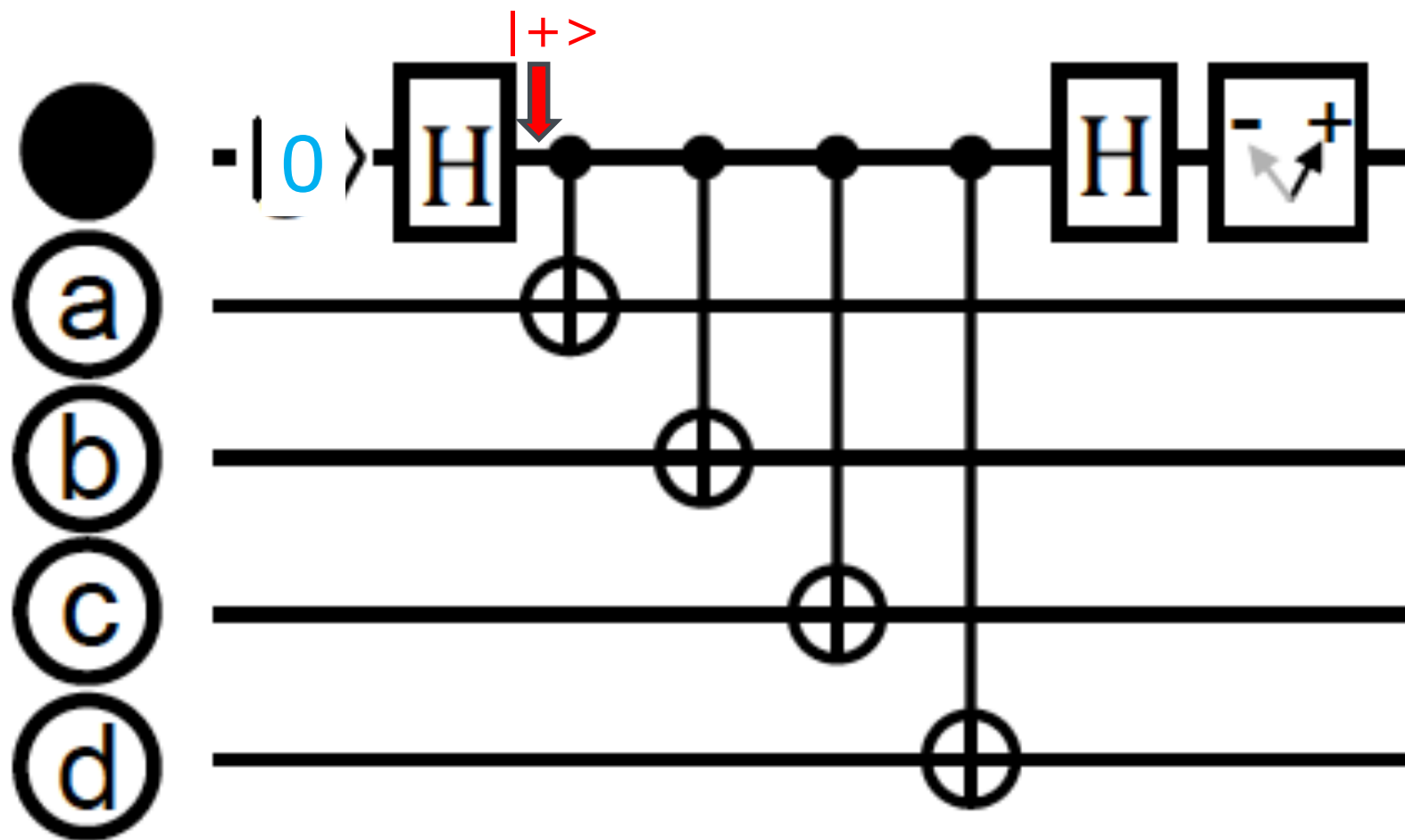


コントロール側の値が反転するもの

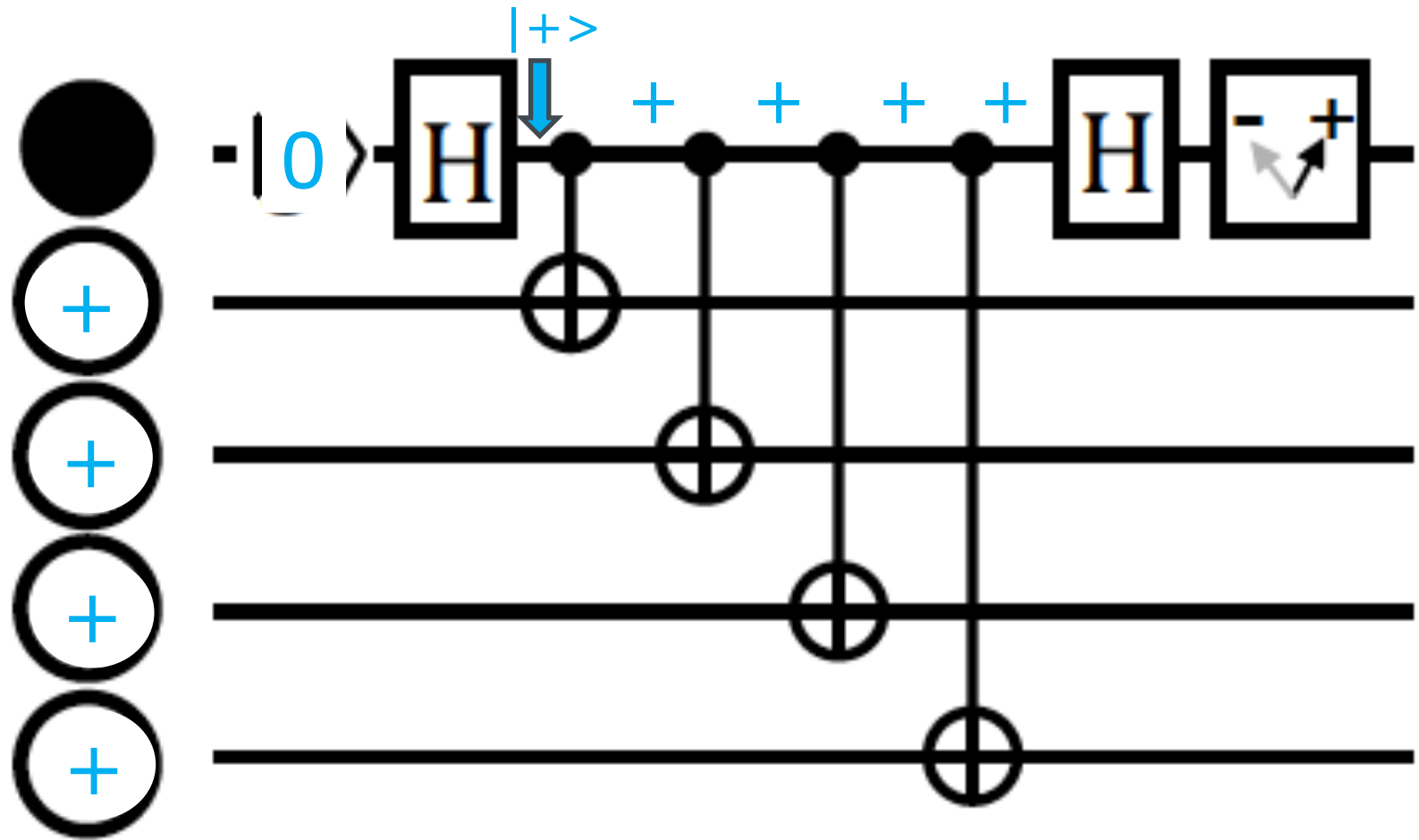


コントロール側の値がなんであれ、ターゲット側に $|-\rangle$ が現れると、コントロール側の値は反転する。

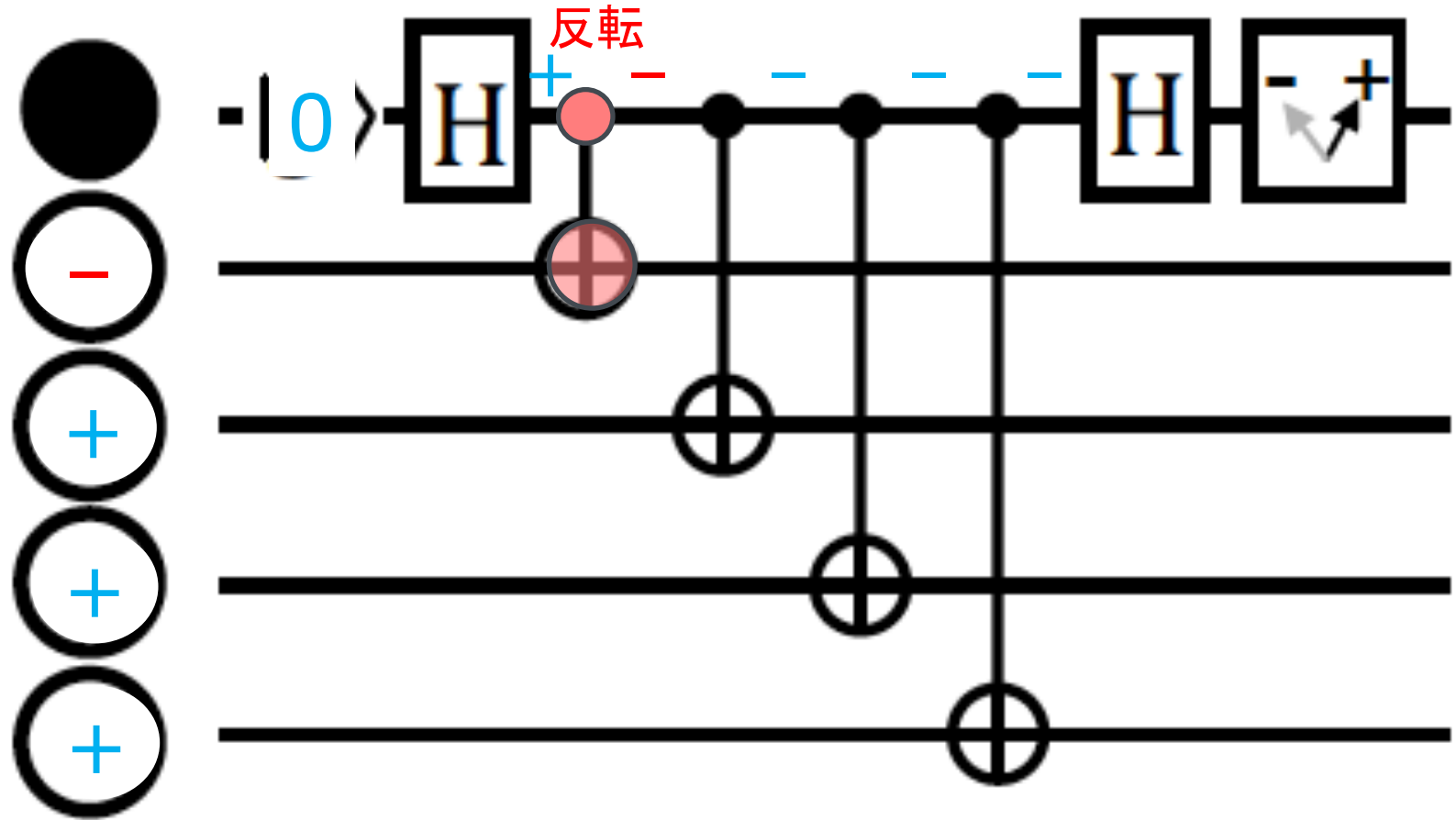
X-Measure qubit 回路



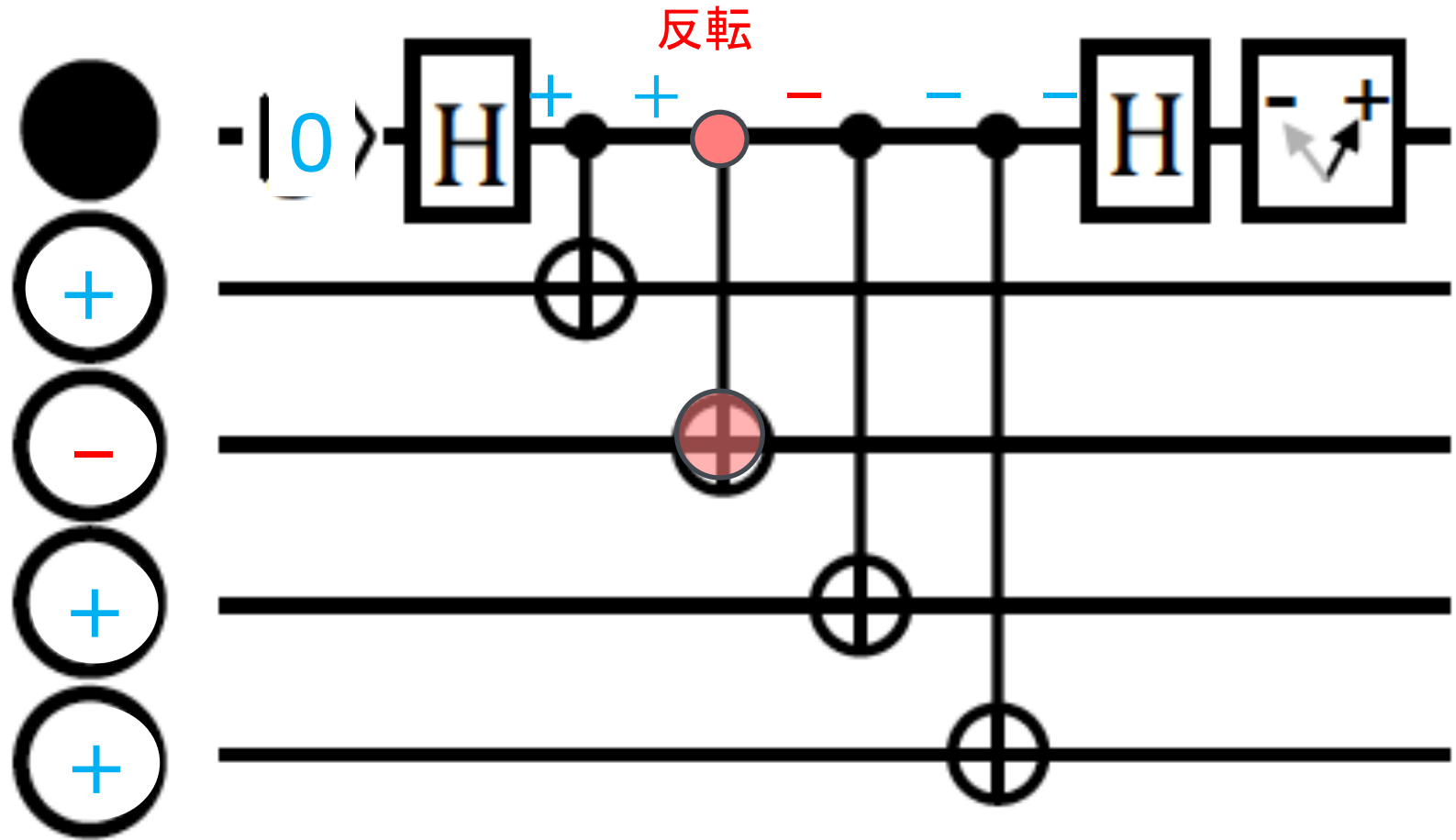
a,b,c,d 全てがが $|+\rangle$ の場合



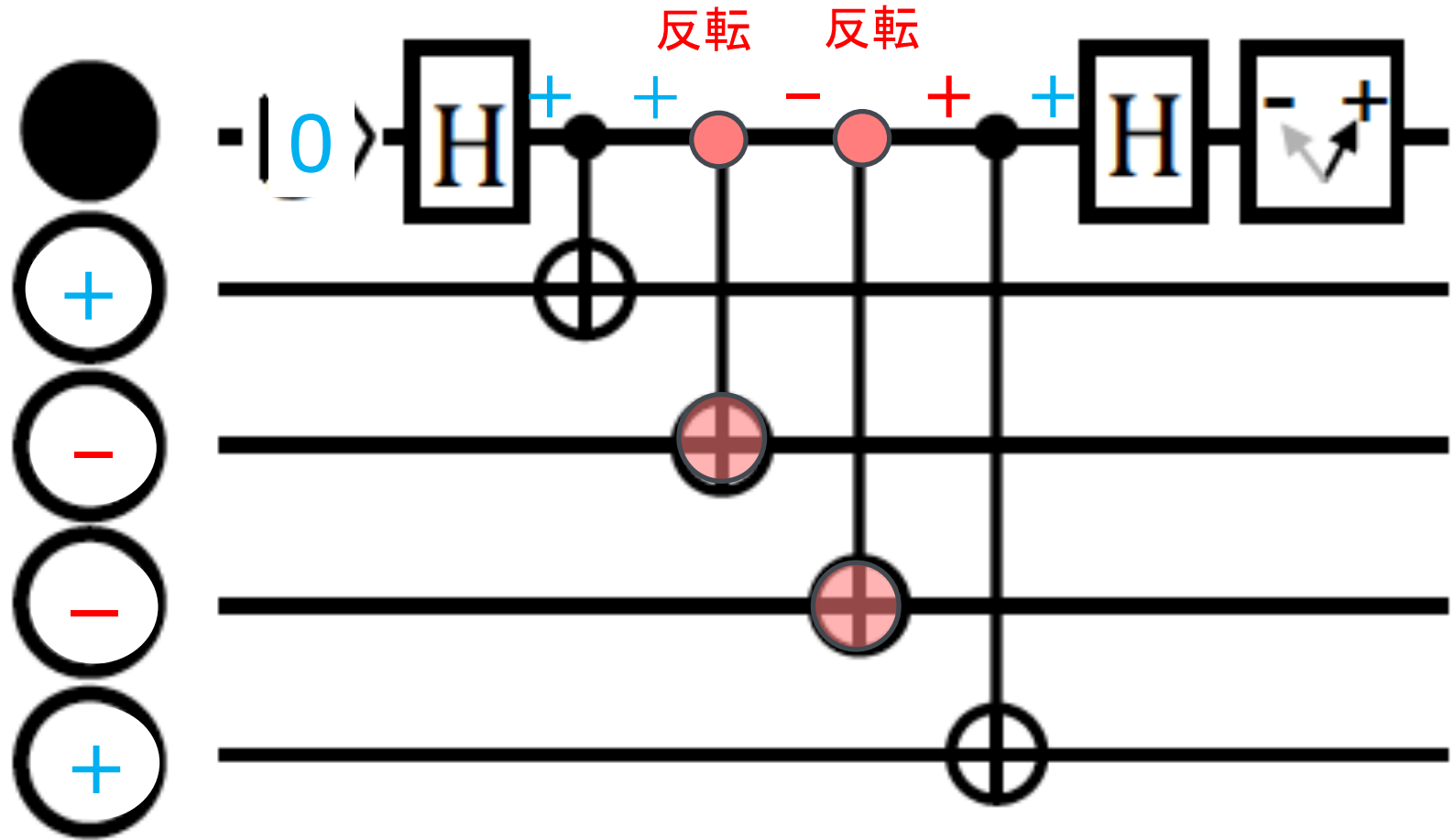
a,b,c,d のうち一つだけが $|-\rangle$ で
残り三つが $|+\rangle$ の場合



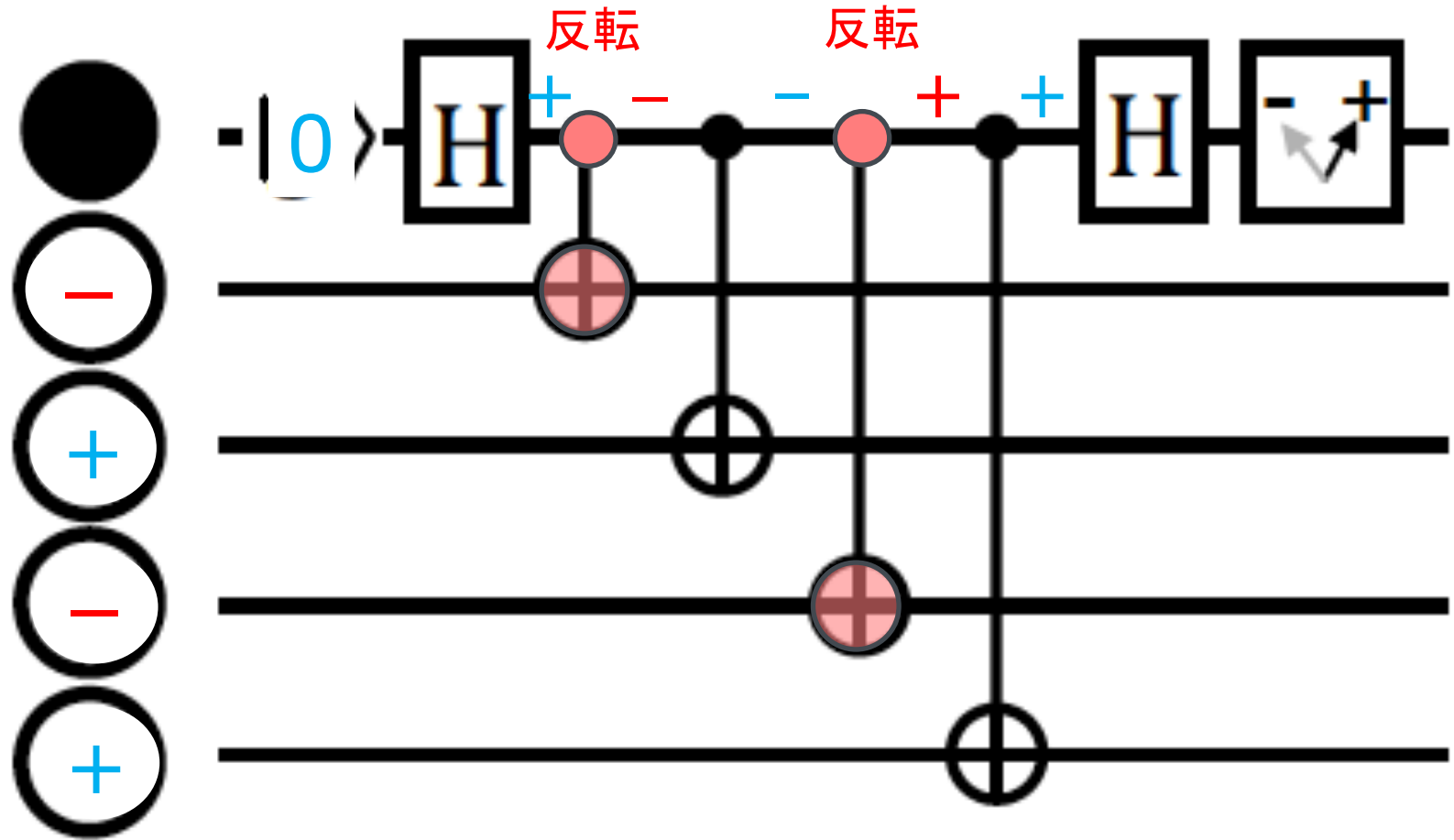
a, b, c, d のうち一つだけが $|-\rangle$ で
 残り三つが $|+\rangle$ の場合



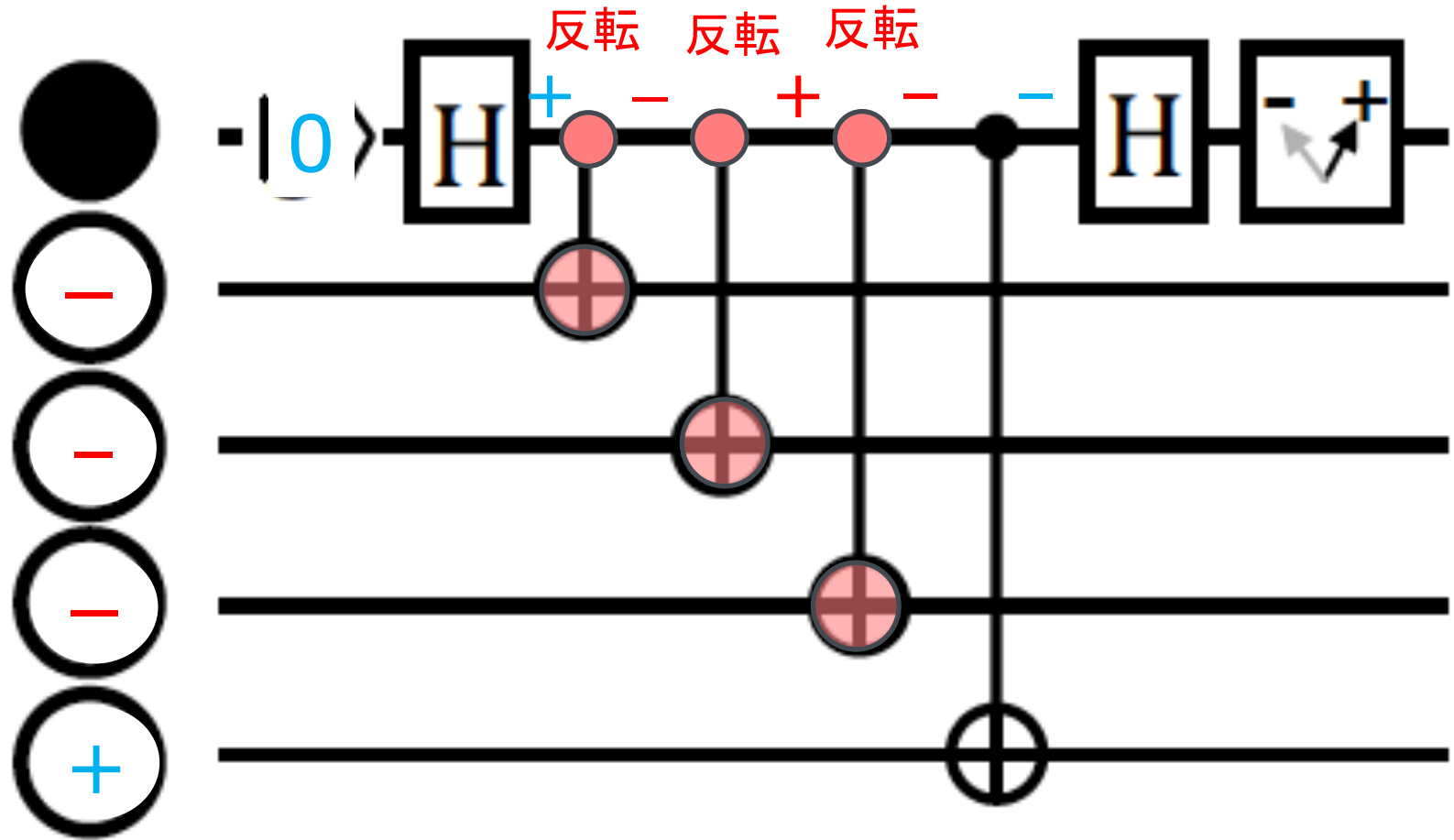
a,b,c,d のうち二つが $|-\rangle$ で
 残り二つが $|+\rangle$ の場合



a,b,c,d のうち二つが $|-\rangle$ で
 残り二つが $|+\rangle$ の場合



a,b,c,d のうち三つが $|-\rangle$ で
残り一つが $|+\rangle$ の場合



第一レジスター への出力

X-measure qubitは、4つのdata qubit a, b, c, d の状態をチェックしている。Z-measure qubit が一つの観測サイクルで最終的に観測する値は、回路の第一レジスターに出力される。

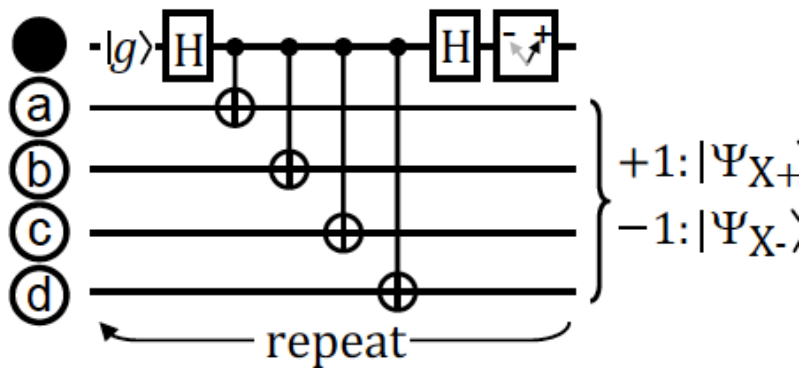
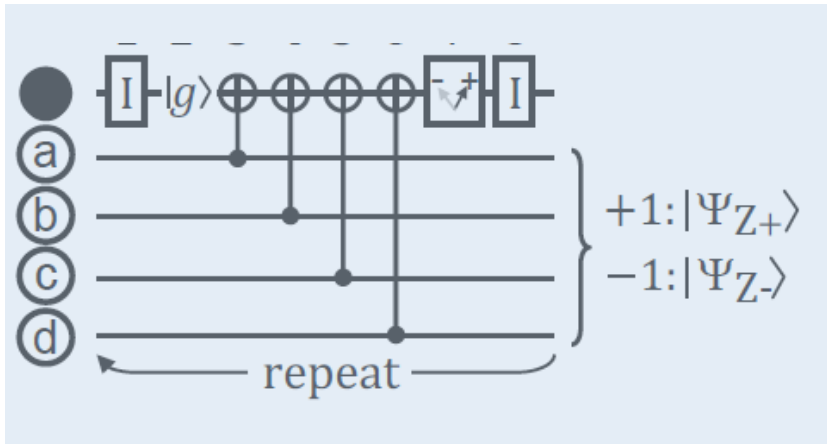
第一レジスターには、回路上のCNOTが何回呼び出されるかに応じて $|+\rangle$ または $|-\rangle$ が現れる。

X-measure qubitの第一レジスターは、 $|+\rangle$ で初期化されているので、CNOTが偶数回呼び出されれば $|+\rangle$ が、奇数回呼び出されれば $|-\rangle$ が出力されることになる。

パリティが0(+)の時、第一レジスターには $|+\rangle$ が現れ、最終的には、最後のアダマールで $|0\rangle$ が出力され、その固有値+1が観測される。

パリティが1(-)の時、第一レジスターには $|-\rangle$ が現れ、それは最後のアダマールで $|1\rangle$ が出力され、その固有値+1が観測される。

