はじめてのCoq

Hello Coq! (1)

Coqとのはじめての対話

Coqとのはじめての対話

Coqとのはじめての対話

Coqは、対話型の証明支援システムです。対話するのは人間と機械（Coq）です。

Coqとのはじめての対話

Coqは、対話型の証明支援システムです。対話するのは人間と機械（Coq）です。

人間と機械の対話でどのように証明が進んでいくかについては、おいおい説明するとして、ここではまず、Coqとのはじめての対話を経験して見ましょう。簡単な証明をしてみます。

Coqとのはじめての対話

Coqは、対話型の証明支援システムです。対話するのは人間と機械（Coq）です。

人間と機械の対話でどのように証明が進んでいくかについては、おいおい説明するとして、ここではまず、Coqとのはじめての対話を経験して見ましょう。簡単な証明をしてみます。

次のブルーの文字列を Coqに入力して実行して見てください。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
```

人間の入力

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A )
```

人間の入力

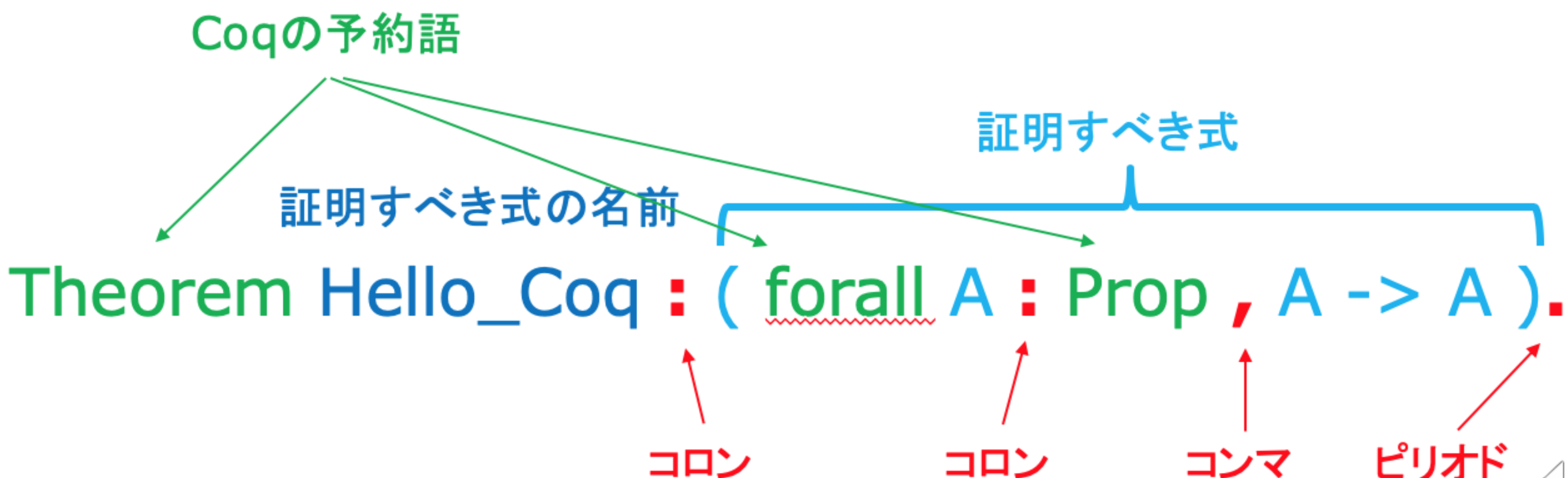
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A)

文字列の入力では、コロンやコンマやピリオド、"->"(マイナス記号'-'＋'>')に注意してください。

人間の入力

Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A)

文字列の入力では、コロンやコンマやピリオド、"->"(マイナス記号'-'＋'>')に注意してください。

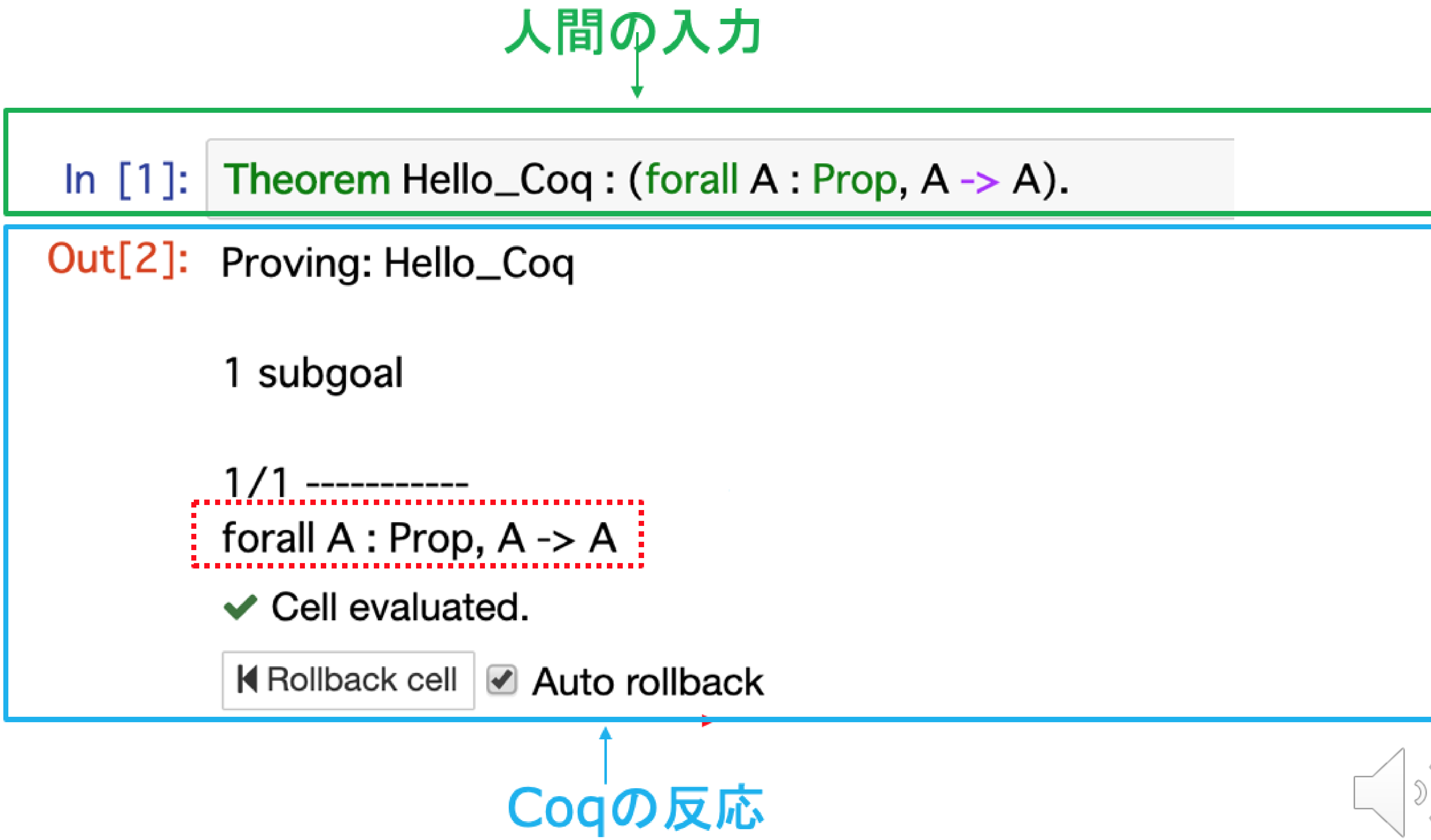


ここで初めてCoqに証明したい定理の情報を伝えました。

ここで初めてCoqに証明したい定理の情報を伝えました。

Coqから次のような反応があるはずです。

Coqの反応は、次のようなものです。



Coqが返した情報の意味は、次のようなものです。

人間の入力

```
In [1]: Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A).
```

```
Out[2]: Proving: Hello_Coq

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A
```

証明すべきサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

Coqの反応

今度は、次の文字列を Coqに入力して実行して見てください。
(最後の '.' ピリオド、忘れないでください。)

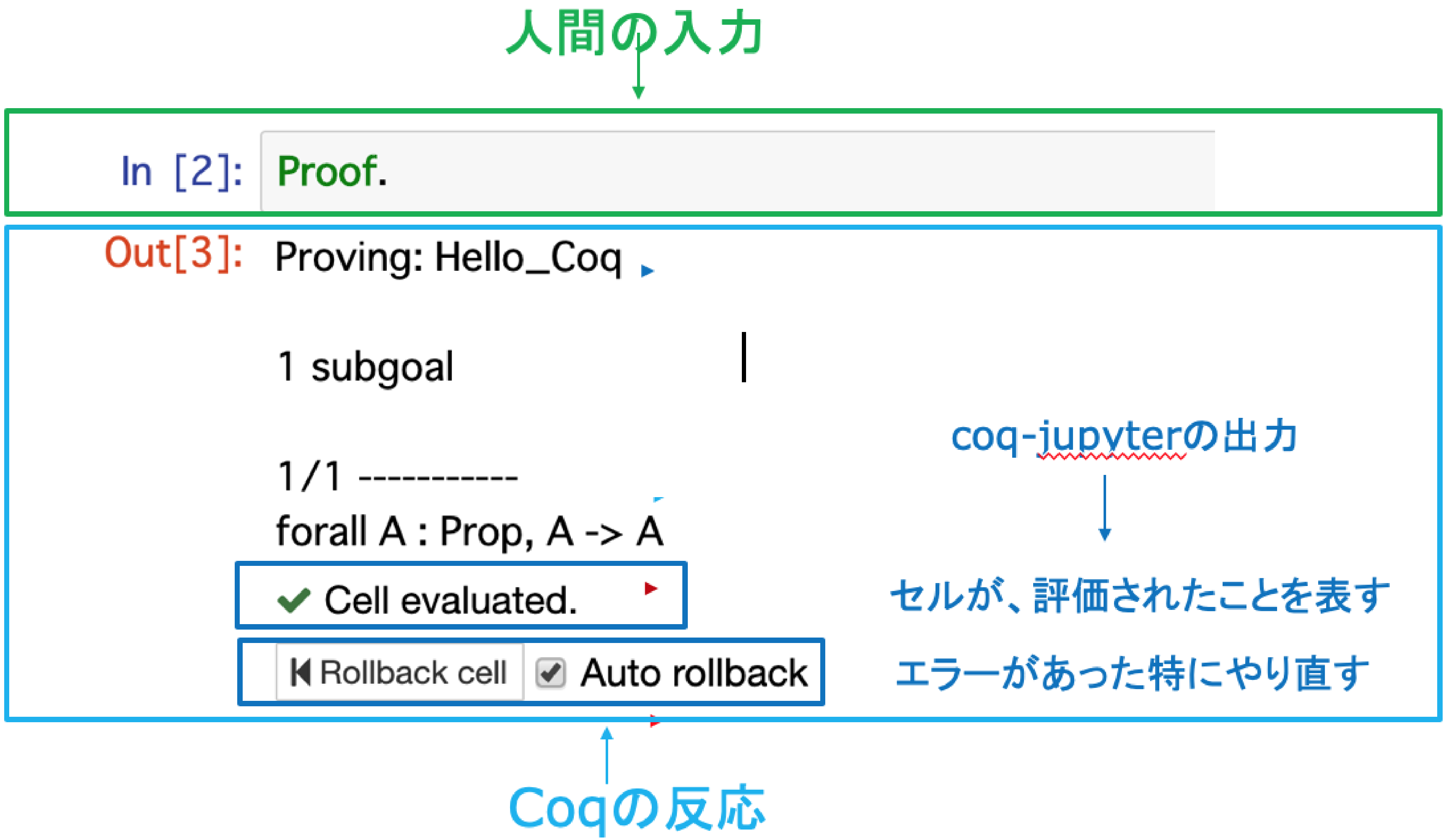
Proof.

次のような反応がcoqからあるはずです。基本的には、先の反応と同じです。coqコマンドの "Proof."は、これから証明が始まることを宣言しています。

次のような反応がcoqからあるはずです。基本的には、先の反応と同じです。coqコマンドの "Proof."は、これから証明が始まることを宣言しています。

ここでは、先に説明していなかった下二行の説明をしています。これらの出力は、coq-jupyterからのものです。このtutorial では、ツールとして coq-jupyter を利用しています。

"Cell evaluated"がでていれば、証明は、順調に進んでいると思って構いません。


人間の入力
In [2]:
Proof.
Out[3]:
Proving: Hello_Coq
1 subgoal
1/1 ----------
forall A : Prop, A -> A
Cell evaluated.
Rollback cell
Auto rollback
coq-jupyterの出力
セルが、評価されたことを表す
エラーがあった特にやり直す
Coqの反応

今度は、次の文字列を Coqに入力して実行して見てください。
(最後の '.' ピリオド、忘れないでください。)

intros.

次のような反応があるはずです。その意味を説明します。

人間の入力

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq

1 subgoal

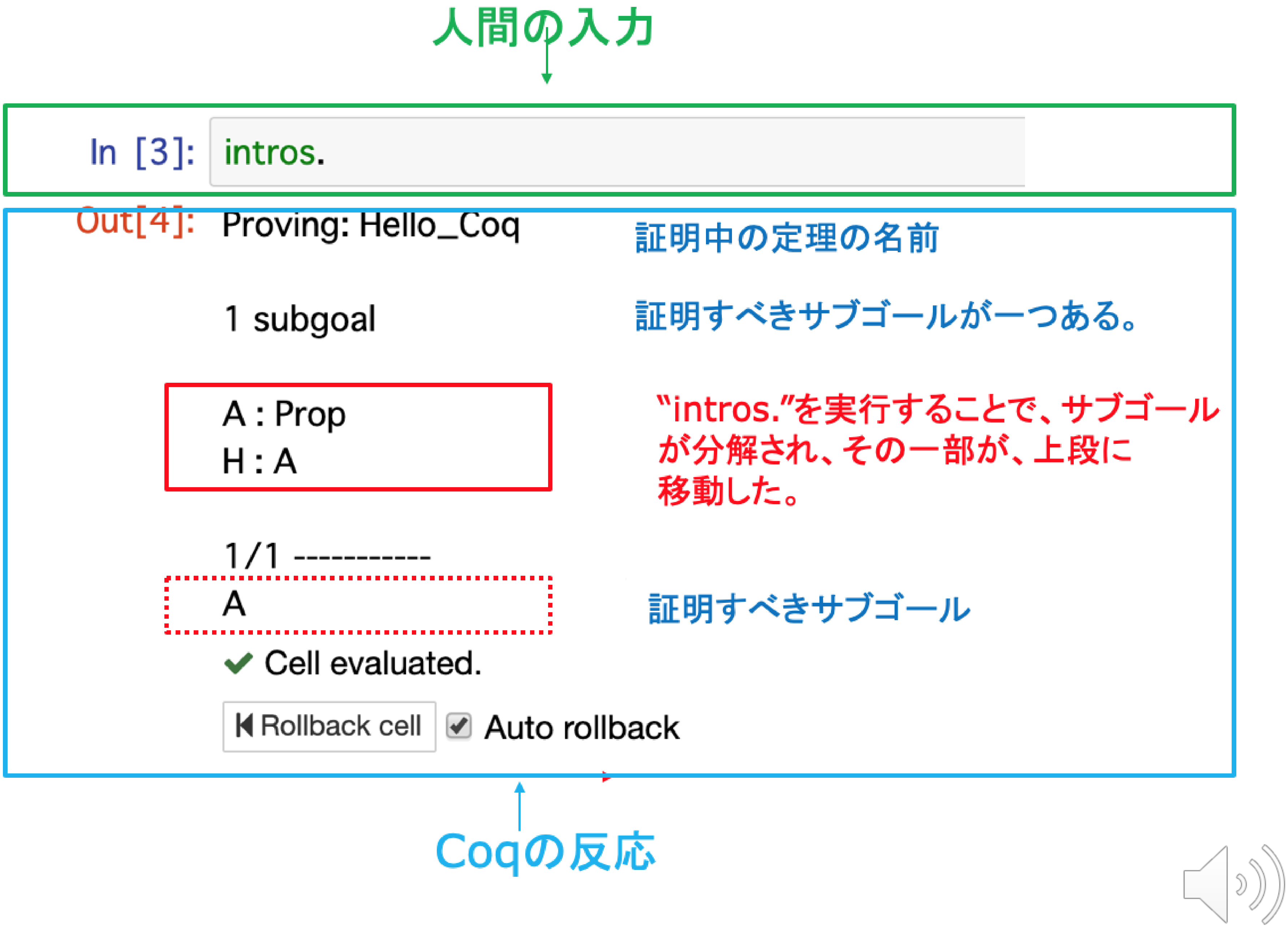
A : Prop
H : A

1/1 -----------
A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

Coqの反応


人間の入力
In [3]: intros.
Out[4]: Proving: Hello_Coq
証明中の定理の名前
1 subgoal
証明すべきサブゴールが一つある。
A : Prop
H : A
"intros."を実行することで、サブゴールが分解され、その一部が、上段に移動した。
1/1 -----------
A
証明すべきサブゴール
Cell evaluated.
Rollback cell
Auto rollback
Coqの反応

今度は、次の文字列を Coqに入力して実行して見てください。
(最後の ’.’ ピリオド、忘れないでください。)

exact H.

次のような反応があるはずです。


人間の入力
In [4]: exact H.
Out[5]: Proving: Hello_Coq
No more subgoals
証明すべきサブゴールが、もうない。
Cell evaluated.
Rollback cell
Auto rollback
Coqの反応

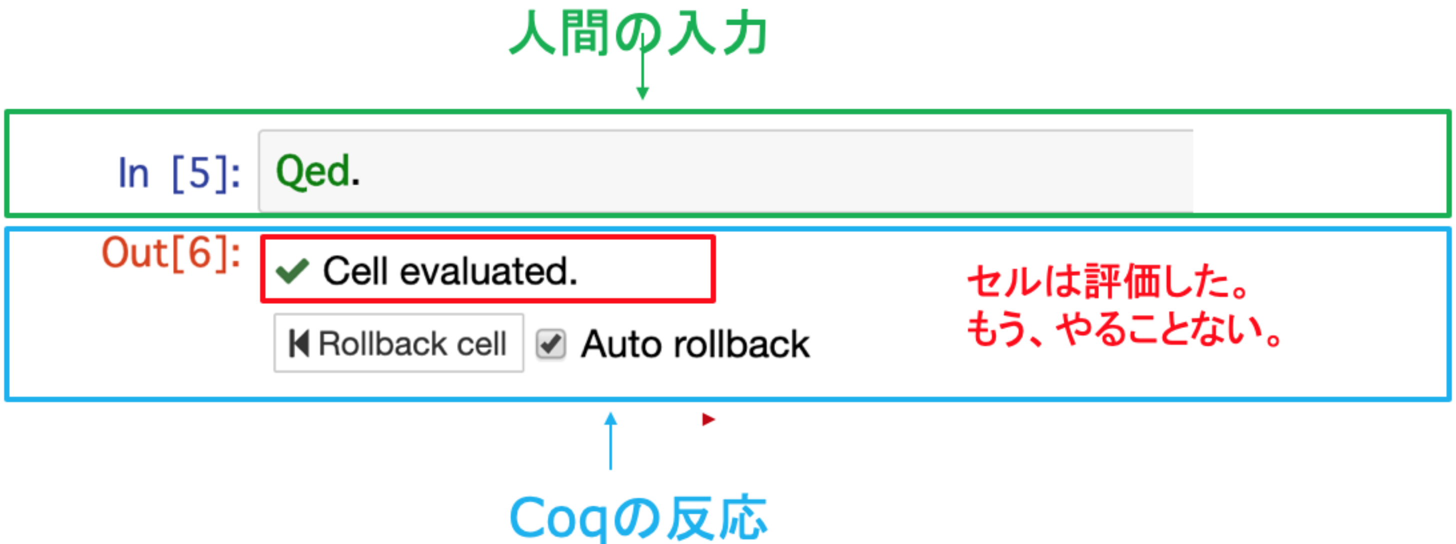
“No more subgoals” というのは、重要なメッセージです。証明すべきサブゴールが残っていないというのは、証明が終わったことを意味します。

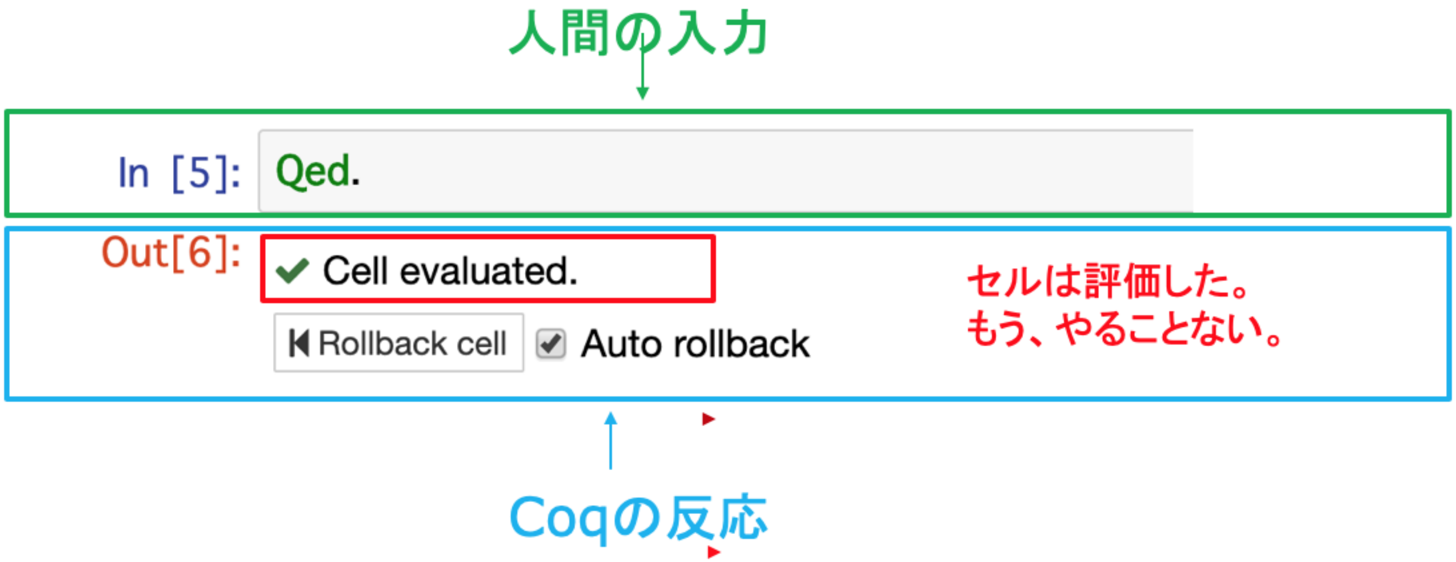
“No more subgoals” というのは、重要なメッセージです。証明すべきサブゴールが残っていないというのは、証明が終わったことを意味します。

証明の終了を伝える、次の文字列を入力してください。

Qed.

