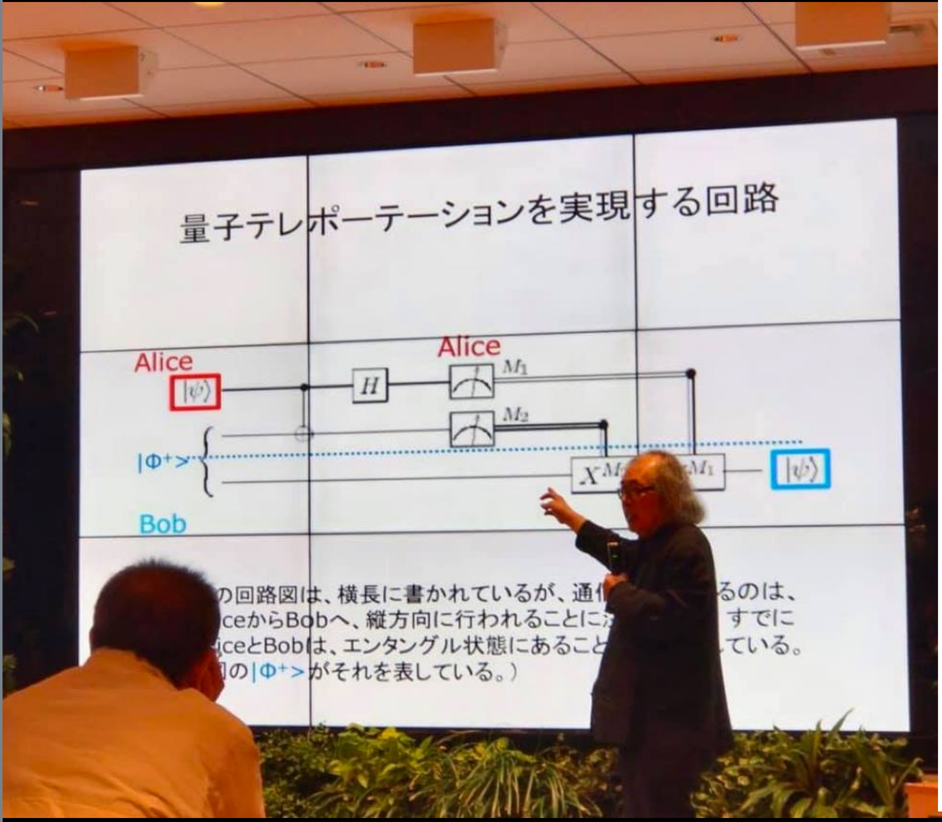
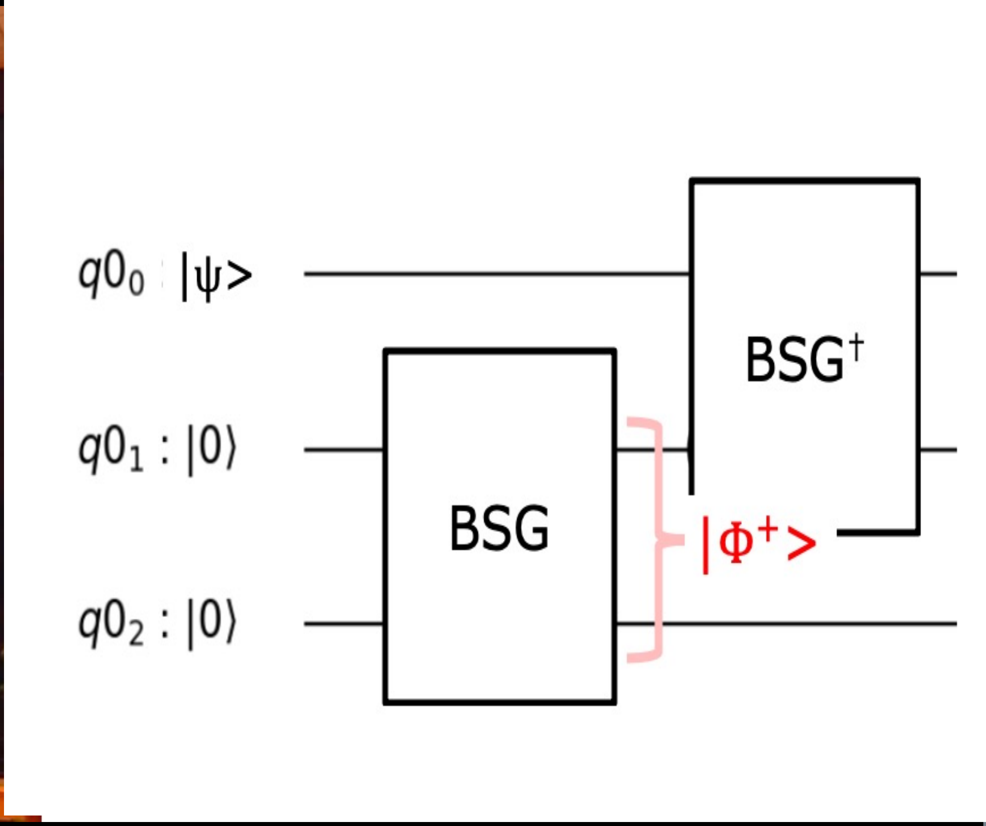
量子通信入門
量子ゲートで学ぶエンタングルメント





量子テレポーテーションと
Entanglement Swapping

But in his final attack Einstein pointed to something so deep, so counterintuitive, so troubling, and yet so exciting, that at the beginning of the twenty-first century it has returned to fascinate theoretical physicists. Bohr’s only answer to Einstein’s last great discovery (1935) — the discovery of entanglement — was to ignore it.

-- Leonard Susskind

Quantum teleportation was proposed by Bennett et al. (1993), and its first experimental realisation was by Bouwmeester et al. (1997).

Why did discovering quantum teleportation take 60 year?

-- Bob Coecke

No one before had considered the information-processing features of quantum theory and had therefore simply not thought to ask the question.

-- Gilles Brassard

はじめに

- 小論は、量子ゲートの働きを学び始めた量子コンピュータの初心者を対象にした、量子コンピュータと並んで、IT技術への量子理論の応用の重要な分野である量子通信の基礎の入門コースである。
- 量子通信入門として、小論の出口は、Superdense Coding, 量子テレポーテーション、Entanglement Swapping の三つのプロトコルの紹介である。それらは、いずれも量子通信のトピックスとしては、基本的なものだと思う。ただ、その展開には、少し独自のアプローチをとった。
- 小論では、量子のエンタングルメントを、量子通信入門の出発点に置いた。具体的には、計算基底をBell基底に変換するBell State Gateと、その逆変換である、Bell基底を計算基底に変換するBell Measure Gateを、基本的な量子通信回路 / プロトコルの説明の基礎においた。

はじめに

- こうした冒頭からのエンタングルメントとそれを操作する回路の導入は、すこし天下り的に見えるかもしれない。ただ、詰まるところ、量子通信というのは、エンタングルメントした量子を、双方の通信者が共有する通信方法なのである。
- 筆者は、エンタングルメントの性質をあれこれ頭の中で考えるより、エンタングルメント状態を、具体的な量子回路上で操作する経験を積む方が、エンタングルメントの理解は深まると考えている。エンタングルメントの理解を深める上で、量子通信の基本的なプロトコルは、とてもいい素材になると思う。
- エンタングルメントの初等的な解説については、マルレク基礎「エンタングルメントで理解する量子の世界」を参照されたい。
https://www.marulabo.net/docs/entangle-talk/

はじめに

- 小論には、もう一つの特徴がある。それは、回路上の状態の計算例をできるだけ沢山掲載したことである。
- 回路上の計算で量子通信で必須のエンタングルメント状態を扱うと言うのは、回路の個別のライン上の状態に分離できない状態を扱うと言うことだ。その計算には、少しコツがいる。
- 基本的には、回路を特定の時刻で縦にタイムスライスして、複数のラインのテンソル積として、その時点での系の状態を計算する。系の状態は、基底のテンソル積で表現される状態の重ね合わせで表現されるので、演算子の線形性を利用すれば、基底に対する作用さえわかれば和の形に分解できる。
- 文章にすると面倒くさいが、慣れれば、簡単なことだ。お気づきかもしれないが、今回のセミナーの目標の一つは、こうした計算に慣れてもらうことなのである。