これは、どういう意味だろうか？

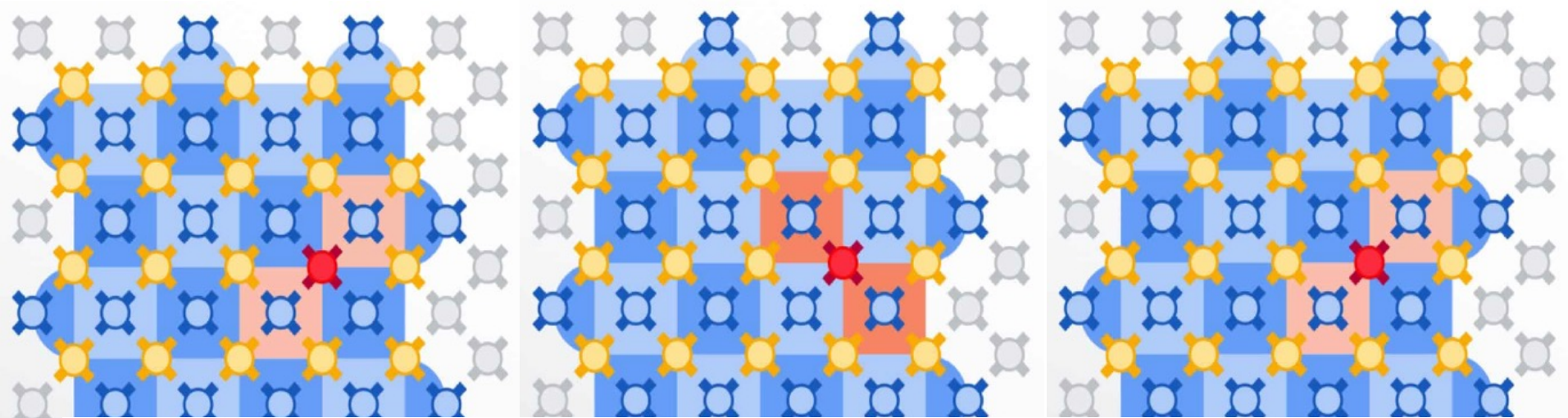


Eigenvalue	$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$	$\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$
+1	$ gggg\rangle$	$ ++++\rangle$
	$ ggee\rangle$	$ ++--\rangle$
	$ geeg\rangle$	$ +- - +\rangle$
	$ eegg\rangle$	$ - - ++\rangle$
	$ egge\rangle$	$ - + + -\rangle$
	$ gege\rangle$	$ + - + -\rangle$
	$ egeg\rangle$	$ - + - +\rangle$
	$ eeee\rangle$	$ - - - -\rangle$
-1	$ ggge\rangle$	$ +++ -\rangle$
	$ ggeg\rangle$	$ ++ - +\rangle$
	$ gegg\rangle$	$ + - ++\rangle$
	$ eggg\rangle$	$ - + ++\rangle$
	$ geee\rangle$	$ + - - -\rangle$
	$ egee\rangle$	$ - + - -\rangle$
	$ eege\rangle$	$ - - + -\rangle$
	$ eeeg\rangle$	$ - - - +\rangle$

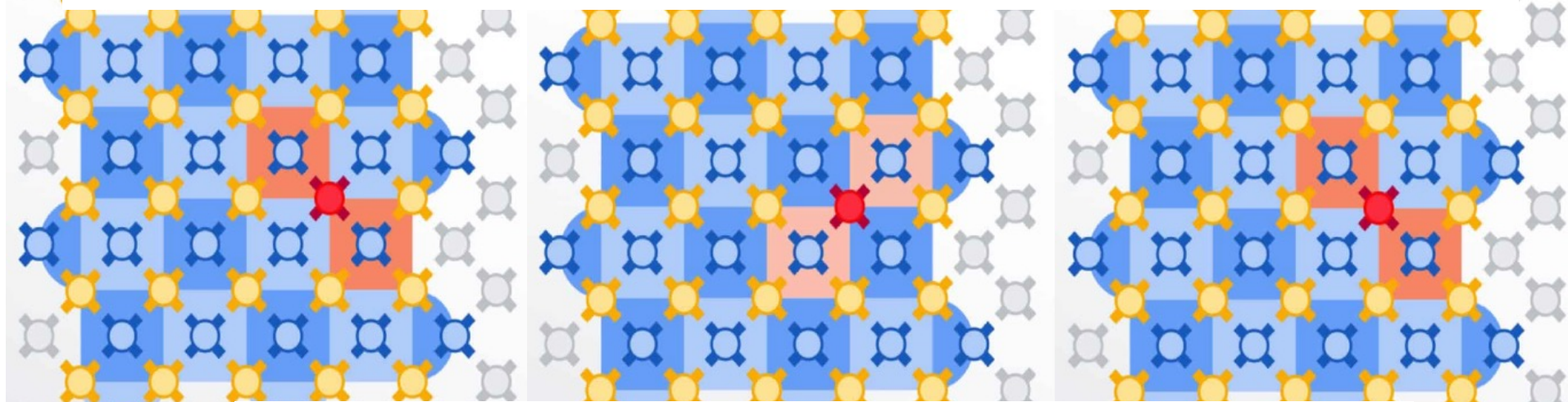
先のテーブルが表していること

先のテーブルの $X_a X_b X_c X_d$ の列の各行は、Stablizer $X_a X_b X_c X_d$ の固有ベクトルを表している。

上半分の固有ベクトルの固有値すなわち観測値は、+1であり、下半分の固有ベクトルの固有値すなわち観測値は、-1である。

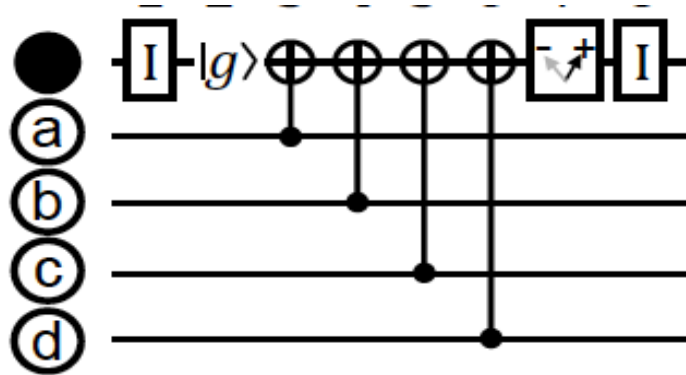


Z-Measure qubit と X-Measure qubit

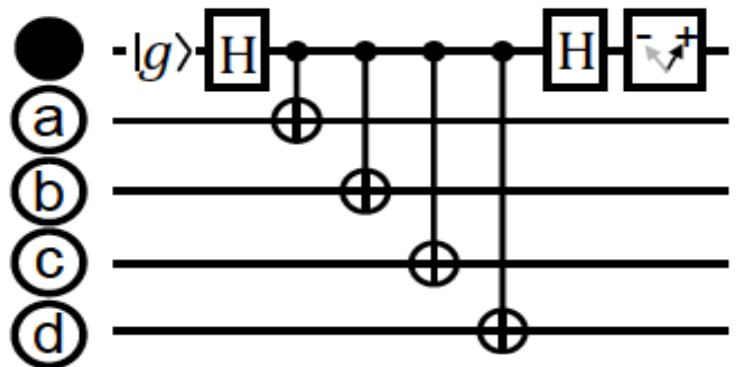


二つのMeasure qubit

Z-Measure qubit

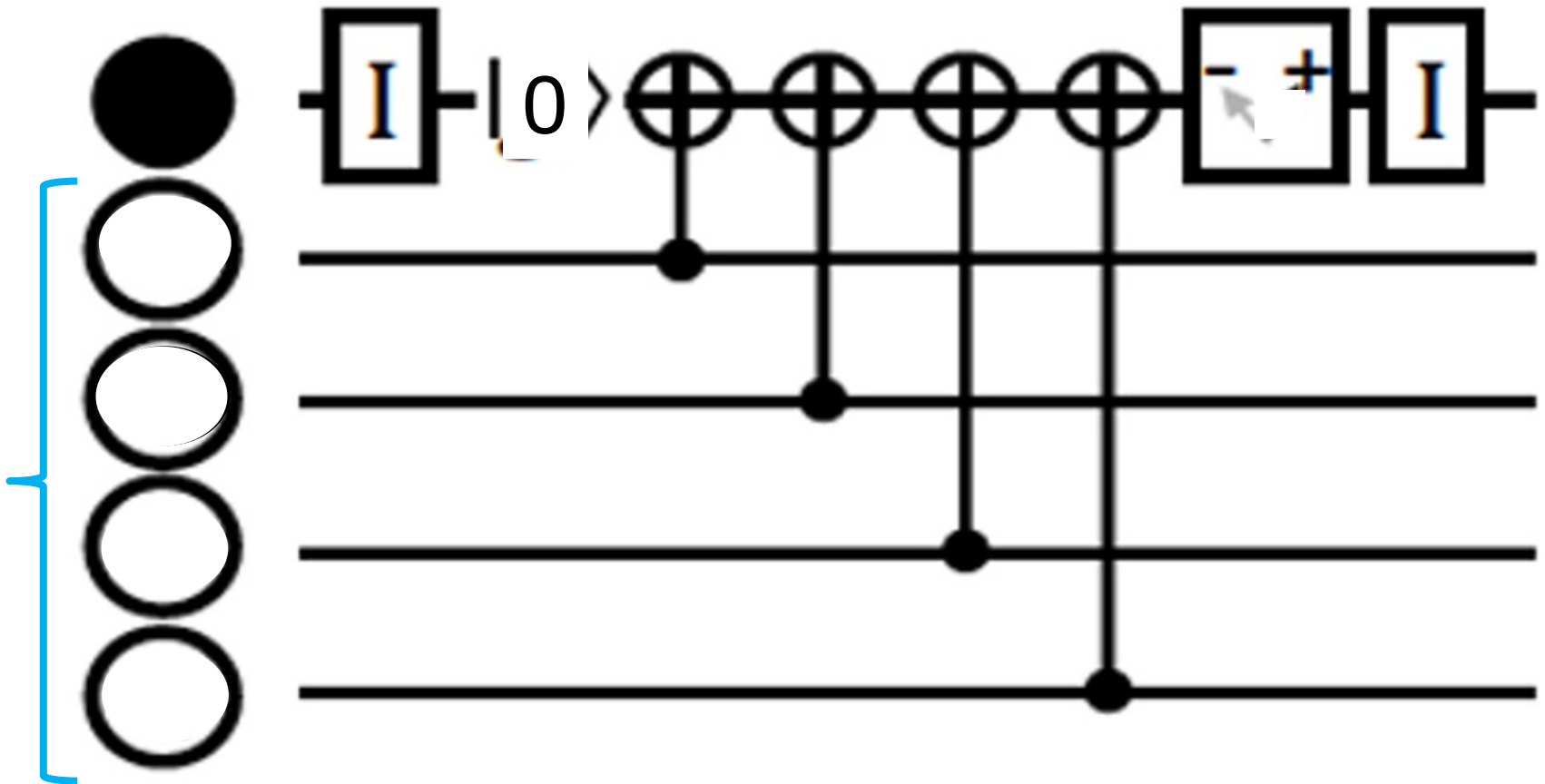


X-Measure qubit

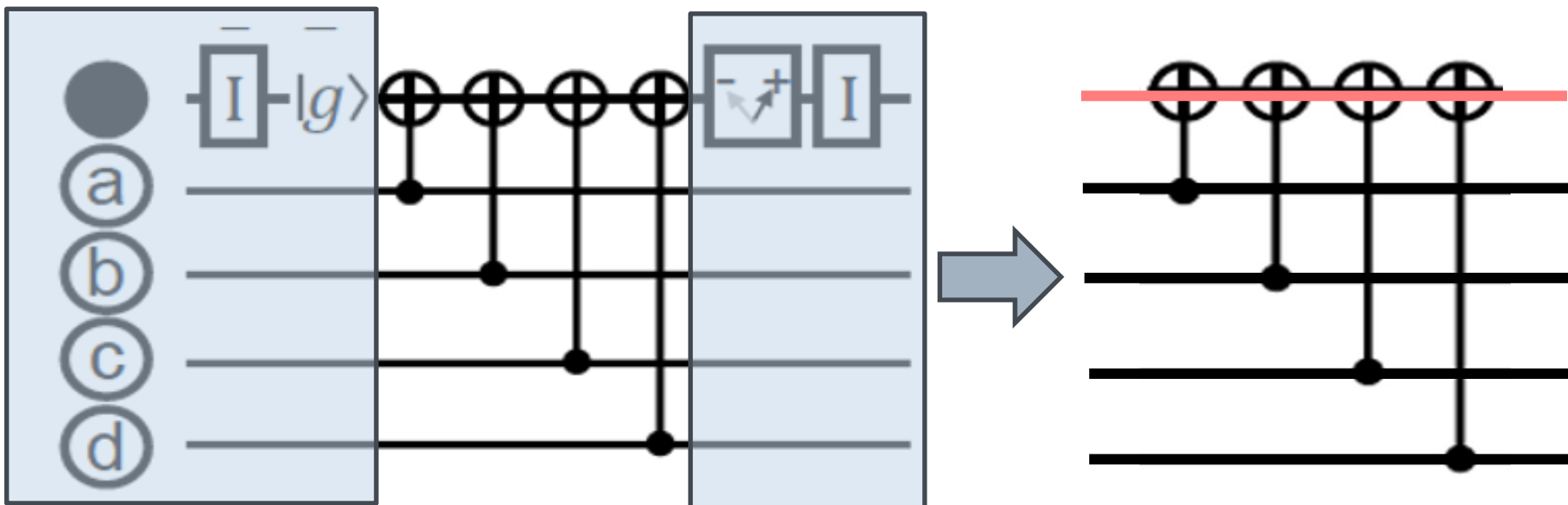


Z-Measure qubit

標準基底

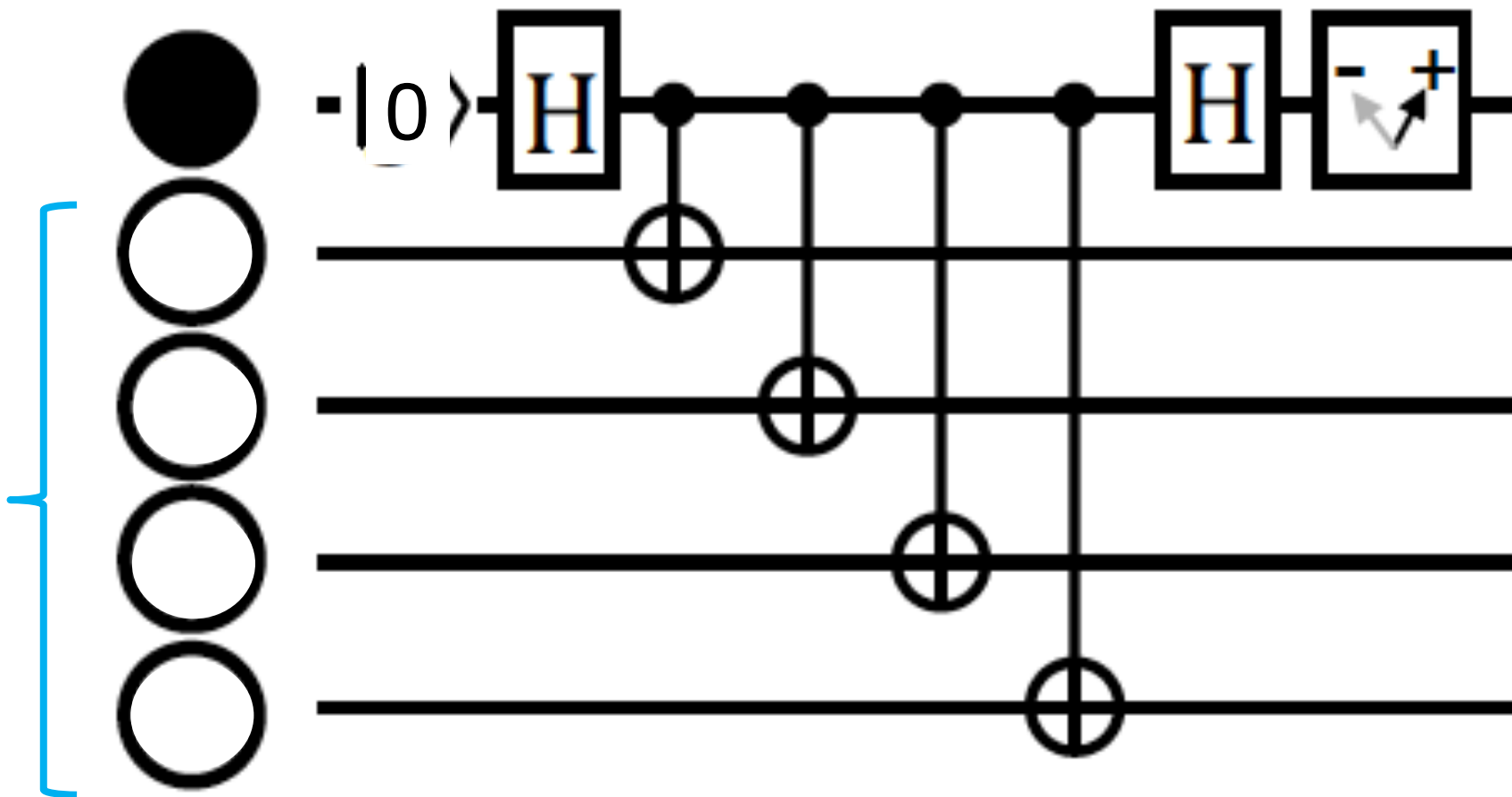


Z-Measure qubit 標準基底

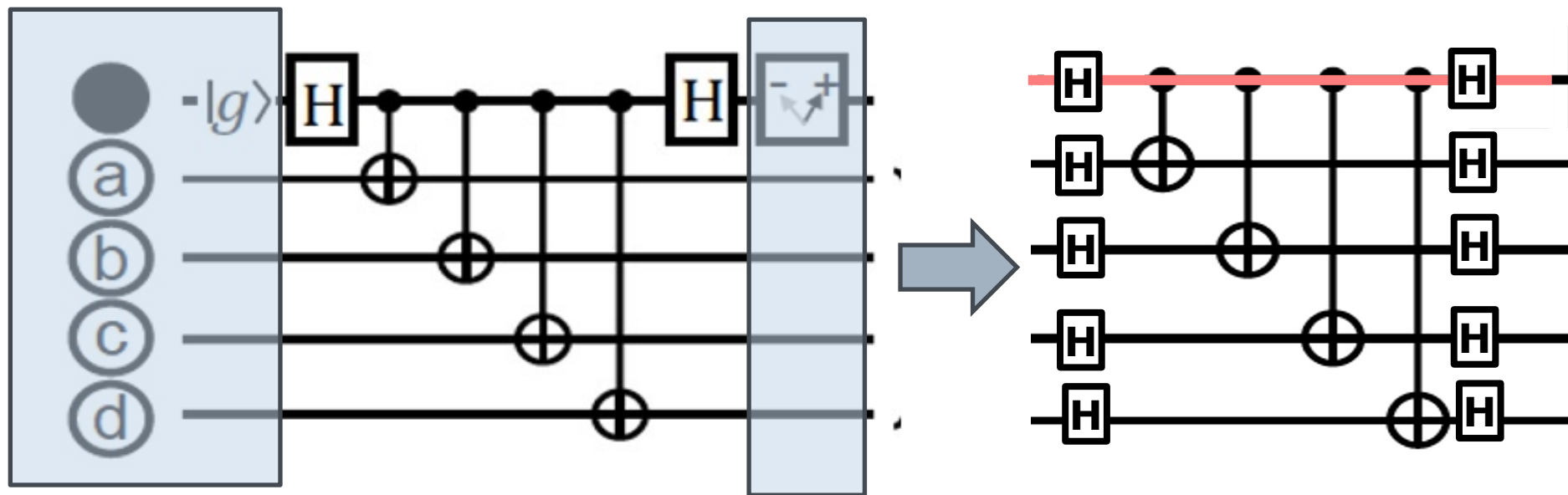


X-Measure qubit

アダマール基底

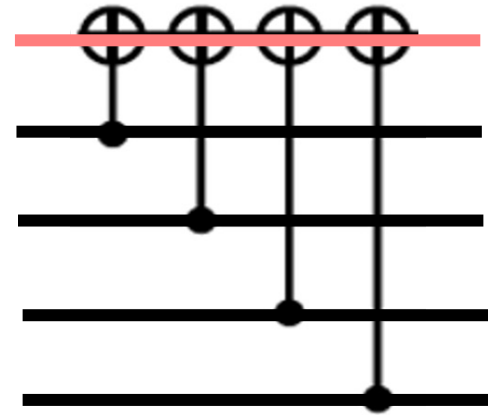
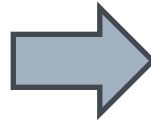
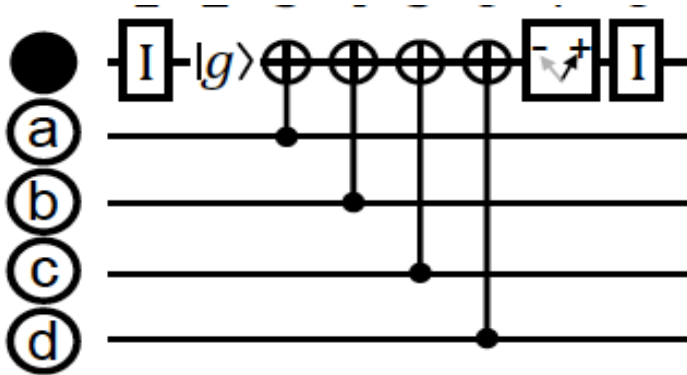


X-Measure qubit アダマール基底

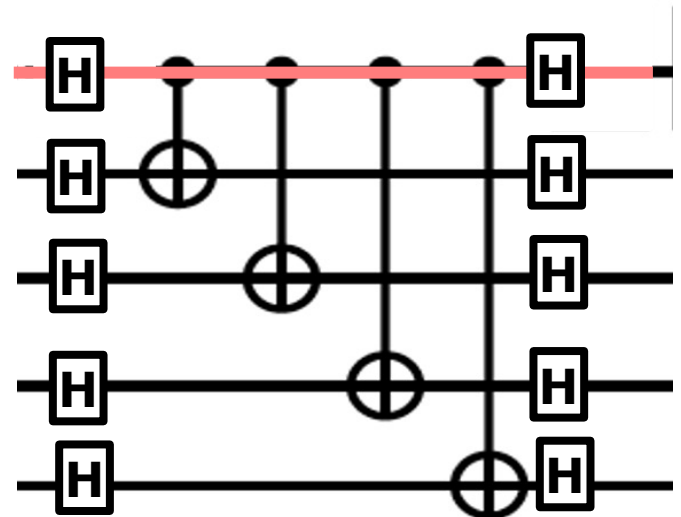
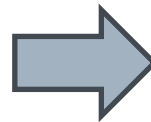
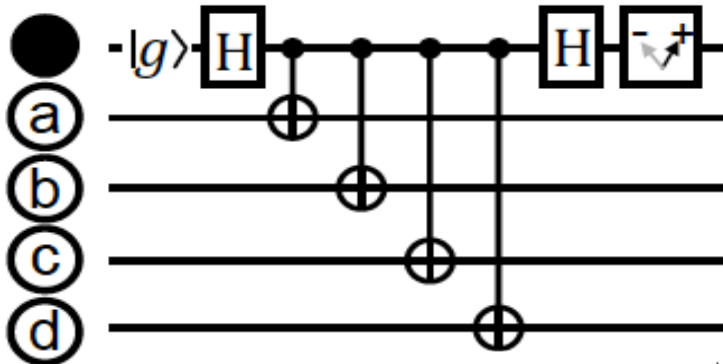


二つのMeasure qubitの骨組み

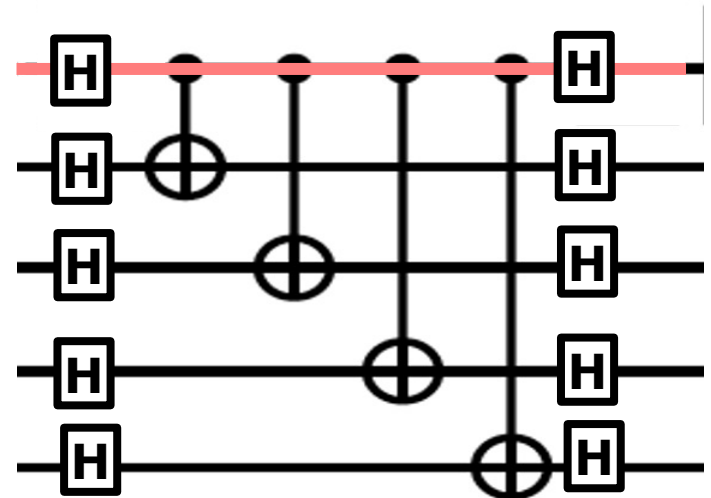
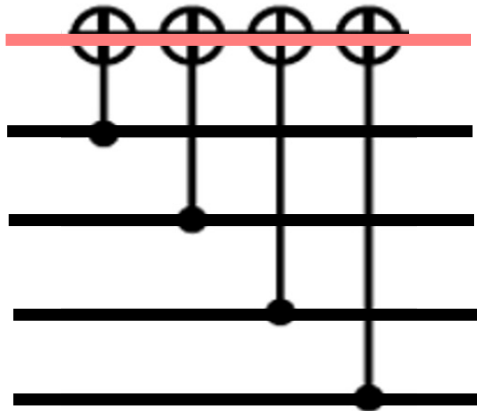
Z-Measure qubit



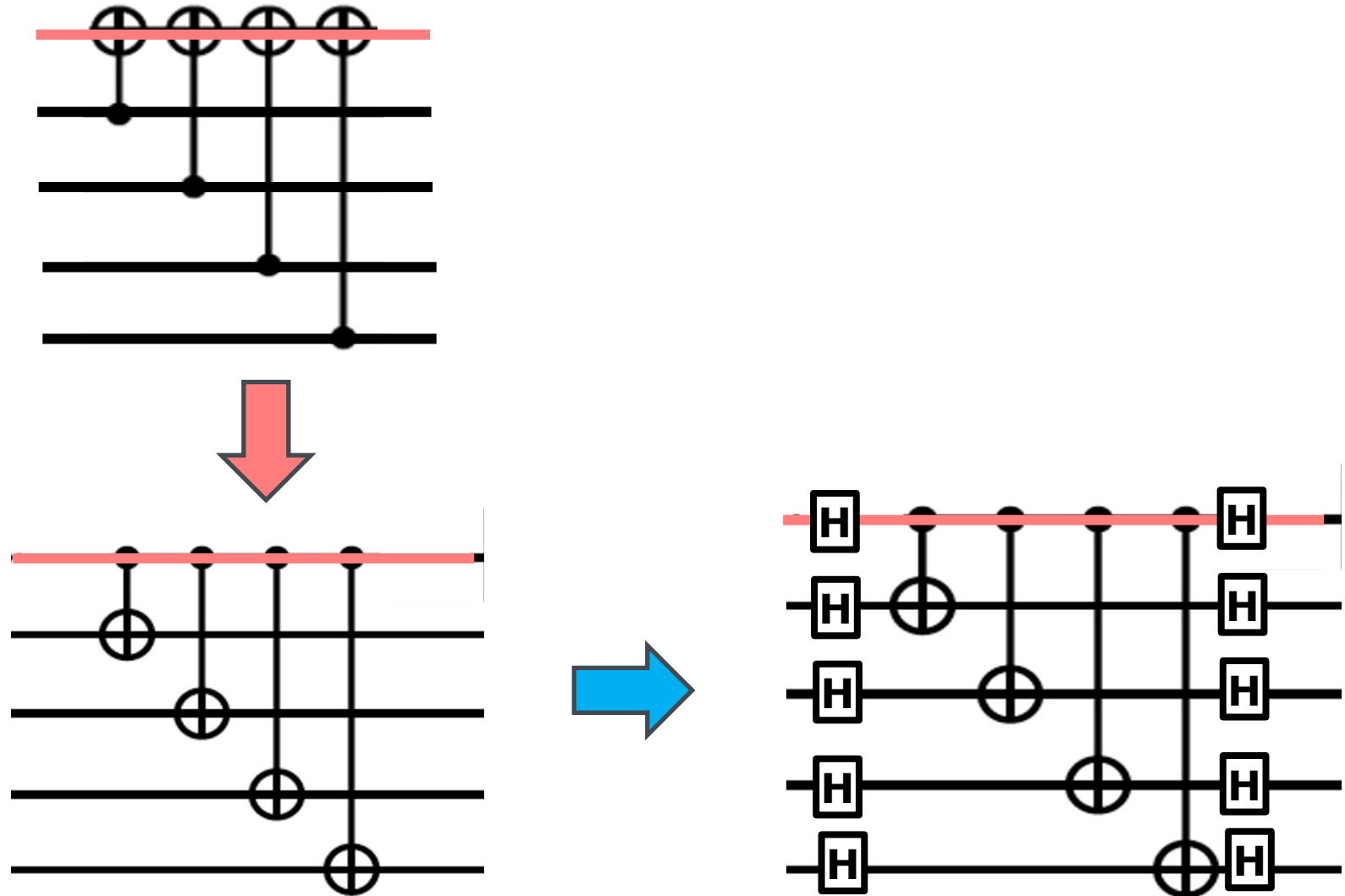
X-Measure qubit



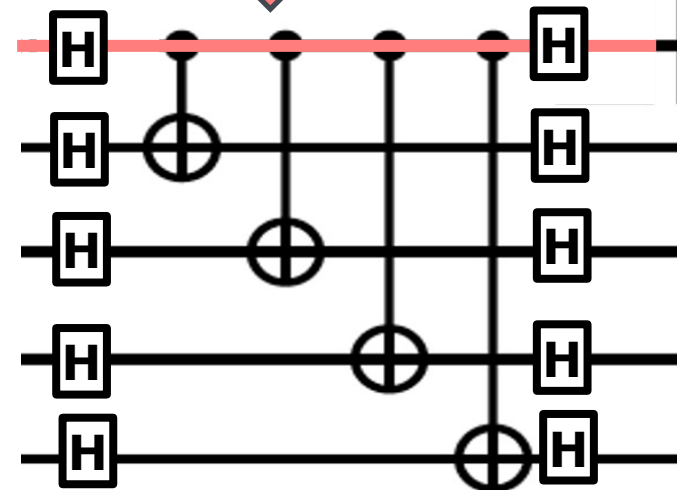
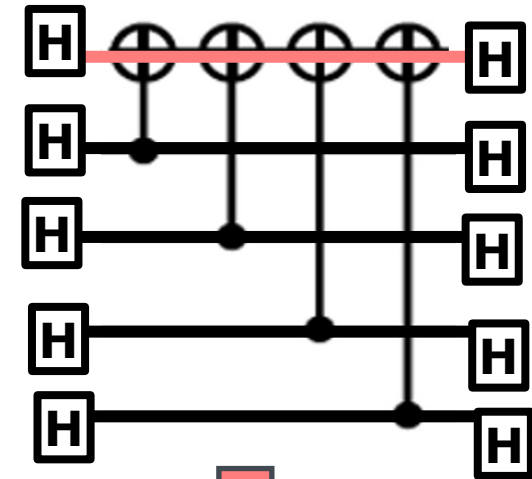
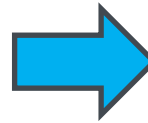
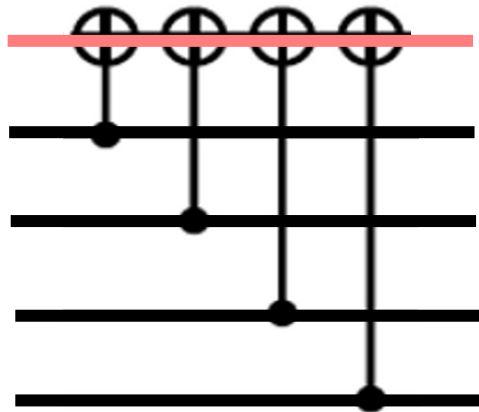
Z-Measure qubit & X-Measure qubit