次のような反応があるはずです。


人間の入力
In [5]:
Qed.
Out[6]:
Cell evaluated.
Rollback cell
Auto rollback
セルは評価した。
もう、やることない。
Coqの反応



これで、証明が終わります。

Coqとのはじめての対話をふりかえる

Coqとのはじめての対話をふりかえる

「証明が終わった」と言われても、あまりピンとこないかもしれません。

Coqとのはじめての対話をふりかえる

「証明が終わった」と言われても、あまりピンとこないかもしれません。

それは、今回の「Coqとのはじめての対話」が、「対話」になっていなくて、言われたままの文字列を入力してきたことに原因があります。

今回、人間が行なった入力をまとめておきましょう

今回、人間が行なった入力をまとめておきましょう

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

今回、人間が行なった入力をまとめておきましょう

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

次のビデオで、今回の「対話」を、もう一度、振り返ってみようと思います。

Coq

はじめてのCoq

Hello Coq! (2)

人間はCoqに何を伝えたか？

Coqとのはじめての対話をふりかえる

前回のビデオで、Coqとのはじめての対話の様子を見てきました。ただ、これが「Coqでの証明だ」と言われても、あまりピンとこなかったかもしれません。

Coqとのはじめての対話をふりかえる

前回のビデオで、Coqとのはじめての対話の様子を見てきました。ただ、これが「Coqでの証明だ」と言われても、あまりピンとこなかったかもしれません。

人間が、Coqに何を伝えようとし、

Coqとのはじめての対話をふりかえる

前回のビデオで、Coqとのはじめての対話の様子を見てきました。ただ、これが「Coqでの証明だ」と言われても、あまりピンとこなかったかもしれません。

人間が、Coqに何を伝えようとし、
Coqが、人間に何を伝えようとしたのか

Coqとのはじめての対話をふりかえる

前回のビデオで、Coqとのはじめての対話の様子を見てきました。ただ、これが「Coqでの証明だ」と言われても、あまりピンとこなかったかもしれません。

人間が、Coqに何を伝えようとし、
Coqが、人間に何を伝えようとしたのか

を、あらためて振り返って見ましょう。

前回、人間がCoqに伝えたことをまとめてみました、

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

前回、人間がCoqに伝えたことをまとめてみました、

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

これだけ見ていると、これが定理Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えないと思います。

前回、人間がCoqに伝えたことをまとめてみました、

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

これだけ見ていると、これが定理Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えないと思います。

逆に、定理Hello_Coq が与えられた時、上のような証明をすぐに思いつくことは、ほとんどの人にはできないと思います。

それには理由があります。

それには理由があります。

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します。

それには理由があります。

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します。

人間は、Coqの反応を見て、証明を進めるために次にCoqに何を命ずるかを考えます。

それには理由があります。

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します。

人間は、Coqの反応を見て、証明を進めるために次にCoqに何を命ずるかを考えます。

そのやり取りの過程が省略されて、その結果だけを抜き出しても、その命令を選択した意図は見えてきません。

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します

それには理由があります。

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します。

人間は、Coqの反応を見て、証明を進めるために次にCoqに何を命ずるかを考えます。

そのやり取りの過程が省略されて、その結果だけを抜き出しても、その命令を選択した意図は見えてきません。

Coqでは、証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

Coqでは、証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

tactic というのは「戦略」という意味ですね。

Coqでは、証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

tactic というのは「戦略」という意味ですね。Coqの反応を見て、証明を進めるために、どのような攻め方をするのかと考えて出てきた結論が、あるtacticを選択するということです。

Coqでは、証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

tactic というのは「戦略」という意味ですね。Coqの反応を見て、証明を進めるために、どのような攻め方をするのかと考えて出てきた結論が、あるtacticを選択するということです。

なぜ、あるtactic が選ばれたかは、tacticの選択の直前のCoqの反応を見てみないとわかりません。

Coqでは、証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

tactic というのは「戦略」という意味ですね。Coqの反応を見て、証明を進めるために、どのような攻め方をするのかと考えて出てきた結論が、あるtacticを選択するということです。

なぜ、あるtactic が選ばれたかは、tacticの選択の直前のCoqの反応を見てみないとわかりません。この例では、introsや exact H がtacticです。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
 intros.
 exact H.
Qed.
```

tactics

「これが定理Hello_Coq (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えない」と、先ほど書きました。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

「これが定理Hello_Coq (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えない」と、先ほど書きました。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

ある証明が正しいことを示すために、人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要があるのでしょうか？

人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要があるのでしょうか？

「これが定理Hello_Coq (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えない」と、先ほど書きました。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

ある証明が正しいことを示すために、人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要があるのでしょうか？

「これが定理Hello_Coq (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えない」と、先ほど書きました。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

ある証明が正しいことを示すために、人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要があるのでしょうか？　そうでは、ありません。

人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要はありません。

「これが定理Hello_Coq (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えない」と、先ほど書きました。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

ある証明が正しいことを示すために、人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要があるのでしょうか？　そうでは、ありません。

意味不明なのは慣れない人間にとってのこと。

人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要はありません。

「これが定理Hello_Coq (forall A : Prop, A -> A)の証明とは、とても思えない」と、先ほど書きました。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

ある証明が正しいことを示すために、人間は、Coqとの「対話」を毎回繰り返す必要があるのでしょうか？　そうでは、ありません。

意味不明なのは慣れない人間にとってのこと。Coqは、これを正しく証明として認識し、それが正しい証明かチェックできます。

人間とCoqが「対話」していったん完成した証明は、人間はtacticごとのCoqの反応を見ることなく、それを丸ごとCoqに与えることで証明を実行することができます。

人間とCoqが「対話」していったん完成した証明は、人間はtacticごとのCoqの反応を見ることなく、それを丸ごとCoqに与えることで証明を実行することができます。

これは、証明の完成のためにCoqと「対話」した相手が誰であろうと構わないという点で、実践的には、とても重要なことです。我々は、第三者の行なった証明を、利用することができるのです。

完成した証明を、「対話」なしにCoqに与えることができます。

人間とCoqが「対話」していったん完成した証明は、人間はtacticごとのCoqの反応を見ることなく、それを丸ごとCoqに与えることで証明を実行することができます。

これは、証明の完成のためにCoqと「対話」した相手が誰であろうと構わないという点で、実践的には、とても重要なことです。我々は、第三者の行なった証明を、利用することができるのです。

Coq利用の二つのモード

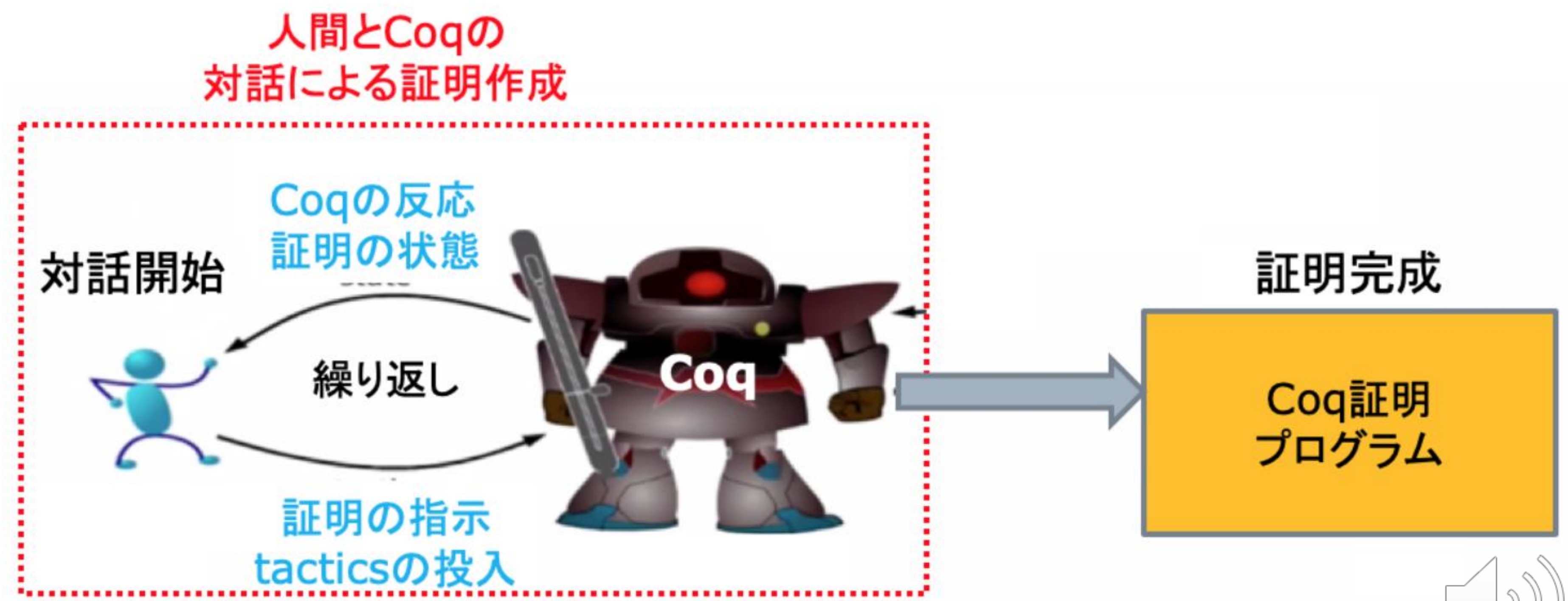
Coqの利用には、二つのモードがあります。

Coq利用の二つのモード

Coqの利用には、二つのモードがあります。
一つは、「対話型証明」モードです。

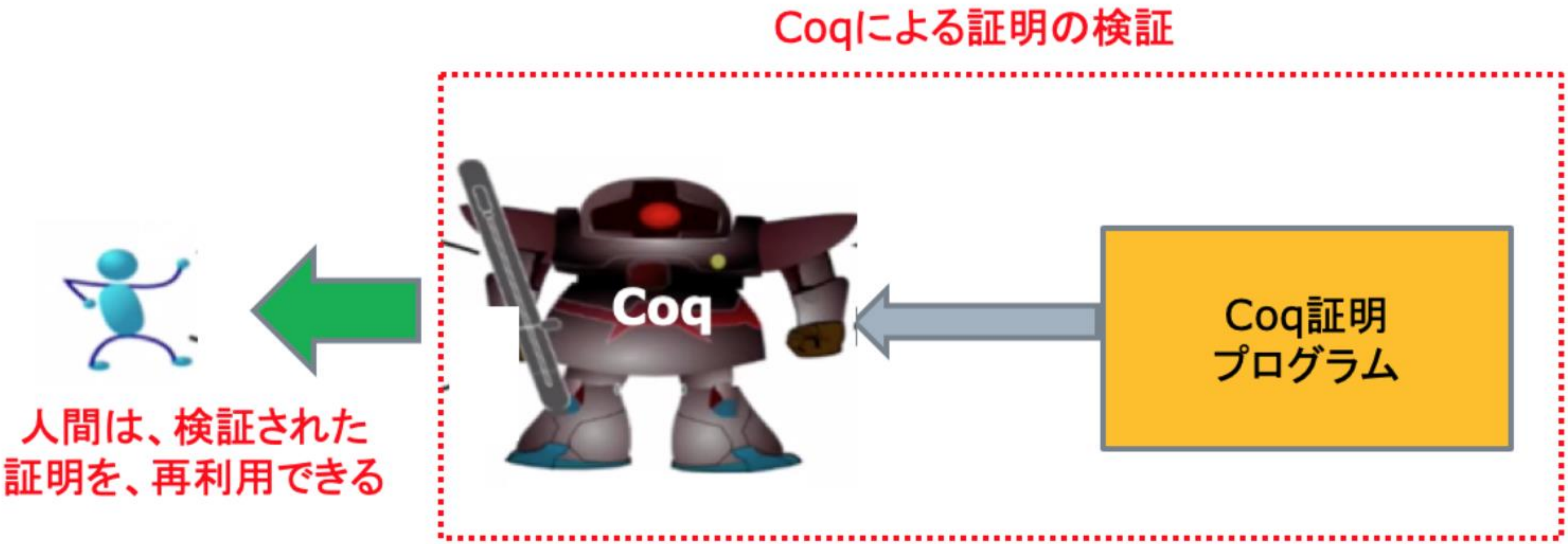
Coq利用の二つのモード

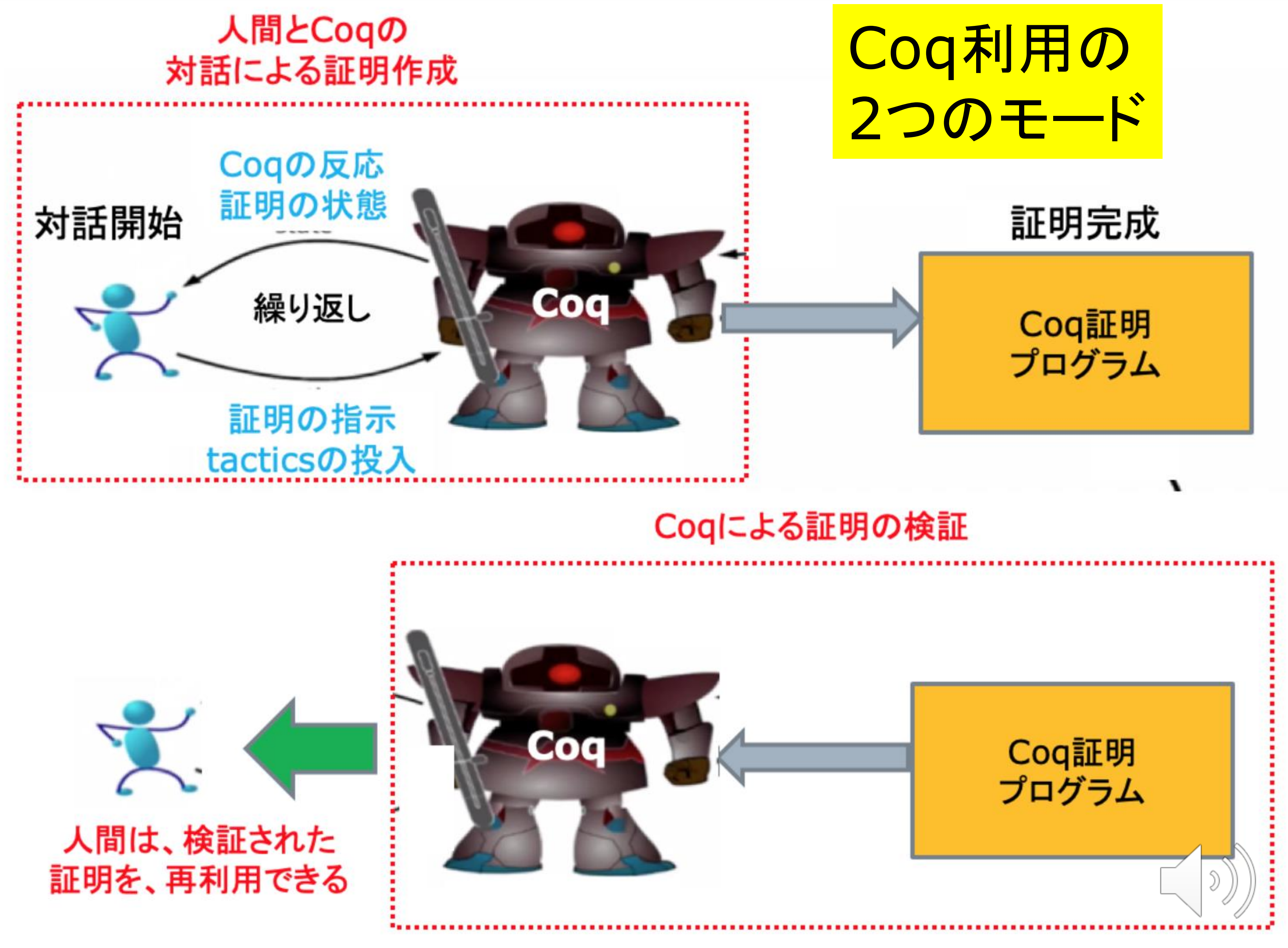
Coqの利用には、二つのモードがあります。
一つは、「対話型証明」モードです。



Coq利用の二つのモード

もう一つは、「証明自動検証」のモードです。




Coq利用の
2つのモード
人間とCoqの
対話による証明作成
対話開始
Coqの反応
証明の状態
繰り返し
証明の指示
tacticsの投入
Coq
証明完成
Coq証明
プログラム
Coqによる証明の検証
Coq
Coq証明
プログラム
人間は、検証された
証明を、再利用できる

今回のハンズオンの演習問題では、演習問題として実際に自分で解いた証明済の定理のみを使って、証明を行うことを原則として配列されています。

今回のハンズオンの演習問題では、演習問題として実際に自分で解いた証明済の定理のみを使って、証明を行うことを原則として配列されています。

それは、このハンズオンが、Coqでの証明スキルを学ぶことを目的にしているからです。

今回のハンズオンの演習問題では、演習問題として実際に自分で解いた証明済の定理のみを使って、証明を行うことを原則として配列されています。

それは、このハンズオンが、Coqでの証明スキルを学ぶことを目的にしているからです。

第一章の最後に、tactic tauto を紹介しました。このtacticは、命題論理の大部分を自動的に証明します。実際には、わざわざ命題論理の命題を証明しなくても、Coqはそれを解いてくれます。

今回のハンズオンの演習問題では、演習問題として実際に自分で解いた証明済の定理のみを使って、証明を行うことを原則として配列されています。

それは、このハンズオンが、Coqでの証明スキルを学ぶことを目的にしているからです。

第一章の最後に、tactic tauto を紹介しました。このtacticは、命題論理の大部分を自動的に証明します。実際には、わざわざ命題論理の命題を証明しなくても、Coqはそれを解いてくれます。それでも基本的な命題論理の証明方法を学ぶことは、Coqで証明を行う上での基本になります。

今回のハンズオンの演習問題では、演習問題として実際に自分で解いた証明済の定理のみを使って、証明を行うことを原則として配列されています。

それは、このハンズオンが、Coqでの証明スキルを学ぶことを目的にしているからです。

第一章の最後に、tactic tauto を紹介しました。このtacticは、命題論理の大部分を自動的に証明します。実際には、わざわざ命題論理の命題を証明しなくても、Coqはそれを解いてくれます。それでも基本的な命題論理の証明方法を学ぶことは、Coqで証明を行う上での基本になります。

同時に、「実際に自分で解いた証明済の定理のみを使う」というのは、Coqの実際の応用の場面では、とても強い制限になることに注意してください。

ここでは、重要なことが二つあります。一つは、何かを証明するためには、証明済の命題のみに依拠しなければならないということです。「自明のことだろう」で済ますわけには行かないのです。それは、数学的な方法にとっては、本質的に重要なことです。

ここでは、重要なことが二つあります。一つは、何かを証明するためには、証明済の命題のみに依拠しなければならないということです。「自明のことだろう」で済ますわけには行かないのです。それは、数学的な方法にとっては、本質的に重要なことです。

ただ、もう一つ重要なことは、その命題を、「実際に自分で解く」必要はないということです。誰が証明したかわからなくても、さらには、その証明の詳細を知らなくても、「その定理が正しいものである限り」、我々はその定理を利用できます。

ここでは、重要なことが二つあります。一つは、何かを証明するためには、証明済の命題のみに依拠しなければならないということです。「自明のことだろう」で済ますわけには行かないのです。それは、数学的な方法にとっては、本質的に重要なことです。

ただ、もう一つ重要なことは、その命題を、「実際に自分で解く」必要はないということです。誰が証明したかわからなくても、さらには、その証明の詳細を知らなくても、「その定理が正しいものである限り」、我々はその定理を利用できます。

それは、Coqの応用に限らず、数学の応用全般について言えることです。数学は、原理的には、整合的な「累積的知」の体系です。この原理はとても強力なものです。実際の場面では、この原理を利用しない手はないのです。

数学は、整合的な「累積的知」の体系です。

ここでは、重要なことが二つあります。一つは、何かを証明するためには、証明済の命題のみに依拠しなければならないということです。「自明のことだろう」で済ますわけには行かないのです。それは、数学的な方法にとっては、本質的に重要なことです。

ただ、もう一つ重要なことは、その命題を、「実際に自分で解く」必要はないということです。誰が証明したかわからなくても、さらには、その証明の詳細を知らなくても、「その定理が正しいものである限り」、我々はその定理を利用できます。

それは、Coqの応用に限らず、数学の応用全般について言えることです。数学は、原理的には、整合的な「累積的知」の体系です。この原理はとても強力なものです。実際の場面では、この原理を利用しない手はないのです。

数学の「整合的な累積的知の体系」という原理と自由な定理利用の背後には、「本当にその定理は正しいのか？」という基本的な疑問が潜在的には存在します。

数学の「整合的な累積的知の体系」という原理と自由な定理利用の背後には、「本当にその定理は正しいのか？」という基本的な疑問が潜在的には存在します。

こうした厄介な問題にたいしても、Coqはとてもスマートな解決方法を提供します。

数学の「整合的な累積的知の体系」という原理と自由な定理利用の背後には、「本当にその定理は正しいのか？」という基本的な疑問が潜在的には存在します。

こうした厄介な問題にたいしても、Coqはとてもスマートな解決方法を提供します。それは、ある定理が、Coqでの証明という形で提供されているなら、その証明が正しいか否かを、我々は簡単に「検証」できるということです。

数学の「整合的な累積的知の体系」という原理と自由な定理利用の背後には、「本当にその定理は正しいのか？」という基本的な疑問が潜在的には存在します。

こうした厄介な問題にたいしても、Coqはとてもスマートな解決方法を提供します。それは、ある定理が、Coqでの証明という形で提供されているなら、その証明が正しいか否かを、我々は簡単に「検証」できるということです。

ソフトウェア・エンジニアリングでの "Deep Specification" や、数学での "UniMath" といった注目すべきムーブメントは、Coqのこうした能力によってドライブされています。


Coq

はじめてのCoq

Hello Coq! (3)

Coqは人間に何を伝えたか？

ふりかえり

最初のビデオ「Coqとのはじめての対話」で、Coqとのはじめての対話の様子を見てきました。

ただ、これが「Coqでの証明だ」と言われても、あまりピンとこなかったかもしれません。

ということで、前回のビデオ「人間はCoqに何を伝えたか？」で、人間が、Coqに何を伝えようとしたかを見てきました。

ここでは、人間は、**tactics** という特殊な言葉で、Coqに話しかけていました。

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します

Coqの証明は、人間とCoqの「対話」を通じて進行します。

人間は、Coqの反応を見て、証明を進めるために次にCoqに何を命ずるかを考えます。

そのやり取りの過程が省略されて、その結果だけを抜き出しても、その命令を選択した意図は見えてきません。

証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

tactic というのは「戦略」という意味ですね。Coqの反応を見て、証明を進めるために、どのような攻め方をするのかと考えて出てきた結論が、あるtacticを選択するということです。

なぜ、あるtactic が選ばれたかは、tacticの選択の直前のCoqの反応を見てみないとわかりません。

Coqで証明を進めるためには、人間の入力に対して、Coqがどのように反応したか、その意味をよく知る必要があります。

証明を進めるために、人間がCoqに与える命令を **tactic** と呼びます

tactic というのは「戦略」という意味ですね。Coqの反応を見て、証明を進めるために、どのような攻め方をするのかと考えて出てきた結論が、あるtacticを選択するということです。

なぜ、あるtactic が選ばれたかは、tacticの選択の直前のCoqの反応を見てみないとわかりません。

Coqで証明を進めるためには、人間の入力に対して、Coqがどのように反応したか、その意味をよく知る必要があります。

このビデオでは、Coqが人間に何を伝えようとしたを説明します。

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

ここでは、先の例で人間が intros と打ち込んだ時のCoqの反応を、改めて、見ることにしましょう。

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

ここでは、先の例で人間が intros と打ち込んだ時のCoqの反応を、改めて、見ることにしましょう。