はじめに

- 今回のセミナーは、量子通信入門がテーマだが、そこで行われているエンタングルメントを含む状態の量子回路上での計算は、量子コンピュータの回路 / アルゴリズムの理解に、そのまま役立つものである。
- 残念ながら、セミナーを聞いただけでは、そうしたスキルが身につくものではないように思う。できるだけ多くの皆さんが、資料上の回路の計算を、自分の手で、やってみることに期待したい。

「量子通信入門」**Part I**
Bell StateゲートとBell Measureゲート

- □ Bell Stateを生成するBell Stateゲート
  - ■ Bell Stateとは何か？
  - ■ Bell State ゲートの構成
  - ■ 2-qubits の計算基底に対するBell State Gateの働き
- □ Bell Stateを計測するBell Measureゲート
  - ■ Bell Measurゲートの構成
  - ■ 2-qubits の計算基底に対するBell Measure Gateの働き
  - ■ Bell Stateに対するBell Measure Gateの働き
- □ Bell StateゲートとBell Measureゲート

「量子通信入門」**Part II**
量子回路上での量子状態の「交換」

- CNOTを使った量子状態の「交換」
- 計算の準備
  - 演算子のテンソル積の作用
  - Bit Flipper X と Phase Flipper Z
- BSG / BMGを使った量子状態の「交換」
  - Bell State Gate を使った量子状態の「交換」
  - Bell Measure Gate を使った量子状態の「交換」

「量子通信入門」Part III
量子テレポーテーション

- □ Superdense Coding
  - ■ 基本的な考え方
  - ■ $|\Phi^+>$から他のBell Stateを作る方法
  - ■ Superdense Coding回路
- □ 量子テレポーテーション
  - ■ 量子テレポーテーション回路の概観
  - ■ 実際に計算するための準備
  - ■ 量子テレポーテーション回路の前段部を計算する
  - ■ 量子テレポーテーション回路の後段部を計算する
  - ■ 他のBell State を使ってテレポーテーション回路を作る
- □ Entanglement Swapping

Part I

Bell StateゲートとBell Measureゲート

「量子通信入門」Part I
Bell StateゲートとBell Measureゲート

- Bell Stateを生成するBell Stateゲート
  - Bell Stateとは何か？
  - Bell State ゲートの構成
  - 2-qubits の計算基底に対するBell State Gateの働き
- Bell Stateを計測するBell Measureゲート
  - Bell Measurゲートの構成
  - 2-qubits の計算基底に対するBell Measure Gateの働き
  - Bell Stateに対するBell Measure Gateの働き
- Bell StateゲートとBell Measureゲート

Bell State を生成する
Bell State ゲート

Bell State とは何か？

最も基本的な2-qubittsの エンタングルメント状態をBell Stateと呼ぶ

- 最も基本的な2-qubittsのエンタングルメント状態を Bell Stateと呼ぶ。次の四つがある。

$$(|00>+|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^+>$$

$$(|00>-|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^->$$

$$(|01>+|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^+>$$

$$(|01>-|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^->$$

この節で明らかにすること

- Bell Stateを出力するゲートをBell State Gateと呼ぶ。
  Bell State Gate を**BSG**で表すと、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{BSG}|00> = (|00>+|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^+>$$

$$\mathbf{BSG}|01> = (|01>+|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^+>$$

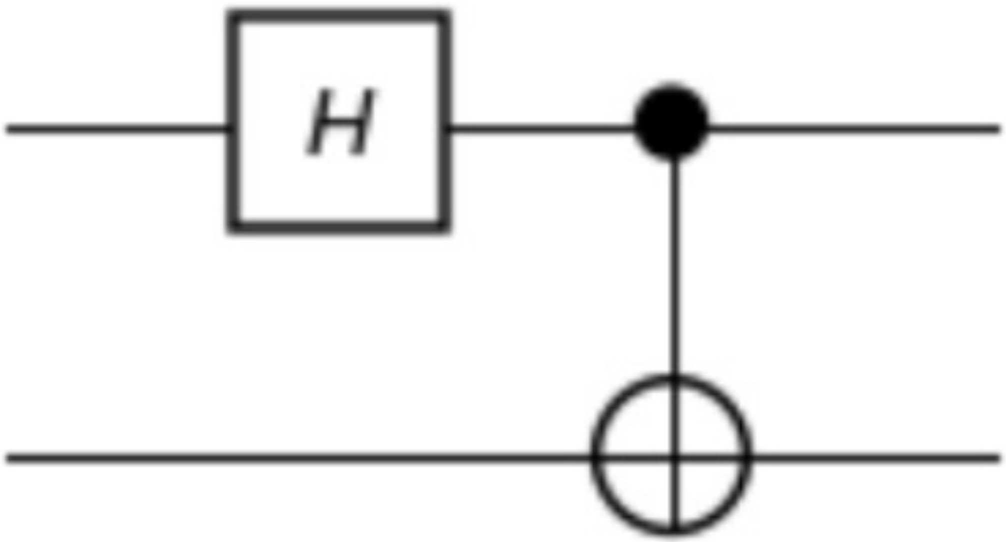
$$\mathbf{BSG}|10> = (|00>-|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^->$$

$$\mathbf{BSG}|11> = (|01>-|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^->$$