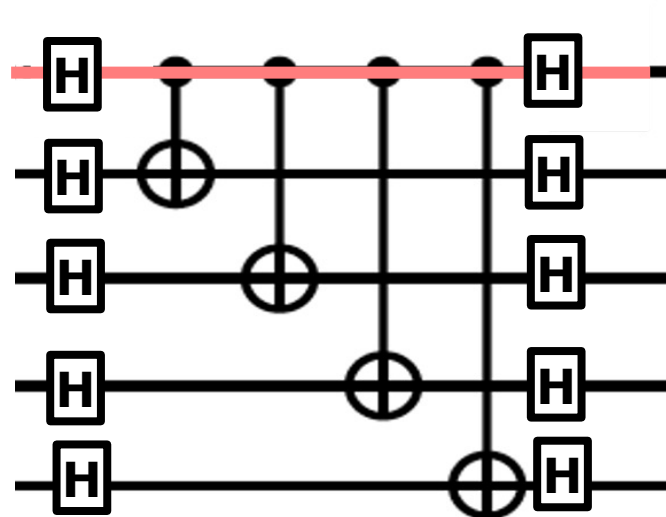
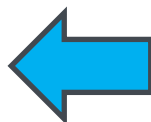
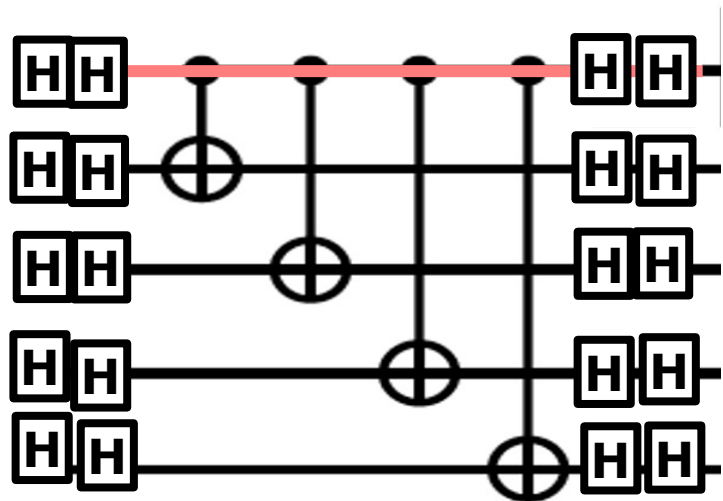
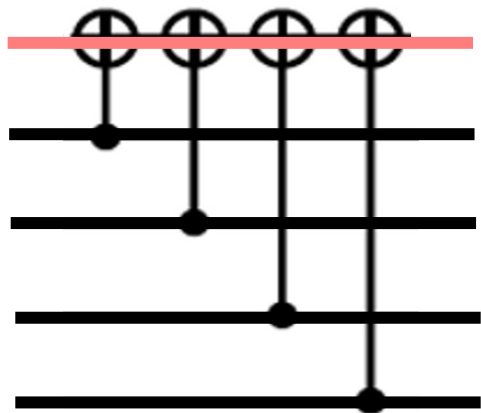
Z-Measure qubit & X-Measure qubit



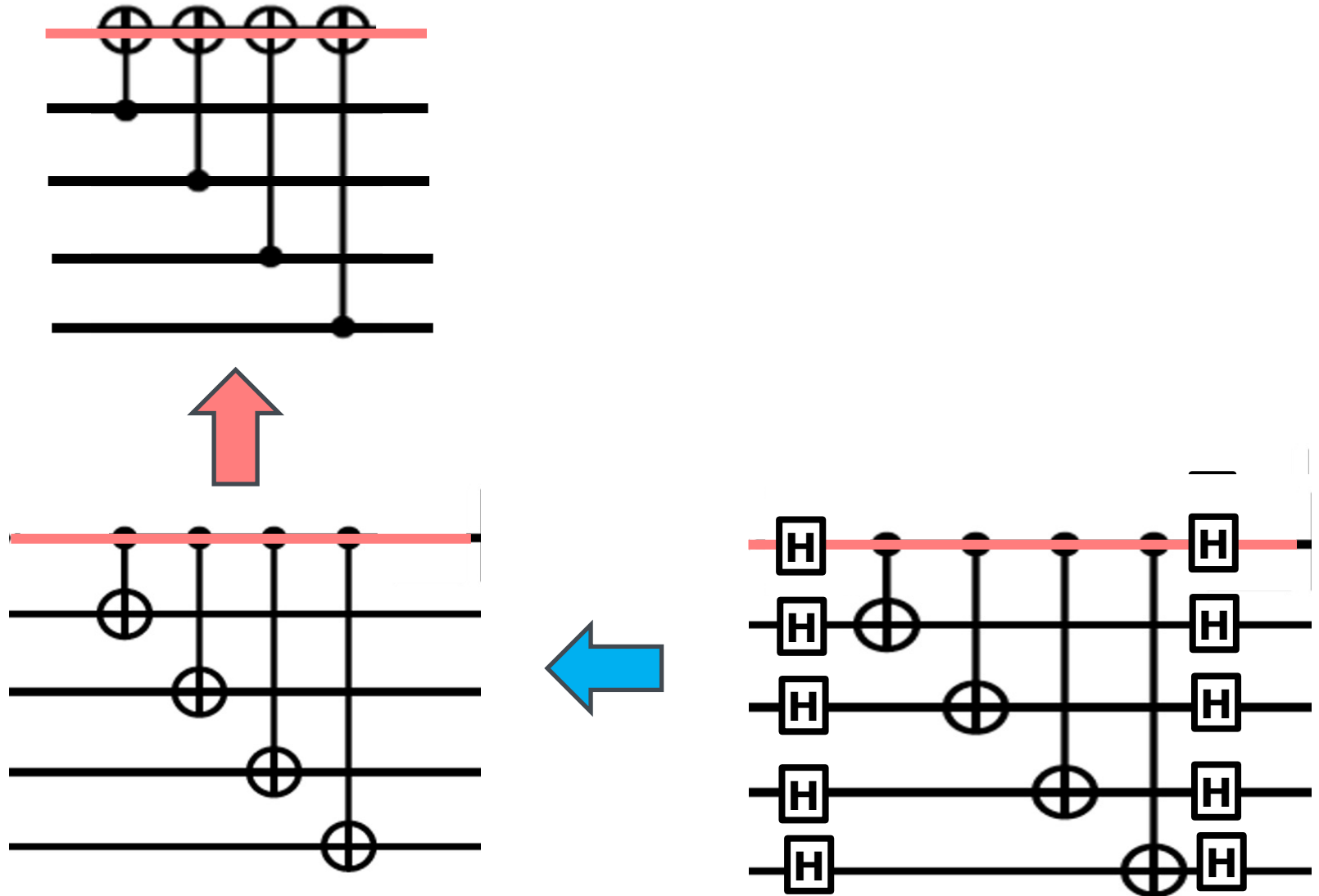
Z-Measure qubit & X-Measure qubit



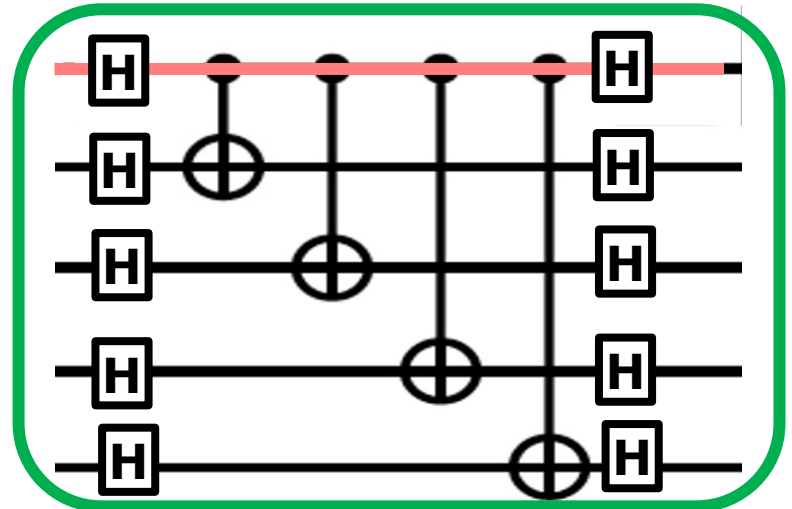
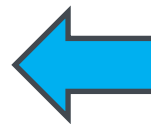
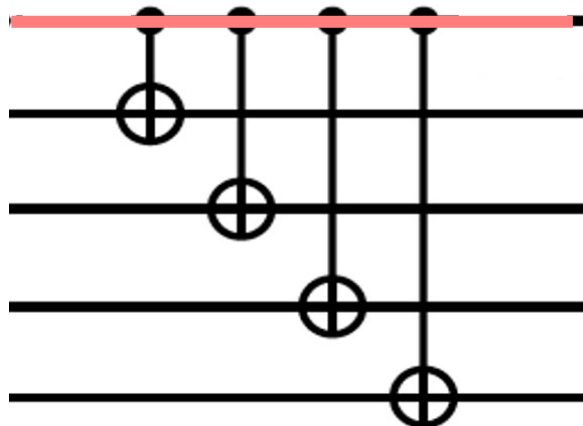
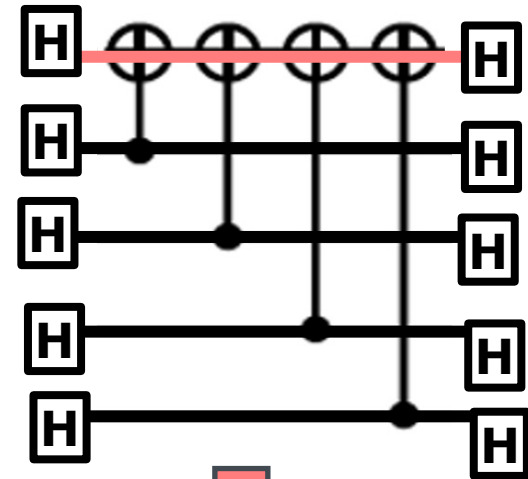
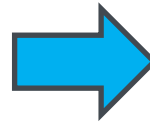
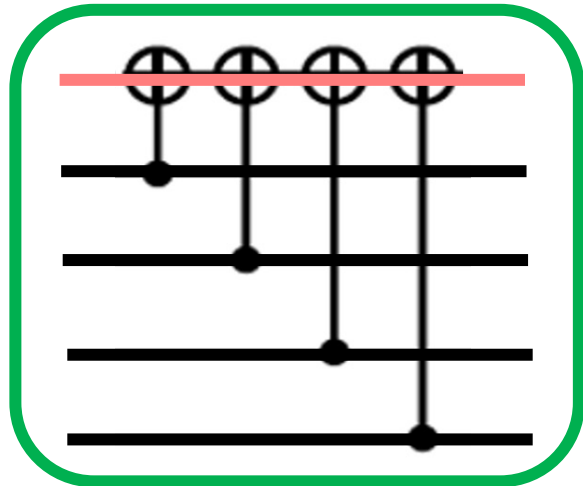
Z-Measure qubit & X-Measure qubit



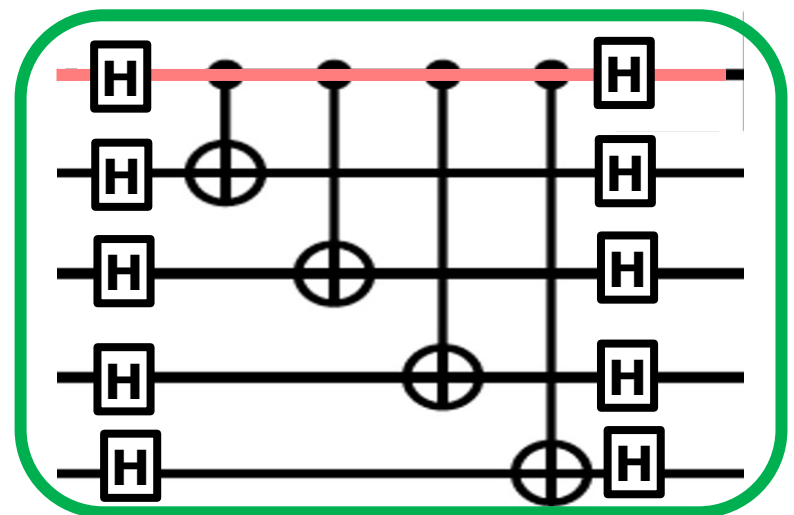
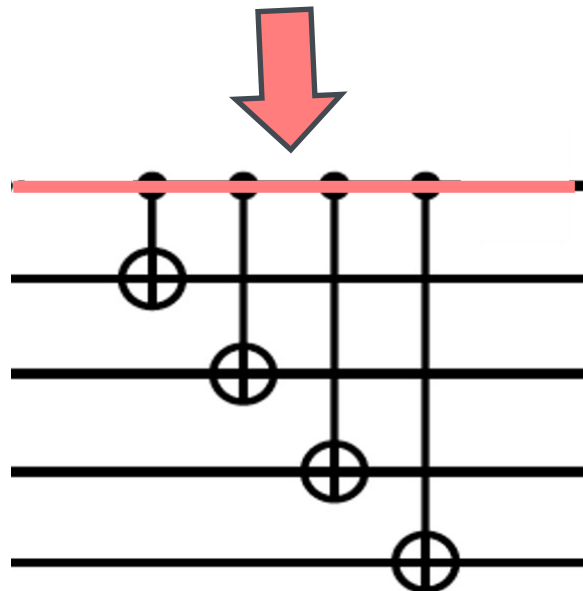
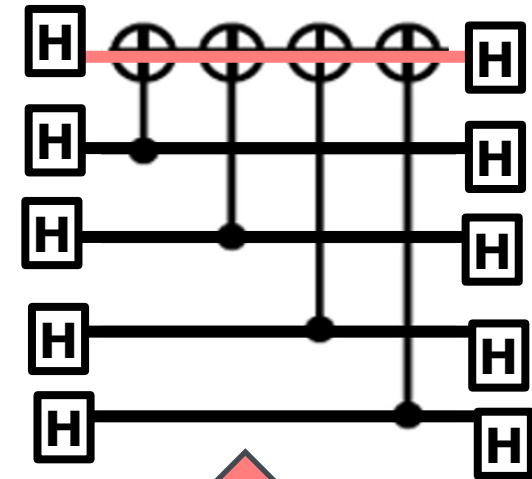
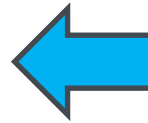
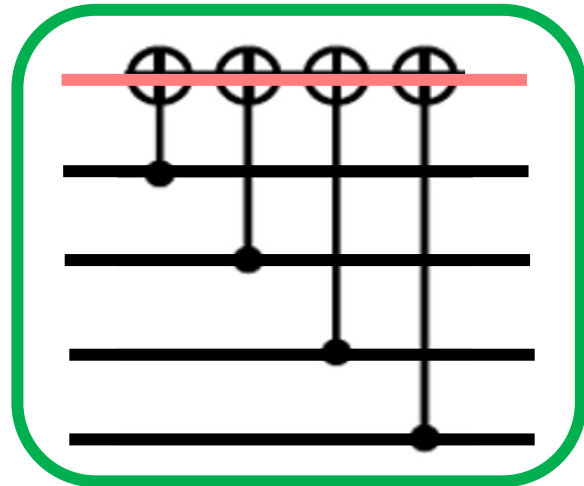
Z-Measure qubit & X-Measure qubit



Z-Measure qubit & X-Measure qubit



Z-Measure qubit & X-Measure qubit



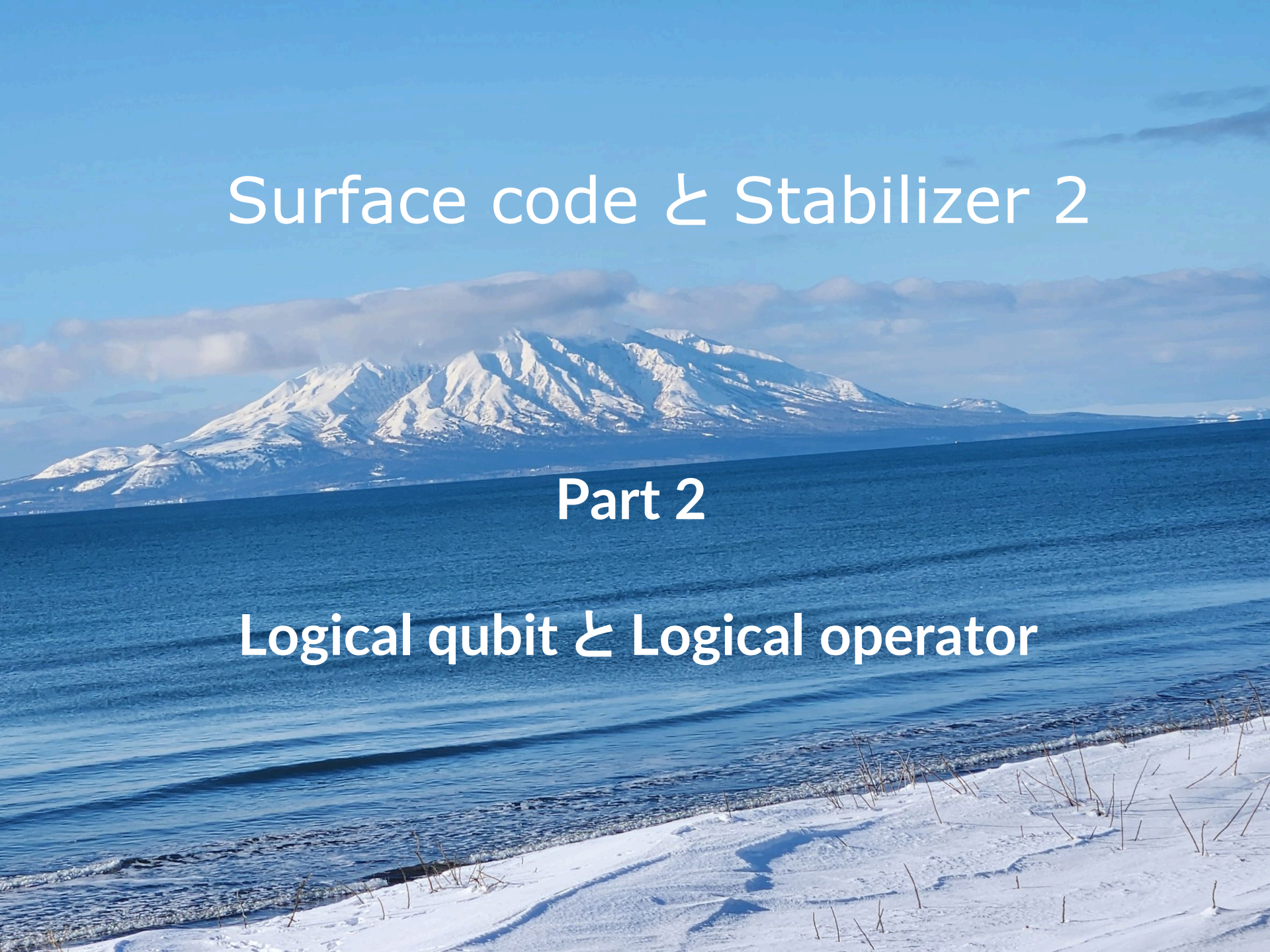




Surface code と Stabilizer 2

Part 2

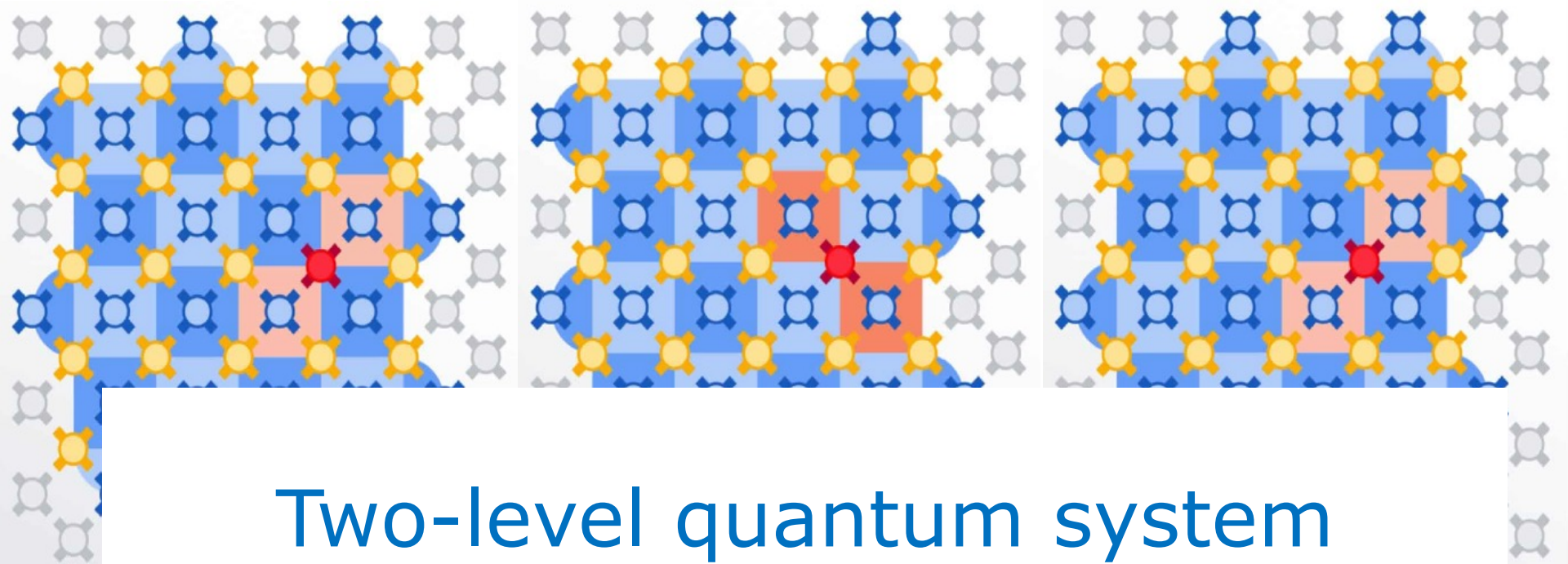
Logical qubit と Logical operator



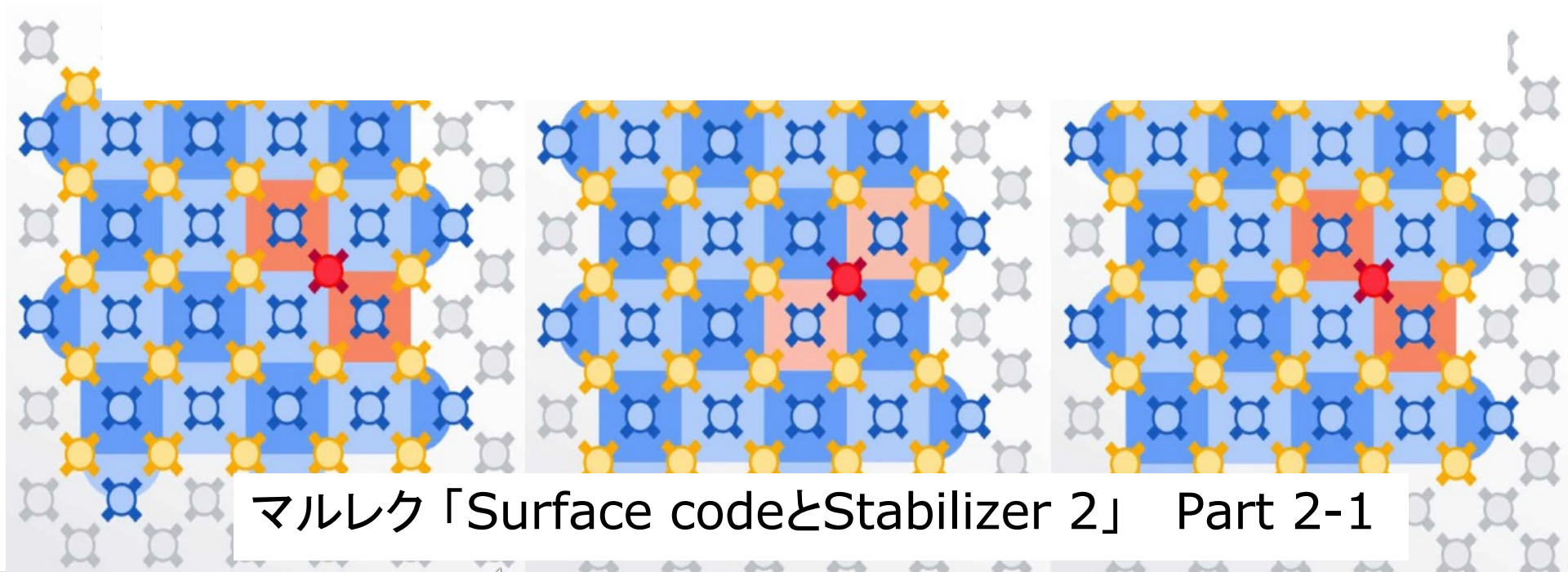
Part 2

Logical qubit と Logical operator

Two-level quantum system
Logical qubit と Logical operator
Quiescent state



Two-level quantum system



マルレク「Surface codeとStabilizer 2」 Part 2-1

Part 2

Logical qubit と Logical operator

Part 2では、Surface code での、Logical qubitとLogical operator を取り上げる。

Logical qubit / Logical operatorという考えの導入は、量子コンピュータでのエラー訂正技術と結びついている。

また、Logical qubit' は、'physical qubit' との対比で用いられる概念である。

Physical qubit と Logical qubit

通常、qubitの状態は、 a, b を $a^2 + b^2 = 1$ を満たす複素数とするとき、次のように表現される。

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$



ある量子エラー訂正コード(Shor code)では、この1-qubitの状態を次の9-qubitの状態にエンコードする。

$$(a|000\rangle + b|111\rangle)^{\otimes 3}$$



この情報は、デコーダによって、最終的には次の元の形に戻される。

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$

Physical qubit と Logical qubit

通常、qubitの状態は、 $a|0\rangle + b|1\rangle$ と表現されるとき、次のように表現される。

この表現は、Physical qubit。

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$



ある量子エラー訂正コード(Shor code)では、この1-qubitの状態を次の9-qubitの状態にエンコードする。

$$(a|000\rangle + b|111\rangle)^{\otimes 3}$$

この情報は、

この表現は、Logical qubit。

次の元のqubitに戻している。

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$

Logical qubitは論理的にPhysical qubitと同じ情報を持つ。

Logical qubitは論理的に Physical qubit と同じ情報を持つ?