```
Theorem Hello_Coq : (forall A : Prop, A -> A ).
Proof.
  intros.
  exact H.
Qed.
```

ここ

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間のtacticsの投入に対するCoqの反応には、次のような情報が含まれています。

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間のtacticsの投入に対するCoqの反応には、次のような情報が含まれています。

- 証明中の定理の名前
- 証明すべきサブゴールの数

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間のtacticsの投入に対するCoqの反応には、次のような情報が含まれています。

- 証明中の定理の名前
- 証明すべきサブゴールの数

- 証明の状態を表す大事な情報（この情報は、横線の上下で大きく二つに分かれています。）

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間のtacticsの投入に対するCoqの反応には、次のような情報が含まれています。

- 証明中の定理の名前
- 証明すべきサブゴールの数

- 証明の状態を表す大事な情報（この情報は、横線の上下で大きく二つに分かれています。）
  - サブゴールを証明するにあたって前提として利用できる仮説
  - 証明すべきサブゴール

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

```
In [3]: intros.
```

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq

1 subgoal

A : Prop
H : A

1/1 ----------
A

Coqの反応

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq ← 証明中の定理の名前

1 subgoal ← 証明すべきサブゴールが一つある。

A : Prop
H : A

1/1 ----------
A

Coqの反応

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq ← 証明中の定理の名前

1 subgoal ← 証明すべきサブゴールが一つある。

```
A : Prop
H : A

1/1 ----------
A
```

← 「証明の状態」を表す大事な情報。

Coqの反応

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq

証明中の定理の名前

1 subgoal

証明すべきサブゴールが一つある。

仮説

A : Prop
H : A

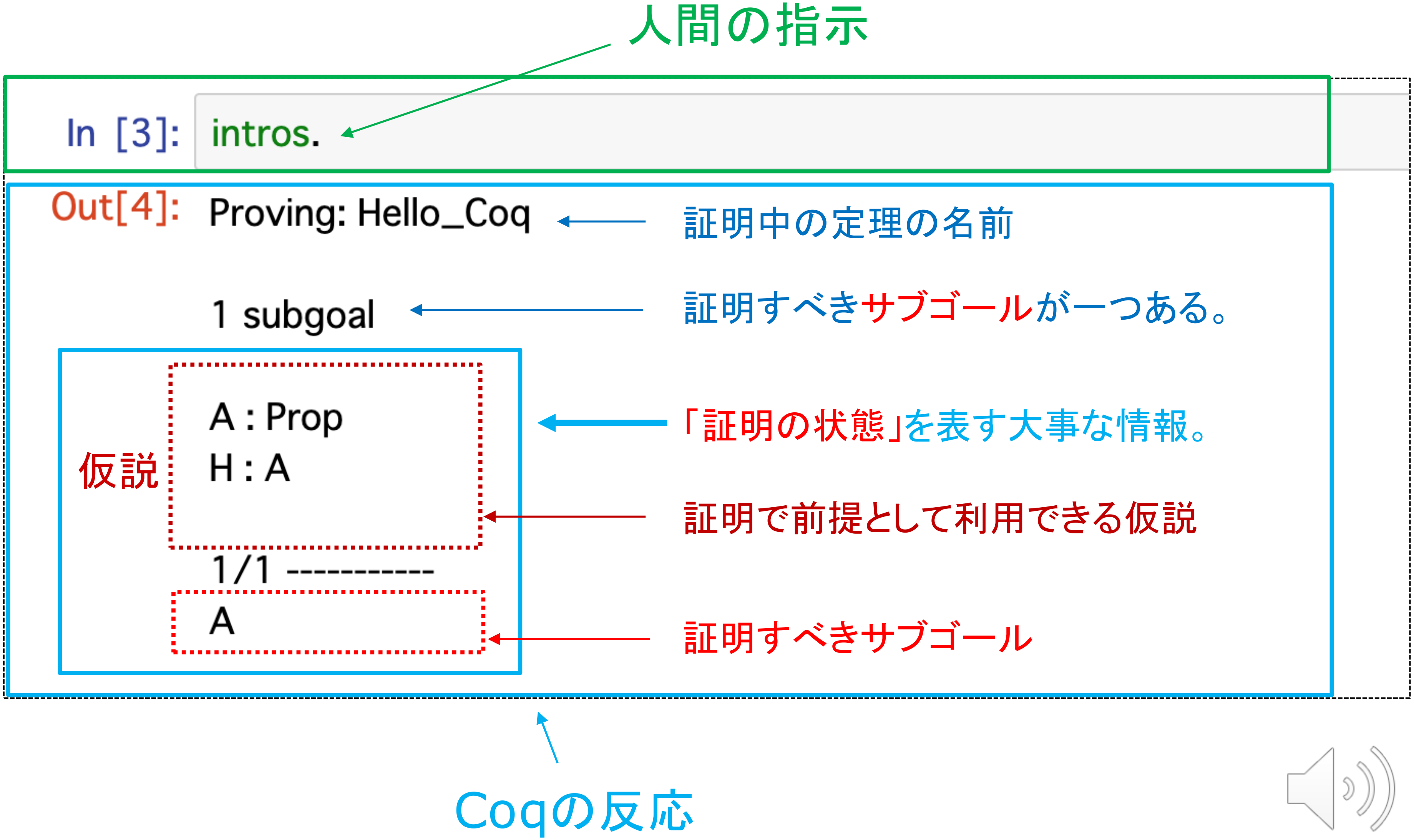
「証明の状態」を表す大事な情報。

証明で前提として利用できる仮説

1/1 ----------
A

Coqの反応

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq　　証明中の定理の名前

1 subgoal　　証明すべきサブゴールが一つある。

「証明の状態」を表す大事な情報。

仮説

A : Prop
H : A

証明で前提として利用できる仮説

1/1 ----------　　1個あるサブゴールの1個目

A　　証明すべきサブゴール

Coqの反応

Coqは、その時点での「証明の状態」を返します。
tacticsは、「証明の状態」を変化させます。

Coqは、その時点での「証明の状態」を返します。
tacticsは、「証明の状態」を変化させます。

Coqが返す反応で一番大事なのは、その時点での「証明の状態」を表す情報です。

Coqは、その時点での「証明の状態」を返します。
tacticsは、「証明の状態」を変化させます。

Coqが返す反応で一番大事なのは、その時点での「証明の状態」を表す情報です。

その状態は、直前に人間が投入した tactic コマンドによって変化します。

Coqは、その時点での「証明の状態」を返します。
tacticsは、「証明の状態」を変化させます。

Coqが返す反応で一番大事なのは、その時点での「証明の状態」を表す情報です。

その状態は、直前に人間が投入した tactic コマンドによって変化します。

tactics は、まさに、証明の状態を変化させるために、人間が利用するコマンドです。

「証明の状態」の情報のうち、「サブゴール」といわれるものに注目しましょう。

「証明の状態」の情報のうち、「サブゴール」といわれるものに注目しましょう。

Coqの反応の中に含まれるサブゴールというのは、「当面は、この問題の証明に集中しようよ」という、Coqから人間へのサジェスションです。Coqから人間への指示と思っても構いません。

「証明の状態」には、当面の証明で集中すべきサブゴールが含まれています。

「証明の状態」の情報のうち、「サブゴール」といわれるものに注目しましょう。

Coqの反応の中に含まれるサブゴールというのは、「当面は、この問題の証明に集中しようよ」という、Coqから人間へのサジェスションです。Coqから人間への指示と思っても構いません。

Coqは、大きな問題を簡単な問題に分割します

人間とCoqは、大きな問題を複数のより簡単な問題に分割して、一つづつ分割された問題を解こうとします。こうして分割された問題の一つが、サブゴールです。

Coqは、大きな問題を簡単な問題に分割します

人間とCoqは、大きな問題を複数のより簡単な問題に分割して、一つづつ分割された問題を解こうとします。こうして分割された問題の一つが、サブゴールです。

ですので、ある問題を解くために必要なサブゴールの数は、一つとは限りません。

Coqは、大きな問題を簡単な問題に分割します

人間とCoqは、大きな問題を複数のより簡単な問題に分割して、一つづつ分割された問題を解こうとします。こうして分割された問題の一つが、サブゴールです。

ですので、ある問題を解くために必要なサブゴールの数は、一つとは限りません。

次の例は、destruct というtactic を実行した結果、二つのサブゴールを持つ証明の状態が生まれたことを示しています。

人間の指示　destruct tactic を使っている

In [4]:
```
(* A\/B をdestructすると、Aが仮定に残り、サブゴールが二つに分割される。*)
destruct A_or_B.
```

Out[5]: Proving: or_comm

2 subgoals　← 証明すべきサブゴールが2つある。

仮説