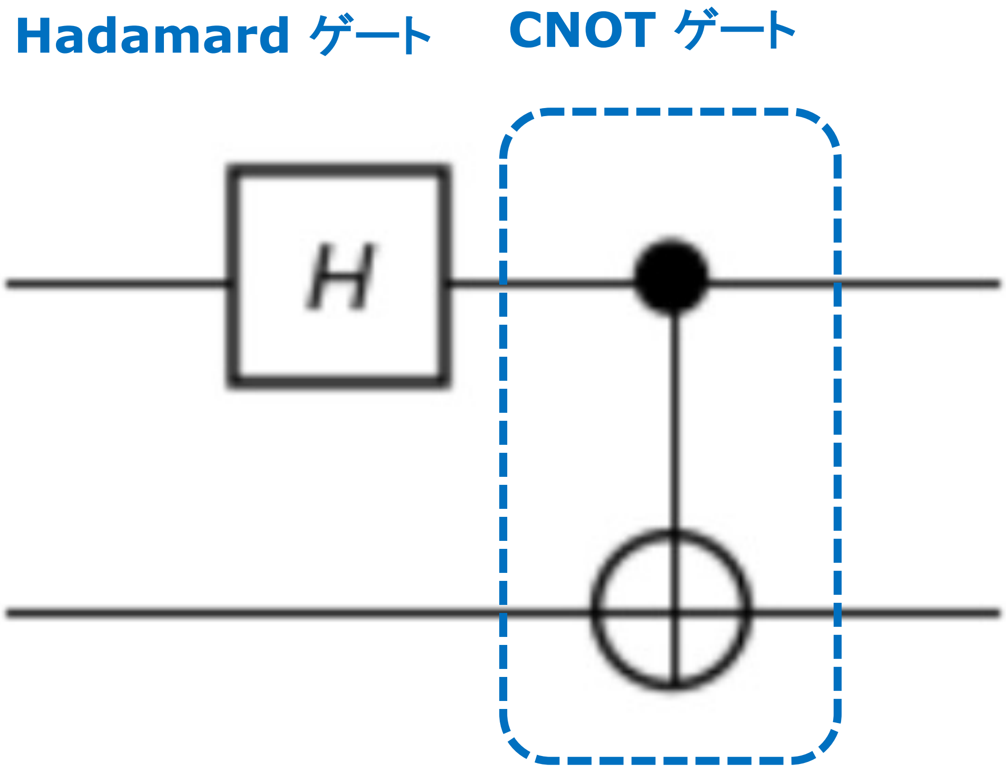
- このことを、順番に見ていこう。

Bell State ゲートの構成

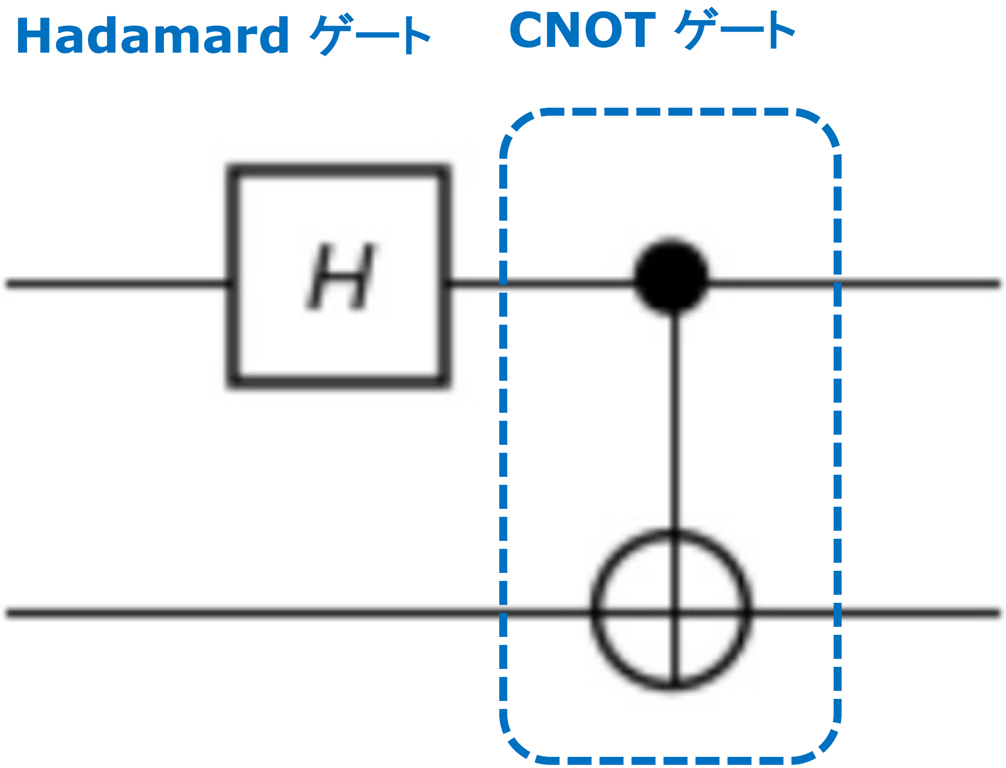
Bell State ゲート



Bell State ゲート

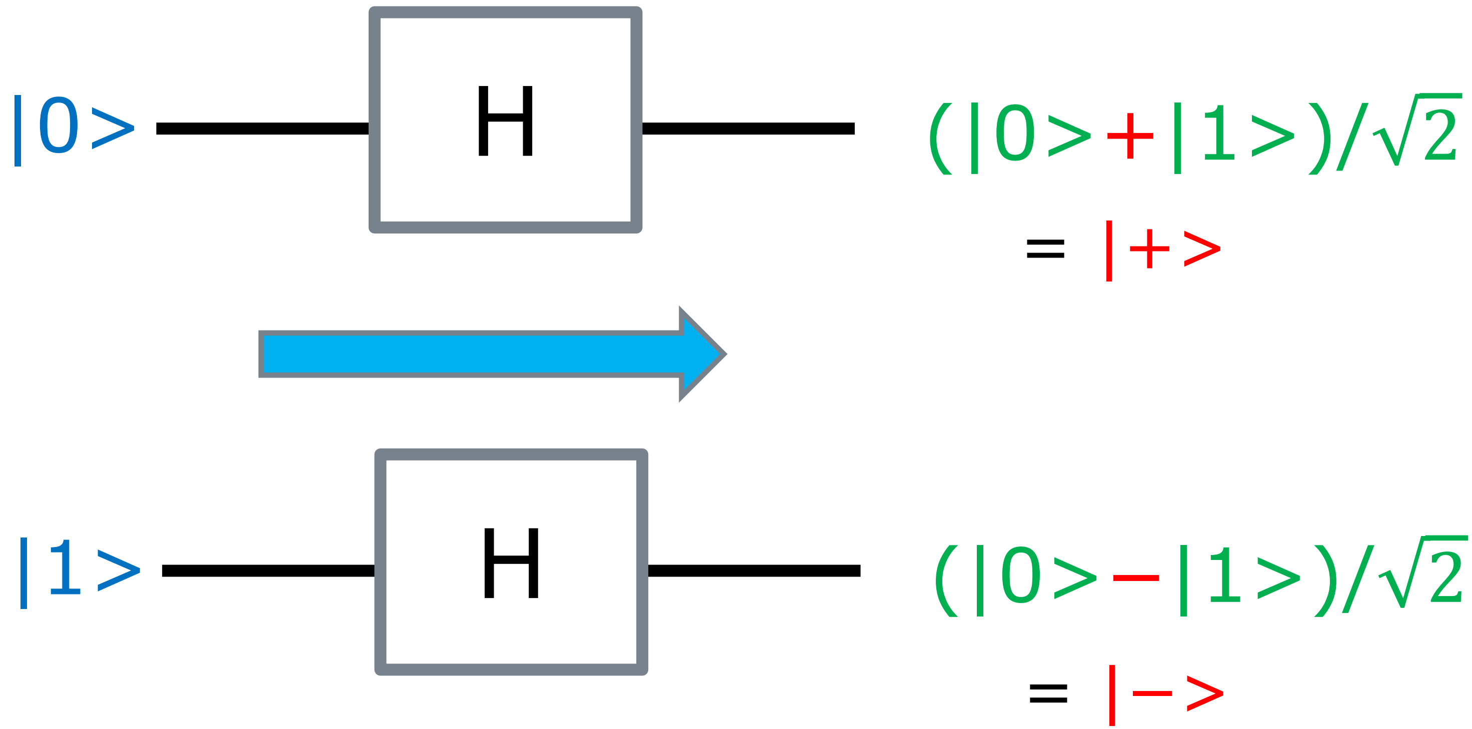


Bell State ゲート



Bell State ゲートは、アダマール・ゲートと
CNOTゲートの組み合わせで構成される

アダマール・ゲートの基本的な働き



Hゲートの性質

- アダマール・ゲート Hについて、次が成り立つ。

$$\mathbf{H}|0> = (|0>+|1>)/\sqrt{2} \quad (= |+>)$$
$$\mathbf{H}|1> = (|0>-|1>)/\sqrt{2} \quad (= |->)$$

- 同時に、次の式も成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(|0>+|1>)/\sqrt{2} &= (\mathbf{H}|0>+\mathbf{H}|1>)/\sqrt{2} \\ &= ((|0>+|1>)/\sqrt{2} + (|0>-|1>)/\sqrt{2}))/\sqrt{2} \\ &= (2|0>/\sqrt{2})/\sqrt{2} = |0>\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\,(|0>-|1>)/\sqrt{2} &= (H|0>-H|1>)/\sqrt{2} \\ &= ((|0>+|1>)/\sqrt{2} \sim (|0>-|1>)/\sqrt{2}))/\sqrt{2} \\ &= (2|1>/\sqrt{2})/\sqrt{2} = |1>\end{aligned}$$

Hゲートの性質

アダマール・ゲート Hについて、

$$|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$$
$$|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$$