ただ、「Logical qubitは論理的にPhysical qubit と同じ情報を持つ」と言っても、それが「**論理的に同じ**」ということの説明は、必ずしも自明ではない。

直感的には、Logical qubitの状態を観測したとき、それと「論理的には等しい」という Physical qubitの状態を観測した時と同じ観測値を返せばいいのだが、Logical qubit の「状態の観測」がどういうものを定義しておく必要がある。

Logical operator

観測値 m は、Observable Obs の固有値なので、Physicalな qubitの状態を $|\psi_{phy}\rangle$ で表し、Logicalな qubitの状態を $|\psi_L\rangle$ で表した時、次の式が成り立つと考えることができるかもしれない。

$$Obs |\psi_{phy}\rangle = m |\psi_{phy}\rangle \iff Obs |\psi_L\rangle = m |\psi_L\rangle$$

ただ、左辺の Obs はエルミートな X や Z でいいのだが、右辺の「**論理的なObservable**」をきちんと定義する必要があることがわかる。

qubitがLogicalなものになるためには、演算子もLogicalなものになる必要がある。

Two-level quantum system

Physical なqubit と Logicalなqubitの「同一性」については、もうすこし洗練されたアプローチがある。

Two-level quantum system (あるいは、Two-state quantum system) という理論がある。

このセッションでは、それを紹介しよう。

Two-level quantum system

Two-level quantum system とは、2つの独立した(物理的に区別可能な)状態の任意の重ね合わせとして存在できる量子系のことである。

このような系を記述するヒルベルト空間は 2次元である。したがって、この空間を張る完全な基底は、2つの独立した状態から構成される。

任意の**Two-level quantum system**は、qubitとしても見ることが出来る。

量子計算は、Two-level quantum systemであるqubitの使用に依存している。

典型的な Two-level quantum systemは磁場中の電子スピんで、多くの用語はここから来ている。電子スピンのすべての量子特性は、Pauli演算子 σ_x 、 σ_y 、 σ_z と恒等式Iの代数によって捉えられる。

量子計算のテキストにならい、qubit演算子 \hat{X} 、 \hat{Y} 、 \hat{Z} を使用する。
ただし、 $\hat{X} = \sigma_x$ 、 $\hat{Y} = i\sigma_y$ 、 $\hat{Z} = \sigma_z$ とする。

qubit演算子の代数は、Pauli演算子の代数とほぼ同じである。

$$\begin{aligned}\hat{X}^2 &= -\hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}, \\ \hat{X}\hat{Z} &= -\hat{Z}\hat{X}, \\ [\hat{X}, \hat{Y}] &\equiv \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} = -2\hat{Z},\end{aligned}$$

この関係式を満たすTwo-level quantum systemは、原則としてすべてqubitとして使用できる。

実際、この関係式を満たす \hat{X} 演算子と \hat{Z} 演算子を定義できるシステムであれば、たとえそのシステムが2つ以上の自由度を有していても、qubitとして使用できる。

ふりかえり

qubitに作用する演算子の性質

交換関係

量子論の演算子Aと演算子Bは、演算の順序を交換して積を作ると同じ値になるとは限らない。一般には、 $AB = BA$ は成り立たない。例えば、Pauliの演算子、 X, Z では、 $XZ = -ZX$ になる。

$$[AB, BA] = AB - BA$$

と定義して、これを演算子A, Bの交換関係と呼ぶ。

演算子の積のノテーション

添字なし $\hat{X}\hat{Z}$

この場合、二つの演算子は、同一のqubitに対して作用する。
それぞれの演算子は 2×2 の行列で表現され、二つの演算子の積は、これらの 2×2 の行列の積として、 2×2 の行列で表現される。

サンプル

$$\begin{aligned}\hat{X}\hat{Z} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ \hat{Z}\hat{X} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

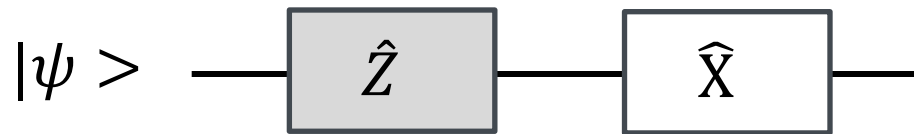
$$\hat{X}\hat{Z} = -\hat{Z}\hat{X}$$

$$[\hat{X}\hat{Z}, \hat{Z}\hat{X}] \neq 0$$

演算子の積のノテーション

添字なし $\hat{X}\hat{Z}$

$$\hat{X}\hat{Z} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \hat{X}\hat{Z}|\psi\rangle$$



$$\hat{Z}\hat{X} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \hat{Z}\hat{X}|\psi\rangle$$



演算子の積のノテーション

添字付き $\hat{X}_a \hat{X}_b, \hat{Z}_a \hat{Z}_b$

このハット付き添字付きの演算子 $\hat{X}_a \hat{X}_b, \hat{Z}_a \hat{Z}_b$ は、異なる qubit a, b に作用する。

演算子 $\hat{X}_a \hat{X}_b$ は、二つの演算子 \hat{X}_a, \hat{X}_b のテンソル積 $\hat{X}_a \otimes \hat{X}_b$ を表現し、演算子 $\hat{Z}_a \hat{Z}_b$ はテンソル積 $\hat{Z}_a \otimes \hat{Z}_b$ を表現する。

これらの演算子は、4次元のベクトル空間に作用する。

サンプル

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ の時

$$\hat{X}_a \hat{X}_b |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

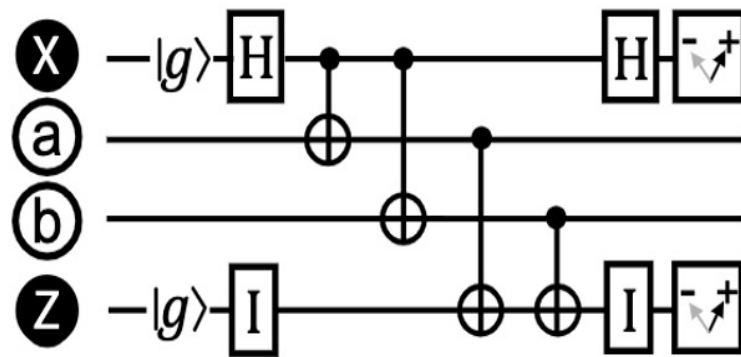
$$\hat{Z}_a \hat{Z}_b |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$\hat{Z}_a \hat{Z}_b, \hat{X}_a \hat{X}_b$ の交換関係

$$\begin{aligned}
 [\hat{X}_a \hat{X}_b, \hat{Z}_a \hat{Z}_b] &= (\hat{X}_a \hat{X}_b)(\hat{Z}_a \hat{Z}_b) - (\hat{Z}_a \hat{Z}_b)(\hat{X}_a \hat{X}_b) \\
 &= \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{Z}_a \hat{Z}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b \\
 &= \hat{X}_a \hat{Z}_a \hat{X}_b \hat{Z}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b && \hat{X}_b \hat{Z}_a = \hat{Z}_a \hat{X}_b \\
 &= \hat{X}_a \hat{Z}_a \hat{X}_b \hat{Z}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b && \hat{X}_a \hat{Z}_a = -\hat{Z}_a \hat{X}_a \\
 &= -\hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{Z}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b && \hat{X}_b \hat{Z}_b = -\hat{Z}_b \hat{X}_b \\
 &= -\hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_b \hat{X}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b && \hat{X}_a \hat{Z}_b = \hat{Z}_b \hat{X}_a \\
 &= \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_b \hat{X}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b \\
 &= \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b \\
 &= \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b - \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$[\hat{X}_a \hat{X}_b, \hat{Z}_a \hat{Z}_b] = 0$$

$\hat{Z}_a \hat{Z}_b, \hat{X}_a \hat{X}_b$ の固有値と固有状態 $|\psi\rangle$



$\hat{Z}_a \hat{Z}_b$ 固有値

$\hat{X}_a \hat{X}_b$ 固有値

共通の固有状態 $|\psi\rangle$

+1

+1

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

+1

-1

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle)$$

-1

+1

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

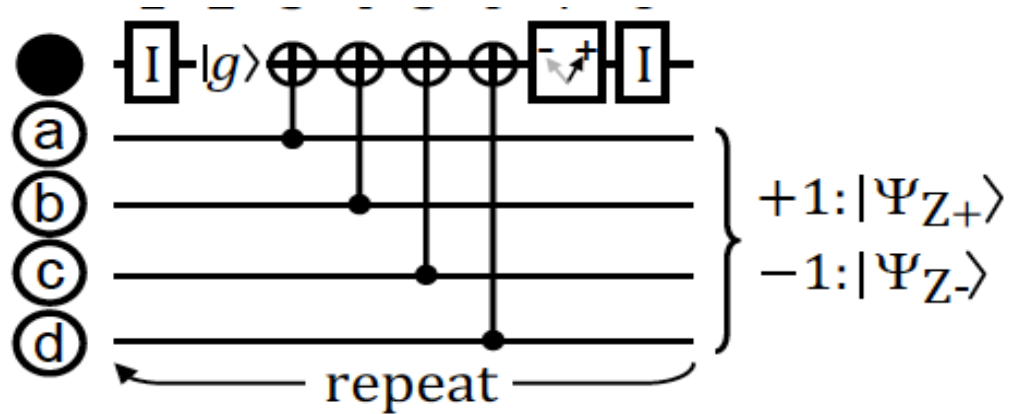
-1

-1

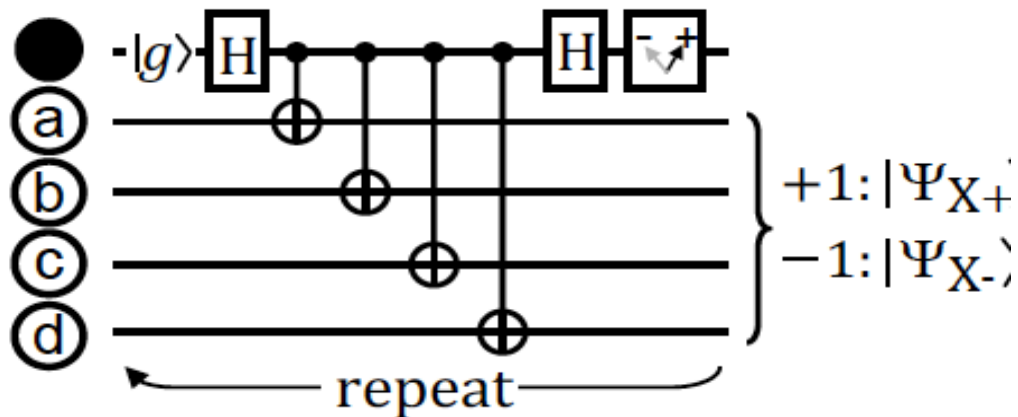
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$ と $\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$ の固有値と固有状態

Z-Measure qubit

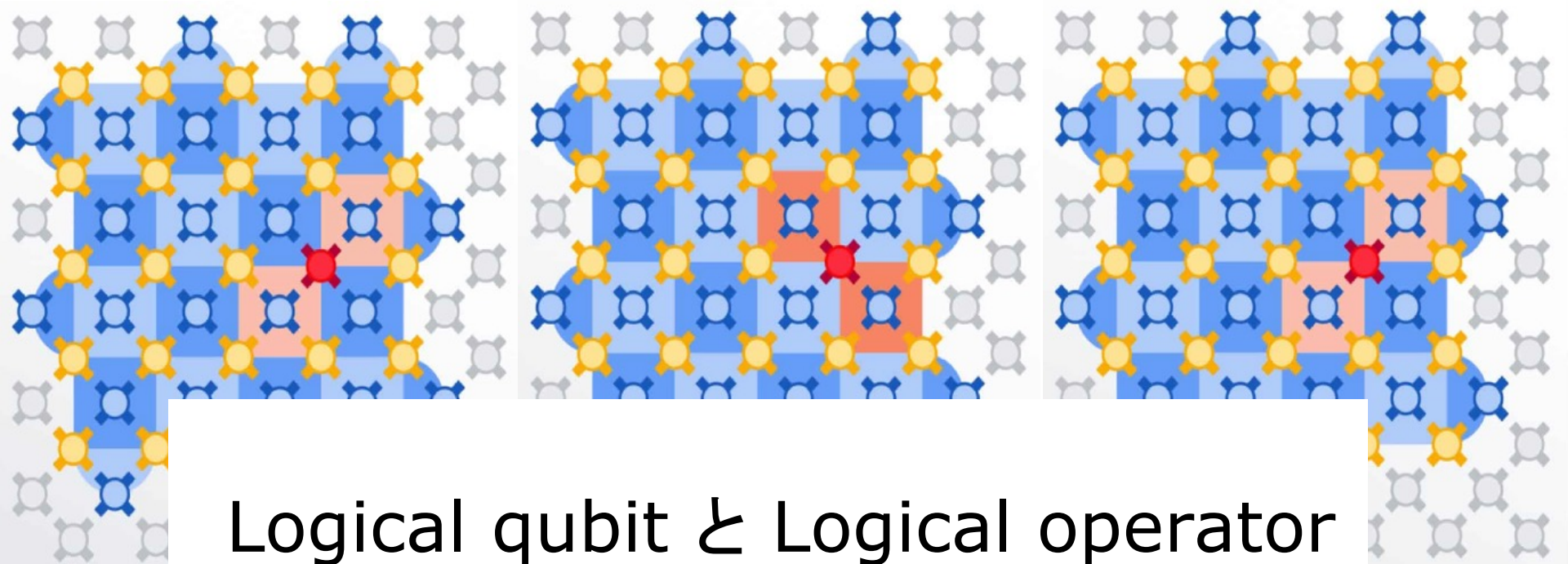


X-Measure qubit

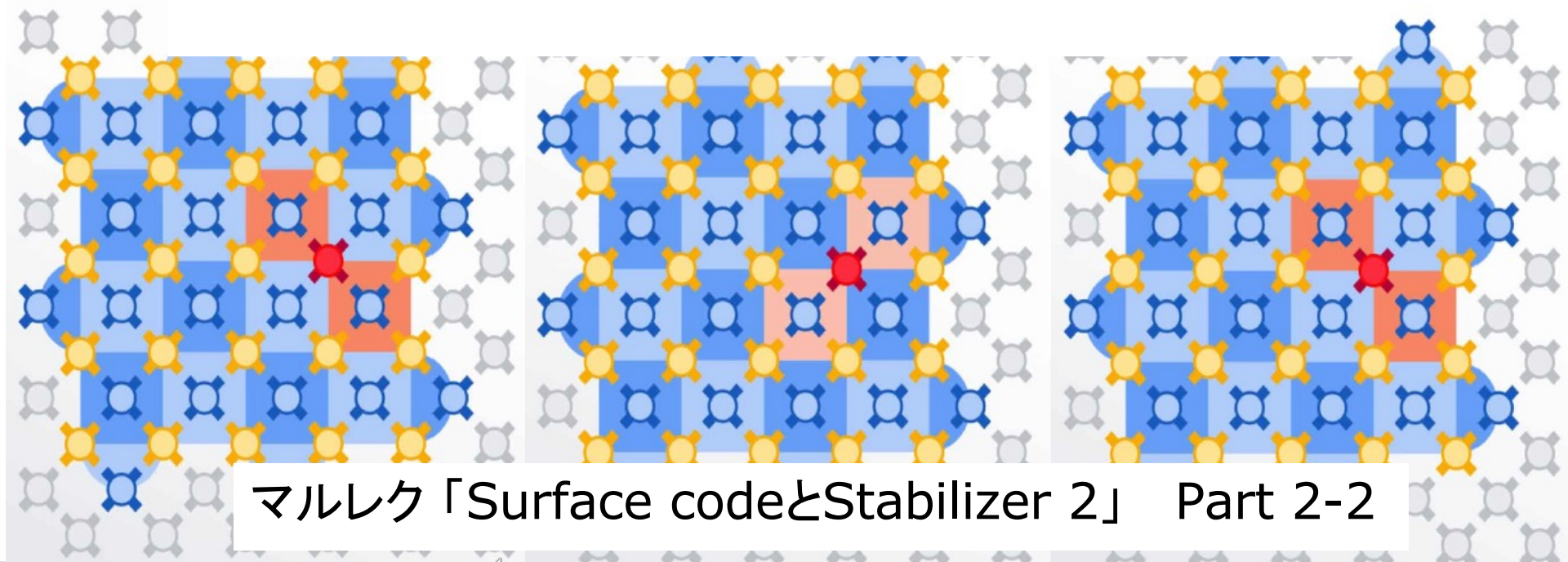


$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$ と $\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$ の固有値と固有状態

Eigenvalue	$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$	$\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$
+1	$ gggg\rangle$	$ ++++\rangle$
	$ ggee\rangle$	$ ++--\rangle$
	$ geeg\rangle$	$ +--+\rangle$
	$ eegg\rangle$	$ - - ++\rangle$
	$ egge\rangle$	$ - ++-\rangle$
	$ gege\rangle$	$ + - + -\rangle$
	$ egeg\rangle$	$ - + - +\rangle$
	$ eeee\rangle$	$ - - - -\rangle$
-1	$ ggge\rangle$	$ +++-\rangle$
	$ ggeg\rangle$	$ ++-+\rangle$
	$ gegg\rangle$	$ +-++\rangle$
	$ eggg\rangle$	$ - +++\rangle$
	$ geee\rangle$	$ + ---\rangle$
	$ egee\rangle$	$ - + --\rangle$
	$ eege\rangle$	$ - - + -\rangle$
	$ eeeg\rangle$	$ - - - +\rangle$



Logical qubit と Logical operator



マルレク「Surface codeとStabilizer 2」 Part 2-2

'Two-level quantum system'

続き

前回のセッションでは、'Two-level quantum system' という考え方を紹介しました。

それは、「量子システム」というものの特徴は、現実の量子の世界が作り出す物理的なシステムだけの特征ではないということを述べているものです。

それは、「二つの異なる状態」がきちんと論理的に定義できれば、いくつかの手順が必要ですが、それをベースに、物理的な「量子システム」と同じ振る舞いをする、「量子システム」を論理的に構成できるということです。

Logical qubit の定義

出発点の論理的に定義された二つの状態を $|0_L\rangle$ と $|1_L\rangle$ から、としましょう。ここでの添字 'L' は、これがLogical に定義されたものであることを表しています。

これから、 $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ である a, b をとって、

$$|\psi_L\rangle = a|0_L\rangle + b|1_L\rangle$$

とすれば、それが **Logical qubit** $|\psi_L\rangle$ の定義になります。

Logical operator Z_L, X_L の定義を探す

ただ、Logical qubit $|\psi_L\rangle$ を定義すれば、それで「論理的な量子システム」が出来上がるわけではありません。

Logical qubitに作用する、Logicalな演算子の定義が必要です。
基本的なPauli演算子 Z, X のLogical化を考えてみましょう。

物理的な量子の世界では、次の式が成り立ちます。

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \text{ の時}$$

$$Z|\psi\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle$$

$$X|\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$$

Logical operatorの Logical qubitへの作用

それでは、先の式を次のように変えてみましょう。

$$\begin{aligned} |\psi_L\rangle &= a|0_L\rangle + b|1_L\rangle \text{ の時} \\ Z_L|\psi_L\rangle &= a|0_L\rangle - b|1_L\rangle \\ X_L|\psi_L\rangle &= b|0_L\rangle + a|1_L\rangle \end{aligned}$$

確かに、この定義は、Logical operator Z_L, X_L の Logical qubit $|\psi_L\rangle$ への「作用」を表現するものとして利用できるかもしれません。

ただ、それは、構成的に Logical operator Z_L, X_L の定義を直接的に与えるものではありません。

別の関係を探してみましょう。

物理的な量子の世界では、次の式が成り立ちます。

Zについては

$$Z|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Xについては

$$|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$$

とすると

$$X|+\rangle = |-\rangle$$

$$X|-\rangle = |+\rangle$$

Logical operatorの固有値

先の式から、構成されたLogical operator Z_L, X_L について、次の関係が成り立つと予想できます。

$$\begin{aligned}Z_L|0_L\rangle &= |0_L\rangle \\Z_L|1_L\rangle &= -|1_L\rangle\end{aligned}$$

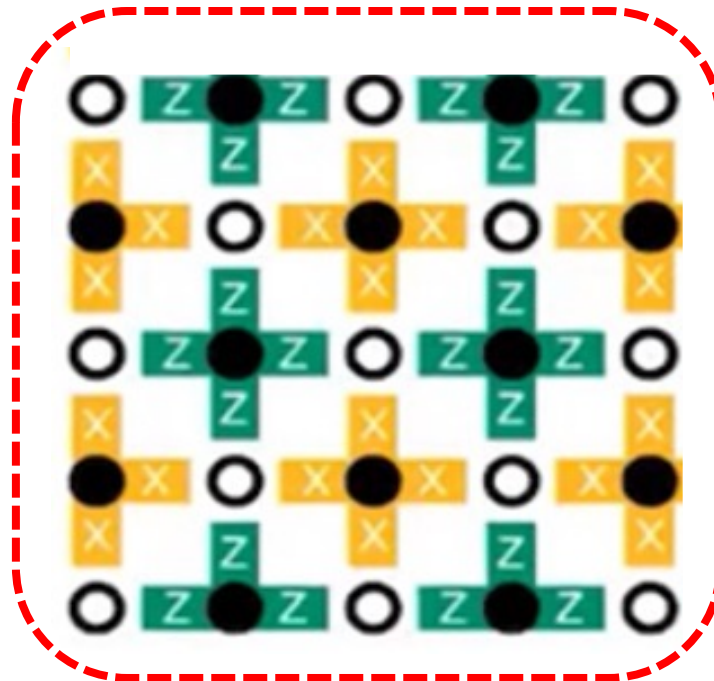
$$\begin{aligned}X_L|+_L\rangle &= |+_L\rangle \\X_L|-_L\rangle &= -|-_L\rangle\end{aligned}$$

これらの式は、Logical operator Z_L, X_L の固有値と固有ベクトルについてに情報を与えているのですが、その構成的な定義を与えるものではありません。

Surface code での Logical qubit の例

少し説明は後回しになりますが、Surface code での Logical qubit の形が、どういうものかの例を一つ紹介しようと思います。

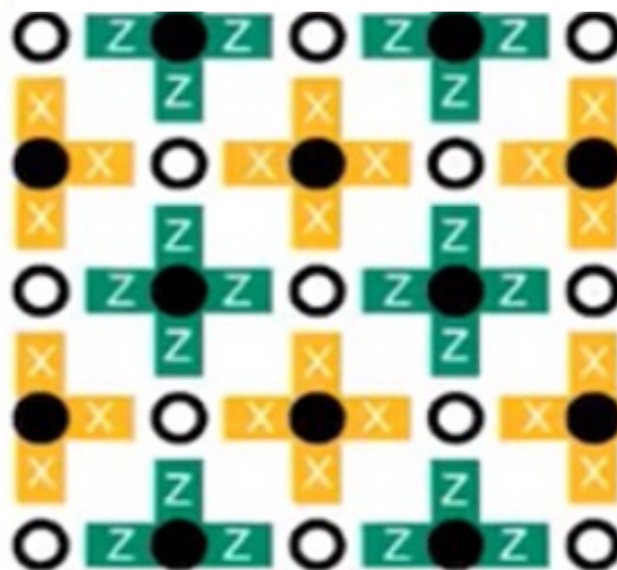
こういう形をしています。(一つの例です)



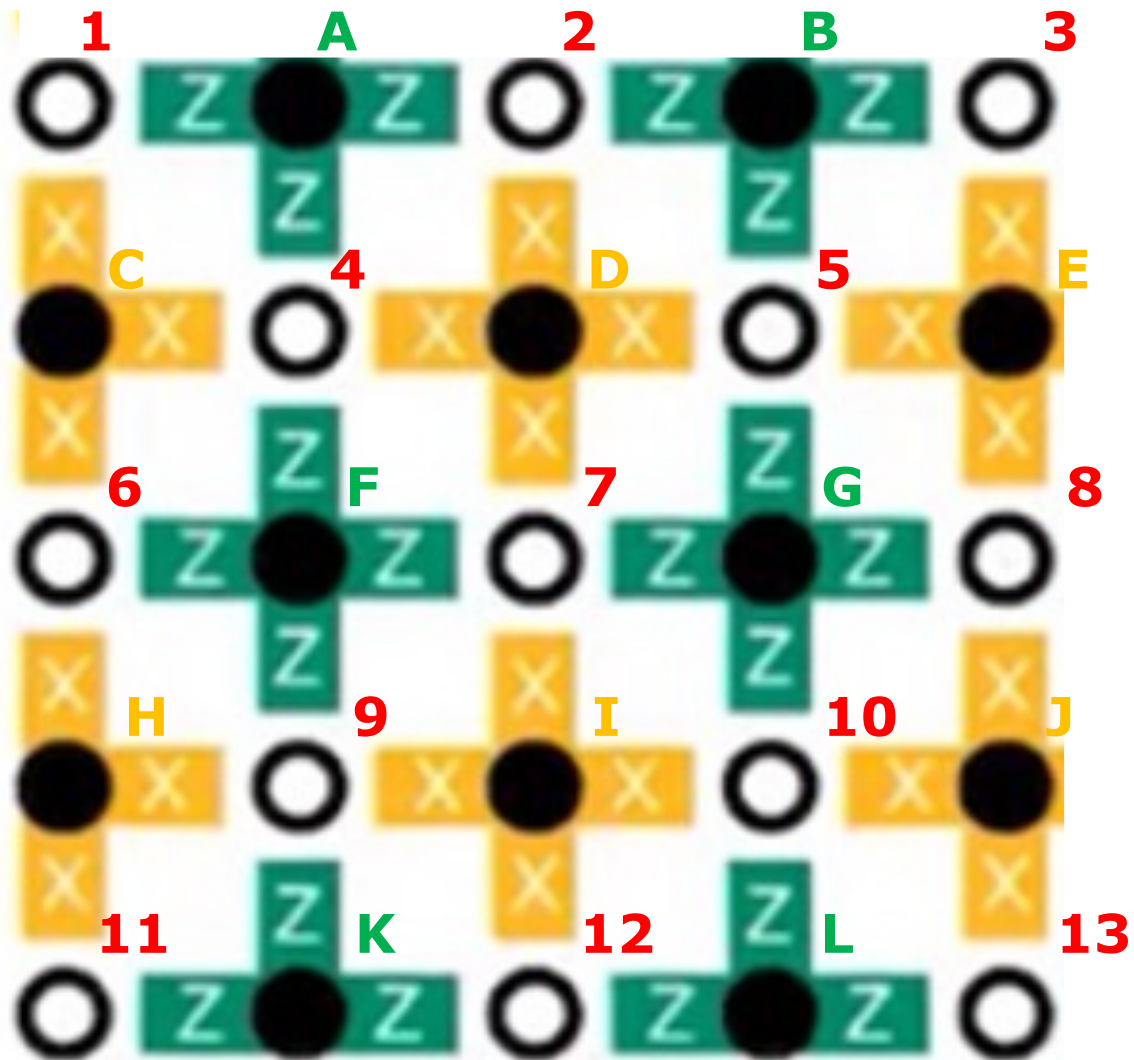
Surface code での
Logical qubit の形

このSurface codeでのLogical qubitには、13個のdata qubit と 12個の measure qubit が含まれています。12個の measure qubitのうち、6個が Z-measure qubitで 6個が X-measure qubit です。

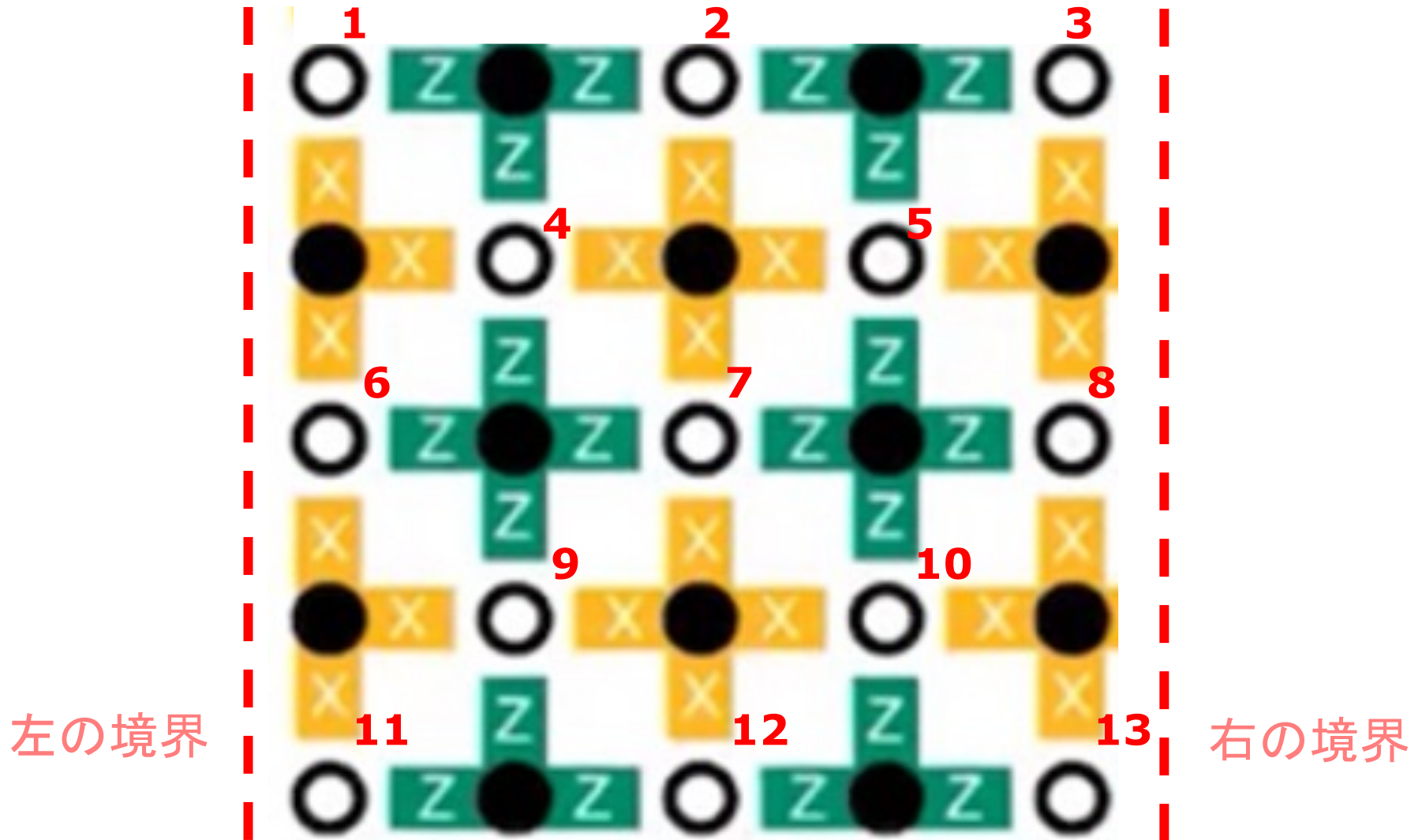
直感的には、ここに含まれる13個のphysicalなdata qubitから 一個の Logical qubitが構成されていると考えていいと思います。