```
A, B : Prop
H : A
```

← 証明で前提として利用できる仮説

```
1/2 -----------
B \/ A
```

← 証明すべきサブゴールの一つ目

```
2/2 -----------
B \/ A
```

← 証明すべきサブゴールの二つ目

✔ Cell evaluated.

Rollback cell　☑ Auto rollback

Coqの反応

先に述べたように、Coqは、元の問題をより簡単な問題（サブゴール）に分解して、それをすべて解こうとします。

先に述べたように、Coqは、元の問題をより簡単な問題（サブゴール）に分解して、それをすべて解こうとします。

すべてのサブゴールが解かれたとき、元の問題の証明が終わります。

先に述べたように、Coqは、元の問題をより簡単な問題（サブゴール）に分解して、それをすべて解こうとします。

すべてのサブゴールが解かれたとき、元の問題の証明が終わります。

別の言い方をすれば、Coqでの証明の最終的な目標は、証明されていないサブゴールの数をゼロにすることです。

Coqでの証明の最終目標は、サブゴールをなくすことです。

先に述べたように、Coqは、元の問題をより簡単な問題（サブゴール）に分解して、それをすべて解こうとします。

すべてのサブゴールが解かれたとき、元の問題の証明が終わります。

別の言い方をすれば、Coqでの証明の最終的な目標は、証明されていないサブゴールの数をゼロにすることです。


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (1)

論理式はどのような形をしているか？

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

A ∧ B　　　　Aかつ B

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

$A \land B$	AかつB
$A \lor B$	AまたはB

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

A ∧ B	AかつB
A ∨ B	AまたはB
A → B	AならばB

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

A ∧ B	AかつB
A ∨ B	AまたはB
A → B	AならばB
(∀x)B(x)	すべてのxについてB(x)が成り立つ

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

$A \land B$	AかつB
$A \lor B$	AまたはB
$A \to B$	AならばB
$(\forall x)B(x)$	すべてのxについてB(x)が成り立つ
$(\exists x)B(x)$	B(x)が成り立つようなxが存在する

基本的な論理記号と
それから構成される命題の意味

この章では、Coqでの論理式の証明の仕方について学びます。

最初に基本的な論理記号と、それから構成される命題の意味を振り返っておきましょう。つぎのようなものです。

A ∧ B	AかつB
A ∨ B	AまたはB
A → B	AならばB
(∀x)B(x)	すべてのxについてB(x)が成り立つ
(∃x)B(x)	B(x)が成り立つようなxが存在する

複雑な論理式は、単純な論理式から単純なルールで構成されます。

複雑な論理式は、単純な論理式から単純なルールで構成されます。

次のルールは、「Aが命題であり」、かつ、「Bも命題である」なら、「$(A \land B)$も命題である」ということを主張しています。

命題の構成ルール -- Formation Rule

複雑な論理式は、単純な論理式から単純なルールで構成されます。

次のルールは、「Aが命題であり」、かつ、「Bも命題である」なら、「(A ∧ B)も命題である」ということを主張しています。

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \land B)\ \text{は命題である}}\ (\land\mathbf{F})$$

$$\frac{A \text{ は命題である} \qquad B \text{ は命題である}}{(A \wedge B) \text{ は命題である}}\ (\wedge \mathbf{F})$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge \mathrm{F})$$

ほとんど自明だと思いますが、このルールの読み方を説明しましょう。

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \land B)\ \text{は命題である}}\ (\land F)$$

ほとんど自明だと思いますが、このルールの読み方を説明しましょう。

それぞれのルールは「横棒」の上の部分と、「横棒」の下の部分に分かれています。この「横棒」は、「横棒」の上の部分の判断が正しいとき、「横棒」の下の部分の判断も正しいということを表しています。

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge F)$$

ほとんど自明だと思いますが、このルールの読み方を説明しましょう。

それぞれのルールは「横棒」の上の部分と、「横棒」の下の部分に分かれています。この「横棒」は、「横棒」の上の部分の判断が正しいとき、「横棒」の下の部分の判断も正しいということを表しています。

横棒の右に書かれている (∧F) という記号は、" ∧ Formation Rule"を省略したもので、この論理式の構成ルールが、論理記号" ∧ "を用いた、論理式の構成ルールであることを示しています。

命題の構成ルールは自然なものです

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge F)$$

次の命題の構成ルールも自然なものです

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \rightarrow B)\ \text{は命題である}}\ (\rightarrow F)$$

次の命題の構成ルールも自然なものです

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge \mathbf{F})$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \rightarrow B)\ \text{は命題である}}\ (\rightarrow \mathbf{F})$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \vee B)\ \text{は命題である}}\ (\vee \mathbf{F})$$

次の命題の構成ルールも自然なものです

$$\frac{A\ \text{は命題である}\qquad B\ \text{は命題である}}{(A\wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}\qquad B\ \text{は命題である}}{(A\to B)\ \text{は命題である}}\ (\to F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}\qquad B\ \text{は命題である}}{(A\vee B)\ \text{は命題である}}\ (\vee F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}}{(\sim A)\ \text{は命題である}}\ (\sim F)$$

次の命題の構成ルールも自然なものです

$$\frac{x\ \text{は変数である} \qquad P\ \text{は命題である}}{(\forall x.\ P)\ \text{は命題である}}\ (\forall \mathbf{F})$$

次の命題の構成ルールも自然なものです

$$\frac{x \text{ は変数である} \qquad P \text{ は命題である}}{(\forall x.\ P) \text{ は命題である}}\ (\forall \mathbf{F})$$

$$\frac{x \text{ は変数である} \qquad P \text{ は命題である}}{(\exists x.\ P) \text{ は命題である}}\ (\exists \mathbf{F})$$

横棒の上にあるのが単純な論理式で、横棒の下にあるのが複雑な論理式です。このルールを繰り返し適用して、単純な論理式から複雑な論理式が構成されます。

横棒の上にあるのが単純な論理式で、横棒の下にあるのが複雑な論理式です。このルールを繰り返し適用して、単純な論理式から複雑な論理式が構成されます。

大事なことは、形の整った論理式は、すべてこのルールによって構成されたものだということです。

横棒の上にあるのが単純な論理式で、横棒の下にあるのが複雑な論理式です。このルールを繰り返し適用して、単純な論理式から複雑な論理式が構成されます。

大事なことは、形の整った論理式は、すべてこのルールによって構成されたものだということです。

Coqでの論理式の証明では、「論理式の形」が重要な役割を果たします。それについては、次回以降で見ていくことにしましょう。

Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (2)

論理式の部分式への分解とサブゴール

命題の分解ルール -- 部分式への分解

命題の分解ルール -- 部分式への分解

今度は、論理式の構成とは逆のこと、複雑な論理式を単純な論理式に分解することを考えてみましょう。

命題の分解ルール -- 部分式への分解

今度は、論理式の構成とは逆のこと、複雑な論理式を単純な論理式に分解することを考えてみましょう。

例えば、A ∨ Bという論理式が与えられた時、それを論理式Aと論理式Bに分解するのです。こうして分解された論理式を、元の論理式の部分式と呼びます。

命題の分解ルール -- 部分式への分解

今度は、論理式の構成とは逆のこと、複雑な論理式を単純な論理式に分解することを考えてみましょう。

例えば、A ∨ Bという論理式が与えられた時、それを論理式Aと論理式Bに分解するのです。こうして分解された論理式を、元の論理式の部分式と呼びます。

論理式を、その部分式に分解するルールは、先の構成ルールから簡単に作れます。

命題の分解ルール -- 部分式への分解

今度は、論理式の構成とは逆のこと、複雑な論理式を単純な論理式に分解することを考えてみましょう。

例えば、A ∨ Bという論理式が与えられた時、それを論理式Aと論理式Bに分解するのです。こうして分解された論理式を、元の論理式の部分式と呼びます。

論理式を、その部分式に分解するルールは、先の構成ルールから簡単に作れます。分解は構成の逆ですから、先の構成ルールの上下を逆にして、上段に「～は命題である」を置き、下段に、「～は、上段の命題の部分式 である」といった判断を置けばいいのです。

命題の分解ルール -- 部分式への分解

今度は、論理式の構成とは逆のこと、複雑な論理式を単純な論理式に分解することを考えてみましょう。

例えば、A ∨ Bという論理式が与えられた時、それを論理式Aと論理式Bに分解するのです。こうして分解された論理式を、元の論理式の部分式と呼びます。

論理式を、その部分式に分解するルールは、先の構成ルールから簡単に作れます。分解は構成の逆ですから、先の構成ルールの上下を逆にして、上段に「～は命題である」を置き、下段に、「～は、上段の命題の部分式 である」といった判断を置けばいいのです。あるいは、構成ルールを下から上に読めば、分解ルールが得られます。

命題の構成ルール

A は命題である　B は命題である

(A∧B) は命題である　(∧F)

A は命題である　B は命題である

(A→B) は命題である　(→F)

A は命題である　B は命題である

(A∨B) は命題である　(∨F)

A は命題である

(~A) は命題である　(~F)

命題の構成ルール

構成ルール

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}} \quad (\wedge F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \rightarrow B)\ \text{は命題である}} \quad (\rightarrow F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \vee B)\ \text{は命題である}} \quad (\vee F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}}{(\sim A)\ \text{は命題である}} \quad (\sim F)$$

命題の構成ルールと分解ルール

分解は構成の逆

構成ルール

$$\frac{A\text{ は命題である}\qquad B\text{ は命題である}}{(A\wedge B)\text{ は命題である}}\ (\wedge F)$$

$$\frac{A\text{ は命題である}\qquad B\text{ は命題である}}{(A\rightarrow B)\text{ は命題である}}\ (\rightarrow F)$$

$$\frac{A\text{ は命題である}\qquad B\text{ は命題である}}{(A\vee B)\text{ は命題である}}\ (\vee F)$$

$$\frac{A\text{ は命題である}}{(\sim A)\text{ は命題である}}\ (\sim F)$$

命題の構成ルールと分解ルール

分解は構成の逆

構成ルール

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \wedge B)\ \text{は命題である}}\ (\wedge F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \to B)\ \text{は命題である}}\ (\to F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である} \qquad B\ \text{は命題である}}{(A \vee B)\ \text{は命題である}}\ (\vee F)$$

$$\frac{A\ \text{は命題である}}{(\sim A)\ \text{は命題である}}\ (\sim F)$$

分解ルール

構成ルールを下から上に読めば、分解ルールが得られる

命題の部分式

命題の部分式

命題を部分式に分解すると、元の命題の持っていた情報は、だんだん失われていきます。

命題の部分式

命題を部分式に分解すると、元の命題の持っていた情報は、だんだん失われていきます。

命題 $A \land B$ を 部分式に分解すると、命題Aと命題Bになりますが、そこには命題 $A \land B$ という構成の形が持っていた情報は、もはやありません。命題 $A \lor B$ を 部分式に分解しても、やはり、同じ命題Aと命題Bが得られます。

命題の部分式

命題を部分式に分解すると、元の命題の持っていた情報は、だんだん失われていきます。

命題 $A \wedge B$ を 部分式に分解すると、命題Aと命題Bになりますが、そこには命題 $A \wedge B$ という構成の形が持っていた情報は、もはやありません。命題 $A \vee B$ を 部分式に分解しても、やはり、同じ命題Aと命題Bが得られます。

分解の結果としての命題Aと命題Bをみているだけでは、それが、命題 $A \wedge B$ に起源を持つものなのか、命題 $A \vee B$に起源を持つものなのか判断はできません。

証明のサブゴールの例

証明のサブゴールの例

Coqでの証明は、複雑な問題を、簡単な部分問題（Coqでは、それをサブゴールと呼んでいます）に分割して、そのサブゴールをすべて解くことで、元の問題を解くことを目指します。

証明のサブゴールの例

Coqでの証明は、複雑な問題を、簡単な部分問題（Coqでは、それをサブゴールと呼んでいます）に分割して、そのサブゴールをすべて解くことで、元の問題を解くことを目指します。

例えば、命題 A ∧ B を証明しようとするなら、 命題 A の証明と命題 B の証明の「両方」が必要になります。

証明のサブゴールの例

Coqでの証明は、複雑な問題を、簡単な部分問題（Coqでは、それをサブゴールと呼んでいます）に分割して、そのサブゴールをすべて解くことで、元の問題を解くことを目指します。

例えば、命題 $A \wedge B$ を証明しようとするなら、 命題 A の証明と命題 B の証明の「両方」が必要になります。
命題 $A \wedge B$ の証明は、Aの証明とBの証明に分割されて、二つのサブゴールを持つことになります。

証明のサブゴールの例

Coqでの証明は、複雑な問題を、簡単な部分問題（Coqでは、それをサブゴールと呼んでいます）に分割して、そのサブゴールをすべて解くことで、元の問題を解くことを目指します。

例えば、命題 $A \land B$ を証明しようとするなら、 命題 A の証明と命題 B の証明の「両方」が必要になります。
命題 $A \land B$ の証明は、Aの証明とBの証明に分割されて、二つのサブゴールを持つことになります。

例えば、命題 $A \lor B$ を証明しようとするなら、 命題 A の証明、あるいは、命題 B の証明の「一方」で十分です。

証明のサブゴールの例

Coqでの証明は、複雑な問題を、簡単な部分問題（Coqでは、それをサブゴールと呼んでいます）に分割して、そのサブゴールをすべて解くことで、元の問題を解くことを目指します。

例えば、命題 $A \land B$ を証明しようとするなら、 命題 A の証明と命題 B の証明の「両方」が必要になります。
命題 $A \land B$ の証明は、Aの証明とBの証明に分割されて、二つのサブゴールを持つことになります。

例えば、命題 $A \lor B$ を証明しようとするなら、 命題 A の証明、あるいは、命題 B の証明の「一方」で十分です。
命題 $A \lor B$ の証明は、Aの証明とBの証明に分割されるのですが、そのどちらかを証明すればよく、一つのサブゴールを持つことになります。

証明のサブゴールの例 – 数学的帰納法

証明のサブゴールの例 － 数学的帰納法

全ての自然数に対して、ある性質 P が成り立つことを示すには、次のように数学的帰納法を使います。

証明のサブゴールの例 – 数学的帰納法

全ての自然数に対して、ある性質 P が成り立つことを示すには、次のように数学的帰納法を使います。

1. ゼロに対してP(0)が成り立つことを証明する。

証明のサブゴールの例 – 数学的帰納法

全ての自然数に対して、ある性質 P が成り立つことを示すには、次のように数学的帰納法を使います。

1. ゼロに対してP(0)が成り立つことを証明する。
2. P(n)が成り立てばP(n+1)が成り立つことを証明する。

証明のサブゴールの例 – 数学的帰納法

全ての自然数に対して、ある性質 P が成り立つことを示すには、次のように数学的帰納法を使います。

1. ゼロに対してP(0)が成り立つことを証明する。
2. P(n)が成り立てばP(n+1)が成り立つことを証明する。

ですので、数学的帰納法を使った証明は、二つのサブゴールを持つことになります。

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴール(Sub Goal)と命題の部分式（Sub Formula）とは、名前は似ていますが、違うものです。

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴール(Sub Goal)と命題の部分式（Sub Formula）とは、名前は似ていますが、違うものです。

ただ、複雑なものを簡単なものにするという点では、証明のサブゴール(Sub Goal)と命題の部分式(Sub Formula) は似ているところがあります。

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴール(Sub Goal)と命題の部分式（Sub Formula）とは、名前は似ていますが、違うものです。

ただ、複雑なものを簡単なものにするという点では、証明のサブゴール(Sub Goal)と命題の部分式(Sub Formula) は似ているところがあります。

実際、ある論理的命題の証明ができるなら、その証明には、元の命題とその部分式だけが使われるはずだと考えるのは、そんなに間違ってはいません。証明に 部分式を使おうというのは、アイデアとしては悪くありません。

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

A ∧ B (AかつB)の証明

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　サブゴールAの証明　かつ
　　　　　　　　　　　　　　サブゴールBの証明

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

A ∧ B (AかつB)の証明 → サブゴールAの証明 かつ
サブゴールBの証明

A ∨ B (AまたはB)の証明

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 $A \wedge B$ の場合にも 命題 $A \vee B$ の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

$A \wedge B$ (AかつB)の証明 → サブゴールAの証明 かつ
サブゴールBの証明

$A \vee B$ (AまたはB)の証明 → サブゴールAの証明 または
サブゴールBの証明


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (3)

構成のルールと演繹のルール

ふりかえり

ふりかえり

先に、「Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。」と書きました。

ふりかえり

先に、「Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。」と書きました。

具体的には、次のような例をあげました。

ふりかえり

先に、「Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。」と書きました。

具体的には、次のような例をあげました。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　サブゴールAの証明　かつ
サブゴールBの証明

ふりかえり

先に、「Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。」と書きました。

具体的には、次のような例をあげました。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　サブゴールAの証明　かつ
　　　　　　　　　　　　サブゴールBの証明

A ∨ B (AまたはB)の証明　→　サブゴールAの証明　または
　　　　　　　　　　　　サブゴールBの証明

ふりかえり

先に、「Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。」と書きました。

具体的には、次のような例をあげました。

A ∧ B (AかつB)の証明 → サブゴールAの証明 かつ
サブゴールBの証明

A ∨ B (AまたはB)の証明 → サブゴールAの証明 または
サブゴールBの証明

サブゴールA, サブゴールBは、いずれも A ∧ B, A ∨ Bの部分式です。

サブゴールA, サブゴールBは、いずれも $A \land B$, $A \lor B$の部分式ですので、先の式は、次のように書いても同じです。

サブゴールA, サブゴールBは、いずれも A ∧ B, A ∨ Bの部分式ですので、先の式は、次のように書いても同じです。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　部分式 A の証明　かつ
部分式 B の証明

サブゴールA, サブゴールBは、いずれも $A \land B$, $A \lor B$の部分式ですので、先の式は、次のように書いても同じです。

$A \land B$ (AかつB)の証明　→　部分式 A の証明　かつ
部分式 B の証明

$A \lor B$ (AまたはB)の証明　→　部分式 A の証明　または
部分式 B の証明

サブゴールA, サブゴールBは、いずれも A ∧ B, A ∨ Bの部分式ですので、先の式は、次のように書いても同じです。

A ∧ B (AかつB)の証明 → 部分式 A の証明 かつ
部分式 B の証明

A ∨ B (AまたはB)の証明 → 部分式 A の証明 または
部分式 B の証明

形で考えれば、左側が複雑で、右側が単純な形になっています。

その点では、単純な命題から複雑な命題を構成する、あるいは、複雑な命題を単純な命題に分解する、命題の構成・分解ルールに似ています。でも、違いもあります。

その点では、単純な命題から複雑な命題を構成する、あるいは、複雑な命題を単純な命題に分解する、命題の構成・分解ルールに似ていいます。でも、違いもあります。

命題の構成・分解ルールは、こんな形でした。

その点では、単純な命題から複雑な命題を構成する、あるいは、複雑な命題を単純な命題に分解する、命題の構成・分解ルールに似ていいます。でも、違いもあります。

命題の構成・分解ルールは、こんな形でした。

$A \land B$ (AかつB)は命題　　<->　　A は命題　かつ
B は命題

その点では、単純な命題から複雑な命題を構成する、あるいは、複雑な命題を単純な命題に分解する、命題の構成・分解ルールに似ていいます。でも、違いもあります。

命題の構成・分解ルールは、こんな形でした。

A ∧ B (AかつB)は命題 <-> A は命題 かつ
B は命題

A ∨ B (AまたはB)は命題 <-> A は命題 かつ
B は命題

その点では、単純な命題から複雑な命題を構成する、あるいは、複雑な命題を単純な命題に分解する、命題の構成・分解ルールに似ていいます。でも、違いもあります。

命題の構成・分解ルールは、こんな形でした。

A ∧ B (AかつB)は命題 <-> A は命題 かつ B は命題

A ∨ B (AまたはB)は命題 <-> A は命題 かつ B は命題

命題の構成・分解ルールは、それが命題の形をしているかしか見ていなくて、命題の論理的な内容には無関心です。

演繹ルール

命題の構成・分解ルールは、「命題の形をしている」を判断の基準に基準にしているのですが、判断の基準を、「証明である」にかえたものを、命題の「演繹ルール」と言います。

演繹ルール

命題の構成・分解ルールは、「命題の形をしている」を判断の基準に基準にしているのですが、判断の基準を、「証明である」にかえたものを、命題の「演繹ルール」と言います。

先のルールは、演繹ルールです。

演繹ルール

命題の構成・分解ルールは、「命題の形をしている」を判断の基準に基準にしているのですが、判断の基準を、「証明である」にかえたものを、命題の「演繹ルール」と言います。

先のルールは、演繹ルールです。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　A の証明　かつ
B の証明

演繹ルール

命題の構成･分解ルールは､｢命題の形をしている｣を判断の基準に基準にしているのですが､判断の基準を､｢証明である｣にかえたものを､命題の｢演繹ルール｣と言います｡

先のルールは､演繹ルールです｡

A ∧ B (AかつB)の証明 → A の証明 かつ
B の証明

A ∨ B (AまたはB)の証明 → A の証明 または
B の証明

命題の構成･分解ルールでは、ルールを上から下に読むか、下から上に読むかで、向きは違っていても、同じ内容を表していました。

命題の構成・分解ルールでは、ルールを上から下に読むか、下から上に読むかで、向きは違っていても、同じ内容を表していました。

同様に、命題の演繹ルールも、単純な命題から複雑な命題に向かうか、複雑な命題から単純な命題に向かうかで、二通りの表現があります。ただ、表現しているルールは同じものです。

命題の構成･分解ルールでは、ルールを上から下に読むか、下から上に読むかで、向きは違っていても、同じ内容を表していました。

同様に、命題の演繹ルールも、単純な命題から複雑な命題に向かうか、複雑な命題から単純な命題に向かうかで、二通りの表現があります。ただ、表現しているルールは同じものです。

例えば、先の演繹ルールの矢印の向きを逆にした次のものも、演繹ルールとして成り立っています。

命題の構成・分解ルールでは、ルールを上から下に読むか、下から上に読むかで、向きは違っていても、同じ内容を表していました。

同様に、命題の演繹ルールも、単純な命題から複雑な命題に向かうか、複雑な命題から単純な命題に向かうかで、二通りの表現があります。ただ、表現しているルールは同じものです。

例えば、先の演繹ルールの矢印の向きを逆にした次のものも、演繹ルールとして成り立っています。

A ∧ B (AかつB)の証明　←　A の証明　かつ
　　　　　　　　　　　　　B の証明

命題の構成・分解ルールでは、ルールを上から下に読むか、下から上に読むかで、向きは違っていても、同じ内容を表していました。

同様に、命題の演繹ルールも、単純な命題から複雑な命題に向かうか、複雑な命題から単純な命題に向かうかで、二通りの表現があります。ただ、表現しているルールは同じものです。

例えば、先の演繹ルールの矢印の向きを逆にした次のものも、演繹ルールとして成り立っています。

$A \land B$ (AかつB)の証明 ← A の証明 かつ B の証明

$A \lor B$ (AまたはB)の証明 ← A の証明 または B の証明

次の節では、「証明である」ことを、形式的に表現して、演繹ルールをまとめてみましょう。


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (4)

「正しい」ことと「証明を持つ」こと

はじめに

- この節では、「演繹ルール」を記述するための準備をします。

はじめに

- この節では、「演繹ルール」を記述するための準備をします。
- 基本的には、「証明」についての「判断」が、いろいろ微妙な問題を孕んでいることについて述べます。

はじめに

- この節では、「演繹ルール」を記述するための準備をします。
- 基本的には、「証明」についての「判断」が、いろいろ微妙な問題を孕んでいることについて述べます。
- 何にこだわっているのかわかりにくかったかもしれません。結論だけを述べてもよかったのですが、いつか、この節での議論を思い出してくれれば、Coqについての理解が深まると思います。

はじめに

- この節では、「演繹ルール」を記述するための準備をします。
- 基本的には、「証明」についての「判断」が、いろいろ微妙な問題を孕んでいることについて述べます。
- 何にこだわっているのかわかりにくかったかもしれません。結論だけを述べてもよかったのですが、いつか、この節での議論を思い出してくれれば、Coqについての理解が深まると思います。

- まずは、前回述べたことが不十分であることから、話を始めたいと思います。前回、次のように述べました。

前回の振り返り

演繹ルール

前回の振り返り
演繹ルール

命題の構成・分解ルールは、「命題の形をしている」を判断の基準に基準にしているのですが、判断の基準を、「証明である」にかえたものを、命題の「演繹ルール」と言います。

前回の振り返り
演繹ルール

命題の構成･分解ルールは､｢命題の形をしている｣を判断の基準に基準にしているのですが､判断の基準を､｢証明である｣にかえたものを､命題の｢演繹ルール｣と言います｡

次のルールは､演繹ルールです｡

前回の振り返り
演繹ルール

命題の構成・分解ルールは、「命題の形をしている」を判断の基準に基準にしているのですが、判断の基準を、「証明である」にかえたものを、命題の「演繹ルール」と言います。

先のルールは、演繹ルールです。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　A の証明　かつ
　　　　　　　　　　　　　B の証明

前回の振り返り
演繹ルール

命題の構成・分解ルールは、「命題の形をしている」を判断の基準に基準にしているのですが、判断の基準を、「証明である」にかえたものを、命題の「演繹ルール」と言います。

先のルールは、演繹ルールです。

A ∧ B (AかつB)の証明 → A の証明 かつ
B の証明

A ∨ B (AまたはB)の証明 → A の証明 または
B の証明

ただ、判断の述語を、「命題である」から「証明である」に置き換えると、意味がうまく通りません。例えば、最初の$\wedge$の例では、

ただ、判断の述語を、「命題である」から「証明である」に置き換えると、意味がうまく通りません。例えば、最初の∧の例では、

$$\frac{A\text{は命題である} \qquad B\text{は命題である}}{A \wedge B \text{ は命題である}}$$

ただ、判断の述語を、「命題である」から「証明である」に置き換えると、意味がうまく通りません。例えば、最初の∧の例では、

$$\frac{A\text{は命題である} \qquad B\text{は命題である}}{A \wedge B \text{ は命題である}}$$

はルールとして理解できますが、

ただ、判断の述語を、「命題である」から「証明である」に置き換えると、意味がうまく通りません。例えば、最初の∧の例では、

$$\frac{A\text{は命題である} \qquad B\text{は命題である}}{A \land B \text{ は命題である}}$$

はルールとして理解できますが、

$$\frac{A\text{は証明である} \qquad B\text{は証明である}}{A \land B \text{ は証明である}}$$

は、意味不明です。

ただ、判断の述語を、「命題である」から「証明である」に置き換えると、意味がうまく通りません。例えば、最初の∧の例では、

$$\frac{A\text{は命題である} \qquad B\text{は命題である}}{A \land B\ \text{は命題である}}$$

はルールとして理解できますが、

$$\frac{A\text{は証明である} \qquad B\text{は証明である}}{A \land B\ \text{は証明である}}$$

は、意味不明です。

もちろんそれは、AもBもA ∧ B も「証明されるべき」命題ではあっても、「証明」そのものではないからです。

一つの考え方は、判断の述語を、「命題である」から「正しい命題である」に置き換えることです。

一つの考え方は、判断の述語を、「命題である」から「正しい命題である」に置き換えることです。

$$\frac{A\text{は正しい形の命題である} \qquad B\text{は正しい形の命題である}}{A \wedge B \text{ は正しい形の命題である}}$$

一つの考え方は、判断の述語を、「命題である」から「正しい命題である」に置き換えることです。

$$\frac{\text{Aは正しい形の命題である} \qquad \text{Bは正しい形の命題である}}{\text{A} \wedge \text{B は正しい形の命題である}}$$

が、命題の構成・分解ルールの意味していることなら

一つの考え方は、判断の述語を、「命題である」から「正しい命題である」に置き換えることです。

$$\frac{A\text{は正しい形の命題である} \qquad B\text{は正しい形の命題である}}{A \land B\ \text{は正しい形の命題である}}$$

が、命題の構成・分解ルールの意味していることなら

$$\frac{A\text{は正しい命題である} \qquad B\text{は正しい命題である}}{A \land B\ \text{は正しい命題である}}$$

一つの考え方は、判断の述語を、「命題である」から「正しい命題である」に置き換えることです。

$$\frac{A\text{は正しい形の命題である} \qquad B\text{は正しい形の命題である}}{A \wedge B\ \text{は正しい形の命題である}}$$

が、命題の構成・分解ルールの意味していることなら

$$\frac{A\text{は正しい命題である} \qquad B\text{は正しい命題である}}{A \wedge B\ \text{は正しい命題である}}$$

のような形を、命題の演繹ルールと考えることです。

一つの考え方は、判断の述語を、「命題である」から「正しい命題である」に置き換えることです。

$$\frac{\text{Aは正しい形の命題である} \qquad \text{Bは正しい形の命題である}}{\text{A} \wedge \text{B は正しい形の命題である}}$$

が、命題の構成・分解ルールの意味していることなら

$$\frac{\text{Aは正しい命題である} \qquad \text{Bは正しい命題である}}{\text{A} \wedge \text{B は正しい命題である}}$$

のような形を、命題の演繹ルールと考えることです。

こうしたルールは、理解できます。それに命題の構成ルールと演繹ルールは、違うレベルのルールだということも、よくわかります。

こうした演繹ルールの述べ方は、有効なものです。

こうした演繹ルールの述べ方は、有効なものです。

ただ、ここには、「証明」という言葉は無くなっています。

こうした演繹ルールの述べ方は、有効なものです。

ただ、ここには、「証明」という言葉は無くなっています。

その代わり、「証明」＝「演繹」のルールというのは、「正しい命題」から「正しい命題」を導くルールのことだという考えが表現されています。

こうした演繹ルールの述べ方は、有効なものです。

ただ、ここには、「証明」という言葉は無くなっています。

その代わり、「証明」＝「演繹」のルールというのは、「正しい命題」から「正しい命題」を導くルールのことだという考えが表現されています。

それも、確かなことのように思えます。

こうした演繹ルールの述べ方は、有効なものです。

ただ、ここには、「証明」という言葉は無くなっています。

その代わり、「証明」＝「演繹」のルールというのは、「正しい命題」から「正しい命題」を導くルールのことだという考えが表現されています。

それも、確かなことのように思えます。

しかし、Coqが依拠している演繹ルールは、少し違うものです。

こうした演繹ルールの述べ方は、有効なものです。

ただ、ここには、「証明」という言葉は無くなっています。

その代わり、「証明」＝「演繹」のルールというのは、「正しい命題」から「正しい命題」を導くルールのことだという考えが表現されています。

それも、確かなことのように思えます。

しかし、Coqが依拠している演繹ルールは、少し違うものです。
それを次に紹介します。

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は正しい命題である} \qquad B\text{は正しい命題である}}{A \wedge B\ \text{は正しい命題である}}$$

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は正しい命題である}\qquad B\text{は正しい命題である}}{A \land B\ \text{は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は証明を持つ}\qquad B\text{は証明を持つ}}{A \land B\ \text{は証明を持つ}}$$

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である} \qquad \text{Bは正しい命題である}}{\text{A} \land \text{B は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は正しい命題である}\qquad B\text{は正しい命題である}}{A \land B\ \text{は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は証明を持つ}\qquad B\text{は証明を持つ}}{A \land B\ \text{は証明を持つ}}$$

一般的な演繹ルールとCoqの演繹ルール

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である} \qquad \text{Bは正しい命題である}}{\text{A} \wedge \text{B は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは証明を持つ} \qquad \text{Bは証明を持つ}}{\text{A} \wedge \text{B は証明を持つ}}$$

二つの演繹ルールを比較してみましょう。今度は v の場合です。

二つの演繹ルールを比較してみましょう。今度は v の場合です。

一般的な演繹ルールの例

二つの演繹ルールを比較してみましょう。今度は ∨ の場合です。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である}}{\text{A ∨ B は正しい命題である}} \quad \text{または} \quad \frac{\text{Bは正しい命題である}}{\text{A ∨ B は正しい命題である}}$$

二つの演繹ルールを比較してみましょう。今度は ∨ の場合です。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である}}{\text{A ∨ B は正しい命題である}}$$ または $$\frac{\text{Bは正しい命題である}}{\text{A ∨ B は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

二つの演繹ルールを比較してみましょう。今度は ∨ の場合です。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である}}{\text{A} \vee \text{B は正しい命題である}} \quad \text{または} \quad \frac{\text{Bは正しい命題である}}{\text{A} \vee \text{B は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは証明を持つ}}{\text{A} \vee \text{B は証明を持つ}} \quad \text{または} \quad \frac{\text{Bは証明を持つ}}{\text{A} \vee \text{B は証明を持つ}}$$

一般的な演繹ルールとCoqの演繹ルール

二つの演繹ルールを比較してみましょう。今度は ∨ の場合です。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である}}{\text{A ∨ B は正しい命題である}} \quad \text{または} \quad \frac{\text{Bは正しい命題である}}{\text{A ∨ B は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは証明を持つ}}{\text{A ∨ B は証明を持つ}} \quad \text{または} \quad \frac{\text{Bは証明を持つ}}{\text{A ∨ B は証明を持つ}}$$

「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致していれば、二つのスタイルの演繹ルールは、同じ内容を持つことになります。

「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致していれば、二つのスタイルの演繹ルールは、同じ内容を持つことになります。

ただ、「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致するとは限りません。

「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致していれば、二つのスタイルの演繹ルールは、同じ内容を持つことになります。

ただ、「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致するとは限りません。

そのことを初めて数学的に厳密に証明したのは、ゲーデルです。彼は、直観的には明らかに正しいのに、その体系の中では、証明を持たない命題があることを示しました。

「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致していれば、二つのスタイルの演繹ルールは、同じ内容を持つことになります。

ただ、「正しい命題」が「証明を持つ命題」と一致するとは限りません。

そのことを初めて数学的に厳密に証明したのは、ゲーデルです。彼は、直観的には明らかに正しいのに、その体系の中では、証明を持たない命題があることを示しました。

そうした命題は、特殊な形をしているわけではなく、数学にとってはもっとも基本的な、「ある体系は無矛盾である」という命題自身が、その体系内では「証明を持たない」ことを彼は示したのです。

ゲーデルの驚くべき発見以前から、数学の基礎をめぐっていろいろな議論がありました。

ゲーデルの驚くべき発見以前から、数学の基礎をめぐっていろいろな議論がありました。

その議論の一部を、これまでみた二つのスタイルの演繹ルールの違いから説明することができます。

ゲーデルの驚くべき発見以前から、数学の基礎をめぐっていろいろな議論がありました。

その議論の一部を、これまでみた二つのスタイルの演繹ルールの違いから説明することができます。

一方は、「正しい命題である」を判断の基準とし、他方は「証明を持つ」を判断の基準にしていました。

ゲーデルの驚くべき発見以前から、数学の基礎をめぐっていろいろな議論がありました。

その議論の一部を、これまでみた二つのスタイルの演繹ルールの違いから説明することができます。

一方は、「正しい命題である」を判断の基準とし、他方は「証明を持つ」を判断の基準にしていました。

ここで、Bを~A(Aの否定)に変えてみましょう。

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は正しい命題である}}{A \lor \sim A \text{ は正しい命題である}} \quad \text{または} \quad \frac{\sim A\text{は正しい命題である}}{A \lor \sim A \text{ は正しい命題である}}$$

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は正しい命題である}}{A \vee \sim A\ \text{は正しい命題である}} \quad \text{または} \quad \frac{\sim A\text{は正しい命題である}}{A \vee \sim A\ \text{は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は正しい命題である}}{A \lor {\sim}A\ \text{は正しい命題である}}$$

または

$$\frac{{\sim}A\text{は正しい命題である}}{A \lor {\sim}A\ \text{は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{A\text{は証明を持つ}}{A \lor {\sim}A\ \text{は証明を持つ}}$$

または

$$\frac{{\sim}A\text{は証明を持つ}}{A \lor {\sim}A\ \text{は証明を持つ}}$$

二つの演繹ルールを比較してみましょう。

一般的な演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは正しい命題である}}{A \lor {\sim}A \text{ は正しい命題である}} \quad \text{または} \quad \frac{{\sim}\text{Aは正しい命題である}}{A \lor {\sim}A \text{ は正しい命題である}}$$

Coqの演繹ルールの例

$$\frac{\text{Aは証明を持つ}}{A \lor {\sim}A \text{ は証明を持つ}} \quad \text{または} \quad \frac{{\sim}\text{Aは証明を持つ}}{A \lor {\sim}A \text{ は証明を持つ}}$$

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が正しいなら、A または ~A が正しいことがわかります。

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が正しいなら、A または ~A が正しいことがわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つなら、Aは証明を持つか または ~A が証明を持つことがわかります。

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が正しいなら、A または ~A が正しいことがわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つなら、Aは証明を持つか または ~A が証明を持つことがわかります。

そこには、小さくない違いがあります。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

$A \vee \sim A$（これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または $\sim A$ のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A（これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または ~A のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A（これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または ~A のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つことを示すには、Aは証明を持つことを示すか または ~A が証明を持つことを示すか、どちらかを示す必要があります。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A（これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または ~A のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つことを示すには、Aは証明を持つことを示すか または ~A が証明を持つことを示すか、どちらかを示す必要があります。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A （これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または ~A のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つことを示すには、Aは証明を持つことを示すか または ~A が証明を持つことを示すか、どちらかを示す必要があります。