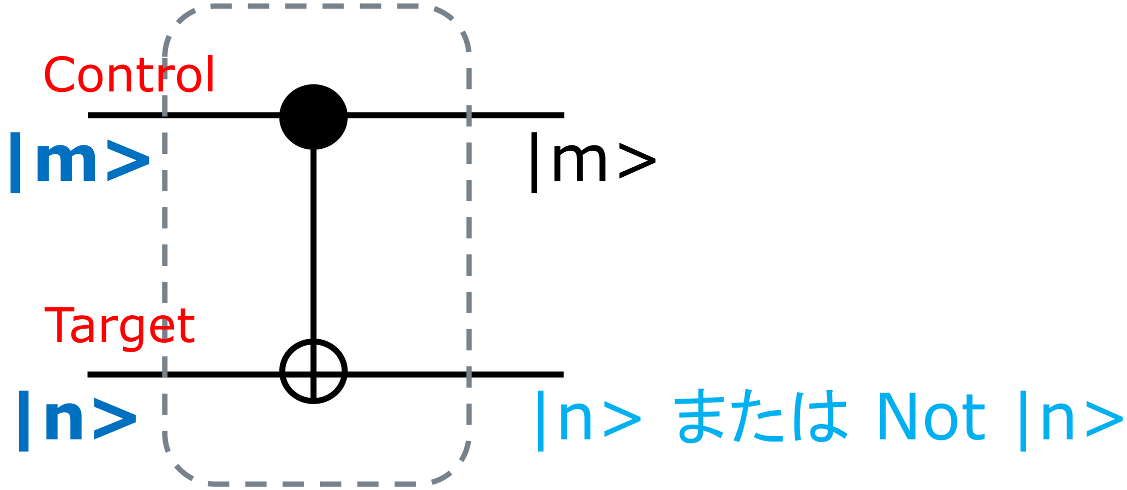
とすると、次が成り立つ。

$$\mathbf{H}|0\rangle = |+\rangle$$
$$\mathbf{H}|1\rangle = |-\rangle$$

$$\mathbf{H}|+\rangle = |0\rangle$$
$$\mathbf{H}|-\rangle = |1\rangle$$

CNOTゲートの基本的働き

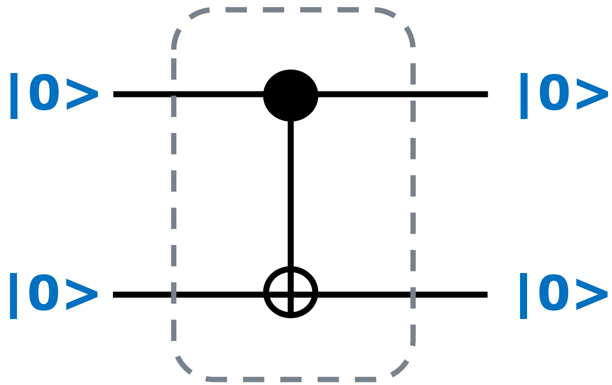
第一bit |m>をControl ビット
第二bit |n>をTarget ビット　と呼ぶ

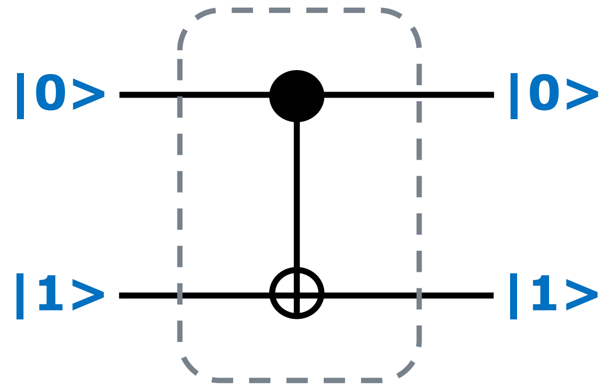


Control ビットが |0>なら何もしない
Control ビットが |1> の時Target ビットのNOTをとる

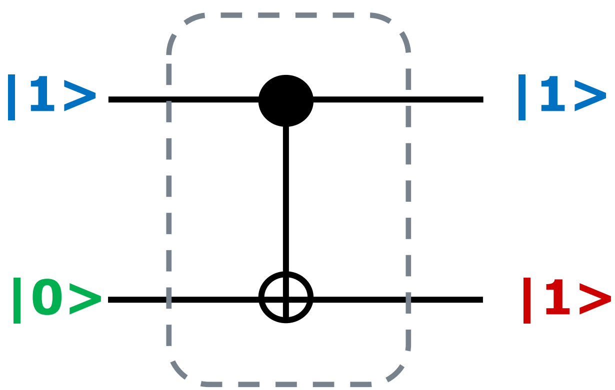
CNOTゲートの基本的働き

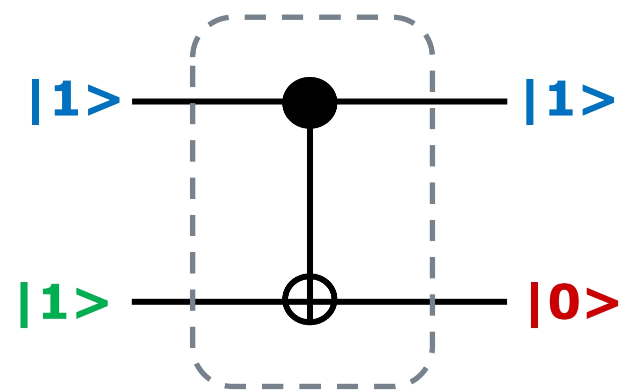
Control ビットが |0>なら何もしない





Control ビットが |1>ならTargetビットにNOT操作

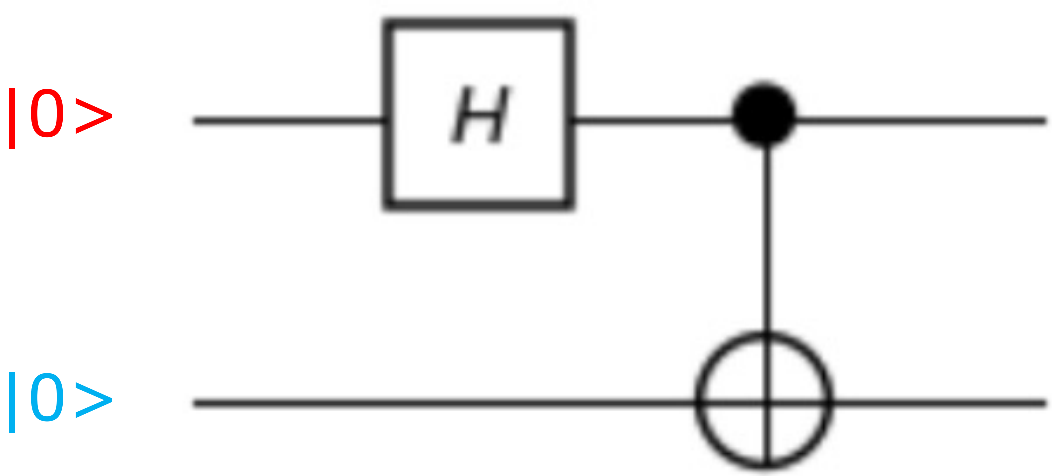




2-qubits の計算基底に対する
Bell State Gateの働き

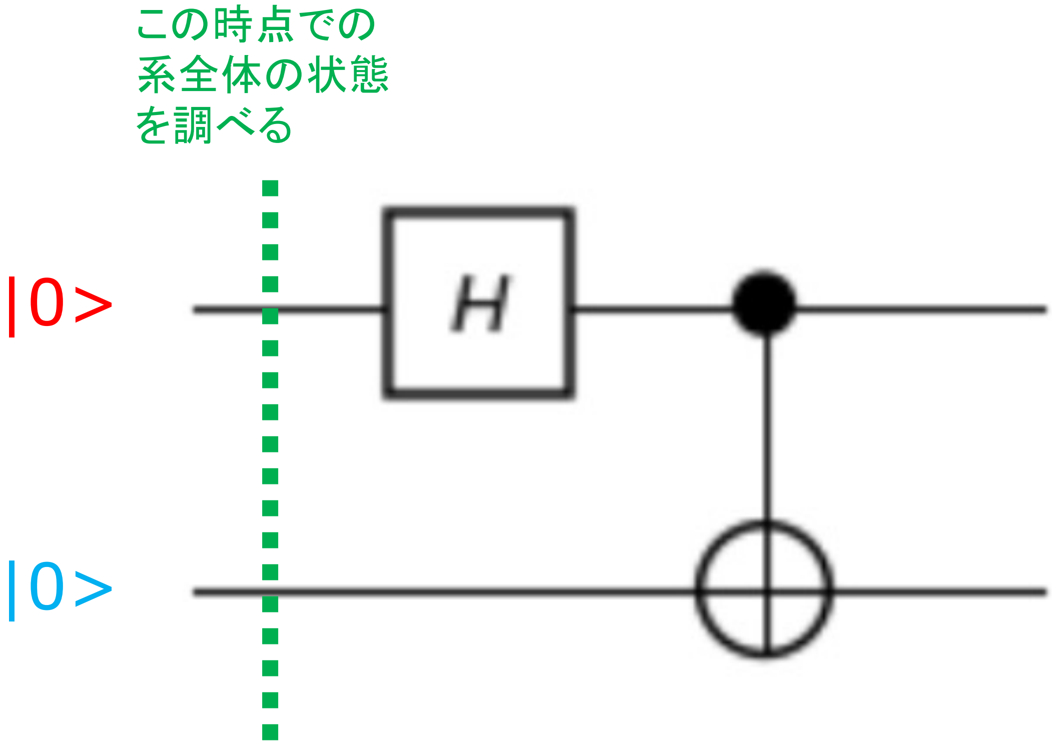
Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合