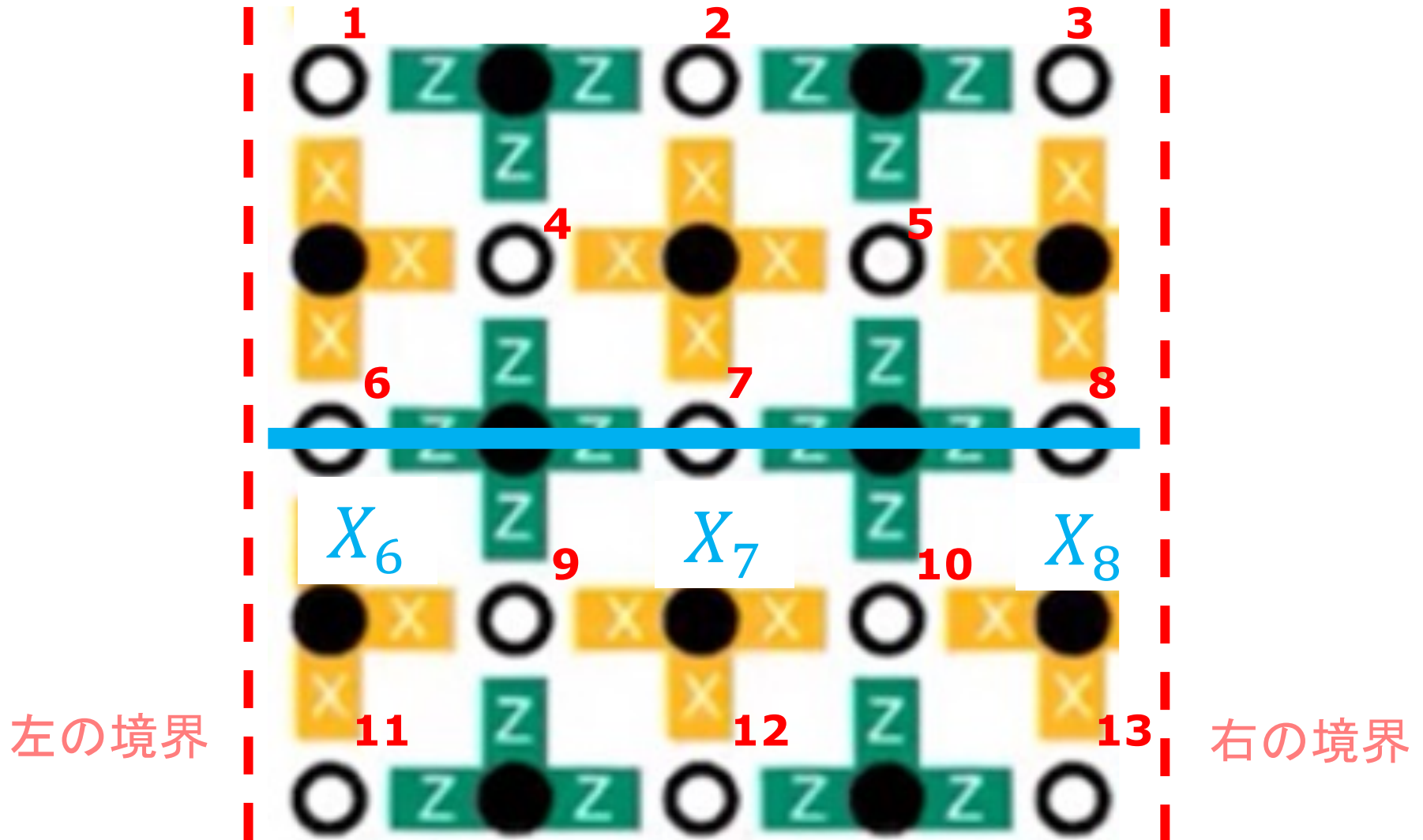
data qubit に名前をつける



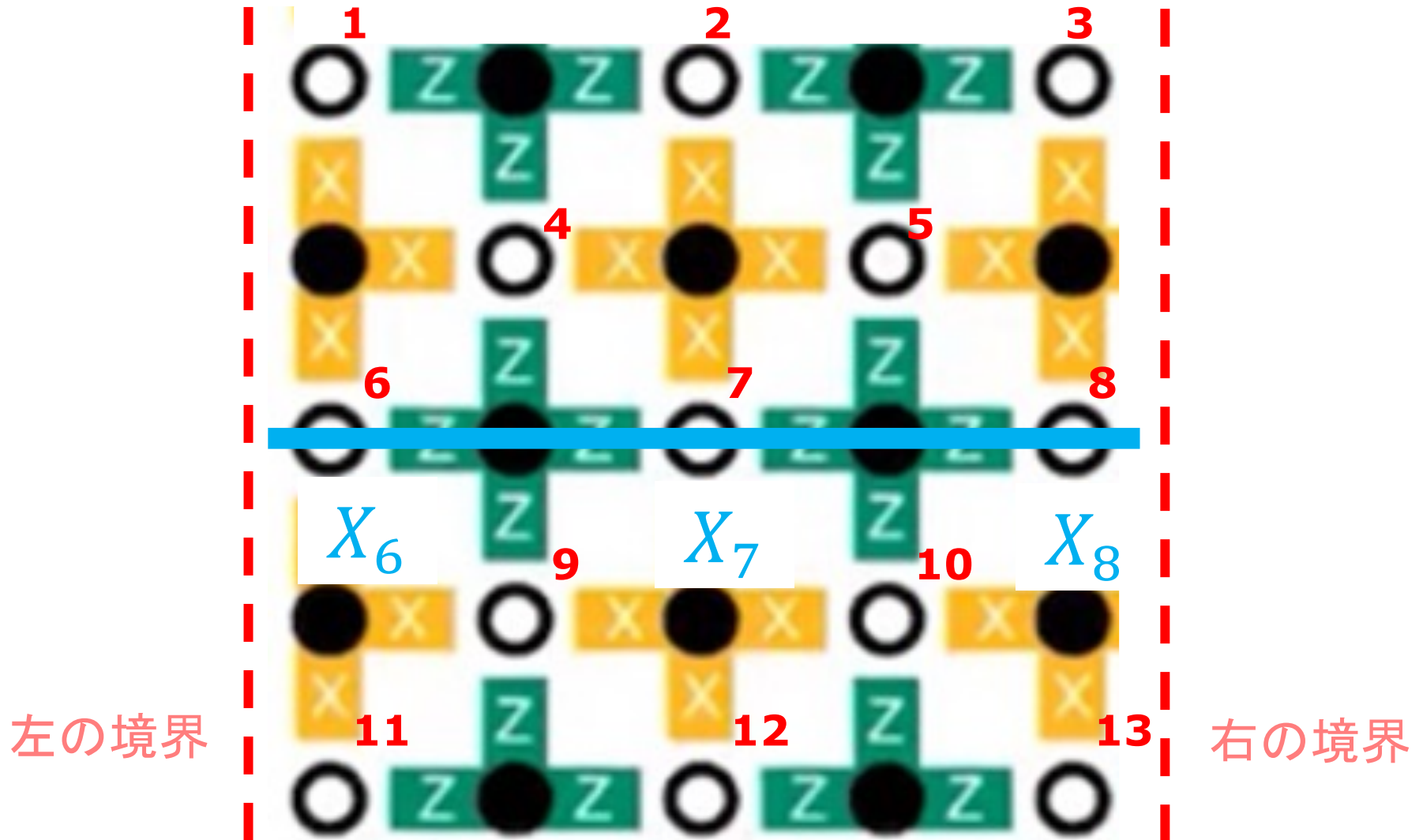
左の境界から右の境界までの
緑の直線上のdata qubitにXを作用させる



左の境界から右の境界までの
緑の直線上のdata qubitにXを作用させる

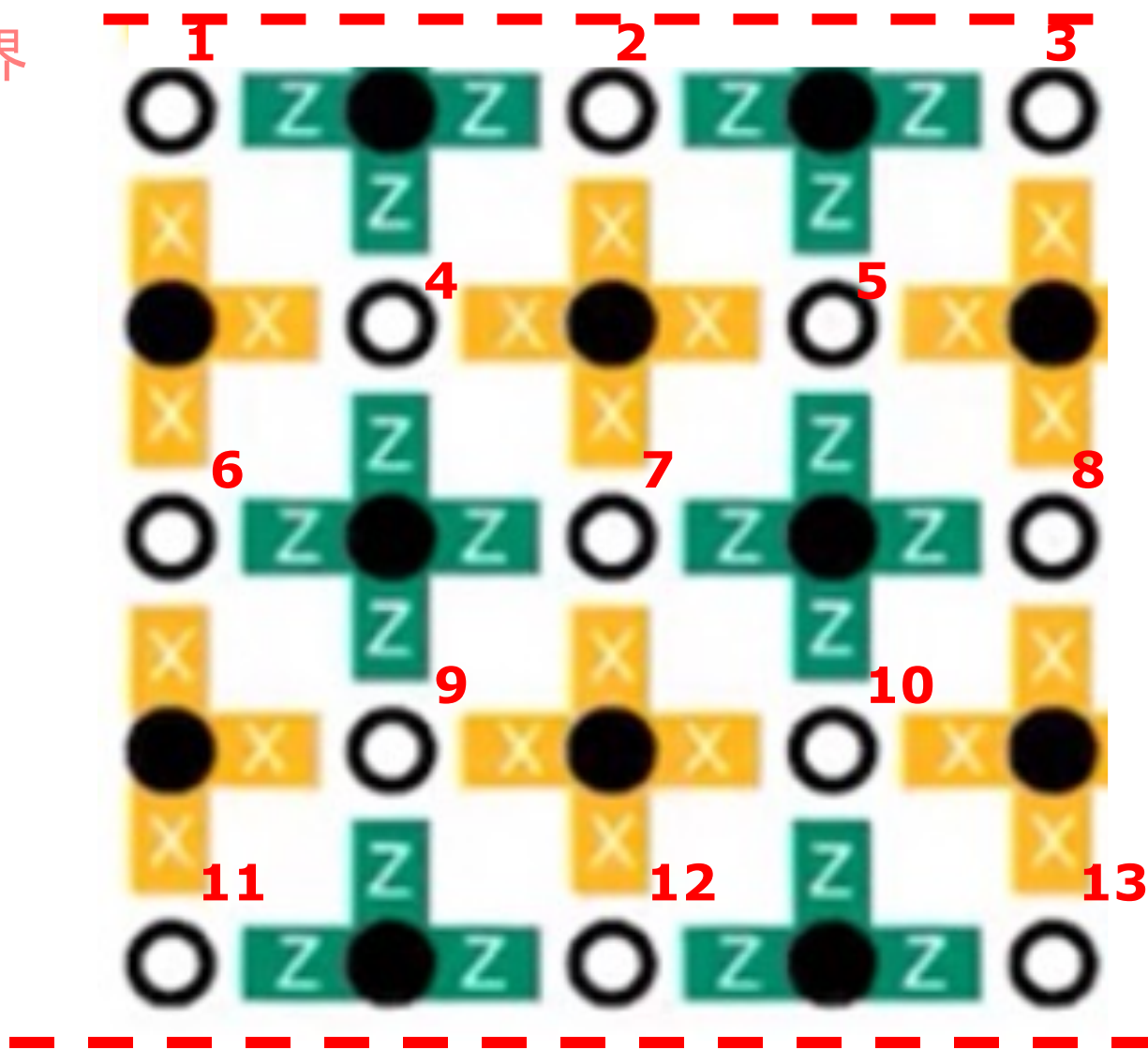


この時、 $X_L = X_6 \otimes X_7 \otimes X_8$ と定義する



上の境界から下の境界までの
黄色の直線上のdata qubitにZを作用させる

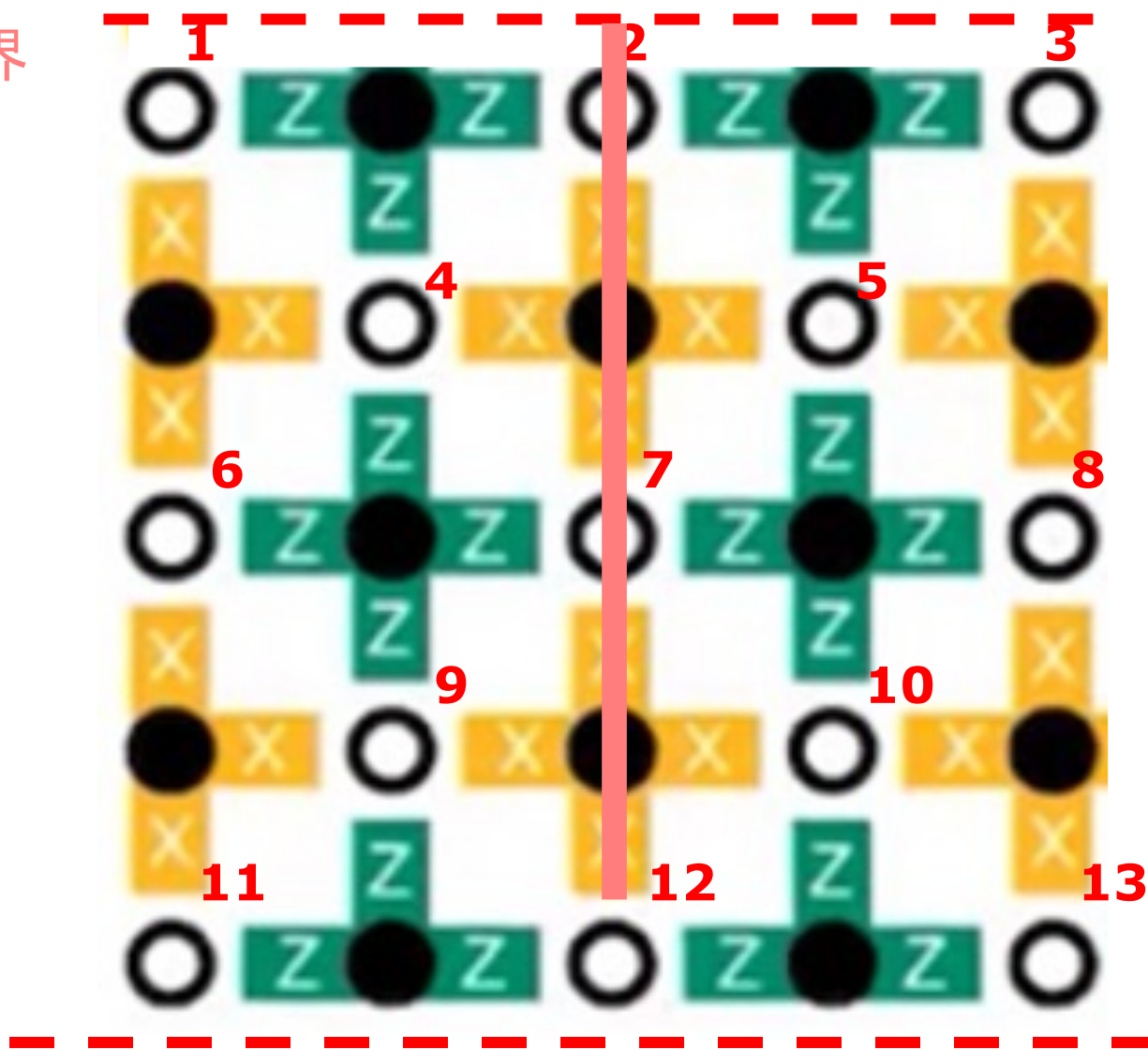
上の境界



下の境界

上の境界から下の境界までの
黄色の直線上のdata qubitにZを作用させる

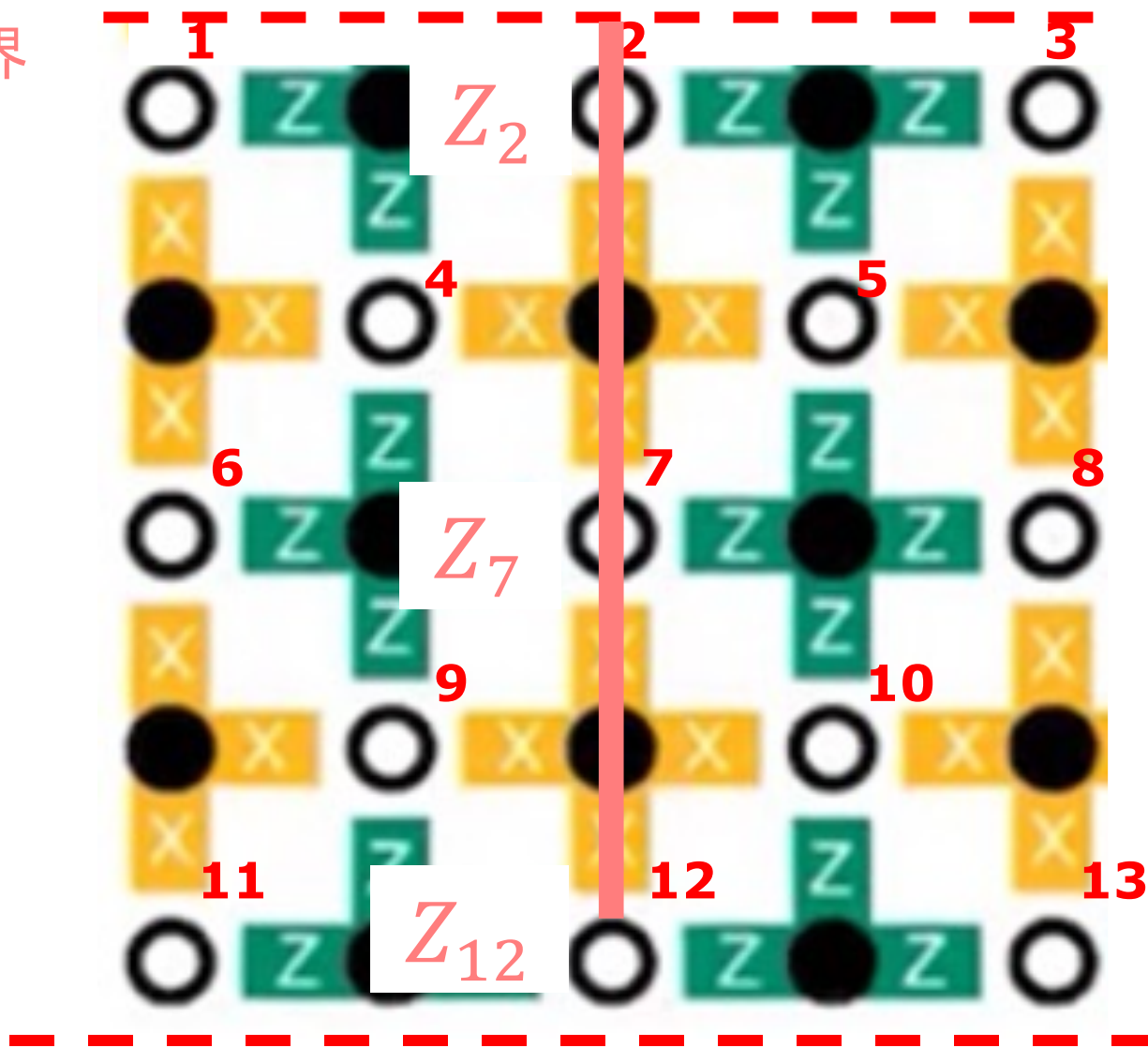
上の境界



下の境界

上の境界から下の境界までの
黄色の直線上のdata qubitにZを作用させる

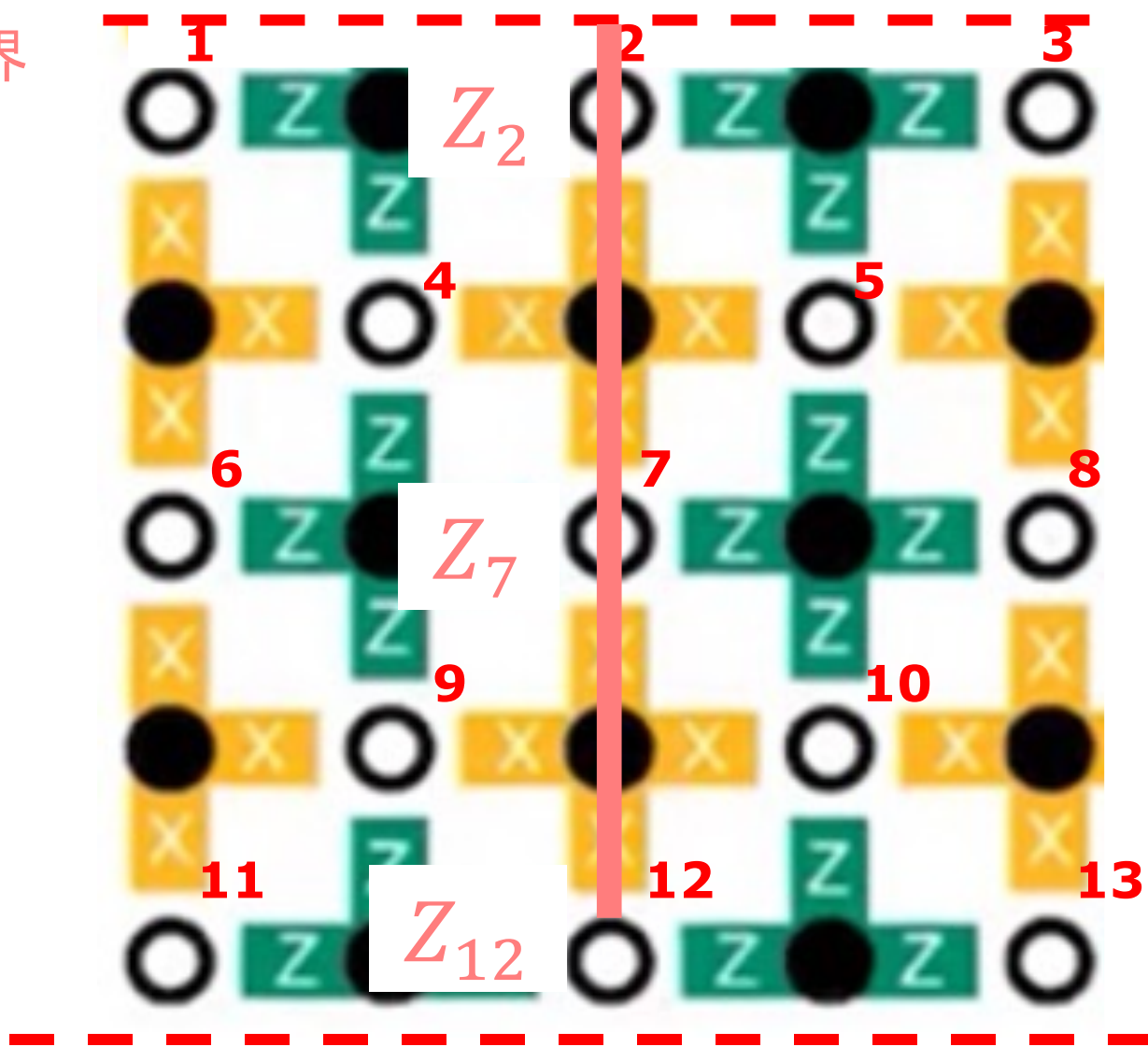
上の境界



下の境界

この時、 $Z_L = Z_2 \otimes Z_7 \otimes Z_{12}$ と定義する

上の境界



下の境界

これが、Logical operator Z_L, X_L の定義？

$$X_L = X_6 \otimes X_7 \otimes X_8$$
$$Z_L = Z_2 \otimes Z_7 \otimes Z_{12}$$

これが、Logical operator Z_L, X_L の定義になるのでしょうか？

確かに、それまでのLogical operator Z_L, X_L のLogical qubit に対する作用や、Logical operator Z_L, X_L の固有値や固有ベクトルを示すだけの情報と比べれば、この定義の定義の手順は極めて具体的で構成的です。

具体的すぎませんか？

でも、「具体的すぎる」という批判は当たりません。

なぜなら、Logical operatorの定義は、Logical qubitの具体的な構成に応じて、具体的に決まるものだからです。

ここでのLogical operatorの定義は、Surface code での Logical qubitの定義に対応したものです。

ただ、問題があります。これまでの説明からは、こうして構成された Z_L, X_L が、量子システムとして満たすべき、一般的なルールを満たすことは、説明されていません。

でも、それは、僕が説明を省略したからです。

おいおい、説明していきたいと思います。

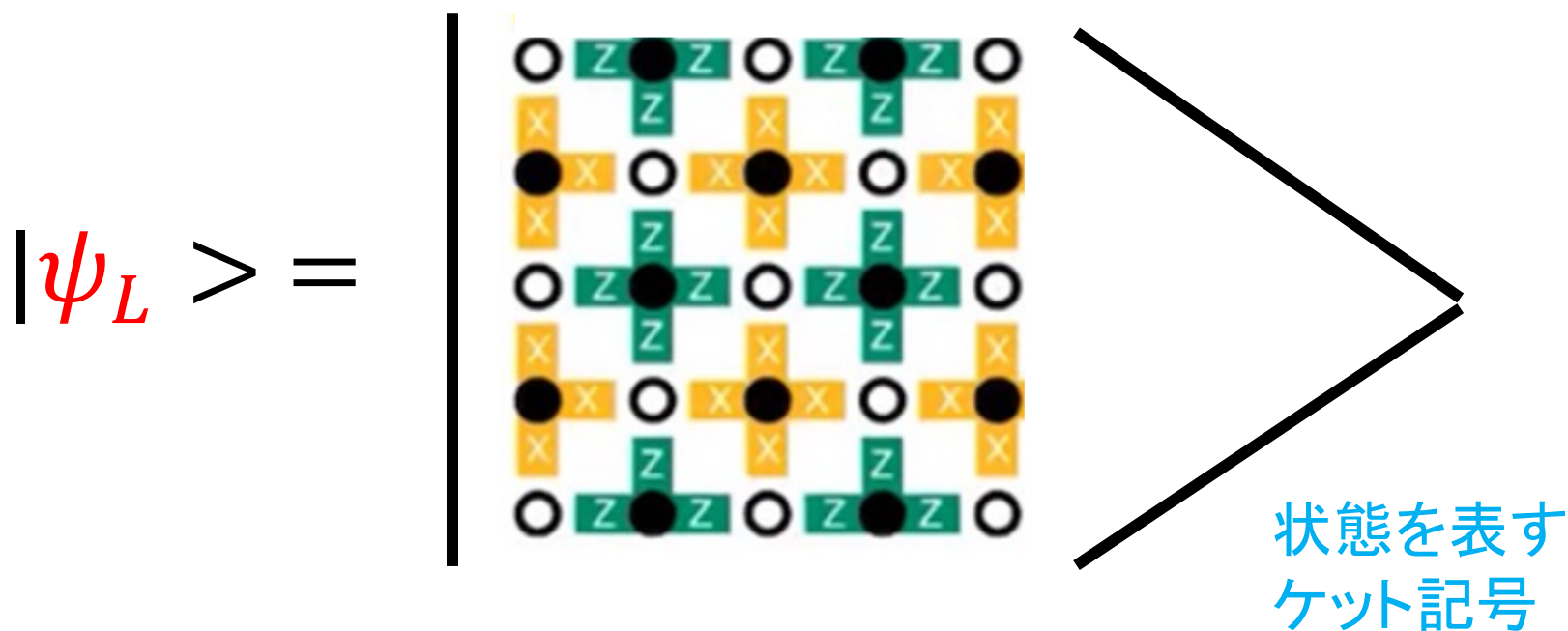
two-level quantum systemと Surface codeでのLogical qubit の定義

説明の不足についてですが、最も基本的な問題は、two-level quantum system では、「二つの異なる状態」がきちんと論理的に定義できれば、Logical qubitは簡単に作れると言いながら、そのこととの関係で、Surface code での Logical qubit の構成についてきちんと触れていないことです。

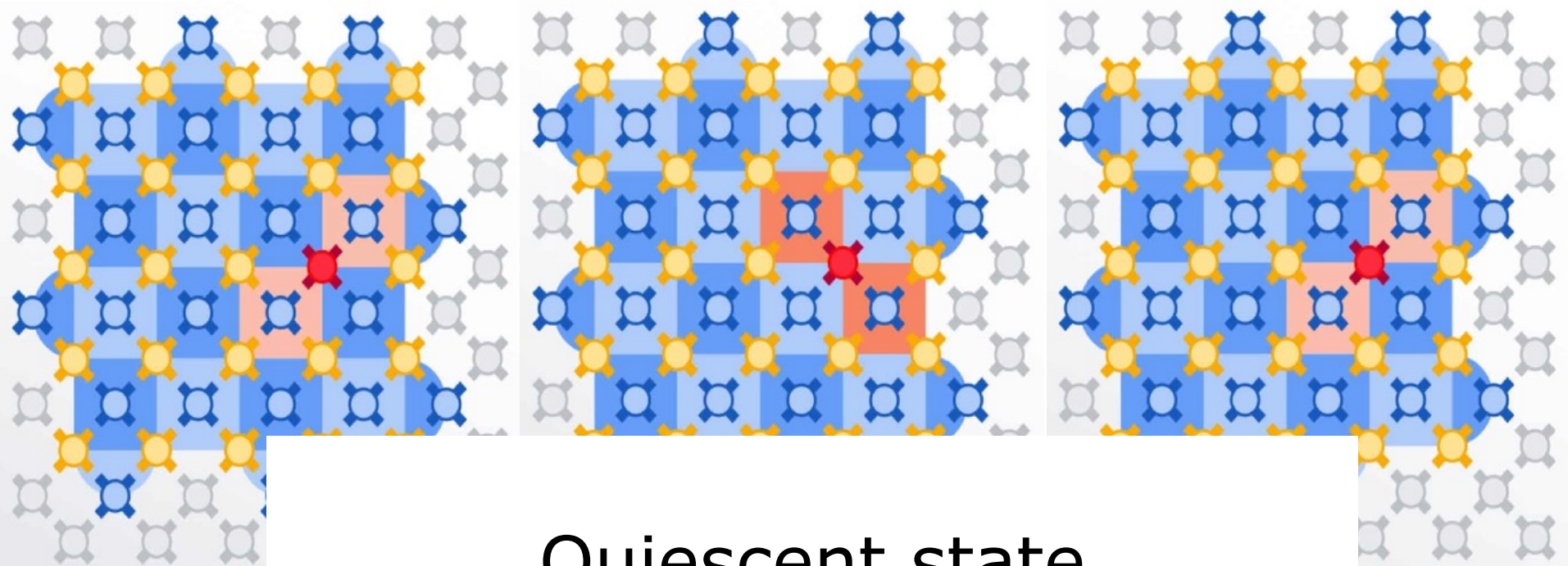
それについても、おいおい触れていきますが、今回は、そのイメージだけを示したいと思います。

Surface codeでの Logical qubit の状態 $|\psi_L\rangle$ のイメージ

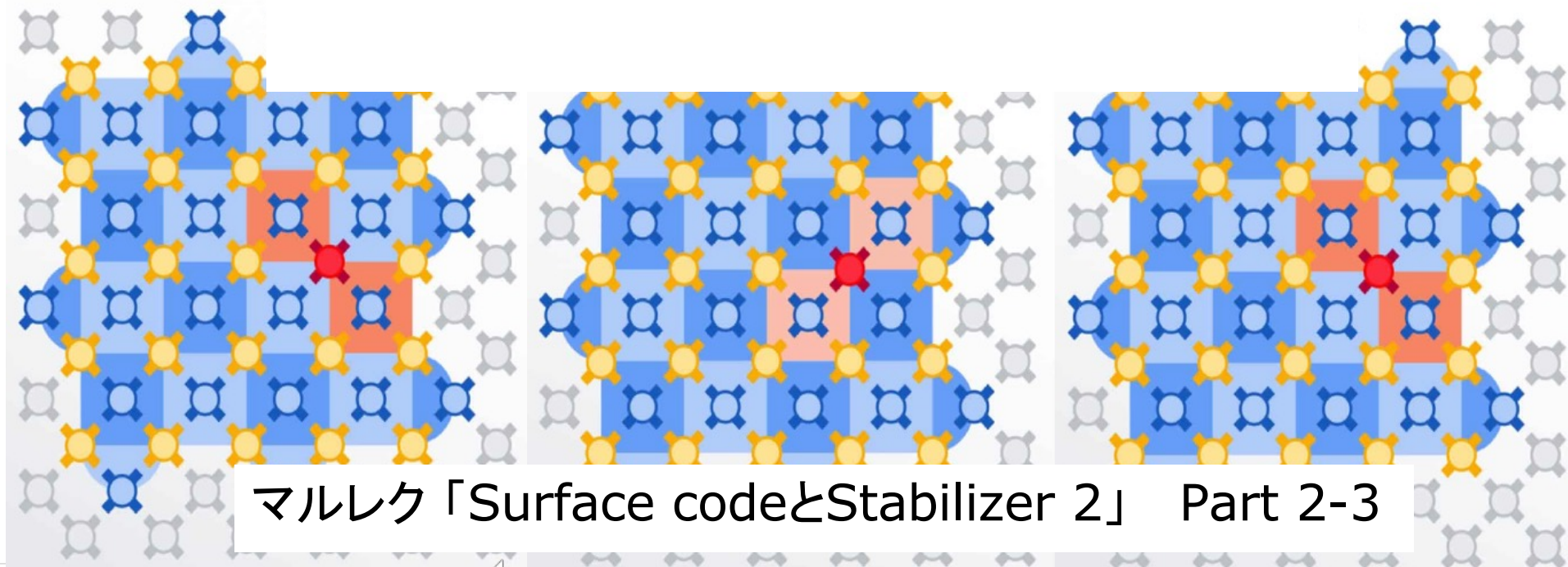
Logical qubit の状態 $|\psi_L\rangle$ は、Logical qubitを表す回路全体の状態で表現される。



問題は、この状態が、基本的には「二つの状態」
に類別できるのかということである。



Quiescent state



マルレク「Surface codeとStabilizer 2」 Part 2-3

Quiescent state

“Quiescent state”は、「静止状態」とでも訳すのがいいかもしれませんが、その状態は、全く反応のない動きが停止している状態とは違います。

というのも、それは、Stabilizerの動的な働きによって生み出され、Stabilizerの活動によって安定した状態に保たれているからです。いわば、「動中の静」ともいうべき状態です。

2-qubit、4-qubitに作用するStabilizerが生み出す Quiescent stateについては、すでに何回かみています。改めて、それを確認しようと思います。