Coqの演算ルールでは、「排中律」は、自明なものではありません。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A（これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または ~A のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つことを示すには、Aは証明を持つことを示すか または ~A が証明を持つことを示すか、どちらかを示す必要があります。

Coqの演繹ルールでは、「排中律」は、自明なものではありません。

すなわち、

一般的な演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A（これを「排中律」といいます）が正しいとすれば、A または ~A のどちらかが正しいことが自動的にわかります。

Coqの演繹ルールの場合には、

A ∨ ~A が証明を持つことを示すには、Aは証明を持つことを示すか または ~A が証明を持つことを示すか、どちらかを示す必要があります。

Coqの演繹ルールでは、「排中律」は、自明なものではありません。


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (5)

命題論理の演繹ルール

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

何の前提も証明もなしに真とみなされる命題を「公理」と言いますが、公理は、その証明が与えられていないという意味では、仮説的なものです。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

何の前提も証明もなしに真とみなされる命題を「公理」と言いますが、公理は、その証明が与えられていないという意味では、仮説的なものです。

公理から出発して、演繹的に証明を与えられた「定理」たちも、それが、「証明を持つ」ものであれば、ある定理の証明の「前提」になることができます。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

何の前提も証明もなしに真とみなされる命題を「公理」と言いますが、公理は、その証明が与えられていないという意味では、仮説的なものです。

公理から出発して、演繹的に証明を与えられた「定理」たちも、それが、「証明を持つ」ものであれば、ある定理の証明の「前提」になることができます。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、一つの命題だけとは限りません。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \quad \vdash \text{Theorem1}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \quad \vdash \text{Theorem1}$$

$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \quad \vdash \text{Theorem2}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2} \vdash \text{Theorem3}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2} \vdash \text{Theorem3}$$
$$\text{Theorem3} \vdash \text{Theorem4}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2} \vdash \text{Theorem3}$$
$$\text{Theorem3} \vdash \text{Theorem4}$$
$$\text{Theorem4} \vdash \text{Lemma1}$$

のように表します。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3}} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1}} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\boxed{\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2}} \vdash \text{Theorem3}$$
$$\boxed{\text{Theorem3}} \vdash \text{Theorem4}$$
$$\boxed{\text{Theorem4}} \vdash \text{Lemma1}$$

のように表します。緑の破線で囲まれた部分が「仮説部」です。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3}} \vdash \text{Theorem1}$$

$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1}} \vdash \text{Theorem2}$$

$$\boxed{\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2}} \vdash \text{Theorem3}$$

$$\boxed{\text{Theorem3}} \vdash \text{Theorem4}$$

$$\boxed{\text{Theorem4}} \vdash \text{Lemma1}$$

のように表します。緑の破線で囲まれた部分が「仮説部」です。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、$\Gamma \vdash A$ で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}$$

このルールは、

ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」

ことを主張しています。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}$$

このルールは、

ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」

ことを主張しています。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}\ \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

このルールをAssumptionと呼ぶことにします。その意味は明確だと思います。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}\ \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

このルールをAssumptionと呼ぶことにします。その意味は明確だと思います。（公理は証明を持たないと述べましたが、この記法の解釈では公理も証明を持つと解釈されます。このルールをAxiomと呼ぶこともあります。仮説部に登場する命題は、公理と同じように振る舞うということです。）

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \; {\to}\mathrm{I}$$

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ {\to}\mathrm{I}$$

このルールは、

命題Aを含む仮説部 {Γ, A} のもとで命題Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A → Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow\mathrm{I}$$

このルールは、

命題Aを含む仮説部 {Γ, A} のもとで命題Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A → Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\mathrm{I}$$

このルールは、

命題Aを含む仮説部 {Γ, A} のもとで命題Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A → Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の → I は、→ Introduction の略で、上段にはなかった → 記号が下段に「導入」されたことを表しています。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow \mathbf{E}$$

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \ \to \mathbf{E}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題A → BとAが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つ

ことを主張しています。

有名な三段論法(modus ponens)です。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to \mathbf{E}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題A → BとAが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つ

ことを主張しています。

有名な三段論法(modus ponens)です。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to \mathbf{E}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題A → BとAが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つ

ことを主張しています。

有名な三段論法(modus ponens)です。

ルール名の → E は、→ Elimination の略で、上段にあった → 記号が下段では「削除」されたことを表しています。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

論理記号 ∧ を含む演繹ルール

論理記号 ∧ を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \; \wedge\mathbf{I}$$

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land\mathbf{I}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持ち、かつ、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∧Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\mathrm{I}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持ち、かつ、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A ∧ Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge \mathrm{I}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持ち、かつ、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∧Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の ∧I は、∧ Introduction の略で、上段にはなかった ∧ 記号が下段に「導入」されたことを表しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \ \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \ \vee\mathbf{IR}$$

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の ∨IL は、∨ Introduction Left の略で、上段にはなかった ∨ 記号が下段に「導入」され、上段の論理式が下段の左項に「導入」されたことを表しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の ∨ IR は、∨ Introduction Right の略で、上段にはなかった ∨ 記号が下段に「導入」され、上段の論理式が下段の右項に「導入」されたことを表しています。

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathrm{I}$$

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \;\to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \;\land \mathrm{I}$$

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathbf{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \; \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \; \wedge \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \; \vee \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \; \vee \mathrm{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathbf{IR}$$


Coq


はじめてのCoq
論理式の証明 (5)
命題論理の演繹ルール

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

何の前提も証明もなしに真とみなされる命題を「公理」と言いますが、公理は、その証明が与えられていないという意味では、仮説的なものです。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

何の前提も証明もなしに真とみなされる命題を「公理」と言いますが、公理は、その証明が与えられていないという意味では、仮説的なものです。

公理から出発して、演繹的に証明を与えられた「定理」たちも、それが、「証明を持つ」ものであれば、ある定理の証明の「前提」になることができます。

ここでは、Coqの演繹ルールの基礎にある、「証明を持つ」という判断について考えます。

最初に確認しなければならないことは、ある定理Aの証明には、その証明を導くのに必要な「前提」「仮説」、あるいは前提とされる「コンテキスト」があるということです。

何の前提も証明もなしに真とみなされる命題を「公理」と言いますが、公理は、その証明が与えられていないという意味では、仮説的なものです。

公理から出発して、演繹的に証明を与えられた「定理」たちも、それが、「証明を持つ」ものであれば、ある定理の証明の「前提」になることができます。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、一つの命題だけとは限りません。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \quad \vdash \text{Theorem1}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \quad \vdash \text{Theorem1}$$

$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \quad \vdash \text{Theorem2}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2} \vdash \text{Theorem3}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2} \vdash \text{Theorem3}$$
$$\text{Theorem3} \vdash \text{Theorem4}$$

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2} \vdash \text{Theorem3}$$
$$\text{Theorem3} \vdash \text{Theorem4}$$
$$\text{Theorem4} \vdash \text{Lemma1}$$

のように表します。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3}} \vdash \text{Theorem1}$$
$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1}} \vdash \text{Theorem2}$$
$$\boxed{\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2}} \vdash \text{Theorem3}$$
$$\boxed{\text{Theorem3}} \vdash \text{Theorem4}$$
$$\boxed{\text{Theorem4}} \vdash \text{Lemma1}$$

のように表します。緑の破線で囲まれた部分が「仮説部」です。

「前提」「仮説」「コンテキスト」は、同じ意味で使っていますが、長いので、当面「仮説部」という言葉を使うことにします。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が 「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにしましょう。

例えば、

$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom2, Axiom3}} \vdash \text{Theorem1}$$

$$\boxed{\text{Axiom1, Axiom3, Theorem1}} \vdash \text{Theorem2}$$

$$\boxed{\text{Axiom2, Theorem1, Theorem2}} \vdash \text{Theorem3}$$

$$\boxed{\text{Theorem3}} \vdash \text{Theorem4}$$

$$\boxed{\text{Theorem4}} \vdash \text{Lemma1}$$

のように表します。緑の破線で囲まれた部分が「仮説部」です。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}$$

このルールは、

ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」

ことを主張しています。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}$$

このルールは、

ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」

ことを主張しています。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A}\ \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

このルールをAssumptionと呼ぶことにします。その意味は明確だと思います。

それでは、ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、Γ ⊢ A で表して、命題論理の演繹ルールを定式化してみましょう。

最初のルールは次のようなものです。

$$\frac{\Gamma \ni A}{\Gamma \vdash A} \ \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

このルールをAssumptionと呼ぶことにします。その意味は明確だと思います。（公理は証明を持たないと述べましたが、この記法の解釈では公理も証明を持つと解釈されます。このルールをAxiomと呼ぶこともあります。仮説部に登場する命題は、公理と同じように振る舞うということです。）

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\mathrm{I}$$

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow\mathrm{I}$$

このルールは、

命題Aを含む仮説部 {Γ, A} のもとで命題Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A → Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to\mathrm{I}$$

このルールは、

命題Aを含む仮説部 {Γ, A} のもとで命題Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A → Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号 → を含む演繹ルール

次のルールは、基本的なものです。

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\mathrm{I}$$

このルールは、

命題Aを含む仮説部 {Γ, A} のもとで命題Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A → Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の → I は、→ Introduction の略で、上段にはなかった → 記号が下段に「導入」されたことを表しています。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \; \to\mathbf{E}$$

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to \mathbf{E}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題A → BとAが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つ

ことを主張しています。

有名な三段論法(modus ponens)です。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to \mathbf{E}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題A → BとAが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つ

ことを主張しています。

有名な三段論法(modus ponens)です。

論理記号 → を含む演繹ルール

論理記号 →を含むルールには次のようなものもあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to \mathbf{E}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題A → BとAが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つ

ことを主張しています。

有名な三段論法(modus ponens)です。

ルール名の → E は、→ Elimination の略で、上段にあった → 記号が下段では「削除」されたことを表しています。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \wedge\mathbf{I}$$

論理記号 ∧ を含む演繹ルール

論理記号 ∧ を含むルールは、次のようになります。

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad \land\mathrm{I}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持ち、かつ、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A ∧ Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}\ \land\mathbf{I}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持ち、かつ、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∧Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∧を含む演繹ルール

論理記号∧を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge \mathrm{I}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持ち、かつ、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明を持つなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∧Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の ∧ I は、∧ Introduction の略で、上段にはなかった ∧ 記号が下段に「導入」されたことを表しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}\ \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}\ \lor \mathbf{IR}$$

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の ∨IL は、∨ Introduction Left の略で、上段にはなかった ∨ 記号が下段に「導入」され、上段の論理式が下段の左項に「導入」されたことを表しています。

論理記号∨を含む演繹ルール

論理記号∨を含むルールは、次のようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathbf{IR}$$

このルールは、

仮説部 Γ のもとで命題 Aが証明を持つか、または、仮説部 Γ のもとで命題 Bが証明をもつなら、仮説部 Γ のもとで命題 A∨Bが証明を持つ

ことを主張しています。

ルール名の ∨IR は、∨ Introduction Right の略で、上段にはなかった ∨ 記号が下段に「導入」され、上段の論理式が下段の右項に「導入」されたことを表しています。

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、
まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \; \to\mathrm{I}$$

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、
まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \land \mathrm{I}$$

Coqで利用されている演繹ルール（一部）は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor\mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor\mathrm{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルール(一部)は、まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \land \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathbf{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルール(一部)は、
まとめると次のようになります

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathbf{IR}$$


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (6)

Coqの返す「証明の状態」と演繹ルール

ふりかえり

ふりかえり

Coqは、演繹ルールの基礎に、「ある命題が真である」という判断ではなく、「ある命題が証明を持つ」という判断を置きます。

ふりかえり

Coqは、演繹ルールの基礎に、「ある命題が真である」という判断ではなく、「ある命題が証明を持つ」という判断を置きます。

ある仮説部 Γ のもとで、ある命題 A が「証明を持つ」という判断を、

$$\Gamma \vdash A$$

と表すことにすると、Coqの演繹ルールは、次のように表すことができます。

ふりかえり
Coqで利用されている演繹ルール

ふりかえり
Coqで利用されている演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to \mathrm{I}$$

ふりかえり
Coqで利用されている演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \;\to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \;\land\mathrm{I}$$

ふりかえり
Coqで利用されている演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \land \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathbf{IR}$$

これらの演繹ルールを見ると、次のことに気づきます。

これらの演繹ルールを見ると、次のことに気づきます。

下段の論理式を分解した部分式が、上段に現れています。

これらの演繹ルールを見ると、次のことに気づきます。

下段の論理式を分解した部分式が、上段に現れています。

下段の論理式が複雑で、上段の論理式が単純な形をしています。

演繹ルールと命題の構成･分解ルール

これらの演繹ルールを見ると、次のことに気づきます。

下段の論理式を分解した部分式が、上段に現れています。

下段の論理式が複雑で、上段の論理式が単純な形をしています。

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathrm{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, \boxed{A} \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \; \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \; \land\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \; \lor\mathrm{IL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \; \lor\mathrm{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \wedge B}} \wedge \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to\mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A} \qquad \Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \ \land\mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor\mathbf{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to\mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \ \wedge\mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \ \vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \ \vee\mathbf{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \lor \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \lor \mathrm{IR}$$

Coqで利用されている演繹ルールの下段の論理式の部分式が上段に現れている

$$\frac{\Gamma, \boxed{A} \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \; {\to}\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A} \qquad \Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \; {\land}\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \; {\lor}\mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \; {\lor}\mathrm{IR}$$

前向きの推論と後ろ向きの推論

前向きの推論と後ろ向きの推論

単純な論理式から複雑な論理式を演繹する推論、先の演繹ルールで言えば上段から下段を演繹する推論を「前向きの推論」といいます。

前向きの推論と後ろ向きの推論

単純な論理式から複雑な論理式を演繹する推論、先の演繹ルールで言えば上段から下段を演繹する推論を「前向きの推論」といいます。

逆に、

複雑な論理式から単純な論理式を演繹する推論、先の演繹ルールで言えば下段から上段を演繹する推論を「後ろ向きの推論」といいます。

前向きの推論
単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathrm{I}$$

前向きの推論

単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\mathrm{I}$$

前向きの推論
単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad \land\mathrm{I}$$

前向きの推論
単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \to I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \wedge I$$

前向きの推論
単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \;\to\mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \;\land\mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \;\lor\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \;\lor\mathbf{IR}$$

前向きの推論

単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \quad \lor \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \quad \lor \mathrm{IR}$$

前向きの推論
単純な論理式から複雑な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \wedge \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \vee \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \vee \mathrm{IR}$$

後ろ向きの推論
複雑な論理式から単純な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \quad \lor \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \quad \lor \mathrm{IR}$$

後ろ向きの推論
複雑な論理式から単純な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \quad \lor \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \quad \lor \mathrm{IR}$$

後ろ向きの推論
複雑な論理式から単純な論理式へ

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \;\to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \;\land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \;\lor \mathrm{IL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \;\lor \mathrm{IR}$$

後ろ向きの推論
複雑な論理式から単純な論理式へ

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}\ \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}\ \lor \mathrm{IL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}\ \lor \mathrm{IR}$$

前向きの推論と後ろ向きの推論

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \;\to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \;\wedge \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \;\vee \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \;\vee \mathrm{IR}$$

前向きの推論と後ろ向きの推論

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \land \mathbf{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor \mathbf{IR}$$

以前に、きちんと説明していなかったことを、もう一度整理して説明することができます。

以前に、きちんと説明していなかったことを、もう一度整理して説明することができます。

以前の二つスライド

以前に、きちんと説明していなかったことを、もう一度整理して説明することができます。

以前の二つスライド

「証明のサブゴールと命題の部分式」

以前に、きちんと説明していなかったことを、もう一度整理して説明することができます。

以前の二つスライド

「証明のサブゴールと命題の部分式」

「Coqは、反応として人間に何を伝えたか？」

以前に、きちんと説明していなかったことを、もう一度整理して説明することができます。

以前の二つスライド

「証明のサブゴールと命題の部分式」

「Coqは、反応として人間に何を伝えたか？」

を再掲します。（背景が、グレーになっています。）

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

A ∧ B (AかつB)の証明　→　サブゴールAの証明　かつ
サブゴールBの証明

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

ここでは、そうしたCoqの振る舞いを詳しくは述べませんが、先の命題 A ∧ B の場合にも 命題 A ∨ B の場合にも、その証明はそれらの命題の部分式である、命題 A と命題 B の証明がサブゴールに登場したことを想起してください。

A ∧ B (AかつB)の証明 → サブゴールAの証明 かつ
サブゴールBの証明

A ∨ B (AまたはB)の証明 → サブゴールAの証明 または
サブゴールBの証明

このスライドは、次のように書き換えられまあす。

証明のサブゴールと命題の部分式

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∧ B (AかつB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad \land \mathrm{I}$$

を適用すれば、

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∧ B (AかつB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \uparrow \wedge \mathrm{I}$$

を適用すれば、

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∧ B (AかつB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \uparrow \wedge I$$

を適用すれば、

Γ ⊢ A かつ Γ ⊢ B、すなわち同じ仮説部Γの元で、サブゴールAとサブゴールBの二つの証明を、両方とも得ればいいことがわかります。

証明のサブゴールと命題の部分式

Coqは、論理式の証明の場合には、証明のSub Goalへの分割と命題の部分式への分解の二つを、同時に行います。

仮説部Γの元で、サブゴール $A \land B$ (AかつB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \;\land\mathrm{I}$$

を適用すれば、

$\Gamma \vdash A$ かつ $\Gamma \vdash B$、すなわち同じ仮説部Γの元で、サブゴールAとサブゴールBの二つの証明を、両方とも得ればいいことがわかります。

証明のサブゴールと命題の部分式

今度は、$\vee$ の場合を考えてみましょう。

証明のサブゴールと命題の部分式

今度は、∨の場合を考えてみましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∨ B (AまたはB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \;\vee\mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \;\vee\mathbf{IR}$$

を適用すれば、

証明のサブゴールと命題の部分式

今度は、∨の場合を考えてみましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∨ B (AまたはB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \uparrow \vee \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \uparrow \vee \mathbf{IR}$$

を適用すれば、

証明のサブゴールと命題の部分式

今度は、∨ の場合を考えてみましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∨ B (AまたはB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \uparrow \vee \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \uparrow \vee \mathrm{IR}$$

を適用すれば、

Γ ⊢ A または Γ ⊢ B、すなわち同じ仮説部Γの元で、サブゴール A とサブゴールBのどちらかの証明の一つを得ればいいことがわかります。

証明のサブゴールと命題の部分式

今度は、∨ の場合を考えてみましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A ∨ B (AまたはB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \mathbf{IR}$$

を適用すれば、

Γ ⊢ A または Γ ⊢ B、すなわち同じ仮説部Γの元で、サブゴール A とサブゴールBのどちらかの証明の一つを得ればいいことがわかります。

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A → B (AならばB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \Uparrow \to \mathrm{I}$$

を適用すれば、

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A → B (AならばB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \;\to\mathrm{I}$$

を適用すれば、

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A → B (AならばB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to \mathrm{I}$$

を適用すれば、

Γ, A ⊢ B 、すなわち、仮説部 Γ, A の元で、サブゴール B が証明を得ればいいことがわかります。

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A → B (AならばB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \Uparrow \to \mathrm{I}$$

を適用すれば、

Γ, A ⊢ B 、すなわち、仮説部 Γ, A の元で、サブゴール B が証明を得ればいいことがわかります。

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A → B (AならばB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \Uparrow \to \mathrm{I}$$

を適用すれば、

Γ, A ⊢ B 、すなわち、仮説部 Γ, A の元で、サブゴール B が証明を得ればいいことがわかります。

仮説部が、Γ からΓ, A に変化していることに注意してください。

証明のサブゴールと命題の部分式

先のスライドにはなかったのですが、→の場合も考えて見ましょう。

仮説部Γの元で、サブゴール A → B (AならばB)の証明を得るには、演繹ルール

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \rightarrow\mathrm{I}$$

を適用すれば、

Γ, A ⊢ B 、すなわち、仮説部 Γ, A の元で、サブゴール B が証明を得ればいいことがわかります。

仮説部が、Γ から Γ, A に変化していることに注意してください。

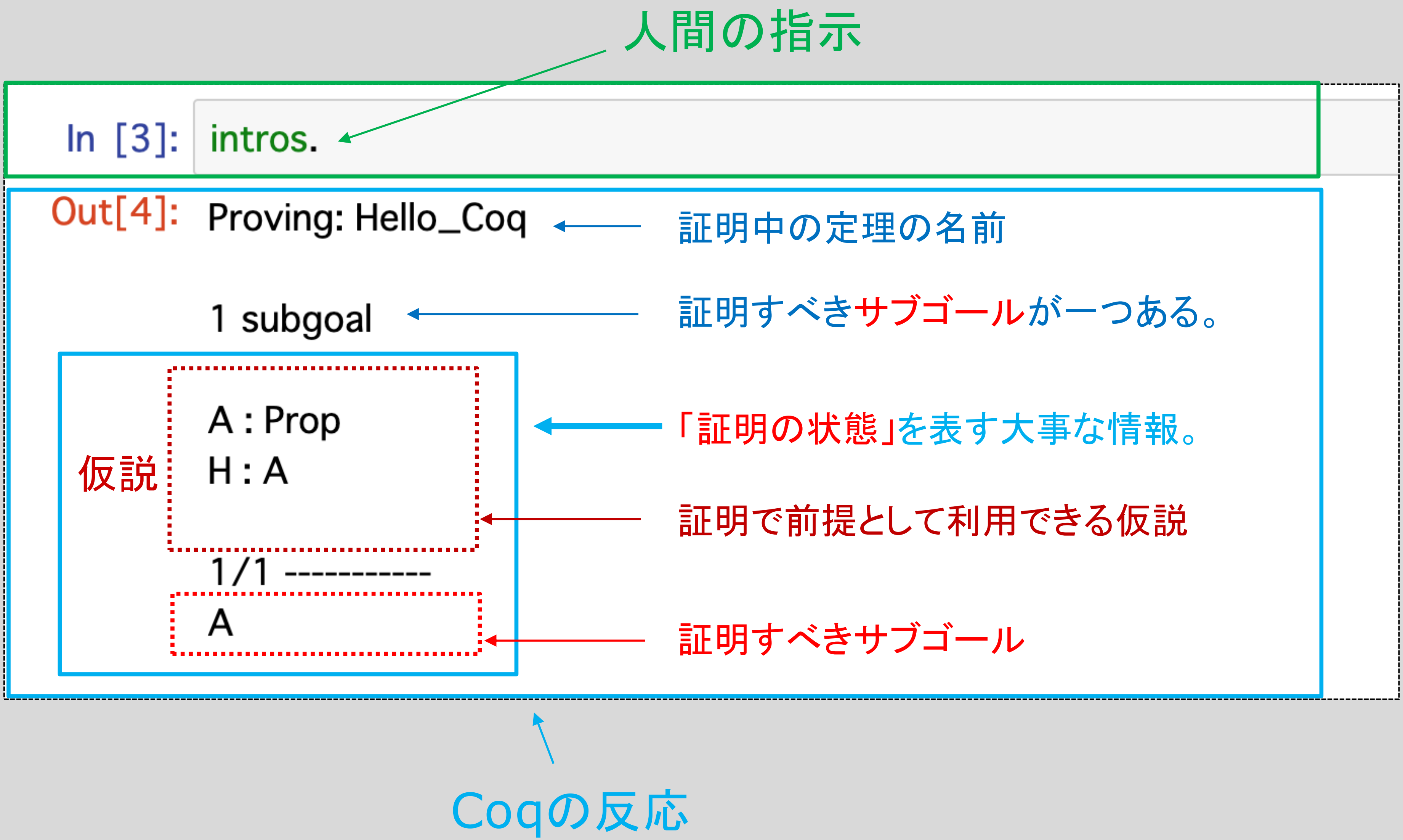
仮説部に、Aが移動すると思っても構いません。

つぎは、

「Coqは、反応として人間に何を伝えたか？」

のスライドを見直してみましょう。

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

人間の指示

In [3]: intros.

Out[4]: Proving: Hello_Coq　　証明中の定理の名前

1 subgoal　　証明すべきサブゴールが一つある。

「証明の状態」を表す大事な情報。

仮説

A : Prop
H : A

証明で前提として利用できる仮説

1/1 ----------

A

証明すべきサブゴール

Coqの反応

このスライドで大事なところは、次の３点です。

- 「証明の状態」を表す大事な情報
- 証明で前提として利用できる仮説
- 証明すべきサブゴール

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？

In [3]:
```
intros.
```

Out[4]:
```
Proving: Hello_Coq