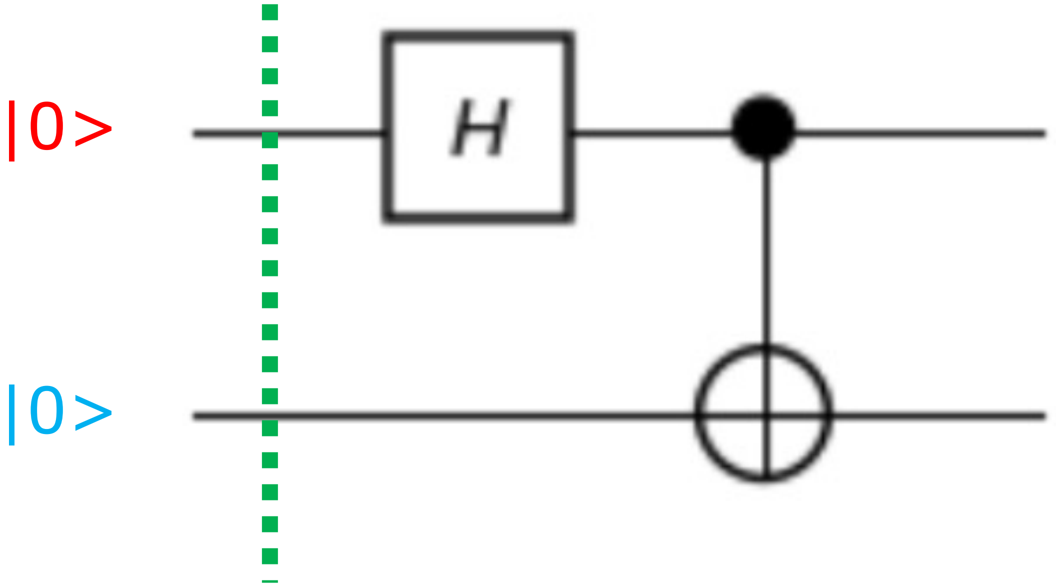


Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合



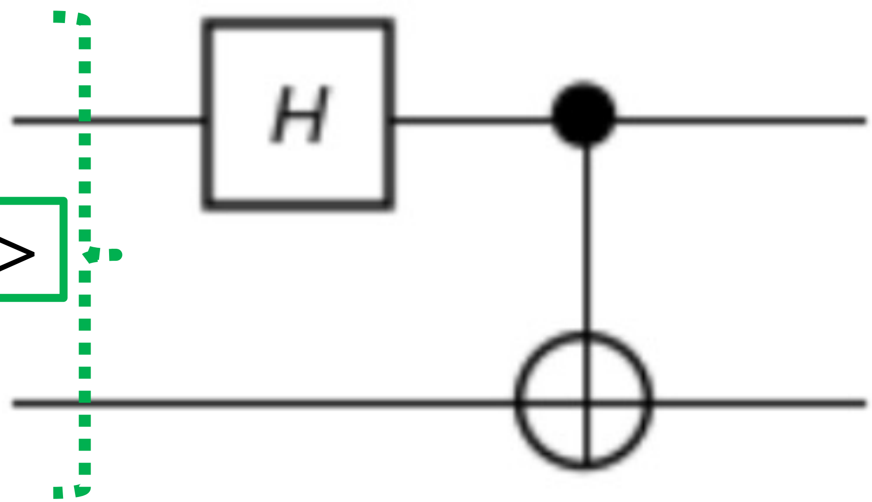
|0>⊗|0>

この時点での系全体の状態 $= \boxed{|00>}$

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

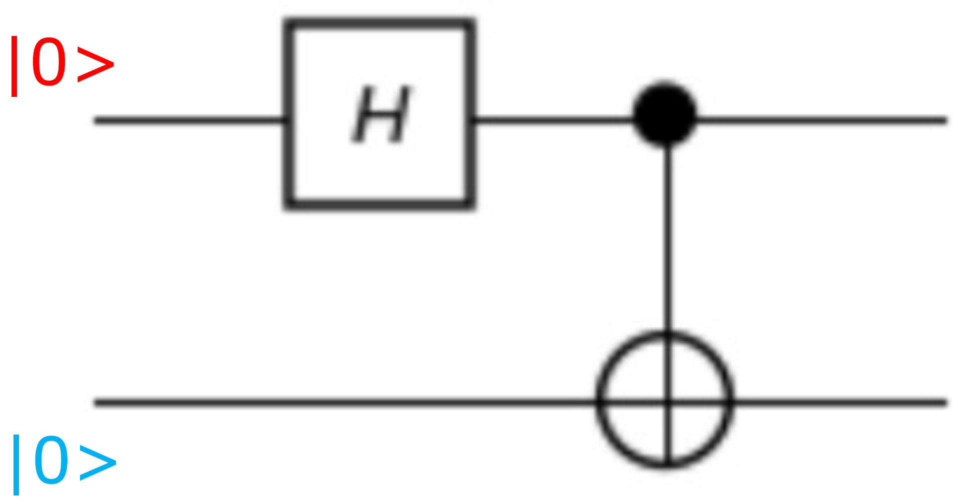
|00>



分離可能

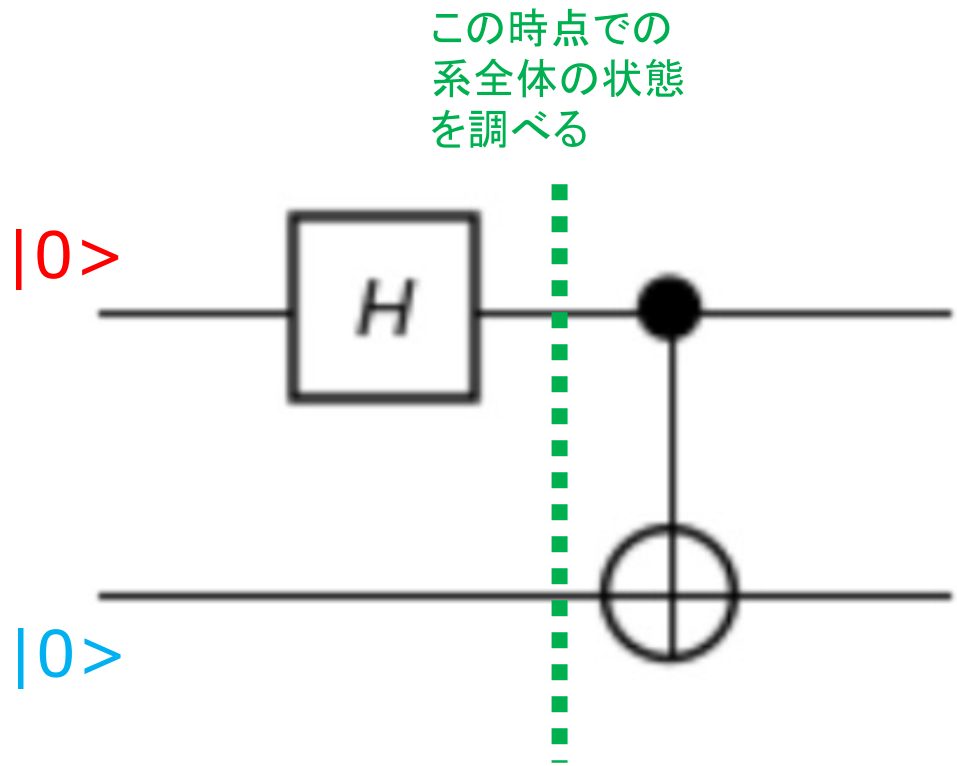
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



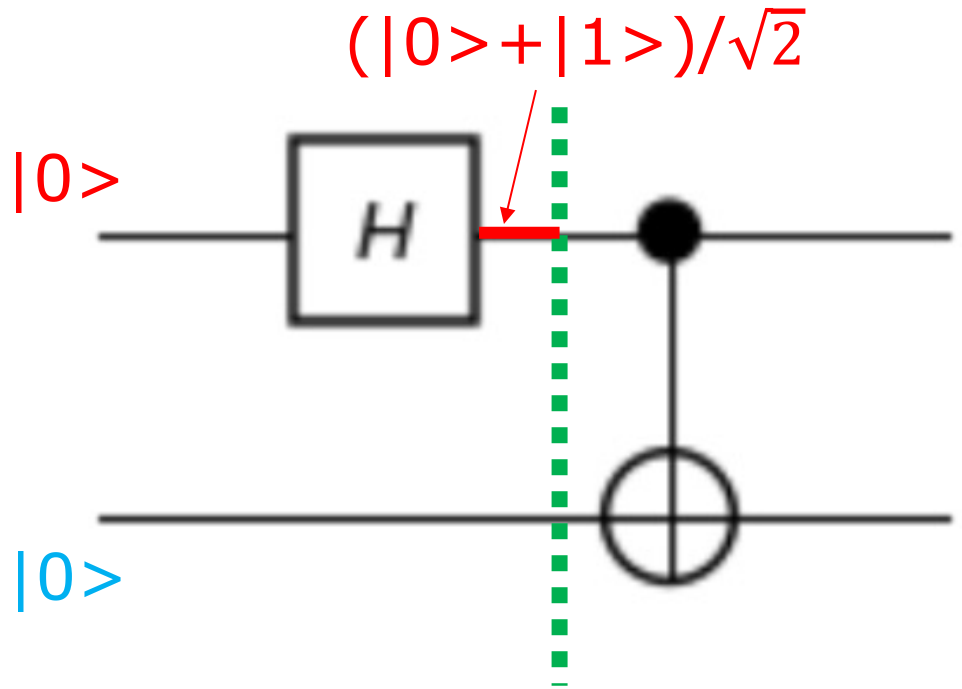
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