2-qubitに作用するStabilizerが 生み出すquiescent state

結論部分だけを述べます。

$\hat{Z}_a \hat{Z}_b$	$\hat{X}_a \hat{X}_b$	$ \psi\rangle$
+1	+1	$(gg\rangle + ee\rangle) / \sqrt{2}$
+1	-1	$(gg\rangle - ee\rangle) / \sqrt{2}$
-1	+1	$(ge\rangle + eg\rangle) / \sqrt{2}$
-1	-1	$(ge\rangle - eg\rangle) / \sqrt{2}$



quiescent state

4-qubitに作用するStabilizer

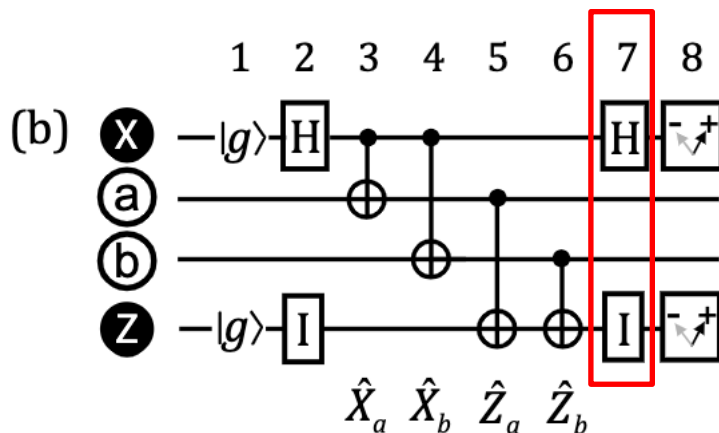
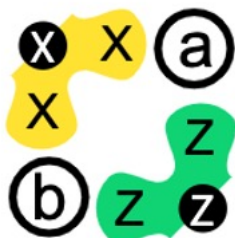
Eigenvalue	$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$	$\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$
+1	$ gggg\rangle$	$ ++++\rangle$
	$ ggee\rangle$	$ ++--\rangle$
	$ geeg\rangle$	$ +- - +\rangle$
	$ eegg\rangle$	$ - - ++\rangle$
	$ egge\rangle$	$ - ++ -\rangle$
	$ gege\rangle$	$ + - + -\rangle$
	$ egeg\rangle$	$ - + - +\rangle$
	$ eeee\rangle$	$ - - - -\rangle$
-1	$ ggge\rangle$	$ +++ -\rangle$
	$ ggeg\rangle$	$ ++ - +\rangle$
	$ gegg\rangle$	$ + - + +\rangle$
	$ eggg\rangle$	$ - + + +\rangle$
	$ geee\rangle$	$ + - - -\rangle$
	$ egee\rangle$	$ - + - -\rangle$
	$ eege\rangle$	$ - - + -\rangle$
	$ eeeg\rangle$	$ - - - +\rangle$

前のページのテーブルは、二つのStabilizer $Z_a Z_b$ と $X_a X_b$ の働きをまとめたものです。

このテーブルは、Z-measure qubitとX-measure qubitの単独でのStabilizerの働きをまとめたものです。

この表の16個の行に対応して、16個のquiescent state が存在します。

Stabilizer $\hat{X}_a \hat{X}_b, \hat{Z}_a \hat{Z}_b$



第一レジスタ M_X

第二・第三レジスタ a, b

第四レジスタ M_Z

$$|\psi_7\rangle =$$

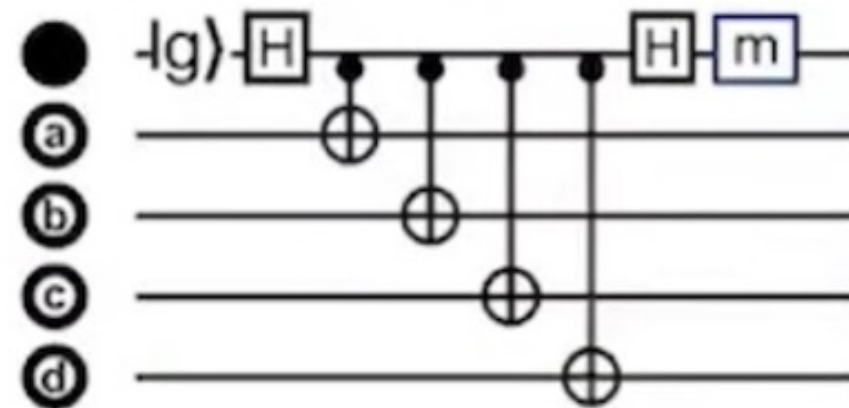
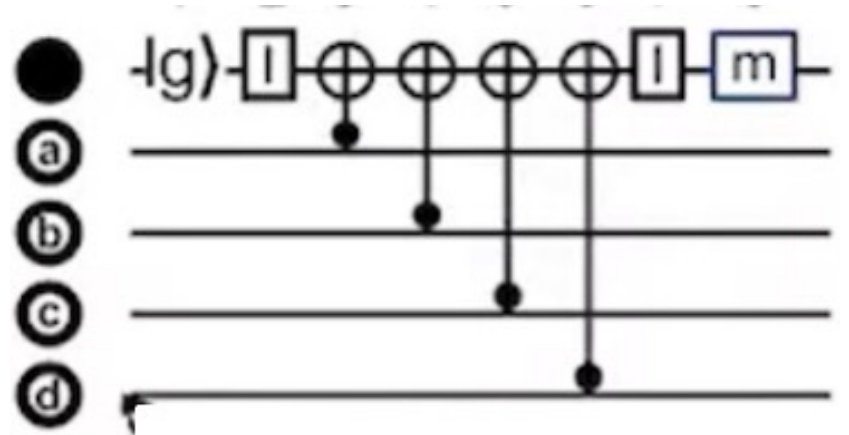
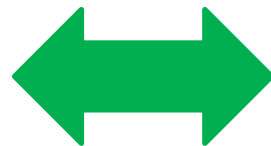
$$\begin{aligned}
 &= (A + D) |0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes |0\rangle \\
 &+ (A - D) |1\rangle \otimes (|00\rangle - |11\rangle) \otimes |0\rangle \\
 &+ (B + C) |0\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle) \otimes |1\rangle \\
 &+ (B - C) |1\rangle \otimes (|01\rangle - |10\rangle) \otimes |1\rangle
 \end{aligned}$$

第一レジスタ
 M_X

第二・第三レジスタ
a, b

第四レジスタ
 M_Z

Measure qubit $\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$



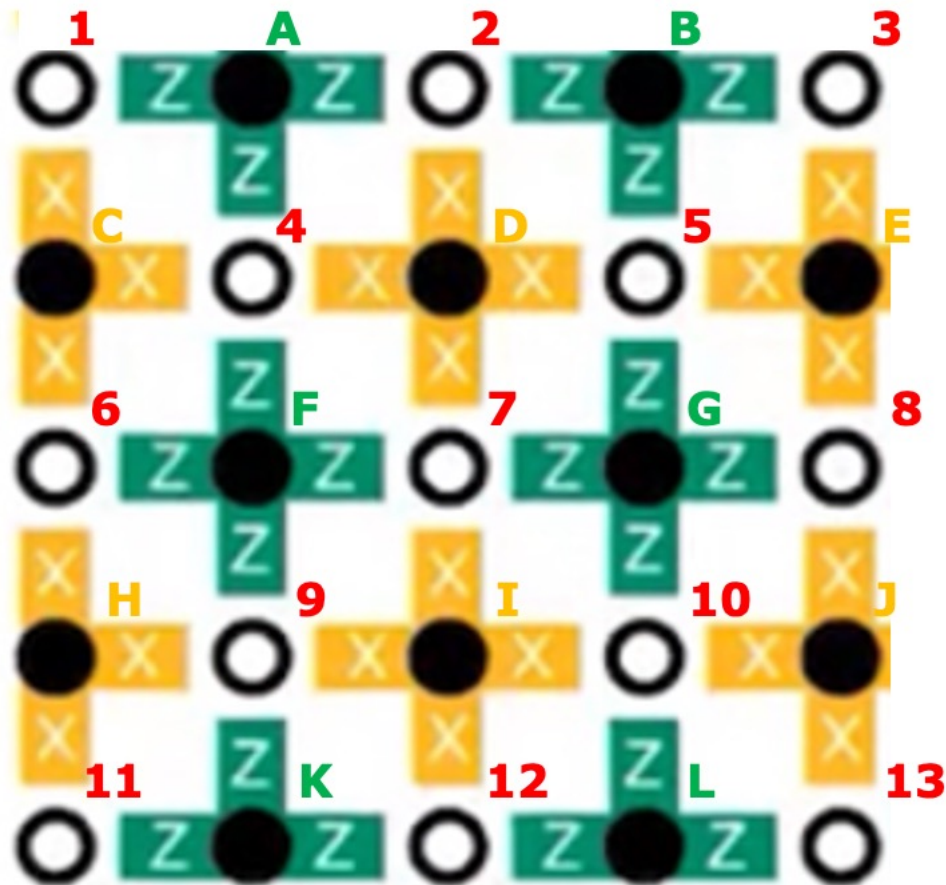
Quiescent stateの形成

先の図では、Z-measure でも X-measureでも、4つの qubit a, b, c, d という名前が使われていたが、これらが同時にZ-measure qubitとX-measure qubitの対象になることはない。

ただし、Surface codeのqubitの配置を見ると、二つの qubitが、Z-measure qubitとX-measure qubitによって共有されていることがわかる。以下、そのことを見ていこう。

しかも、こうした二つのqubit ペアの共有は、回路全体で行われている。こうした時、系全体で Quiescent stateは、どのように形成されるのであろうか？

Z-measure $\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$
 X-measure $\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$ の配置



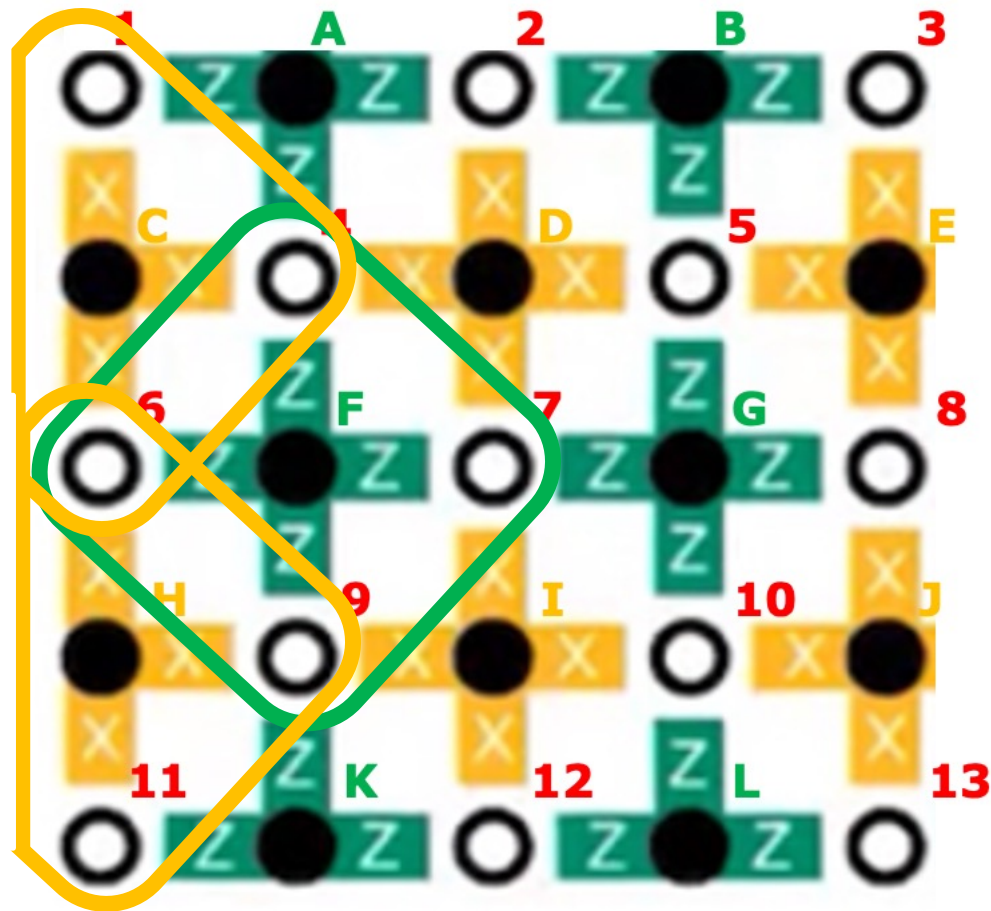
二つのqubit a, b を共有している
X-measure qubit と Z-measure qubit

a, b 以外の添字を持つものは、積の中を自由に移動できる。

$$\begin{aligned}
 & [\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d, \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_e \hat{Z}_f] \\
 &= (\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d)(\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_e \hat{Z}_f) - (\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_e \hat{Z}_f)(\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d) \\
 &= (\hat{X}_a \hat{Z}_a)(\hat{X}_b \hat{Z}_b) \hat{X}_c \hat{X}_d \hat{Z}_e \hat{Z}_f \\
 &\quad - (\hat{Z}_a \hat{X}_a)(\hat{Z}_b \hat{X}_b) \hat{X}_c \hat{X}_d \hat{Z}_e \hat{Z}_f \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

二つのqubit a, b を共有している
X-measure と Z-measure は可換である。

Z-measure $\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$
 X-measure $\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c$ の配置



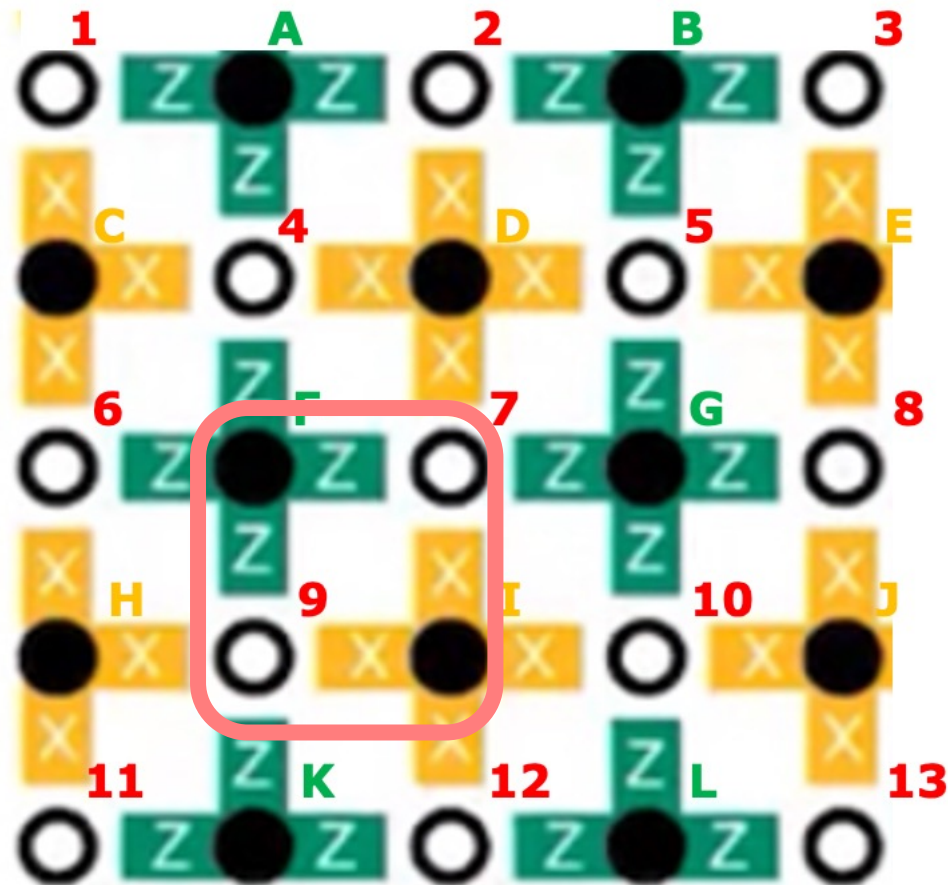
二つのqubit a, b を共有している
X-measure qubit と Z-measure qubit

a, b 以外の添字を持つものは、積の中を自由に移動できる。

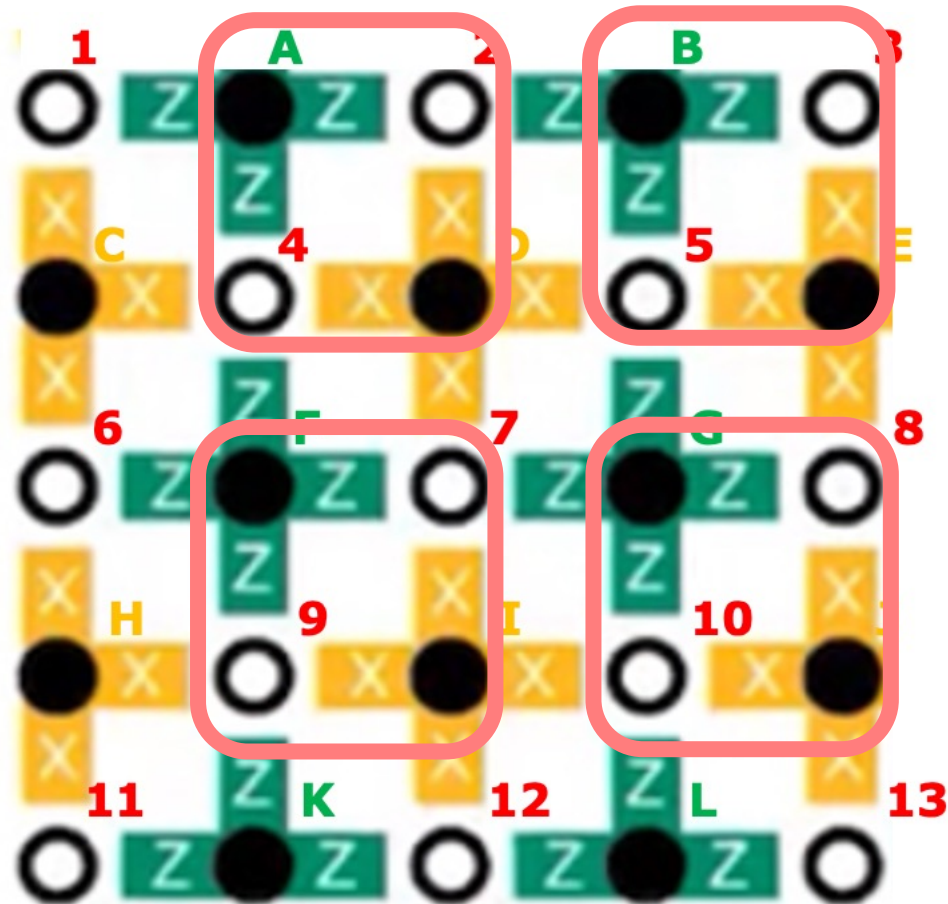
$$\begin{aligned} & [\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_e] \\ &= (\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d)(\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_e) - (\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_e)(\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d) \\ &= (\hat{Z}_a \hat{Z}_b)(\hat{X}_a \hat{X}_b)(\hat{Z}_c \hat{Z}_d \hat{X}_e) - (\hat{X}_a \hat{X}_b)(\hat{Z}_a \hat{Z}_b)(\hat{Z}_c \hat{Z}_d \hat{X}_e) \\ &= (\hat{Z}_a \hat{X}_a)(\hat{Z}_b \hat{X}_b)(\hat{Z}_c \hat{Z}_d \hat{X}_e) - (\hat{X}_a \hat{Z}_a)(\hat{X}_b \hat{Z}_b)(\hat{Z}_c \hat{Z}_d \hat{X}_e) \\ &= (-\hat{X}_a \hat{Z}_a)(-\hat{X}_b \hat{Z}_b)(\hat{Z}_c \hat{Z}_d \hat{X}_e) - (\hat{X}_a \hat{Z}_a)(\hat{X}_b \hat{Z}_b)(\hat{Z}_c \hat{Z}_d \hat{X}_e) \\ &= 0 \end{aligned}$$

二つのqubit a, b を共有している
X-measure と Z-measure は可換である。

Z-measure $\hat{Z}_a \hat{Z}_b$
X-measure $\hat{X}_a \hat{X}_b$ の配置



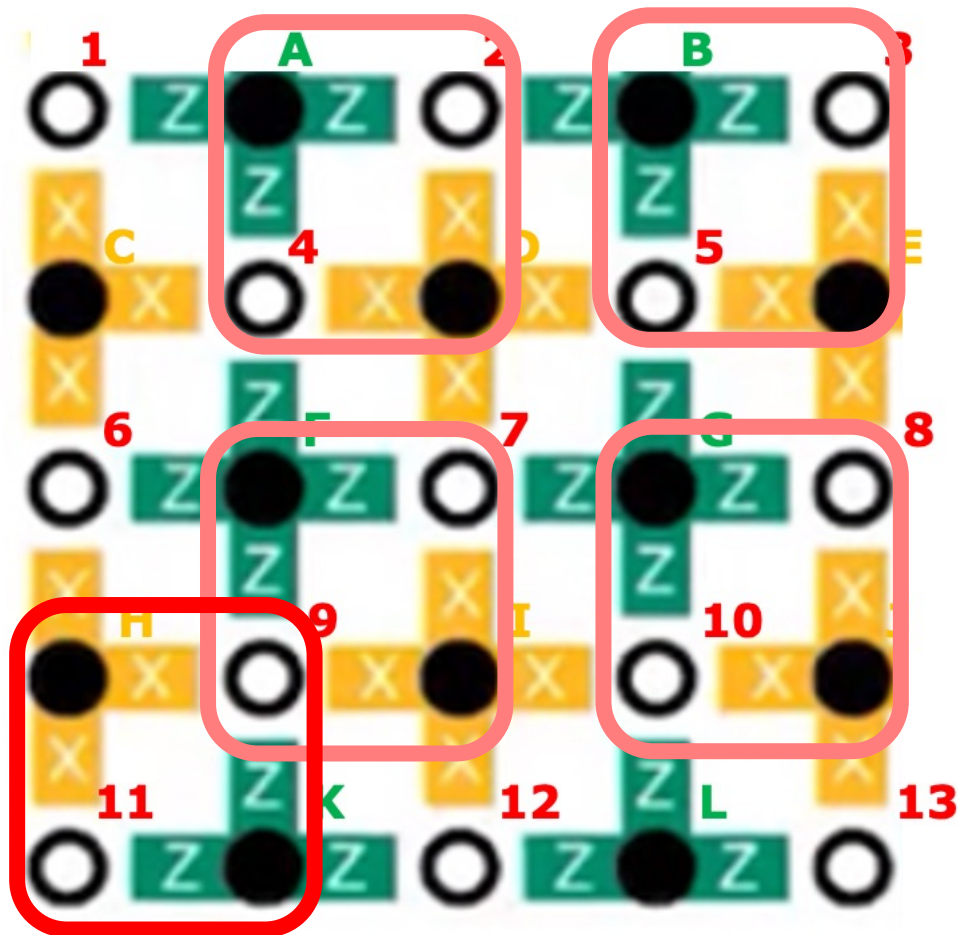
Z-measure $\hat{Z}_a \hat{Z}_b$
 X-measure $\hat{X}_a \hat{X}_b$ の配置



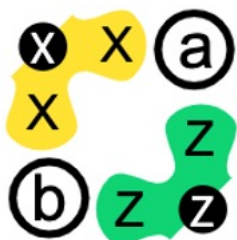
Z-measure $\hat{Z}_a \hat{Z}_b$
 X-measure $\hat{X}_a \hat{X}_b$ の配置



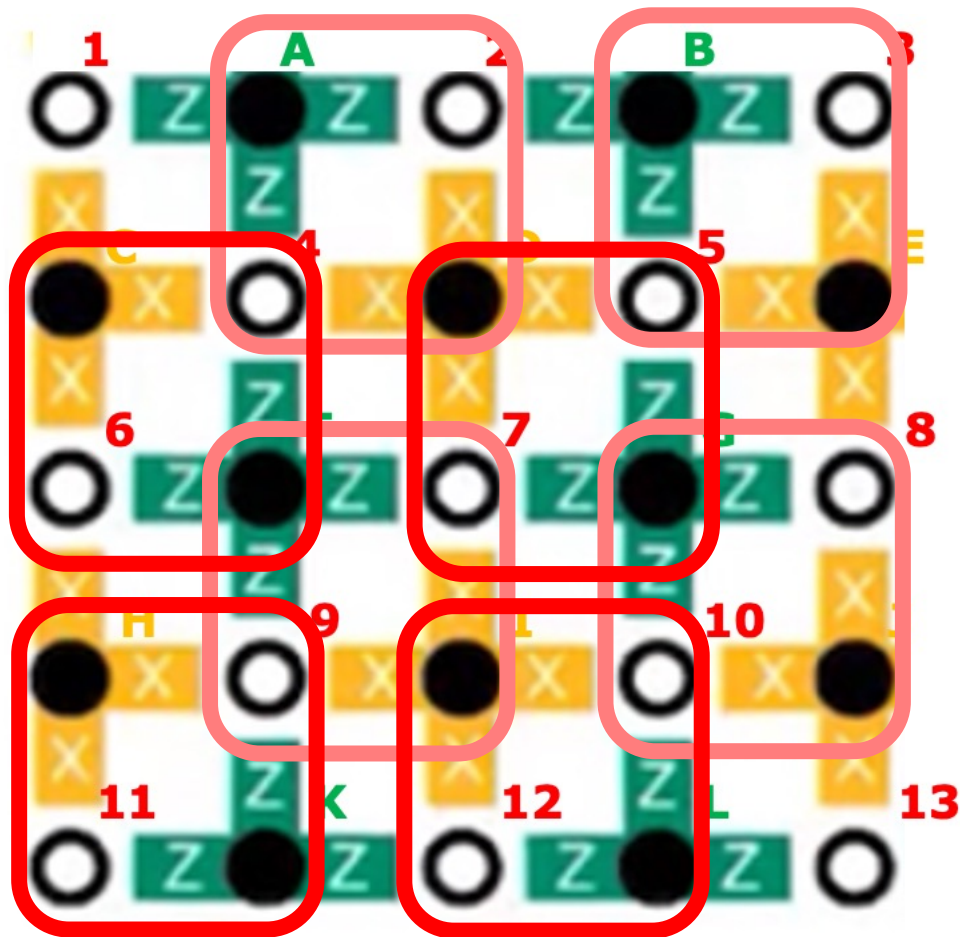
この回路は
 すでに見てきた



Z-measure $\hat{Z}_a \hat{Z}_b$
 X-measure $\hat{X}_a \hat{X}_b$ の配置



この回路は
 a, b をエン
 タングルする



$\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b$ と $\hat{Z}_a \hat{Z}_c \hat{X}_a \hat{X}_c$ の交換関係

$$\begin{aligned} & [\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b, \hat{Z}_a \hat{Z}_c \hat{X}_a \hat{X}_c] \\ = & \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{Z}_a \hat{Z}_c \hat{X}_a \hat{X}_c - \hat{Z}_a \hat{Z}_c \hat{X}_a \hat{X}_c \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{X}_a \hat{X}_b \\ = & \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_b \hat{X}_b \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_c \hat{X}_c - \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_c \hat{X}_c \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_b \hat{X}_b \\ = & \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_b \hat{X}_b \hat{Z}_c \hat{X}_c - \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_a \hat{X}_a \hat{Z}_b \hat{X}_b \hat{Z}_c \hat{X}_c \\ = & 0 \end{aligned}$$

Quiescent state と Error syndrome

Quiescent state $|\psi\rangle$ の下で、qubit a に phase flip が起きたとしよう。

$$\begin{aligned}\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d \left(\hat{Z}_a |\psi\rangle \right) &= -\hat{Z}_a \left(\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d |\psi\rangle \right) \\ &= -X_{abcd} \left(\hat{Z}_a |\psi\rangle \right)\end{aligned}$$

ここに、 X_{abcd} は、X-measure qubit の出力である。

上の式は、 $\hat{Z}_a |\psi\rangle$ が、この \hat{X} stabilizer の固有状態であることを示している。ただし、 $|\psi\rangle$ と反対のサインを持つ。

このqubit a の phase flip エラーの下でも、二つのZ-measure qubitの値は変わらない。 \hat{Z} 演算子は、全て可換である。

$$[\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \hat{Z}_a] = 0$$

このことを、Quiescent state $|\psi\rangle$ で表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d (\hat{Z}_a |\psi\rangle) &= \hat{Z}_a (\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d |\psi\rangle) \\ &= Z_{abcd} (\hat{Z}_a |\psi\rangle), \end{aligned}$$

明らかに、 $\hat{Z}_a |\psi\rangle$ は、この \hat{Z} stabilizerの固有状態である。ただしサインは変わらない。

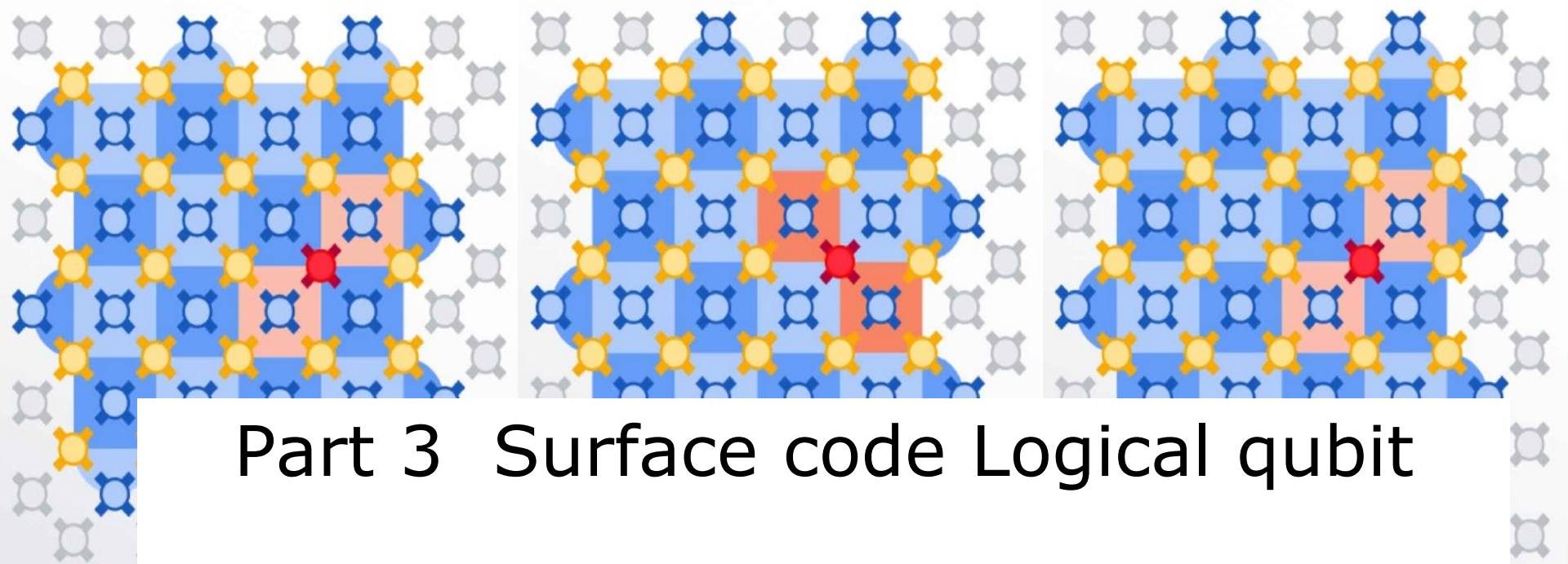




Surface code と Stabilizer 2

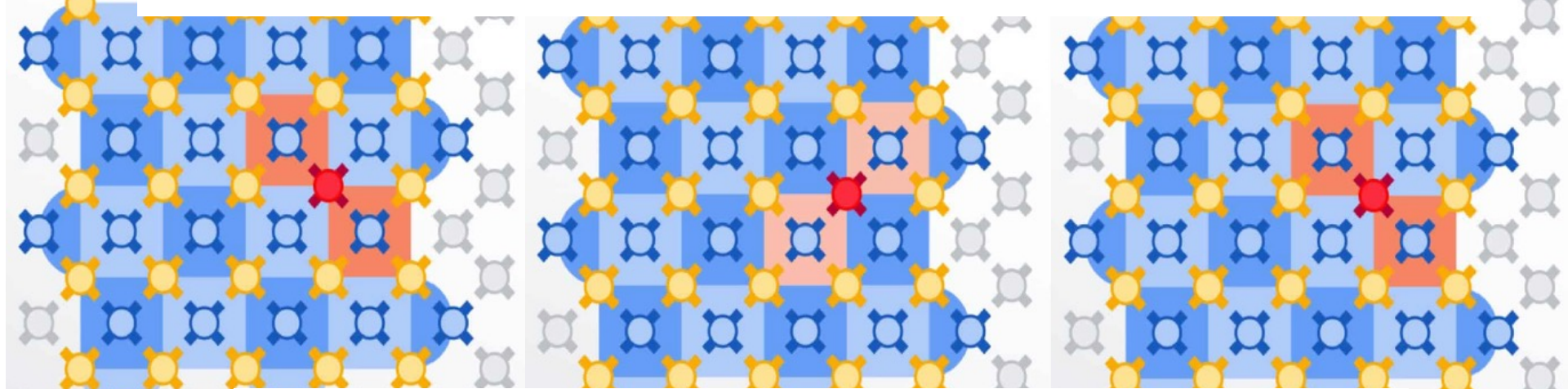
Part 3

Surface code Logical qubitの定義



Part 3 Surface code Logical qubit

Logical qubit ($d = 5$)の定義を見る



Logical qubitをどう定義するか？

このセッションでは、Surface code で Logical qubit がどのように定義されるかを見ていきます。今回は、data qubitが、 5×5 の形で配列されているケースを考えています。