1 subgoal

A : Prop
H : A

1/1 ----------
A
```

「証明の状態」を表す大事な情報。

証明で前提として利用できる仮説

証明すべきサブゴール

Coqが大事な情報として人間に伝えた「証明の状態」は、

仮説部 ＋ サブゴール

の形をしていました。

Coqが大事な情報として人間に伝えた「証明の状態」は、

仮説部 ＋ サブゴール

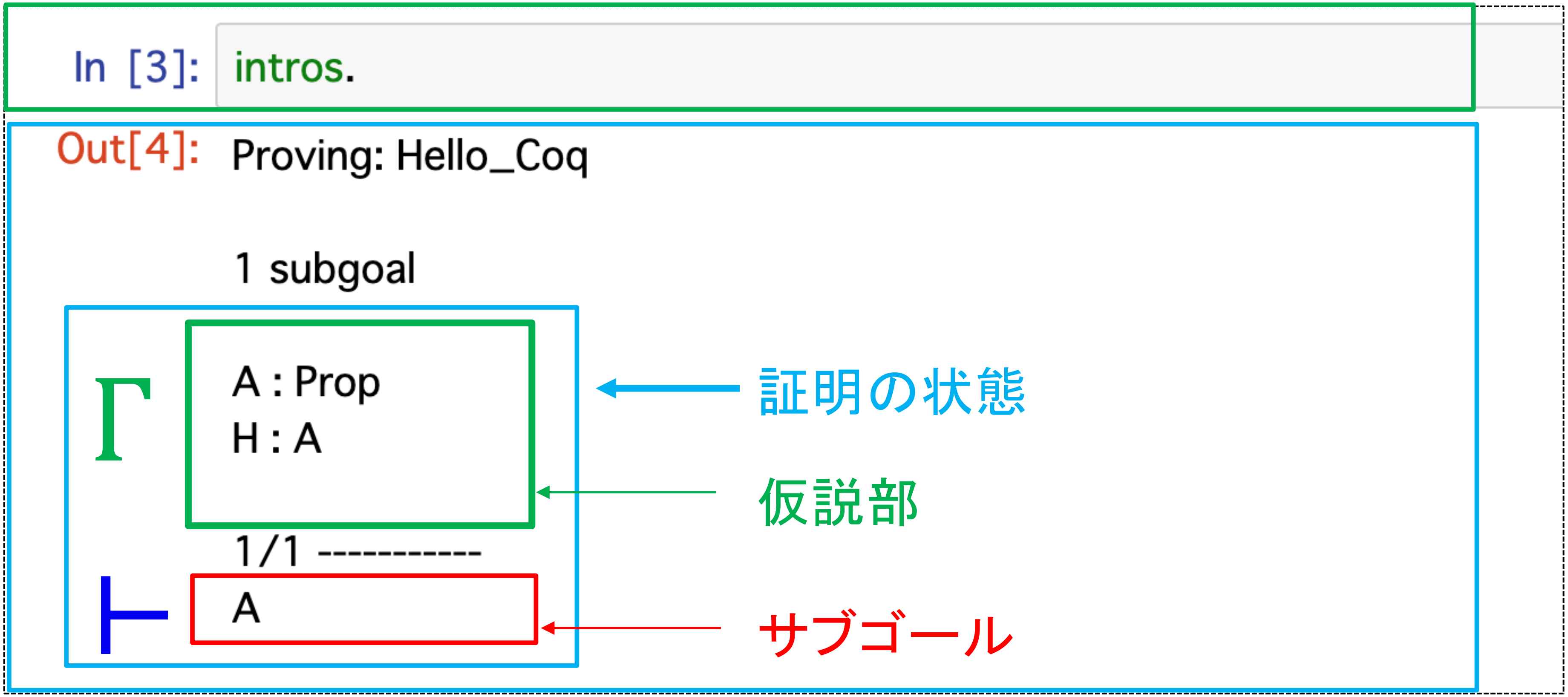
の形をしていました。

これは、演繹ルールの各段に現れる

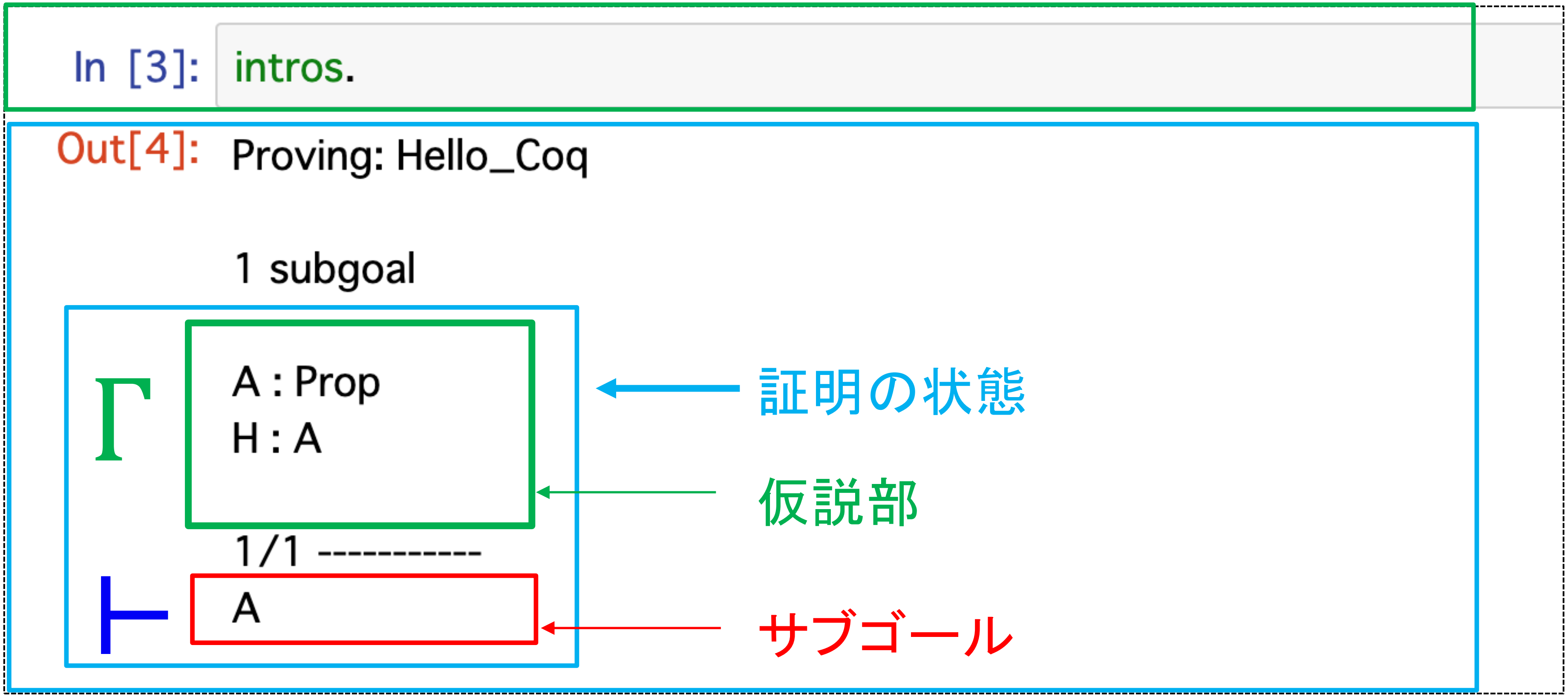
$\Gamma \vdash$ 命題

を表現しているのです。

Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



Coqは、反応として人間に何を伝えたか？



この例での「証明の状態」は、

仮説部　A : Prop, H : A

サブゴール　A

でした。

この例での「証明の状態」は、

仮説部　A : Prop, H : A

サブゴール　A

でした。

これは、演繹ルールの各段に現れる表現に直すと

$$A : \mathrm{Prop},\ H : A \vdash A$$

ということになります。

この例での「証明の状態」は、

仮説部　A : Prop, H : A

サブゴール　A

でした。

これは、演繹ルールの各段に現れる表現に直すと

$$A : \mathrm{Prop}, H : A \vdash A$$

ということになります。

$$\Gamma \vdash \text{命題}$$

の形をしています。

この例での「証明の状態」は、

仮説部　A : Prop, H : A

サブゴール　A

でした。

これは、演繹ルールの各段に現れる表現に直すと

$$A : Prop, H : A \vdash A$$

ということになります。

$$\Gamma \vdash 命題$$

の形をしています。

Coqが与える「証明の状態」は、証明を進める上で、どの演繹ルールを選択すべきかについて多くの情報を与えます。

この例での「証明の状態」は、

仮説部　A : Prop, H : A

サブゴール　A

でした。

これは、演繹ルールの各段に現れる表現に直すと

$$A : Prop, H : A \vdash A$$

ということになります。

$$\Gamma \vdash 命題$$

の形をしています。

Coqが与える「証明の状態」は、証明を進める上で、どの演繹ルールを選択すべきかについて多くの情報を与えます。

次の章で、このことをみていきたいと思います。

Γを構成する A : Prop, H : A についての説明が、ここでは欠けています。当面、A : Prop も H : A も「命題」だと思ってください。

ただ、あとで説明するように、ここにも、Coqの驚くべき主張が隠されています。

Γを構成する A : Prop, H : A についての説明が、ここでは欠けています。当面、A : Prop も H : A も「命題」だと思ってください。

ただ、あとで説明するように、ここにも、Coqの驚くべき主張が隠されています。


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (7)

tactic (1)
サブゴールの形と演繹ルールの選択

はじめてのCoq

論理式の証明 (7)

tactic (1)

サブゴールの形と演繹ルールの選択

あらためて、
基本的な演繹ルールを確認します

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor IL \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor IR$$

それぞれの演繹ルールの
下段のサブゴールは次のものです

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \Uparrow \ \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \wedge B}} \Uparrow \ \wedge\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \Uparrow \ \vee\mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \Uparrow \ \vee\mathrm{IR}$$

演繹ルールの適用によって
上段のサブゴールは次のように変化します

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}}\ \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A} \qquad \Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}}\ \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{A}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}}\ \lor \mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}}\ \lor \mathrm{IR}$$

演繹ルールによっては、
仮説部自体が変化します

$$\frac{\boxed{\Gamma, A} \vdash B}{\boxed{\Gamma} \vdash A \to B} \ \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathrm{IL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor \mathrm{IR}$$

Coqに演繹ルールの適用を命ずるのが**Tactic**です
次の例では、サブゴールの形で、選択されるルールは、一意に定まります。対応する**tactic**を示します

intros $$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \; \to I$$

split $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \; \land I$$

left $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \; \lor IL$$

right $$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \; \lor IR$$

Coqに演繹ルールの適用を命ずるのが**Tactic**です
次の例では、サブゴールの形で、選択されるルールは、一意に定まります。対応する**tactic**を示します

intros $$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \;\to \mathrm{I}$$

split $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \;\land \mathrm{I}$$

left $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \;\lor \mathrm{IL}$$

right $$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \;\lor \mathrm{IR}$$

これらのtacticsの働きを、実際のCoqの振る舞いとして見ておきましょう。

1. introsの場合
2. splitの場合
3. left, rightの場合

これらのtacticsの働きを、実際のCoqの振る舞いとして見ておきましょう。

1. introsの場合
2. splitの場合
3. left, rightの場合

tactic **intros**

intros は、サブゴールが **A-> B** の形をしているときに適用できます。

Out[3]:

```
Proving: my_first_proof''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

intros

サブゴール

intros は、サブゴールが **A-> B** の形をしているときに適用できます。

intros

Out[3]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

In [3]: intros.

introsのターゲットのサブゴール

適用される演繹ルール

intros

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \to \mathrm{I}$$

intros

Out[3]:
```
Proving: my_first_proof''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A
```

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [3]:
```
intros.
```

このtacticのターゲットのサブゴール

Out[4]:
```
Proving: my_first_proof''

1 subgoal

A : Prop
H : A

1/1 ----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

$$\frac{\boxed{\Gamma, A} \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}}$$

intros

Out[3]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> A

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [3]: intros.

このtacticのターゲットのサブゴール

Out[4]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

A : Prop
H : A

仮説部分の変化

1/1 -----------
A

サブゴールの変化

$$\frac{\Gamma, A \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash A \to B}$$

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

tactic introsの適用の結果
先の状態は、次のように変わります

Out[4]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

A : Prop
H : A

新しい仮説部分

1/1 -----------
A

新しいサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell Auto rollback

tactic **split**

split は、サブゴールが **A** ∧ **B** の形をしているときに適用できます。

Out[131]: Proving: and_comm'

split

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

仮説部

1/1 -----------
$\boxed{B \wedge A}$

✔ Cell evaluated.

サブゴール

Rollback cell ☑ Auto rollback

split は、サブゴールが **A ∧ B** の形をしているときに適用できます。

Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

split

A, B : Prop
H : A
H0 : B

仮説部

1/1 -----------
$\boxed{B \land A}$

✔ Cell evaluated.

サブゴール

Rollback cell ☑ Auto rollback

適用される演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \; \land I$$

split

split

```
Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

1/1 -----------
B /\ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

In [131]: split.
```

仮説部

サブゴール

splitのターゲットのサブゴール

split

Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

仮説部

1/1 -----------
B /\ A

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [131]: split.

splitのターゲットのサブゴール

Out[132]: Proving: and_comm'

2 subgoals

A, B : Prop
H : A
H0 : B

仮説部変化なし

$$\frac{\boxed{\Gamma} \vdash A \qquad \boxed{\Gamma} \vdash B}{\boxed{\Gamma} \vdash A \wedge B} \wedge \mathrm{I}$$

split

1/2 -----------
B
2/2 -----------
A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

split

Out[131]: Proving: and_comm'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

仮説部

1/1 -----------
$\boxed{\text{B /\\ A}}$

✔ Cell evaluated.

サブゴール

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [131]: split.

splitのターゲットのサブゴール

Out[132]: Proving: and_comm'

2 subgoals

A, B : Prop
H : A
H0 : B

仮説部変化なし

1/2 -----------
$\boxed{\text{B}}$
2/2 -----------
$\boxed{\text{A}}$

サブゴールの変化

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

$$\text{split}\quad \frac{\Gamma \vdash \boxed{A} \qquad \Gamma \vdash \boxed{B}}{\Gamma \vdash A \land B}\ \land\mathrm{I}$$

tactic splitの適用の結果
先の状態は、次のように変わります

Out[132]:

```
Proving: and_comm'

2 subgoals

A, B : Prop
H : A
H0 : B

1/2 -----------
B
2/2 -----------
A
```

新しい仮説部(変化なし)

新しい二つのサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

tactic **left, right**

left, right は、サブゴールが **A** ∨ **B** の形をしているときに適用できます。

left

```
In [75]: intros .

Out[76]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1 -----------
A \/ B
✔ Cell evaluated.
```

Rollback cell Auto rollback

仮説部

サブゴール

left, right は、サブゴールが **A ∨ B** の形をしているときに適用できます。

left

```
In [75]: intros .
Out[76]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.
```

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部

サブゴール

適用される演繹ルール

left $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \uparrow \lor\mathrm{IL}$$

left

In [75]:
```
intros .
```

Out[76]:
```
Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1 -----------
A \/ B
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部

サブゴール

In [76]:
```
left.
```

leftのターゲットのサブゴール

left

In [75]: intros .

Out[76]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.

サブゴール

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [76]: left.

leftのターゲットのサブゴール

Out[77]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

仮説部変化なし

1/1 -----------
A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

left $\dfrac{\boxed{\Gamma} \vdash A}{\boxed{\Gamma} \vdash \boxed{A \vee B}}$ $\vee$IL

left

```
In [75]: intros .
Out[76]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1 -----------
A \/ B
```

仮説部

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

leftのターゲットのサブゴール

```
In [76]: left.
Out[77]: Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1
A
```

仮説部変化なし

サブゴールの変化

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

$$\text{left}\quad \frac{\Gamma \vdash \boxed{A}}{\Gamma \vdash A \lor B}\ \lor IL$$

tactic leftの適用の結果 先の状態は、次のように変わります

Out[77]:

```
Proving: or1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A

1/1
A
```

新しい仮説部（変化なし）

新しいサブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

right

```
Out[88]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

1/1 -----------
A \/ B
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部

rightのターゲットのサブゴール

```
In [88]: right.
```

```
Out[89]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

1/1 -----------
B
```

仮説部変化なし

サブゴールの変化

$$\text{right}\quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}}\ \vee \mathrm{IR}$$

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

```
In [89]: trivial.
```

right

Out[88]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

仮説部

1/1 -----------
A \/ B

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [88]: right.

rightのターゲットのサブゴール

Out[89]: Proving: or2'

1 subgoal

A, B : Prop
H : B

仮説部変化なし

1/1 -----------
B

サブゴールの変化

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \; \vee IR$$

right

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [89]: trivial.

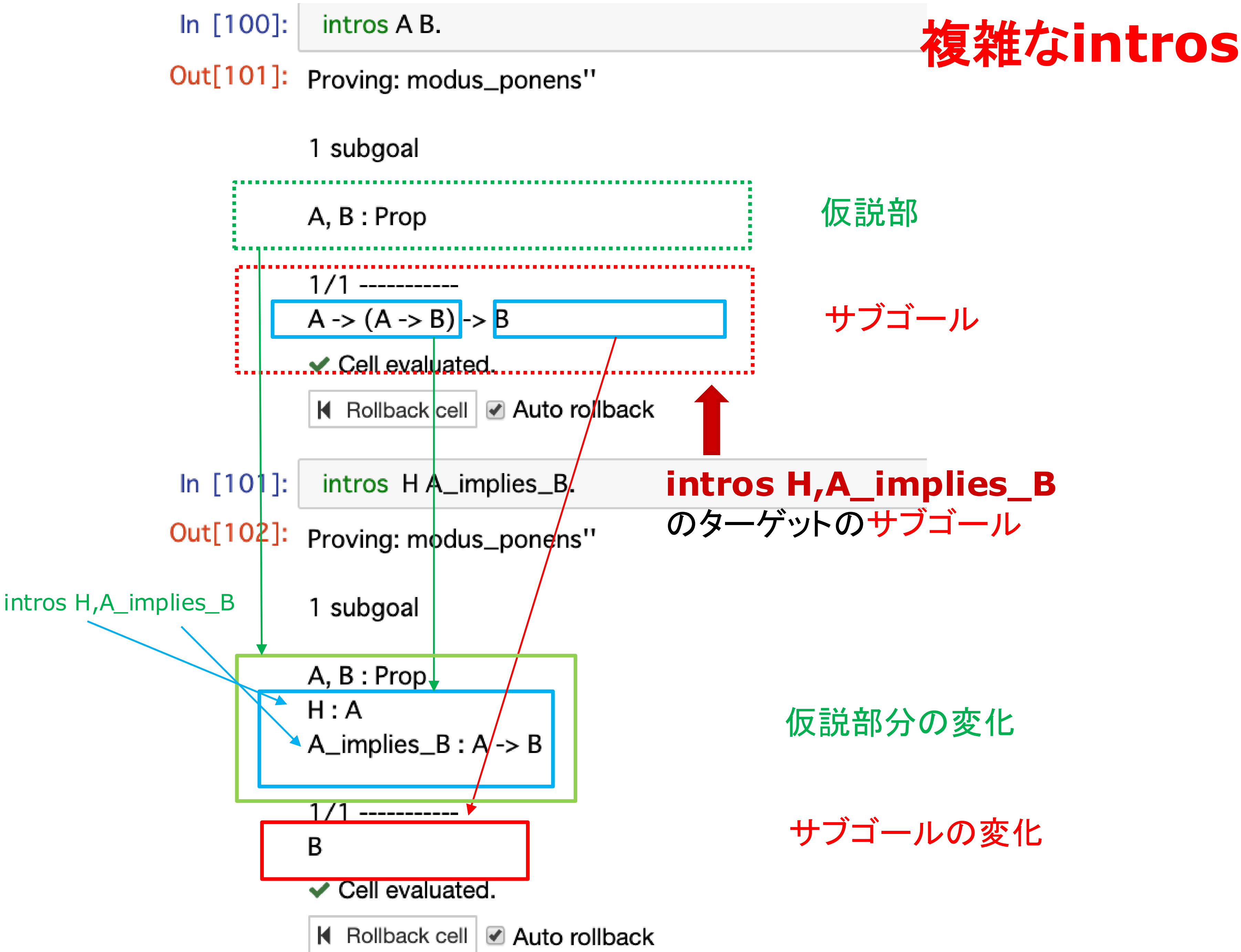
長い式での **intros**

intros は、サブゴールが

A -> B -> C -> … -> X

のような長い式にも適用できます。

複雑なintros



In [100]:
intros A B.
Out[101]:
Proving: modus_ponens''
1 subgoal
A, B : Prop
1/1 -----------
A -> (A -> B) -> B
Cell evaluated.
Rollback cell
Auto rollback
仮説部
サブゴール
In [101]:
intros H A_implies_B.
Out[102]:
Proving: modus_ponens''
1 subgoal
A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B
1/1 -----------
B
Cell evaluated.
Rollback cell
Auto rollback
intros H,A_implies_B
のターゲットのサブゴール
intros H,A_implies_B
仮説部分の変化
サブゴールの変化

複雑なintros

In [100]: intros A B.

Out[101]: Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop

仮説部

1/1 -----------

A -> (A -> B) -> B

サブゴール

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [101]: intros H A_implies_B.

intros H,A_implies_B
のターゲットのサブゴール

Out[102]: Proving: modus_ponens''

1 subgoal

intros H,A_implies_B

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

仮説部分の変化

1/1 -----------

B

サブゴールの変化

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

複雑なintros

In [100]: `intros A B.`

Out[101]: Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop

1/1 -----------

A -> (A -> B) -> B

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部

サブゴール

intros H,A_implies_B
のターゲットのサブゴール

In [101]: `intros H A_implies_B.`

Out[102]: Proving: modus_ponens''

1 subgoal

intros H,A_implies_B

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------

B

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

サブゴールの変化

複雑なintros

In [112]:
```
Theorem modus_ponens2'' : (forall A B C: Prop, A -> (A -> B) ->(B ->C) -> C).
Proof.
```

Out[114]:
```
Proving: modus_ponens2''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B C : Prop, A -> (A -> B) -> (B -> C) -> C
```
✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

introsのターゲットのサブゴール

In [114]:
```
intros A B C Proof_of_A  A_implies_B B_implies_C.
```

Out[115]:
```
Proving: modus_ponens2''

1 subgoal

A, B, C : Prop
Proof_of_A : A
A_implies_B : A -> B
B_implies_C : B -> C

1/1
C
```
✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

サブゴールの変化

複雑なintros

In [112]:
```
Theorem modus_ponens2'' : (forall A B C: Prop, A -> (A -> B) ->(B ->C) -> C).
Proof.
```

Out[114]:
```
Proving: modus_ponens2''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B C : Prop, A -> (A -> B) -> (B -> C) -> C
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

introsのターゲットのサブゴール

In [114]:
```
intros A B C Proof_of_A A_implies_B B_implies_C.
```

Out[115]:
```
Proving: modus_ponens2''

1 subgoal

A, B, C : Prop
Proof_of_A : A
A_implies_B : A -> B
B_implies_C : B -> C

1/1
C
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

サブゴールの変化

In [112]:
```
Theorem modus_ponens2'' : (forall A B C: Prop, A -> (A -> B) ->(B ->C) -> C).
Proof.
```

複雑なintros

Out[114]:
```
Proving: modus_ponens2''

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B C : Prop, A -> (A -> B) -> (B -> C) -> C
```
✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

introsのターゲットのサブゴール

In [114]:
```
intros A B C Proof_of_A A_implies_B B_implies_C.
```

Out[115]:
```
Proving: modus_ponens2''

1 subgoal

A, B, C : Prop
Proof_of_A : A
A_implies_B : A -> B
B_implies_C : B -> C

1/1
C
```
✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

サブゴールの変化


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (8)

tactic (2)
仮説部の形と演繹ルールの選択

ふりかえり

あらためて、基本的な演繹ルールを確認します

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \ \land\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor\mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \ \lor\mathrm{IR}$$

ふりかえり

あらためて、基本的な演繹ルールを確認します

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ {\to}\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \ {\wedge}\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \ {\vee}\mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \ {\vee}\mathrm{IR}$$

これらの演繹ルールは、サブゴールの
論理式の形に応じて選択されます。

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \Uparrow \to I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \Uparrow \land I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \Uparrow \lor IL \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \Uparrow \lor IR$$

それぞれの演繹ルールが適用される下段のサブゴールの形は次のものです

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \quad \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \quad \land \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \quad \lor \mathrm{IL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \quad \lor \mathrm{IR}$$

それぞれの演繹ルールが適用される
下段のサブゴールの形は次のものです

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \ \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \wedge B}} \ \wedge\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \ \vee\mathrm{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \ \vee\mathrm{IR}$$

それぞれの演繹ルールに対応するtacticsは、次のようになります

intros $$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \to \mathrm{I}$$

split $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \land B}} \land \mathrm{I}$$

left $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \lor \mathrm{IL}$$

right $$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \lor B}} \lor \mathrm{IR}$$

それぞれの演繹ルールに対応するtacticsは、次のようになります

intros $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \to B}} \quad {\to}\mathrm{I}$

split $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \wedge B}} \quad \wedge\mathrm{I}$

left $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \quad \vee\mathrm{IL}$

right $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{A \vee B}} \quad \vee\mathrm{IR}$

ここでは、
サブゴールの論理式の形ではなく、
仮説部の論理式の形で適用可能な
演繹ルールについて見ていきます

ここでは、
サブゴールの論理式の形ではなく、
仮説部の論理式の形で適用可能な
演繹ルールについて見ていきます

仮説部分に注目すると
次のような演繹ルールが成り立っています

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

仮説部分に注目すると
次のような演繹ルールが成り立っています

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \lor B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

このルールを、一つずつ説明しましょう。

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

このルールを、一つずつ説明しましょう。

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash B}$$

仮説 A → Bの元で、Aが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Bも証明される

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

仮説 $A \to B$の元で、Aが証明されるなら、
同じ仮説 $A \to B$の元で、Bも証明される

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

仮説 A → Bの元で、Bが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Aも証明される

$$\frac{\Gamma,\ A \to B \vdash A}{\Gamma,\ A \to B \vdash B}$$

仮説 A → Bの元で、Bが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Aも証明される

仮説 A → Bの元で、Aが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Bも証明される

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

仮説 A → Bの元で、Bが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Aも証明される

仮説 A → Bの元で、Aが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Bも証明される

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

仮説 A → Bの元で、Bが証明されるなら、
同じ仮説 A → Bの元で、Aも証明される

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でXが証明されるなら
仮説 A∨Bの元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でXが証明されるなら
仮説 $A \vee B$の元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \lor B \vdash X}$$

仮説 A∨Bの元で、Xが証明されるなら、
仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でもXが証明される

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \lor B \vdash X}$$

仮説 $A \lor B$の元で、Xが証明されるなら、
仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でもXが証明される

仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でXが証明されるなら
仮説 A∨Bの元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \lor B \vdash X}$$

仮説 A∨Bの元で、Xが証明されるなら、
仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でもXが証明される

仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でXが証明されるなら
仮説 A∨Bの元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \vee B \vdash X}$$

仮説 A∨Bの元で、Xが証明されるなら、
仮説Aの元でXが証明され、かつ、
仮説Bの元でもXが証明される

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

仮説部にAとBがある時、Xが証明されるなら、
仮説$A \wedge B$の元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma,\ A,\ B \vdash X}{\Gamma,\ A \wedge B \vdash X}$$

仮説部にAとBがある時、Xが証明されるなら、
仮説$A \land B$の元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

仮説A∧Bの元で、Xが証明されるなら、
仮説部にAとBがある時、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

仮説A∧Bの元で、Xが証明されるなら、
仮説部にAとBがある時、Xが証明される

仮説部にAとBがある時、Xが証明されるなら、
仮説$A \land$ Bの元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

仮説$A \land$ Bの元で、Xが証明されるなら、
仮説部にAとBがある時、Xが証明される

仮説部にAとBがある時、Xが証明されるなら、
仮説$A \wedge B$の元で、Xが証明される

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \wedge B \vdash X}$$

仮説$A \wedge B$の元で、Xが証明されるなら、
仮説部にAとBがある時、Xが証明される

次の演繹ルールを適用するtacticは、
次のようなものです

apply

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

destruct

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \lor B \vdash X}$$

destruct

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

次の演繹ルールを適用するtacticは、次のようなものです

apply

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

destruct

$$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad\qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, A \lor B \vdash X}$$

destruct

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \land B \vdash X}$$

tactic **apply**

apply は、仮説部に **A-> B** を含み、
サブゴールが **B** のときに適用できます。

applyの働き