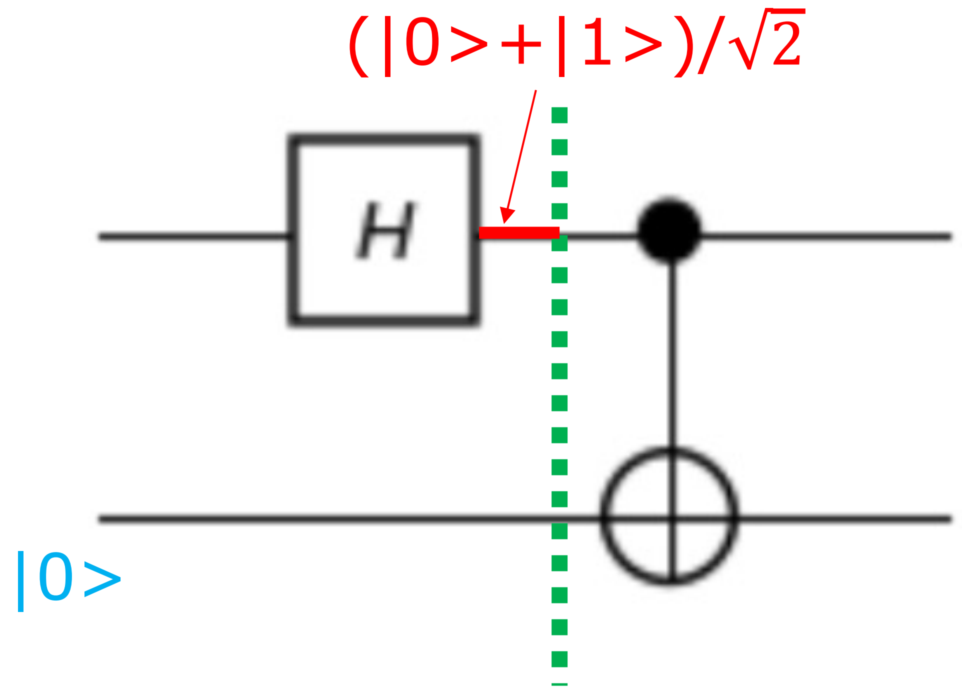
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