基本的には、ある演算子を考えて、それが two-level system の Logical operator の定義を満たしていることを示せば、それを基本演算子とする Logical qubit が定義できるということなのですが、いくつかのステップが必要になります。

最初の \hat{X}_L , \hat{Z}_L 定義

最初のステップは、少し天下りですが、二つの演算子を考えるところから始めます。天下り的とは、この二つの演算子は、最終的にはそれがLogical operatorであることが示されるからです。

その最初の定義は、次のように、Surface code の平面上で物理的に与えられます。

- 横方向に一直線に並んでいるdata qubitの全てにX演算子を適用する演算子を \hat{X}_L 演算子とする
- 縦方向に一直線に並んでいるdata qubitの全てにZ演算子を適用する演算子を \hat{Z}_L 演算子とする

境界から境界に向かう経路とループ

最初に考えたのは、境界から境界に向かう一直線の経路だけだったのですが、今度は、境界から境界に向かう可能な経路をすべて考えます。

すると面白いことがわかります。

- 横方向に境界から境界に向かう全ての経路は、元の一直線上の演算子 \hat{X}_L とループ状のX-Stabilizerの積の形で表現できます。
- 縦方向に境界から境界に向かう全ての経路は、元の一直線上の演算子 \hat{Z}_L とループ状のZ-Stabilizerの積の形で表現できます。

系は、two-level system

先の結果を利用すると、

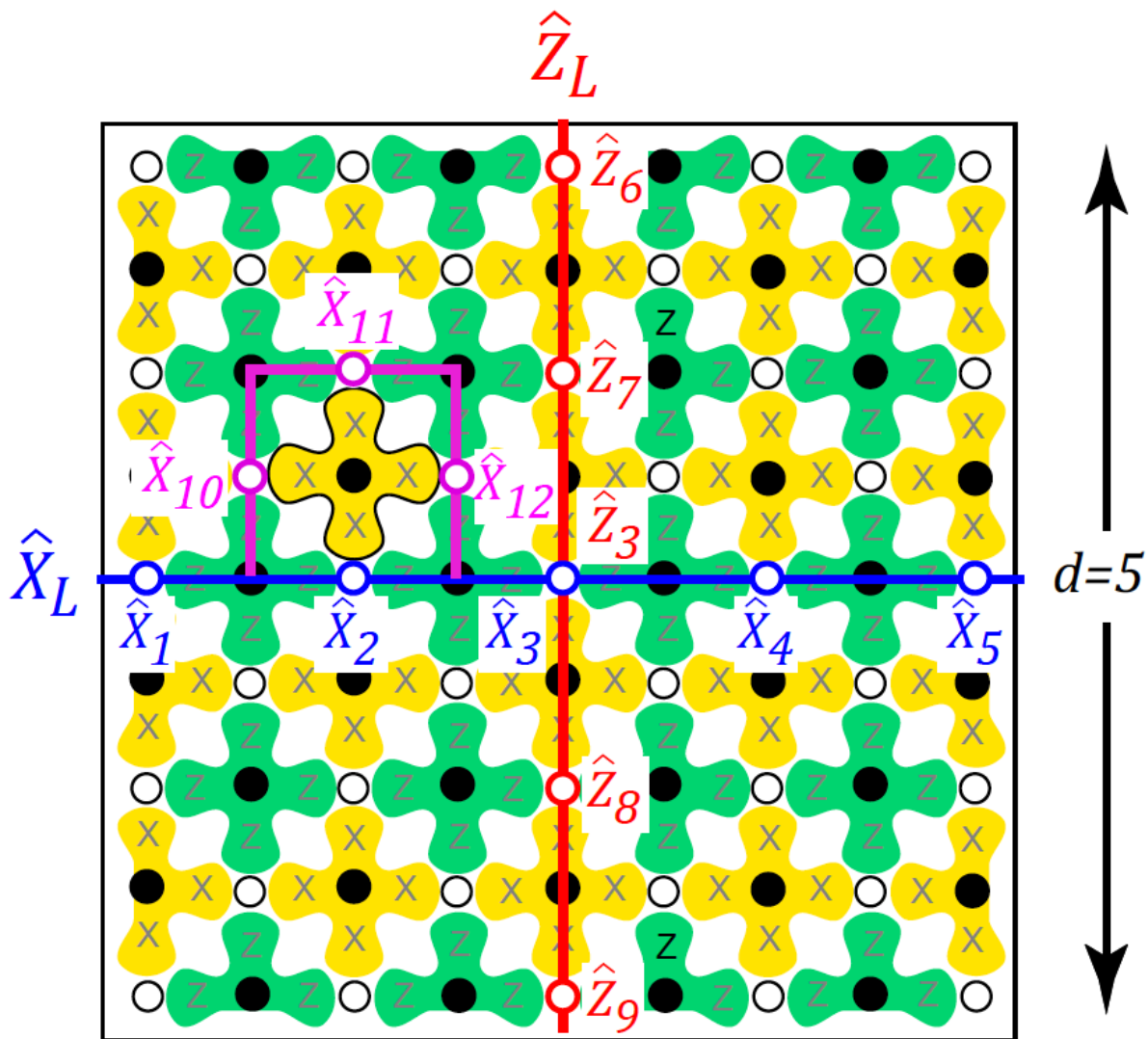
- 線型独立な \hat{X}_L 演算子は一つしかない
 - 線型独立な \hat{Z}_L 演算子は一つしかない
- ことを示すことができます。

\hat{X}_L, \hat{Z}_L は、Logical operator である

あとは、ある演算子がtwo-level systemのLogical operator であるための次の条件を、 \hat{X}_L, \hat{Z}_L が満たすことを示せば、*Logical qubit* の定義が出来上がります。

$$\begin{aligned}\hat{X}^2 &= -\hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}, \\ \hat{X}\hat{Z} &= -\hat{Z}\hat{X}, \\ [\hat{X}, \hat{Y}] &\equiv \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} = -2\hat{Z},\end{aligned}$$

今回は、 $d = 5$ のSurface codeのqubitの次のような配置で、先に概要を見た qubitの定義を見ていこうと思います。



$$[\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \hat{X}_a \hat{X}_b] = 0$$

一つのdata qubit a に、一つのX演算子を作用させれば、そのqubitを両側からチェックしている二つのZ-measure qubitの出力は、両方とも変化する。

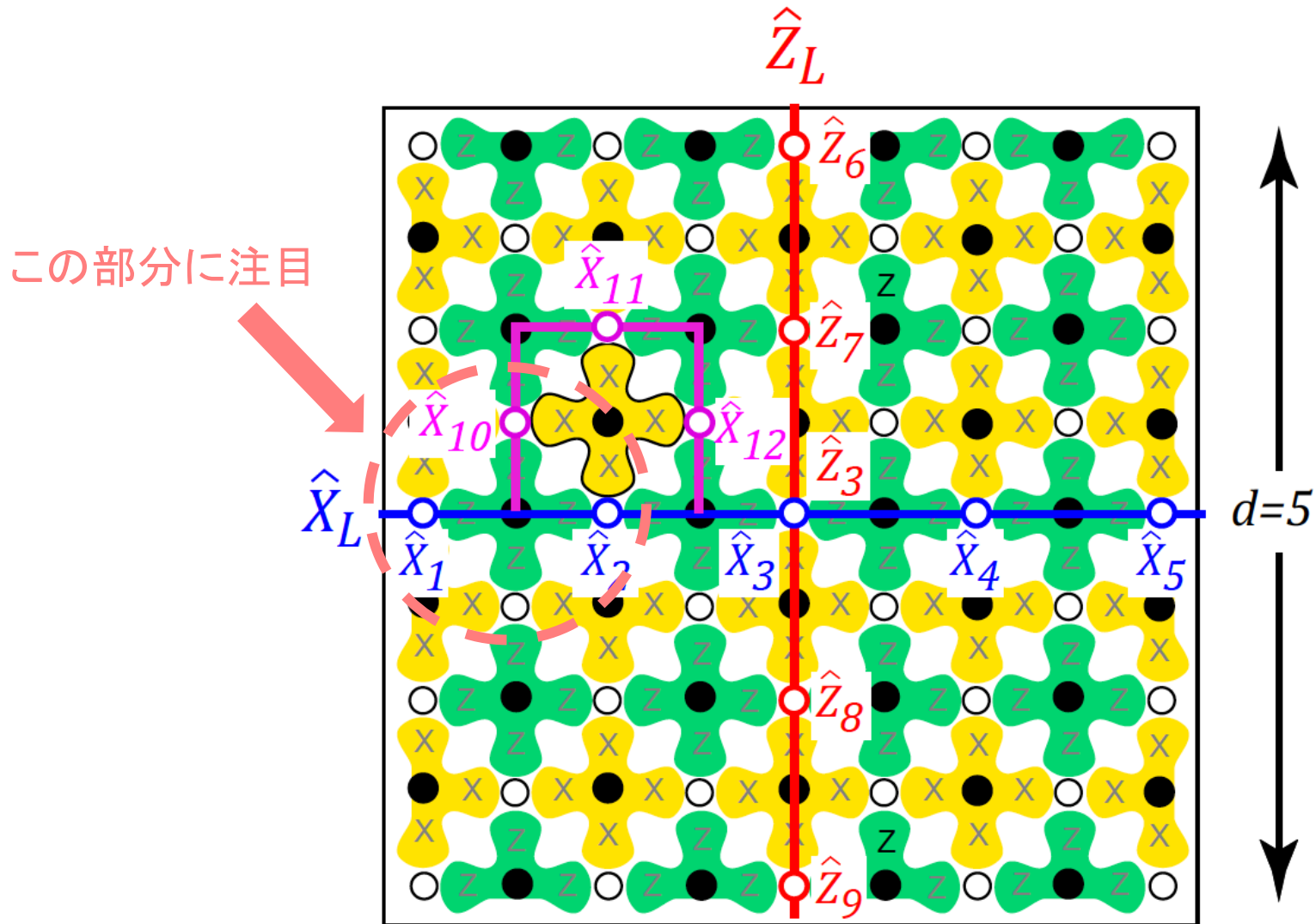
ただ、一つのZ-measure qubit が監視している二つのdata qubit a, b に同時にX演算子を作用させれば、その出力は変化しない。

$$\begin{aligned} \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d \left(\hat{X}_a \hat{X}_b |\psi\rangle \right) &= (-1)^2 \hat{X}_a \hat{X}_b \left(\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d |\psi\rangle \right) \\ &= Z_{abcd} \left(\hat{X}_a \hat{X}_b |\psi\rangle \right). \end{aligned}$$

二つのX演算子の積は、一つのZ stabilizerと可換である。

$$[\hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \hat{X}_a \hat{X}_b] = 0$$

Surface code Logical qubit ($d = 5$)



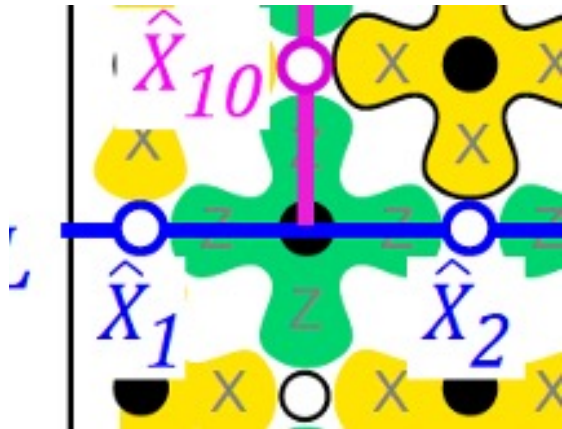
左の境界のdata qubit 1への \hat{x}_1 演算子の作用は、すぐ右のZ-measure qubitによってbit-flipが検出される。

ただ、このZ-measure qubitの反対側のdata qubit 2に、同時に \hat{x}_2 演算子を作作用させることができる。

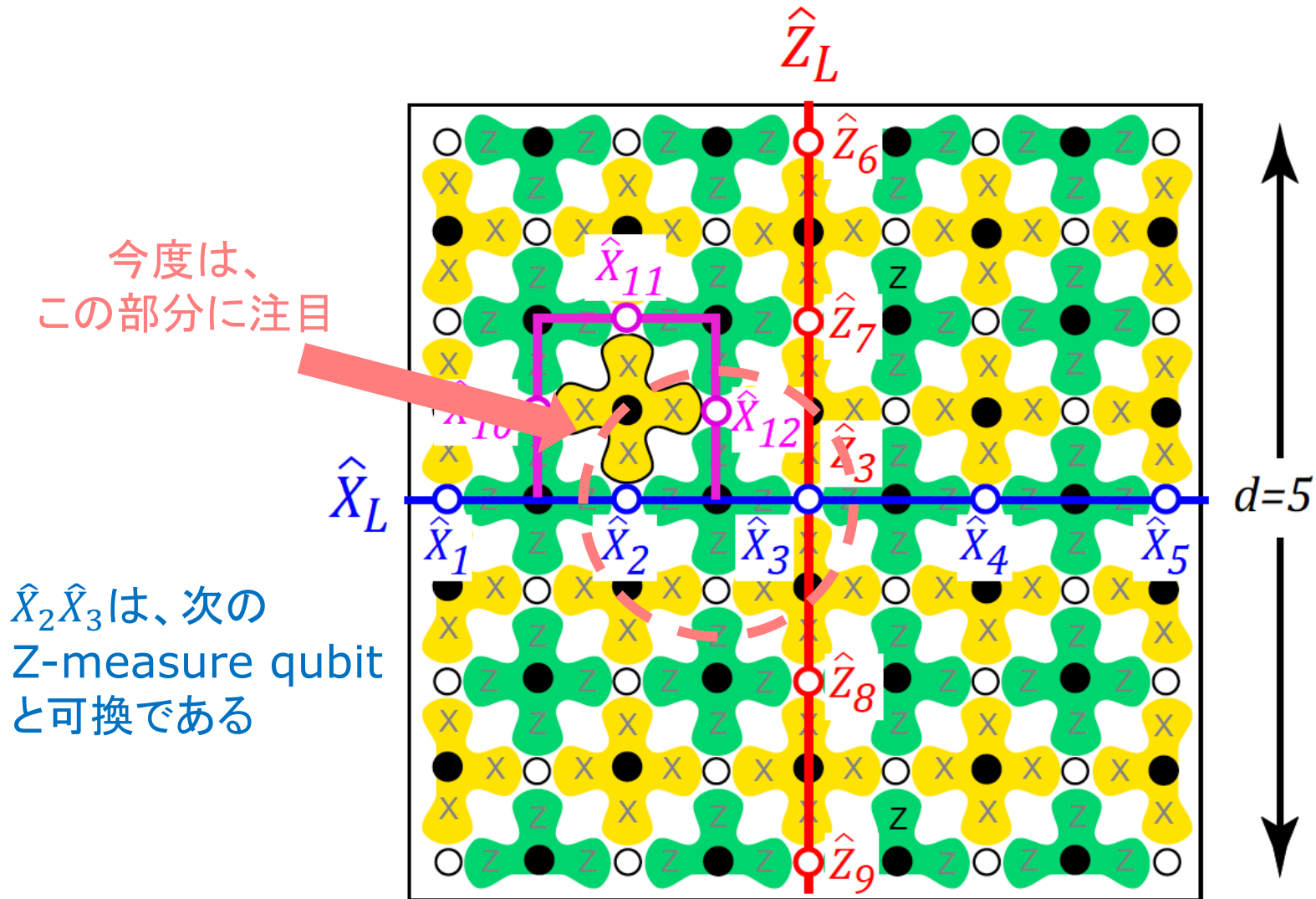
先に見たように、このZ-measure qubitは、 $\hat{x}_1\hat{x}_2$ と可換である。

ただ、 \hat{x}_2 の右側のZ-measure qubitは、変化を検出する。

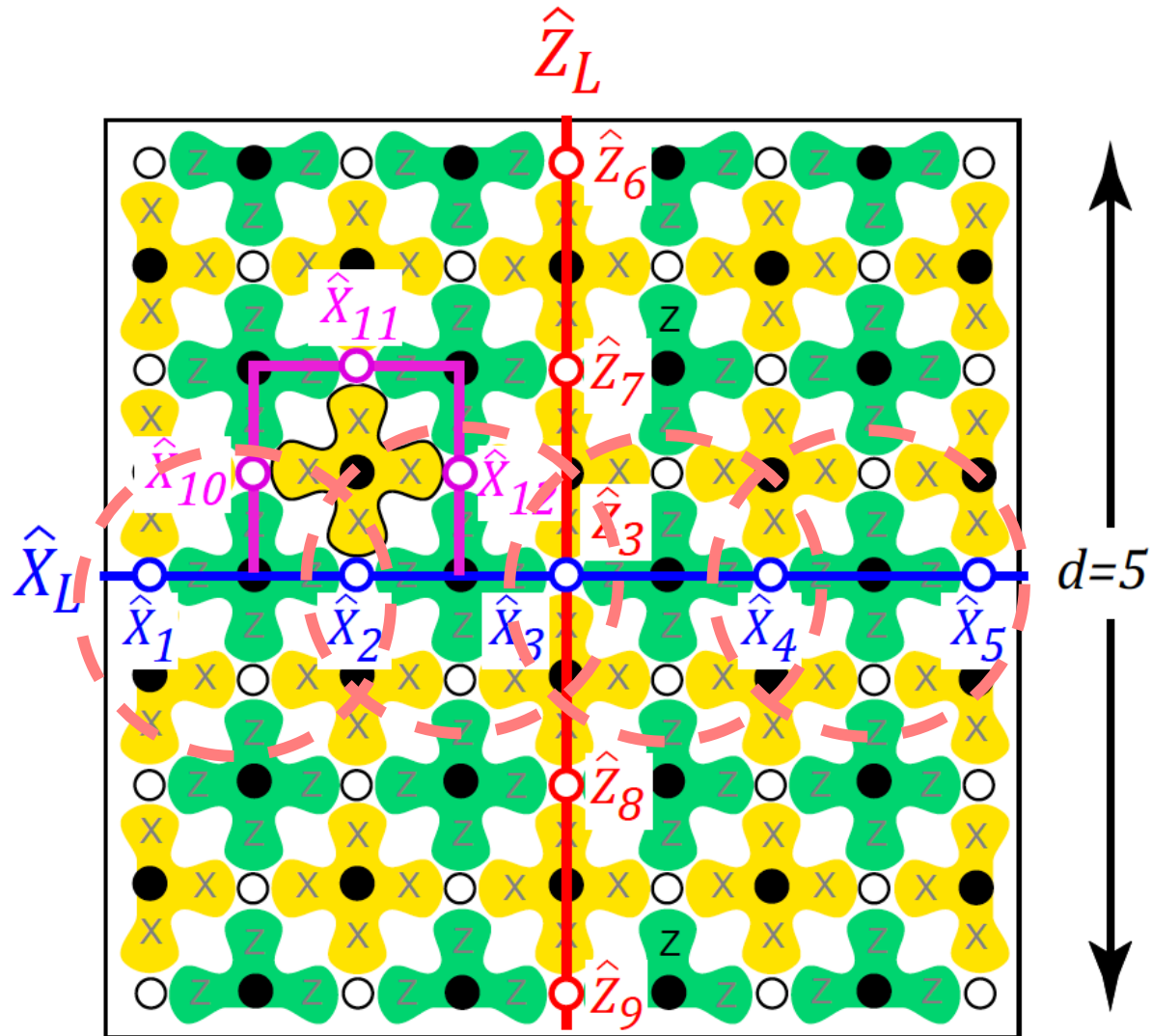
今度は、 \hat{x}_3 演算子を追加する。



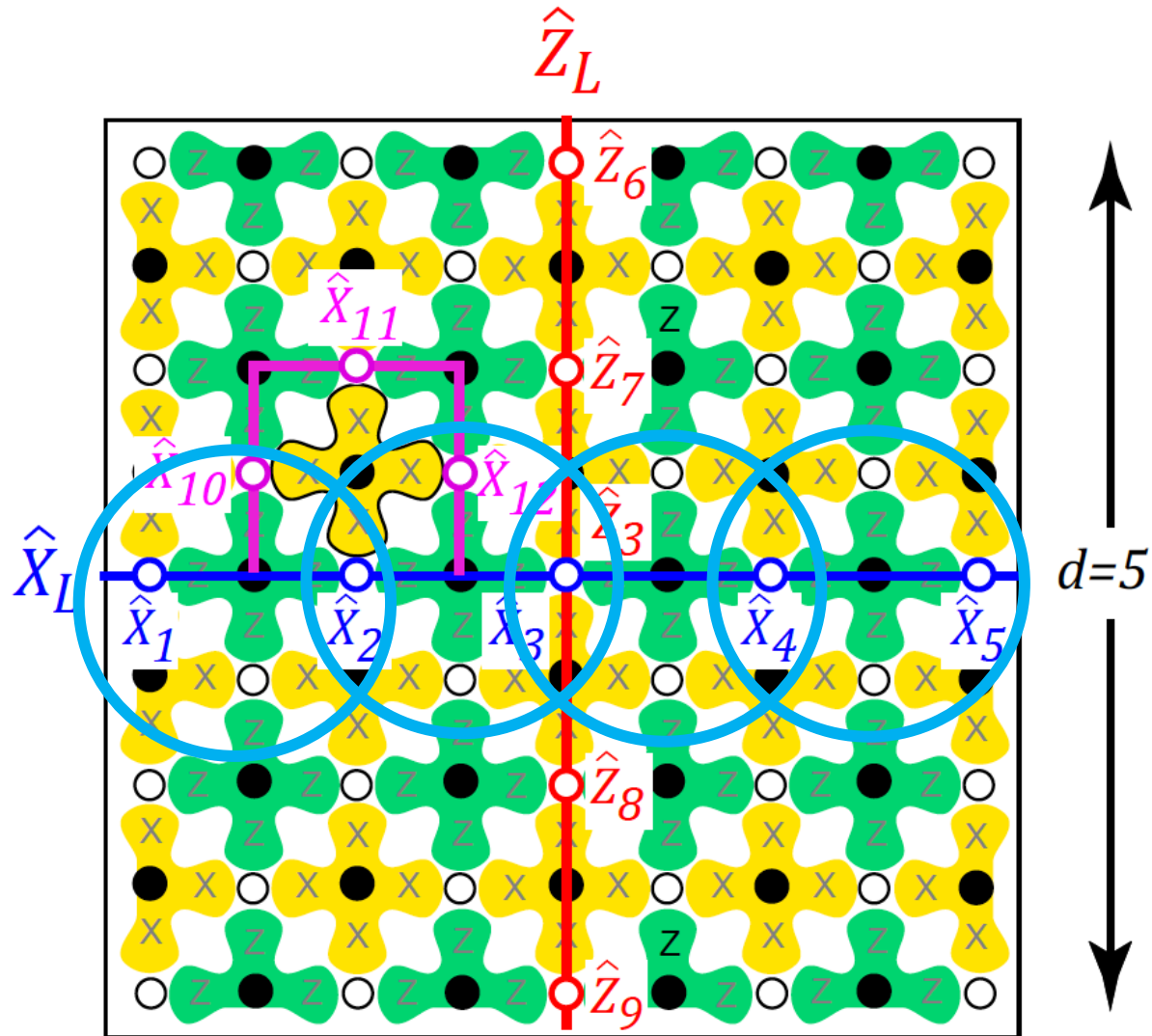
Surface code Logical qubit ($d = 5$)



Surface code Logical qubit ($d = 5$)



Surface code Logical qubit ($d = 5$)



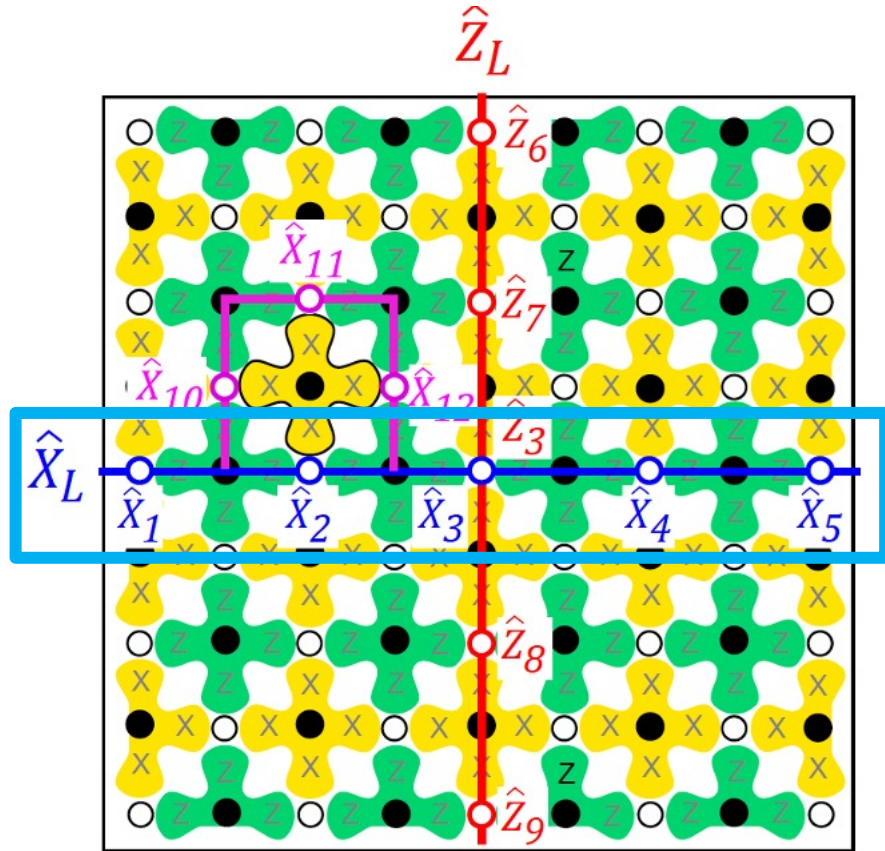
$$\hat{X}_L = \hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$

このXの境界を左端から右端に至る直線上のX演算子の積を \hat{X}_L としよう。

$$\hat{X}_L = \hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$

この \hat{X} は、直線上の全ての Z-measure qubit と可換である。

\hat{X} は、この直線上の全ての Z Stabilizer と可換である。



\hat{X}_L のquiescent state $|\psi\rangle$ への作用

\hat{X}_L のquiescent state $|\psi\rangle$ への作用を考えてみよう。

$|\psi_X\rangle = \hat{X}_L|\psi\rangle$ とする。

$|\psi_X\rangle$ は、元のquiescent state $|\psi\rangle$ と同じ観測値を持つ quiescent state となるはずである。

ただし、 $|\psi_X\rangle$ と $|\psi\rangle$ は同じ状態ではない。($|\psi\rangle$ から $|\psi_X\rangle$ へ行くために、5つのqubitを反転させている) それに、 \hat{X}_L は Stabilizerの積の形には書けない。

$|\psi_X\rangle$ は、 $|\psi\rangle$ とは単純には、関連付けられない。それは、もう一つの状態なのだ。 $X|0\rangle = |1\rangle$, $X|1\rangle = |0\rangle$ を想起すること

もう一つの状態を探す

一つのdata qubit a に、一つのZ演算子を作用させれば、そのqubitを両側からチェックしている二つのX-measure qubitの出力は、両方とも変化する。