```
In [4]:  intros H A_implies_B.
Out[5]:  Proving: modus_ponens"

         1 subgoal

         A, B : Prop
         H : A
         A_implies_B : A -> B

         1/1 -----------
         B

         ✔ Cell evaluated.
         Rollback cell   ☑ Auto rollback
```

仮説に **A** -> **B** があり、
サブゴールが **B** なら、
サブゴールを **A** にする

apply は、仮説部に **A-> B** を含み、
サブゴールが **B** のときに適用できます。

applyの働き

In [4]:
```
intros H A_implies_B.
```

Out[5]:
```
Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------
B
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説に **A** -> **B** があり、
サブゴールが **B** なら、
サブゴールを **A** にする

In [5]:
```
apply A_implies_B.
```

applyのターゲットの仮説部分とサブゴール

適用される演繹ルール

apply $$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

applyの働き

In [4]:
```
intros H A_implies_B.
```

Out[5]:
```
Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------
B
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説に **A** -> **B** があり、
サブゴールが **B** なら、
サブゴールを **A** にする

In [5]:
```
apply A_implies_B.
```

applyのターゲットの仮説部分とサブゴール

Out[6]:
```
Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------
A
```

仮説部分変化なし

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}$$

applyの働き

In [4]:
```
intros H A_implies_B.
```

Out[5]:
```
Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------
B
```
✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

仮説に **A** -> **B** があり、
サブゴールが **B** なら、
サブゴールを **A** にする

In [5]:
```
apply A_implies_B.
```

applyのターゲットの仮説部分とサブゴール

Out[6]:
```
Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------
A
```

仮説部分変化なし

サブゴールの変化

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash \boxed{A}}{\Gamma, A \to B \vdash \boxed{B}}$$

tactic **destruct**

destruct は、仮説部に**A** ∧ **B** または**A** ∨ **B**
を含むときに適用できます。

destructの働き

```
In [51]:  intros A B A_and_B.

Out[52]: Proving: and1'

1 subgoal

A, B : Prop
A_and_B : A /\ B
1/1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

destruct は、仮説部に**A ∧ B** または**A ∨ B** を含むときに適用できます。

destructの働き

In [51]:
```
intros A B A_and_B.
```

Out[52]:
```
Proving: and1'

1 subgoal

A, B : Prop
A_and_B : A /\ B

1/1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [52]:
```
destruct A_and_B.
```

destructのターゲットの仮説部分

適用される演繹ルール

destruct

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, \boxed{A \land B} \vdash X}$$

destructの働き

In [51]:
```
intros A B A_and_B.
```

Out[52]:
```
Proving: and1'

1 subgoal

A, B : Prop
A_and_B : A /\ B

1/1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [52]:
```
destruct A_and_B.
```

destructのターゲットの仮説部分

Out[53]:
```
Proving: and1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B

1/1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

$$\frac{\boxed{\Gamma, A, B} \vdash X}{\boxed{\Gamma, A \land B} \vdash X}$$

destructの働き

In [51]:
```
intros A B A_and_B.
```

Out[52]:
```
Proving: and1'

1 subgoal

A, B : Prop
A_and_B : A /\ B
1/1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [52]:
```
destruct A_and_B.
```

destructのターゲットの仮説部分

Out[53]:
```
Proving: and1'

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
H0 : B
1/1 -----------
A
```

仮説部分の変化

サブゴール変化なし

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \boxed{X}}{\Gamma, A \land B \vdash \boxed{X}}$$

tactic **destruct**

destruct は、仮説部に**A** $\wedge$ **B** または**A** $\vee$ **B** を含むときに適用できます。

In [15]:

```
intros.
```

Out[16]:

```
Proving: or_comm

1 subgoal

A, B : Prop
H : A \/ B

1/1 -----------
B \/ A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell   Auto rollback

destructの働き

destruct は、仮説部に**A ∧ B** または**A ∨ B** を含むときに適用できます。

destructの働き

In [15]:
```
intros.
```

Out[16]:
```
Proving: or_comm

1 subgoal

A, B : Prop
H : A \/ B

1/1 -----------
B \/ A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [16]:
```
destruct H.
```

destructのターゲットの仮説部分

適用される演繹ルール

destruct $$\frac{\Gamma, A \vdash X \qquad \Gamma, B \vdash X}{\Gamma, \boxed{A \vee B} \vdash X}$$

destructの働き

In [15]: intros.

Out[16]: Proving: or_comm

1 subgoal

A, B : Prop
H : A \/ B

1/1 -----------
B \/ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

destructのターゲットの仮説部分

In [16]: destruct H.

Out[18]: Proving: or_comm

2 subgoals

A, B : Prop
H : A

1/2 -----------
B \/ A
2/2 -----------
B \/ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

ここでは表示されていない

$$\frac{\Gamma, \boxed{A} \vdash X \qquad \Gamma, \boxed{B} \vdash X}{\Gamma, \boxed{A \vee B} \vdash X}$$

destructの働き

In [15]:
```
intros.
```

Out[16]:

Proving: or_comm

1 subgoal

A, B : Prop
$\boxed{\text{H : A \/ B}}$

1/1 ------------
B \/ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

destructのターゲットの仮説部分

In [16]:
```
destruct H.
```

Out[18]:

Proving: or_comm

2 subgoals

A, B : Prop
H : A

1/2 ------------
B \/ A
2/2 ------------
B \/ A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分の変化

$$\frac{\Gamma, A \vdash \boxed{X} \qquad \Gamma, B \vdash \boxed{X}}{\Gamma, A \vee B \vdash \boxed{X}}$$

サブゴールの変化
二つに分かれる

演繹ルール
assumption

仮説部分に関係する
次のような演繹ルールがあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A} \quad \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

仮説部分に関係する
次のような演繹ルールがあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A} \quad \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

仮説部分に関係する
次のような演繹ルールがあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A} \quad \Uparrow \quad \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部 Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

このルールを適用するtacticには、assumption, exact があります。

仮説部分に関係する
次のような演繹ルールがあります。

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A} \quad \textbf{Assumption}$$

このルールは、ある命題 A が、前提の仮説部　Γ に含まれていれば、その命題は 仮説部 Γ のもとで「証明を持つ」ことを主張しています。

このルールを適用するtacticには、assumption, exact があります。

assumptionの働き

```
In [5]:  apply A_implies_B.

Out[6]:  Proving: modus_ponens''

         1 subgoal

         A, B : Prop
         H : A
         A_implies_B : A -> B

         1/1 -----------
         A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分に、サブゴールと
一致するものがある、

assumptionの働き

```
In [5]: apply A_implies_B.

Out[6]: Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1 / 1 -----------
A

✔ Cell evaluated.
Rollback cell   Auto rollback
```

仮説部分に、サブゴールと一致するものがある、

```
In [6]: assumption.
```

assumptionのターゲットの仮説部分とサブゴール

適用される演繹ルール

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A}$$

Assumption

assumptionの働き

```
In [5]: apply A_implies_B.
Out[6]: Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1 / 1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分に、サブゴールと
一致するものがある、

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A}$$

```
In [6]: assumption.
```

assumptionのターゲットの仮説部分とサブゴール

```
Out[7]: Proving: modus_ponens''

No more subgoals
```

サブゴールはもうない

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

assumptionの働き

In [5]:
```
apply A_implies_B.
```

Out[6]:
```
Proving: modus_ponens''

1 subgoal

A, B : Prop
H : A
A_implies_B : A -> B

1/1 -----------
A
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部分に、サブゴールと一致するものがある、

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A}$$

In [6]:
```
assumption.
```

assumptionのターゲットの仮説部分とサブゴール

Out[7]:
```
Proving: modus_ponens''

No more subgoals
```

サブゴールはもうない

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [7]:
```
Qed.
```

証明終了

Out[8]:

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [17]: intros.

Out[18]: Proving: my_first_proof''

1 subgoal

A : Prop
H : A

1/1 -----------
A

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

exact Hの働き

仮説 H: **A** が、
サブゴール **A**と一致する、

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \ni A}$$

In [18]: exact H. **exact H**のターゲットの仮説部分とサブゴール

Out[19]: Proving: my_first_proof''

No more subgoals

サブゴールはもうない

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

In [19]: Qed. 証明終了

Out[20]:

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback


Coq

はじめてのCoq

論理式の証明 (9)

「否定」について


はじめてのCoq
論理式の証明 (9)
「否定」について

ここでは、
Coqでの「否定」の扱いについて学びます。

ここでは、
Coqでの「否定」の扱いについて学びます。

Coqでは、否定の論理演算子 `~’ は、
他の論理演算子 ‘→’, ‘∧’, ‘∨’ とは異なり
基本的な論理演算子ではありません。

ここでは、
Coqでの「否定」の扱いについて学びます。

Coqでは、否定の論理演算子 ‘~’ は、
他の論理演算子 ‘→’, ‘∧’, ‘∨’ とは異なり
基本的な論理演算子ではありません。

‘~A’は ‘A → False’の省略形として扱われます。

‘~’ についての演繹ルールは、つぎのようになります。

‘~’ についての演繹ルールは、つぎのようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to \mathbf{False}}{\Gamma \vdash {\sim}A}$$

‘~’ についての演繹ルールは、つぎのようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to \mathbf{False}}{\Gamma \vdash {\sim}A}$$

Coqでは、この演繹ルールを適用するのに、
tactic ‘**unfold not**’ を使います。

‘~’ についての演繹ルールは、つぎのようになります。

$$\frac{\Gamma \vdash A \to \mathbf{False}}{\Gamma \vdash {\sim}A}$$

Coqでは、この演繹ルールを適用するのに、
tactic ‘**unfold not**’ を使います。

実際の適用例を見ておきましょう。

'**unfold not**' の働きの例(1)

Out[3]: Proving: Contraposition'

1 subgoal

対偶

```
1/1 -----------
forall A B : Prop, (A -> B) -> ~ B -> ~ A
```

In [3]: $\boxed{\text{unfold not.}}$

適用される演繹ルール

unfold not
$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow \mathbf{False}}{\Gamma \vdash \sim A}$$

‘unfold not’ の働きの例(1)

```
Out[3]: Proving: Contraposition'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, (A -> B) -> ~ B -> ~ A
```

対偶

```
In [3]: unfold not.
```

‘unfold not’ の働きの例(1)

Out[3]: Proving: Contraposition'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, (A -> B) -> ~ B -> ~ A

対偶

In [3]: unfold not.

Out[36]: Proving: Contraposition'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, (A -> B) -> (B -> False) -> A -> False

‘unfold not’ の働きの例(1)

Out[3]: Proving: Contraposition'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, (A -> B) -> ~ B -> ~ A

対偶

In [3]: unfold not.

Out[36]: Proving: Contraposition'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, (A -> B) -> (B -> False) -> A -> False

‘unfold not’ の働きの例(2)

In [41]:
```
Theorem Double_negation': forall A:Prop, A -> ~~A.
Proof.
```

Out[43]:
```
Proving: Double_negation'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A : Prop, A -> ~ ~ A
```

二重否定

In [43]:
```
unfold not.
```

‘unfold not’ の働きの例(2)

In [41]:
```
Theorem Double_negation': forall A:Prop, A -> ~~A.
Proof.
```

Out[43]:
```
Proving: Double_negation'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A : Prop, A -> ~ ~ A
```

二重否定

In [43]:
```
unfold not.
```

適用される演繹ルール

unfold not $$\frac{\Gamma \vdash A \to \mathbf{False}}{\Gamma \vdash \sim A}$$ ↑

‘unfold not’ の働きの例(2)

In [41]:
```
Theorem Double_negation': forall A:Prop, A -> ~~A.
Proof.
```

Out[43]:
```
Proving: Double_negation'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A : Prop, A -> ~ ~ A
```

二重否定

In [43]:
```
unfold not.
```

Out[44]:
```
Proving: Double_negation'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A : Prop, A -> (A -> False) -> False
```

‘unfold not’ の働きの例(2)

In [41]:
```
Theorem Double_negation': forall A:Prop, A -> ~~A.
Proof.
```

Out[43]:
```
Proving: Double_negation'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A : Prop, A -> ~ ~ A
```

二重否定

In [43]:
```
unfold not.
```

Out[44]:
```
Proving: Double_negation'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A : Prop, A -> (A -> False) -> False
```

‘unfold not’ の働きの例(3)

In [48]:
```
Theorem De_Morgan' : forall A B : Prop, (A /\ B) -> ~( ~A \/ ~B ).
Proof.
```

Out[50]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, A /\ B -> ~ (~ A \/ ~ B)
```

ド・モルガンの定理

In [50]:
```
unfold not.
```

‘unfold not’ の働きの例(3)

```
In [48]: Theorem De_Morgan' : forall A B : Prop, (A /\ B) -> ~( ~A \/ ~B ).
Proof.
```

```
Out[50]: Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, A /\ B -> ~ (~ A \/ ~ B)
```

ド・モルガンの定理

```
In [50]: unfold not.
```

適用される演繹ルール

unfold not

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow \mathbf{False}}{\Gamma \vdash \sim A}$$

‘unfold not’ の働きの例(3)

In [48]:
```
Theorem De_Morgan' : forall A B : Prop, (A /\ B) -> ~( ~A \/ ~B ).
Proof.
```

Out[50]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A B : Prop, A /\ B -> ~ (~ A \/ ~ B)
```

ド・モルガンの定理

In [50]:
```
unfold not.
```

Out[51]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 ----------
forall A B : Prop, A /\ B -> (A -> False) \/ (B -> False) -> False
```

‘**unfold not**’ の働きの例(3)

In [48]:
```
Theorem De_Morgan' : forall A B : Prop, (A /\ B) -> ~( ~A \/ ~B ).
Proof.
```

Out[50]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, A /\ B -> ~ (~ A \/ ~ B)
```

ド・モルガンの定理

In [50]:
```
unfold not.
```

Out[51]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, A /\ B -> (A -> False) \/ (B -> False) -> False
```

‘unfold not’ の働きの例(3)

ド・モルガンの定理

In [48]:
```
Theorem De_Morgan' : forall A B : Prop, (A /\ B) -> ~( ~A \/ ~B ).
Proof.
```

Out[50]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, A /\ B -> ~ (~ A \/ ~ B)
```

In [50]:
```
unfold not.
```

Out[51]:
```
Proving: De_Morgan'

1 subgoal

1/1 -----------
forall A B : Prop, A /\ B -> (A -> False) \/ (B -> False) -> False
```

CoqでのFalse の定義

Coqでの **False** の定義

Coqでの型Falseの定義を見てみましょう。

Coqでの **False** の定義

Coqでの型Falseの定義を見てみましょう。

Print False.

Coqでの **False** の定義

Coqでの型Falseの定義を見てみましょう。

Print False.

Inductive False : Prop :=

Coqでの **False** の定義

Coqでの型Falseの定義を見てみましょう。

Print False.

Inductive False : Prop :=

このように、型Falseには、定義がありません。

Coqでの **False** の定義

Coqでの型Falseの定義を見てみましょう。

Print False.

Inductive False : Prop :=

このように、型Falseには、定義がありません。
このことは、型Falseは証明を持たないことを意味します。

“ex falso quodlibet”

“ex falso quodlibet”

偽からは、どんな議論も導かれる

“ex falso quodlibet”
偽からは、どんな議論も導かれる

型Falseについての重要な性質は、
次の定理が成り立つことです。

“ex falso quodlibet”
偽からは、どんな議論も導かれる

型Falseについての重要な性質は、
次の定理が成り立つことです。

```
Theorem ex_falso_quodlibet :
    forall P:Prop, False -> P.
```

“ex falso quodlibet”
偽からは、どんな議論も導かれる

型Falseについての重要な性質は、
次の定理が成り立つことです。

```
Theorem ex_falso_quodlibet :
    forall P:Prop, False -> P.
```

すなわち、どんな命題も、Falseから導くことができます。

“ex falso quodlibet”
偽からは、どんな議論も導かれる

型Falseについての重要な性質は、
次の定理が成り立つことです。

```
Theorem ex_falso_quodlibet :
    forall P:Prop, False -> P.
```

すなわち、どんな命題も、Falseから導くことができます。

```
Theorem ex_falso_quodlibet :
  forall P:Prop, False -> P.
```

先の定理は、次のようにして
Coqで証明可能です。

In [4]:
```
Proof.
intros.
```
Out[6]:

Proving: ex_falso_quodlibet

1 subgoal

P : Prop
H : False

1/1 -----------
P

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

先の定理は、次のようにして
Coqで証明可能です。

In [4]:
```
Proof.
intros.
```

Out[6]:

Proving: ex_falso_quodlibet

1 subgoal

P : Prop
H : False

1/1 ----------
P

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

先の定理は、次のようにしてCoqで証明可能です。

In [6]:
```
destruct H.
```

In [4]:
```
Proof
intros.
```

Out[6]: Proving: ex_falso_quodlibet

1 subgoal

P : Prop
H : False

1/1 -----------
P

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

先の定理は、次のようにしてCoqで証明可能です。

In [6]:
```
destruct H.
```

Out[7]: Proving: ex_falso_quodlibet

No more subgoals

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部に、Falseが含まれていれば、destructで証明が終わります。

In [7]:
```
Qed.
```

In [4]: Proof
intros.

Out[6]: Proving: ex_falso_quodlibet

1 subgoal

P : Prop
H : False

1/1 ----------
P

✔ Cell evaluated.

Rollback cell Auto rollback

In [6]: destruct H.

Out[7]: Proving: ex_falso_quodlibet

No more subgoals

✔ Cell evaluated.

Rollback cell Auto rollback

In [7]: Qed.

先の定理は、次のようにしてCoqで証明可能です。

仮説部に、Falseが含まれていれば、destructで証明が終わります。

In [4]:
```
Proof
intros.
```

Out[6]:
```
Proving: ex_falso_quodlibet

1 subgoal

P : Prop
H : False

1/1 -----------
P
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

先の定理は、次のようにしてCoqで証明可能です。

In [6]:
```
destruct H.
```

Out[7]:
```
Proving: ex_falso_quodlibet

No more subgoals
```

✔ Cell evaluated.

Rollback cell ☑ Auto rollback

仮説部に、Falseが含まれていれば、destructで証明が終わります。

In [7]:
```
Qed.
```


Coq


Coq