Hは|0>を(|0>+|1>)/√2に変える

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合

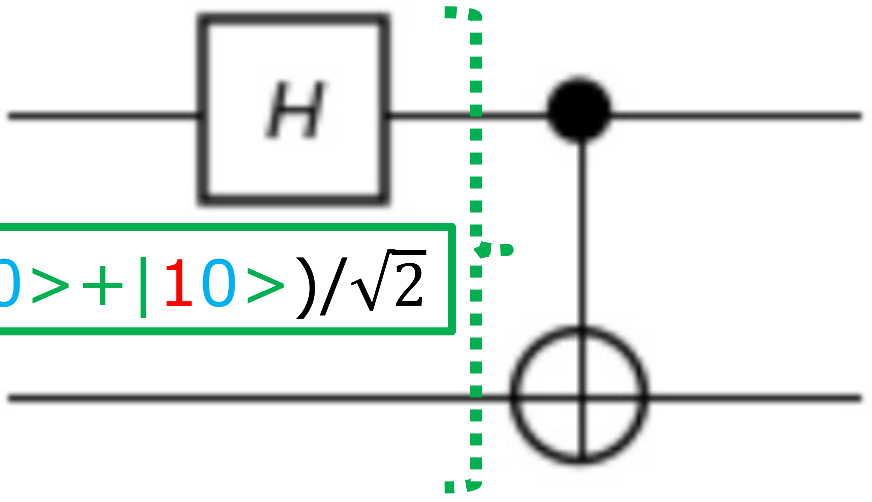


(|0>+|1>)/√2 ⊗ |0>

この時点での系全体の状態 = (|00>+|10>)/√2

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

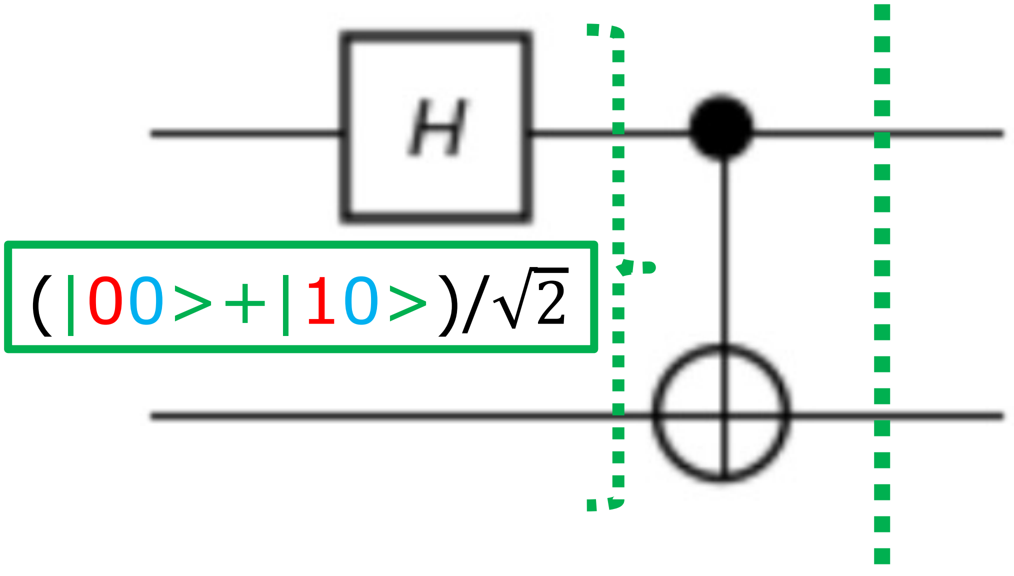


$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

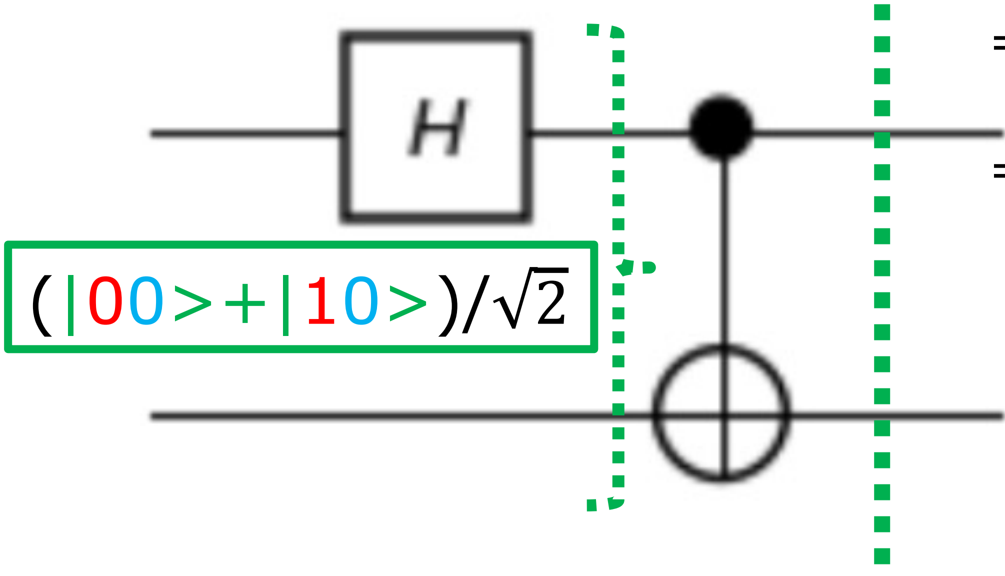
この時点での
系全体の状態
を調べる



Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる

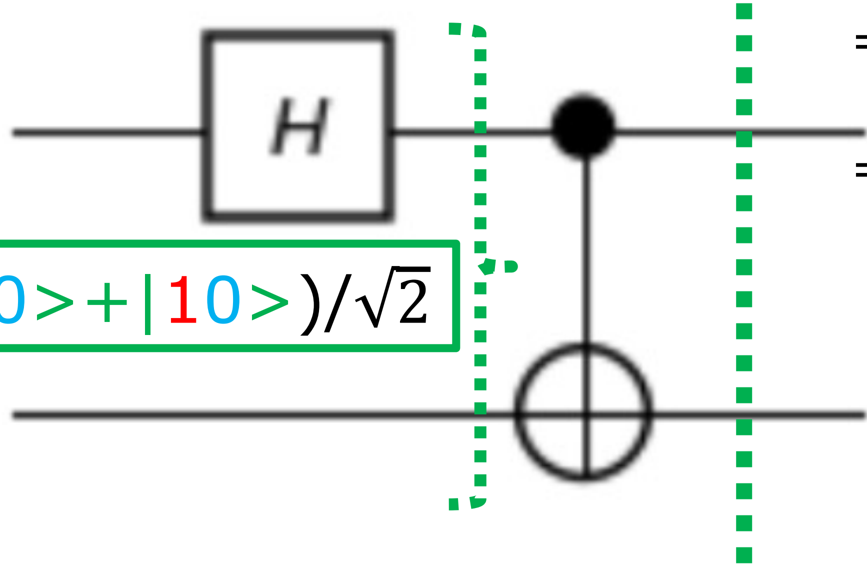


$$\begin{aligned}&\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})\\ =\ &\mathbf{CNOT}(|00\rangle)/\sqrt{2}\\ &+\mathbf{CNOT}(|10\rangle)/\sqrt{2}\\ =\ &(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

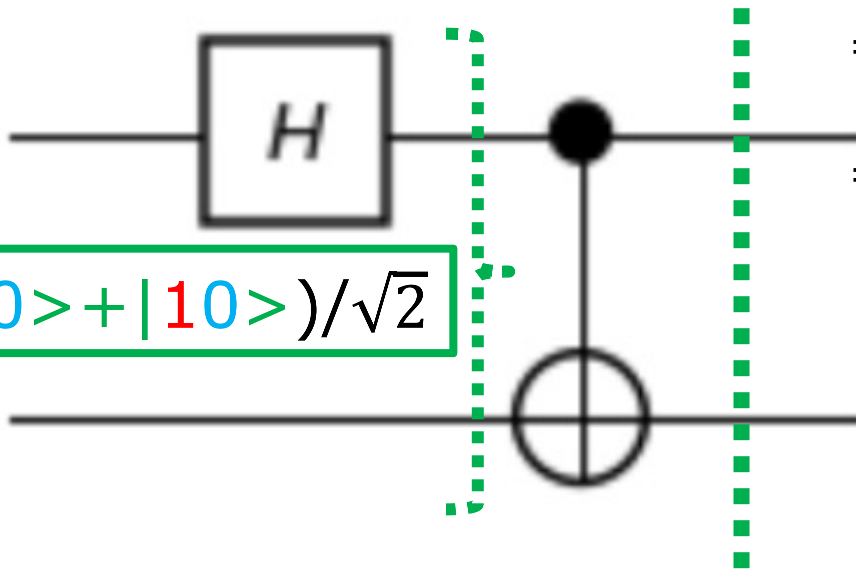
CNOT$((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})$
$=$ **CNOT**$(|00\rangle)/\sqrt{2}$
$+$**CNOT**$(|10\rangle)/\sqrt{2}$
$= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

CNOTは線形演算子である。
ここでは、線形演算子Mで
スカラー a,b
ベクトル u,v について
M(au+bv)
= aM(u)+bM(v)
を利用した。

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

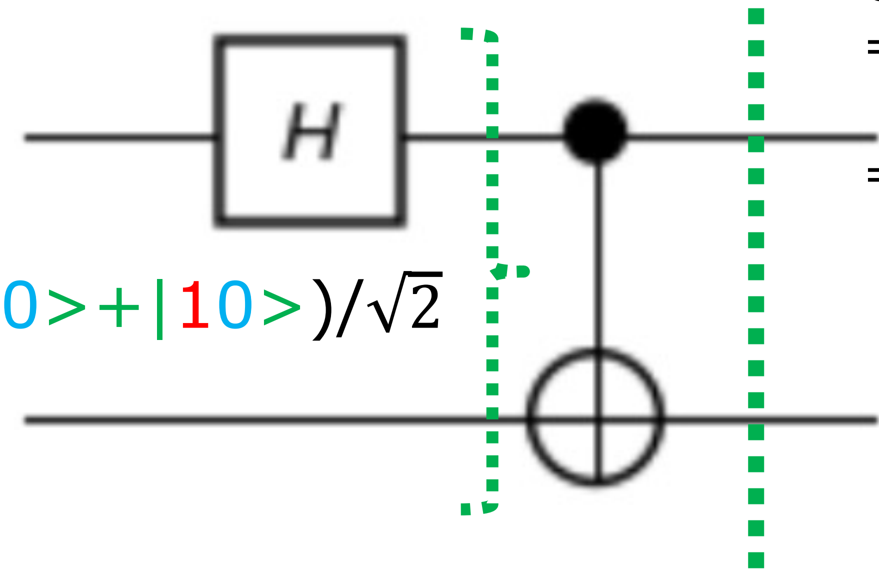
CNOT$((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})$
= **CNOT**$(|00\rangle)/\sqrt{2}$
+**CNOT**$(|10\rangle)/\sqrt{2}$
$= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

CNOTは線形演算子である。
ここでは、線形演算子Mで
スカラー a,b
ベクトル u,v について
M(au+bv)
= aM(u)+bM(v)
を利用した。

また、
CNOT(|00>) = |00>
CNOT(|10>) = |11>
である。

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

$\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)\ /\sqrt{2})$

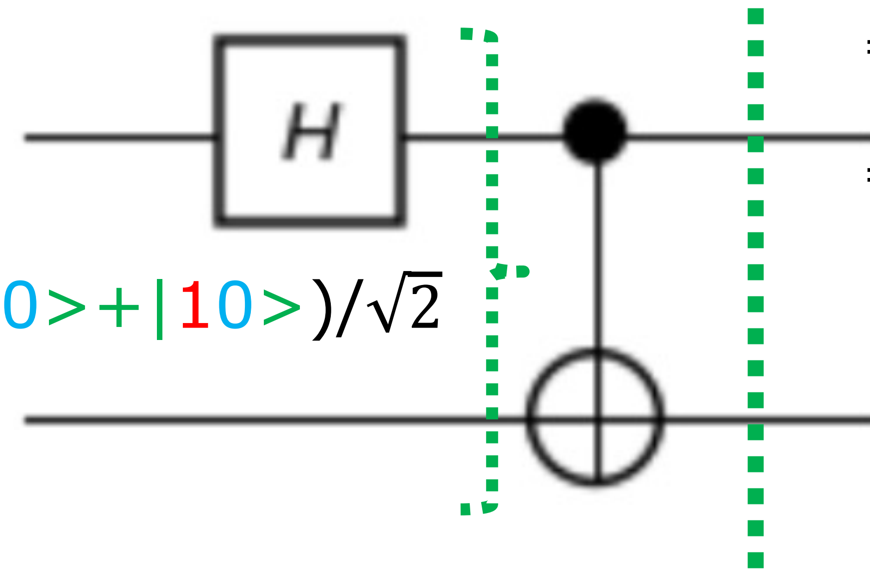
$= \ \mathbf{CNOT}(|00\rangle)\ /\sqrt{2}$

$\ \ +\mathbf{CNOT}(|10\rangle)\ /\sqrt{2}$

$= (|00\rangle+|11\rangle)\ /\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