ただ、一つのX-measure qubit が監視している二つのdata qubit a, b に同時にZ演算子を作用させれば、その出力は変化しない。

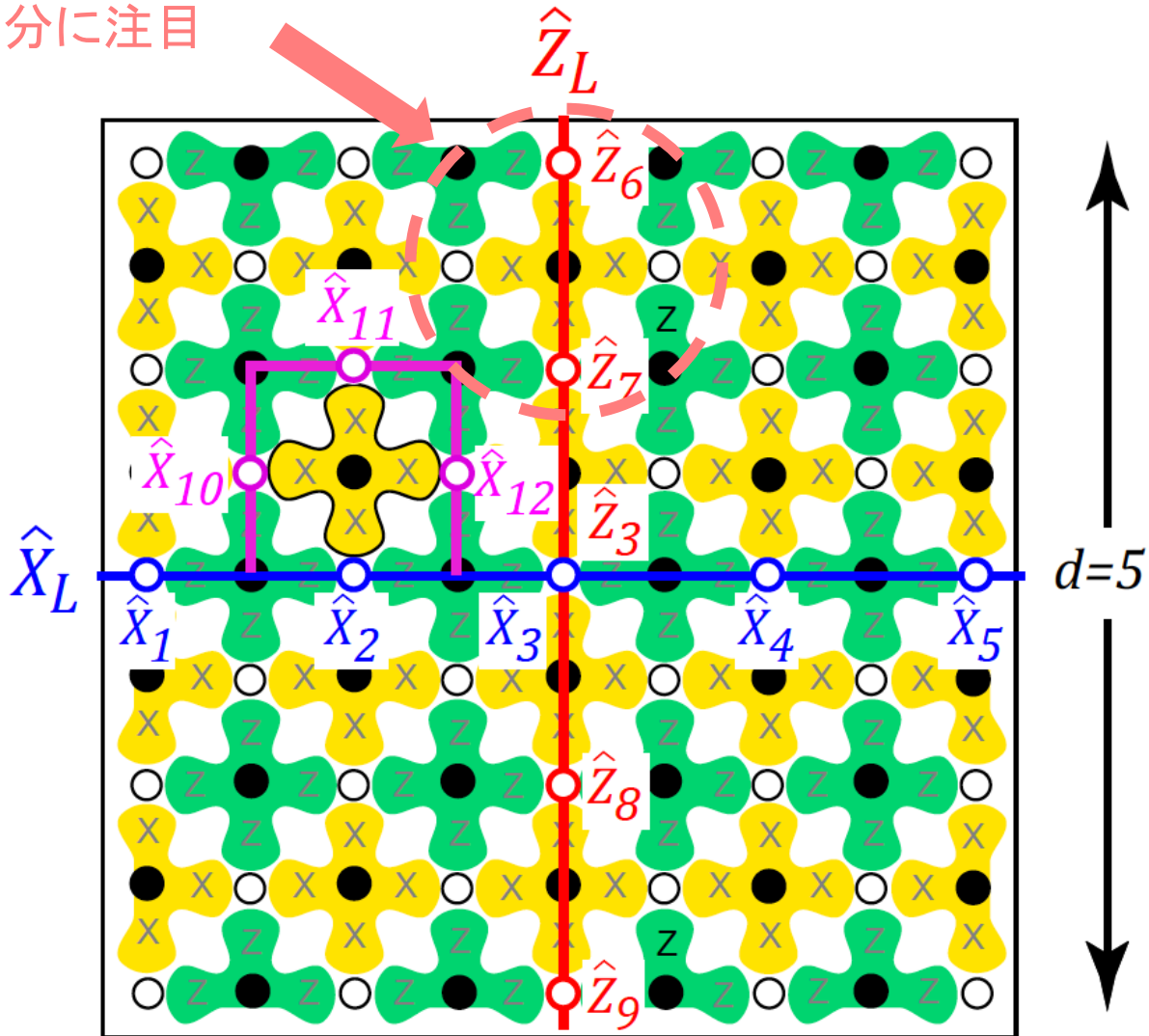
$$\begin{aligned}\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d (\hat{Z}_a \hat{Z}_b |\psi\rangle) &= (-1)^2 \hat{Z}_a \hat{Z}_b (\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d |\psi\rangle) \\ &= X_{abcd} (\hat{Z}_a \hat{Z}_b |\psi\rangle)\end{aligned}$$

二つのZ演算子の積は、一つのX stabilizerと可換である。

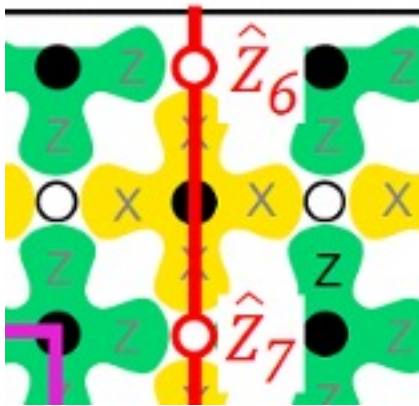
$$[\hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d, \hat{Z}_a \hat{Z}_b] = 0$$

Surface code Logical qubit ($d = 5$)

この部分に注目



上の境界のdata qubit 6への \hat{Z}_6 演算子の作用は、すぐ下のX-measure qubitによってphase-flipが検出される。



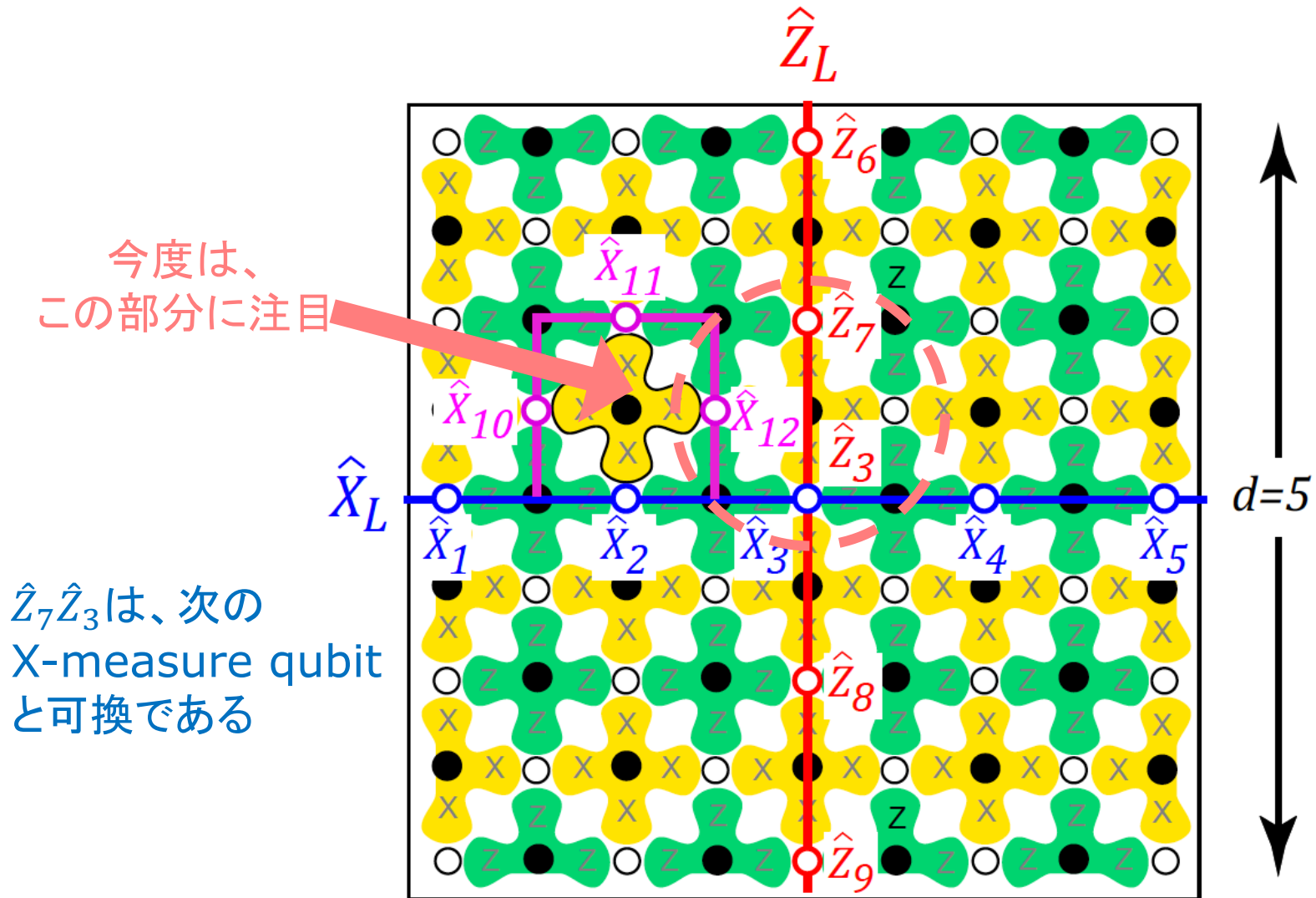
ただ、このX-measure qubitの反対側のdata qubit 7に、同時に \hat{Z}_7 演算子を作作用させることができる。

先に見たように、このX-measure qubitは、 $\hat{Z}_6\hat{Z}_7$ と可換である。

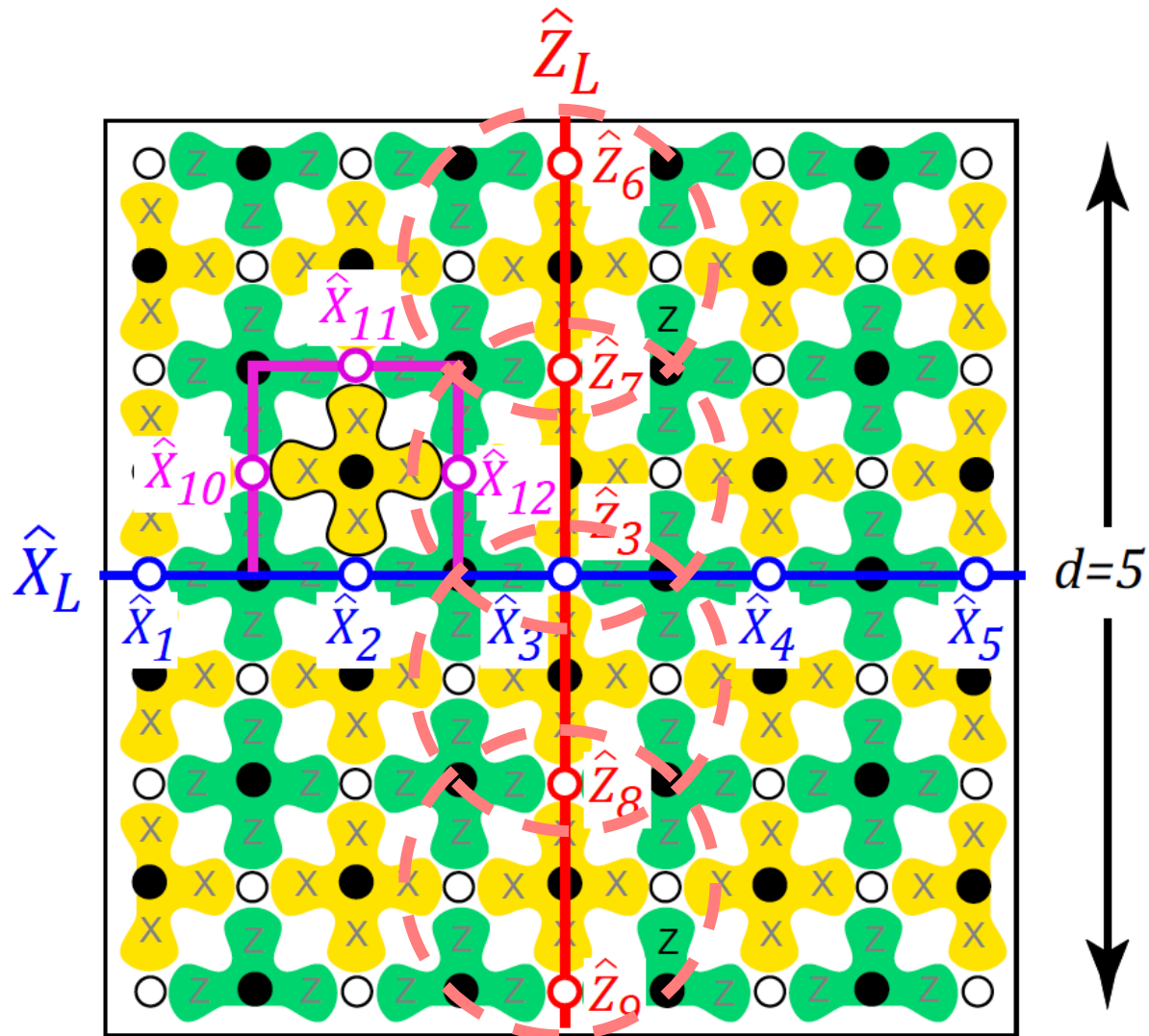
ただ、 \hat{Z}_7 の下側のX-measure qubitは、変化を検出する。

今度は、 \hat{Z}_3 演算子を追加する。

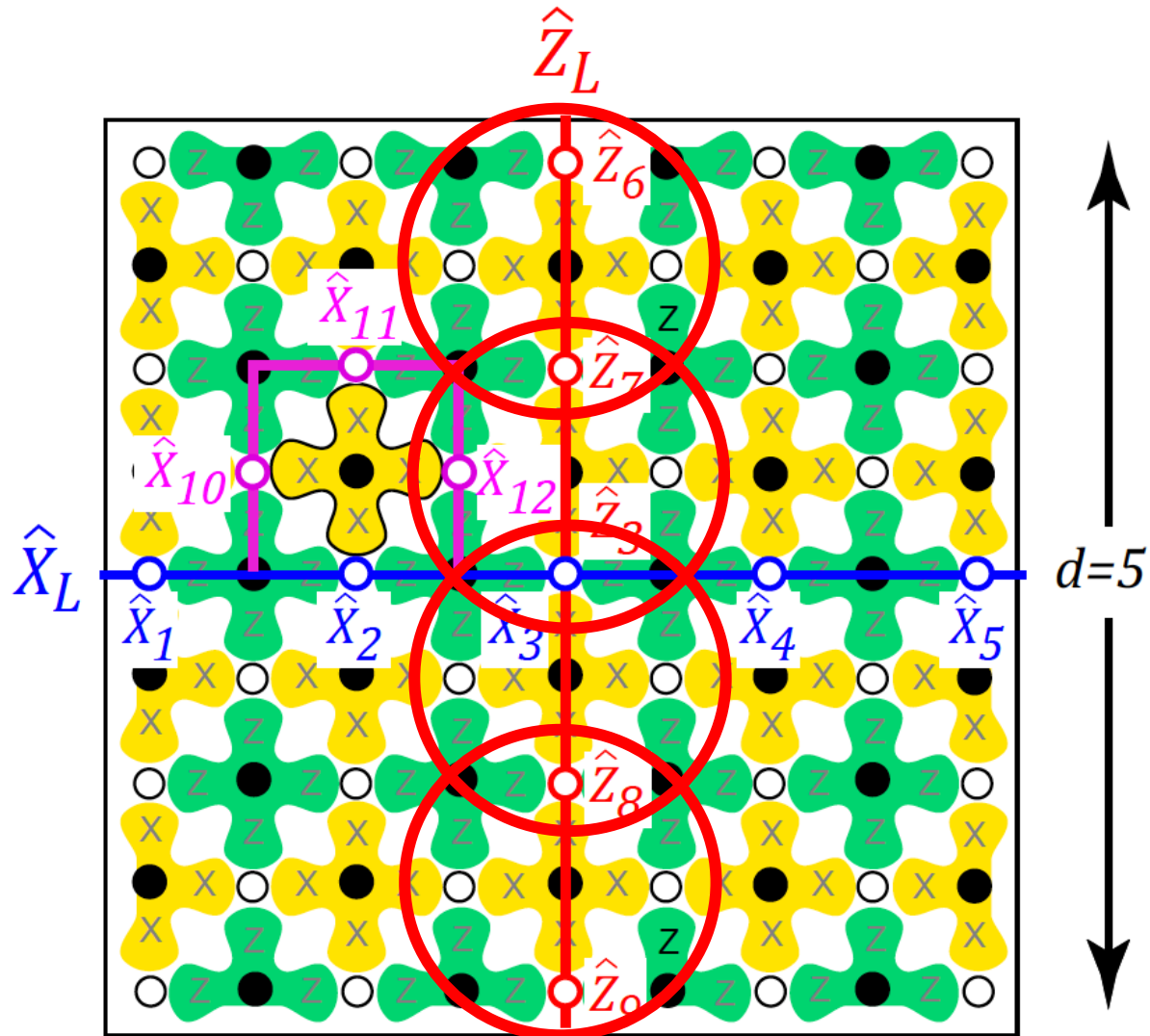
Surface code Logical qubit ($d = 5$)



Surface code Logical qubit ($d = 5$)



Surface code Logical qubit ($d = 5$)



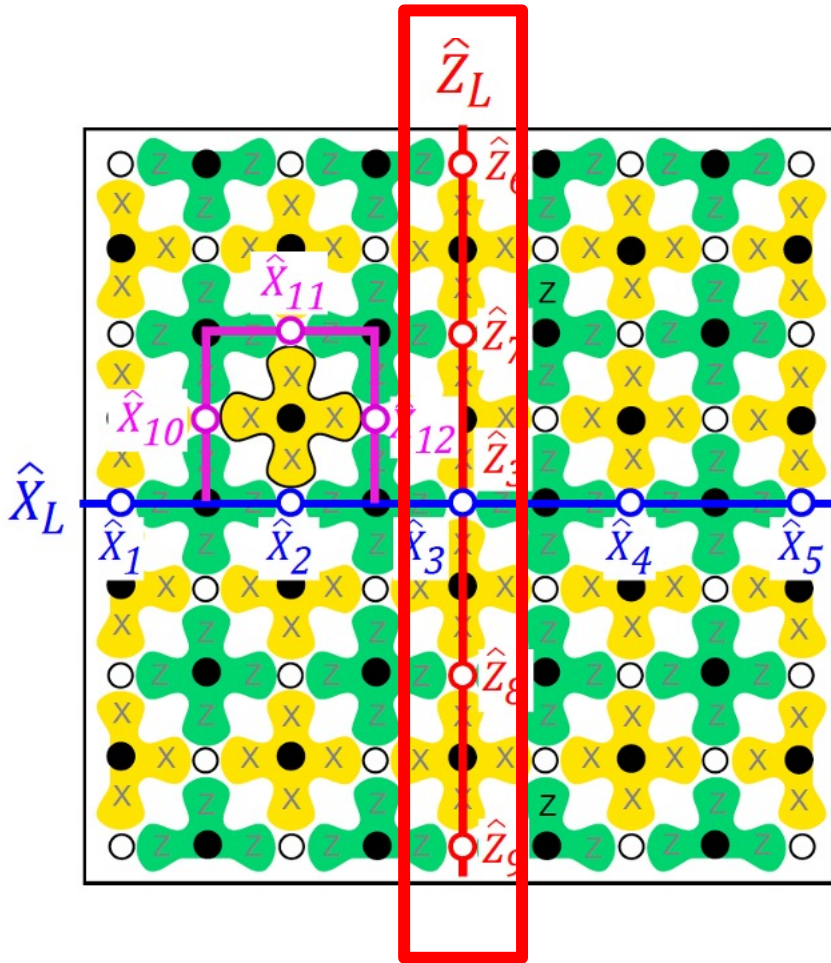
$$\hat{Z}_L = \hat{Z}_6 \hat{Z}_7 \hat{Z}_3 \hat{Z}_8 \hat{Z}_9$$

このZの境界を上端から下端に至る直線上のZ演算子の積を \hat{Z}_L としよう。

$$\hat{Z}_L = \hat{Z}_6 \hat{Z}_7 \hat{Z}_3 \hat{Z}_8 \hat{Z}_9$$

この \hat{Z}_L は、直線上の全ての X-measure qubit と可換である。

\hat{Z}_L は、この直線上の全ての X Stabilizer と可換である。



\hat{Z}_L のquiescent state $|\psi\rangle$ への作用

\hat{Z}_L のquiescent state $|\psi\rangle$ への作用を考えてみよう。

$|\psi_Z\rangle = \hat{Z}_L|\psi\rangle$ とする。

$|\psi_Z\rangle$ は、元のquiescent state $|\psi\rangle$ と同じ観測値を持つ quiescent state となるはずである。

ただし、 $|\psi_Z\rangle$ と $|\psi\rangle$ は同じ状態ではない。($|\psi\rangle$ から $|\psi_Z\rangle$ へ行くために、5つのqubitのphaseを反転させている) それに、 \hat{Z}_L はStabilizerの積の形には書けない。

$|\psi_Z\rangle$ は、 $|\psi\rangle$ とは単純には、関連付けられない。それは、もう一つの状態なのだ。1

一つのqubitへの演算子の積のチェーン

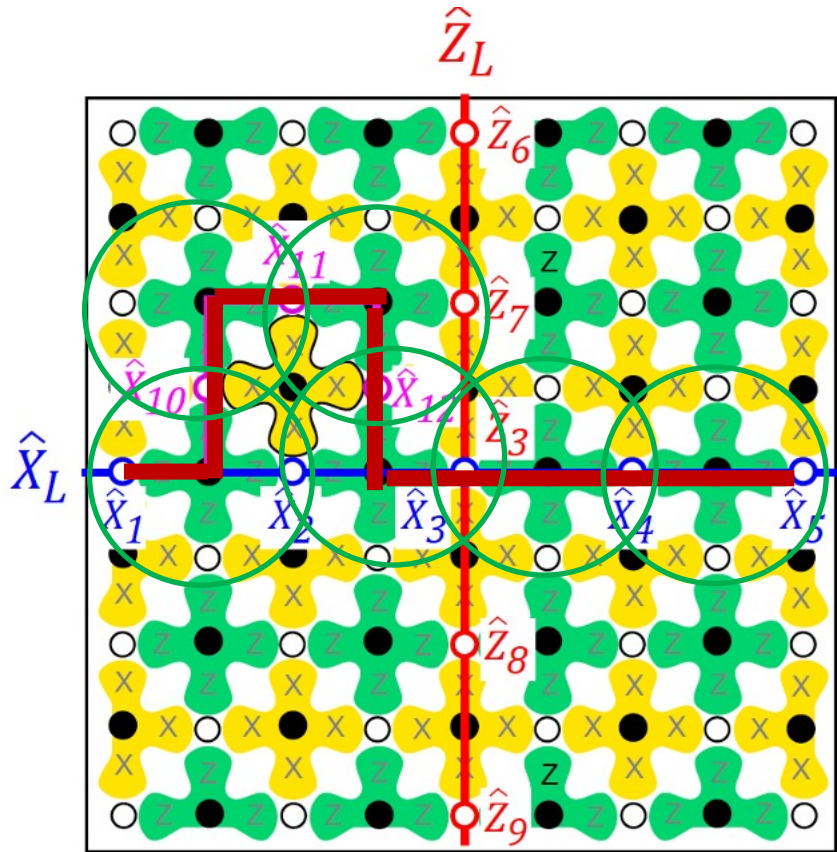
今まで見てきた

$$\hat{X}_L = \hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$
$$\hat{Z}_L = \hat{Z}_6 \hat{Z}_7 \hat{Z}_3 \hat{Z}_8 \hat{Z}_9$$

もともに、一つのqubitへの演算子の積のチェーンの形をしているのだが、同じような性質を持つ、次のチェーン \hat{X}'_L を考えてみよう。

$$\hat{X}'_L = \hat{X}_1 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$

$$\hat{X}'_L = \hat{X}_1 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$



ここでも、隣り合う二つのX演算子が作用する二つのdata qubitは、一つのZ-measure qubit と共有されている。

\hat{X}'_L は、全てのStabilizer と可換である。

$|\psi_{X'}\rangle$ と $|\psi_X\rangle$ の関係

\hat{X}'_L の quiescent state $|\psi\rangle$ への作用を考えてみよう。
 $|\psi_{X'}\rangle = \hat{X}'_L |\psi\rangle$ とする。

先に、 \hat{X}_L の下での $|\psi\rangle$ への作用を次のように表した。
 $|\psi_X\rangle = \hat{X}_L |\psi\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{X}_L &= \hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \\ \hat{X}'_L &= \hat{X}_1 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5\end{aligned}$$

この時、 $|\psi_{X'}\rangle$ と $|\psi_X\rangle$ の間には、ある関係が生まれるのだが、それを調べるために、演算子の積の関係を整理してみよう。

$$\hat{X}'_L = \hat{X}_1 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$

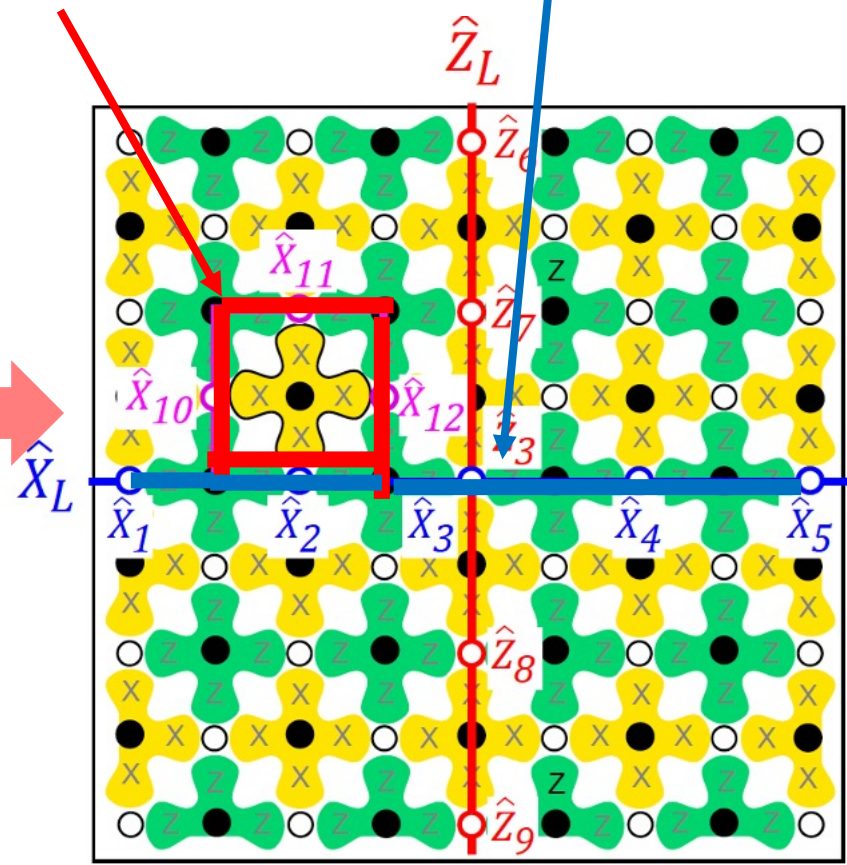
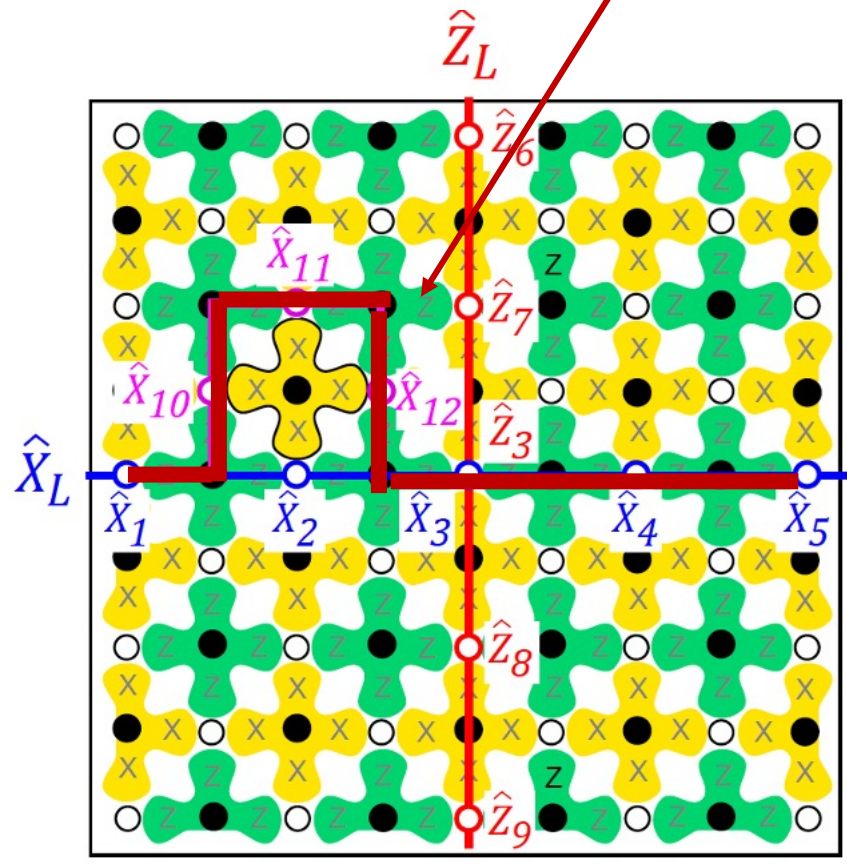
この式の前頭に、 $\hat{X}_2^2 = \hat{X}_2 \hat{X}_2 = I$ を掛ける。

$$\begin{aligned} \hat{X}'_L &= \hat{X}_2 \hat{X}_2 \hat{X}_1 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \\ &= \hat{X}_2 \hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \\ &= \hat{X}_2 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \\ &= (\hat{X}_2 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12}) (\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5) \\ &= (\hat{X}_2 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12}) \hat{X}'_L \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5 = \hat{X}'_L$ で、
 $\hat{X}_2 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12}$ は、四角のループになる！

$$\hat{X}'_L = \hat{X}_1 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12} \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5$$

$$= (\hat{X}_2 \hat{X}_{10} \hat{X}_{11} \hat{X}_{12}) (\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5)$$



線型独立な \hat{X}_L 演算子は一つしかない

$\hat{X}_2\hat{X}_{10}\hat{X}_{11}\hat{X}_{12}$ のループは、 ± 1 の固有値を持つStabilizerである。

$$\begin{aligned}\hat{X}'_L|\psi\rangle &= \hat{X}_1\hat{X}_{10}\hat{X}_{11}\hat{X}_{12}\hat{X}_3\hat{X}_4\hat{X}_5|\psi\rangle \\ &= (\hat{X}_2\hat{X}_{10}\hat{X}_{11}\hat{X}_{12})(\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3\hat{X}_4\hat{X}_5)|\psi\rangle \\ &= \hat{X}_{2\ 10\ 11\ 12}\hat{X}_L|\psi\rangle = \pm\hat{X}_L|\psi\rangle = \pm|\psi_L\rangle\end{aligned}$$

$$\hat{X}'_L|\psi\rangle = \pm\hat{X}_L|\psi\rangle = \pm|\psi_L\rangle$$

ここで、 \pm の符号は、対応するStabilizerの出力によって決まる。
このqubitの配列には、線型独立な \hat{X}_L 演算子は一つしかないことがわかる。

線型独立な \hat{Z}_L 演算子は一つしかない

同様な議論で、

$$\hat{Z}'_L |\psi\rangle = \pm \hat{Z}_L |\psi\rangle = \pm |\psi_L\rangle$$

を示すことができる。

線型独立な \hat{Z}_L 演算子は一つしかないことがわかる。

Two-level systemのqubitの条件

先に見たように、次の関係式を満たすTwo-level quantum systemは、すべてqubitとして使用できる。

$$\begin{aligned}\hat{X}^2 &= -\hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}, \\ \hat{X}\hat{Z} &= -\hat{Z}\hat{X}, \\ [\hat{X}, \hat{Y}] &\equiv \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} = -2\hat{Z},\end{aligned}$$

これらを、証明することは難しくない。

\hat{X}_L と \hat{Z}_L は、非可換である

$$\begin{aligned}\hat{X}_L \hat{Z}_L &= \left(\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \right) \left(\hat{Z}_9 \hat{Z}_{10} \hat{Z}_3 \hat{Z}_{11} \hat{Z}_{12} \right) \\ &= \hat{X}_3 \hat{Z}_3 \left(\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \right) \left(\hat{Z}_9 \hat{Z}_{10} \hat{Z}_{11} \hat{Z}_{12} \right) \\ &= -\hat{Z}_3 \hat{X}_3 \left(\hat{Z}_9 \hat{Z}_{10} \hat{Z}_{11} \hat{Z}_{12} \right) \left(\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_4 \hat{X}_5 \right) \\ &= -\hat{Z}_L \hat{X}_L,\end{aligned}$$

Logical operator \hat{X}_L と \hat{Z}_L は、正確にPhysical operator \hat{X} と \hat{Z} が満たすべきルールに従っている。