$(|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$

$\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2})$

$= \mathbf{CNOT}(|00\rangle)/\sqrt{2}$

$+\mathbf{CNOT}(|10\rangle)/\sqrt{2}$

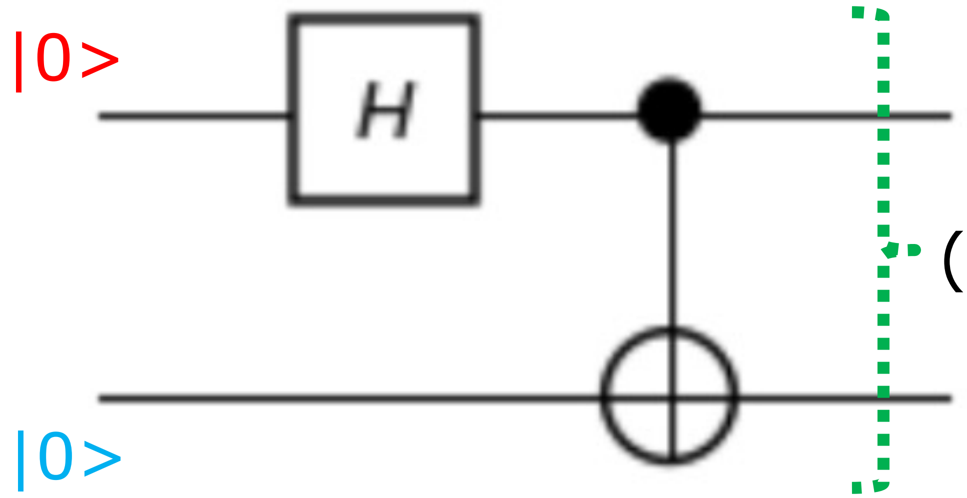
$= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

この時点での
系全体の状態

$$\boxed{= (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}}$$

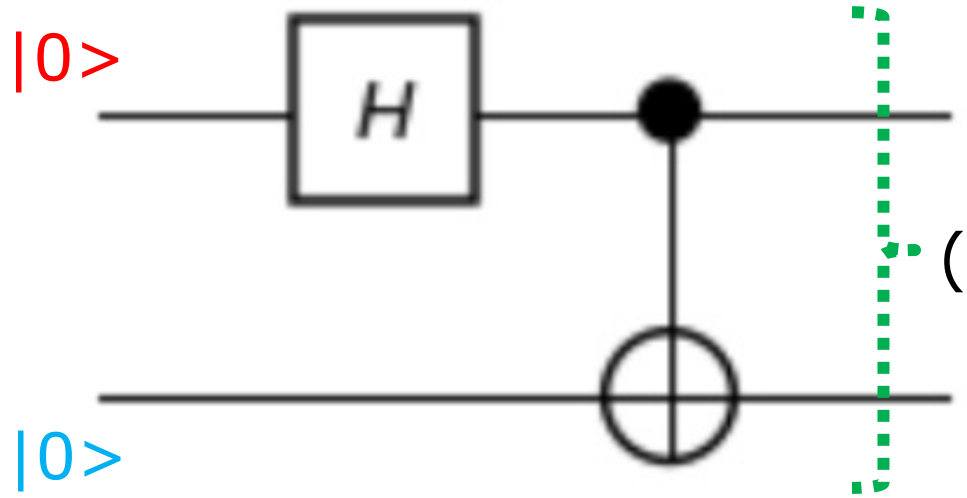
Bell State ゲートの働き

入力|00>の場合



(|00>+|11>) /$\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き
入力|00>の場合



$(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$

これは、エンタングルメント状態のBell Stateの一つ$|\Phi^{+}\rangle$である。

CNOTの計算

- 前回は、演算子の「線形性」を用いて、次のように CNOTを計算した。

$$\textbf{CNOT}((|00>+|10>)/\sqrt{2})$$
$$= \textbf{CNOT}(|00>)/\sqrt{2} + \textbf{CNOT}(|10>)/\sqrt{2}$$
$$= (|00>+|11>)/\sqrt{2}$$

- 今回は、重ね合わせの和のそれぞれの項の、コントロール・ビットが1の場合だけ、ターゲット・ビットを反転させればいいと考えて、直接、暗算でCNOTを計算する。

CNOTの計算

□ 例えば、次のように

コントロール・ビットが立っているので反転する

$$\mathbf{CNOT}((|00\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}) = (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$$

コントロール・ビットが立っていないので、この項は変わらない

ここで、赤字の1は、その項のコントロール・ビットが立っていることを表し、緑字の1は、反転されたターゲット・ビットを表す。

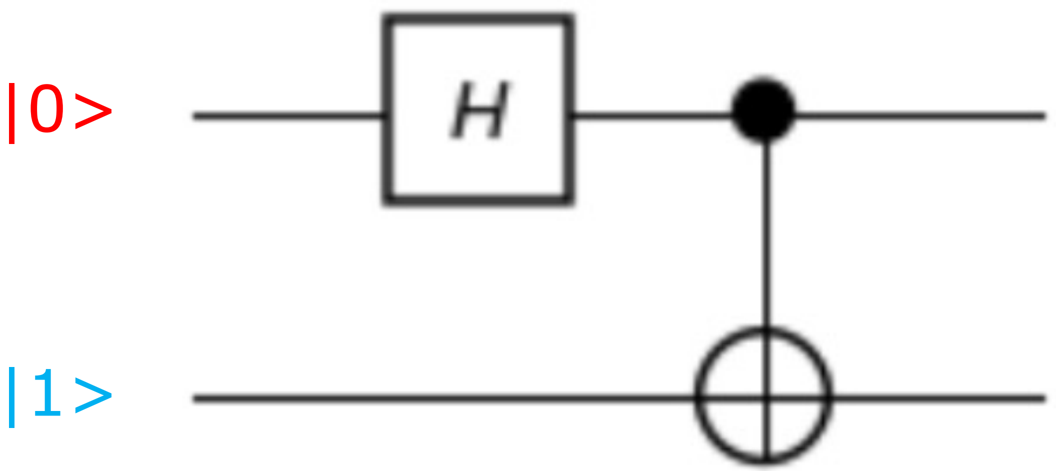
□ 同様に

$$\mathbf{CNOT}((|01\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}) = (|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合

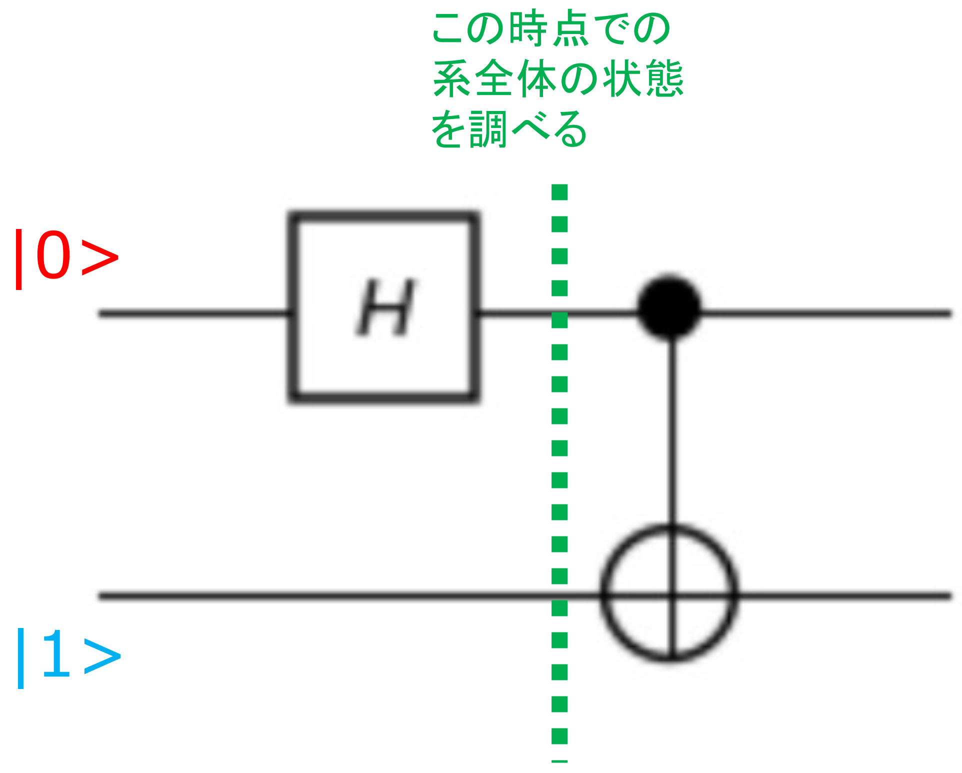
Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合



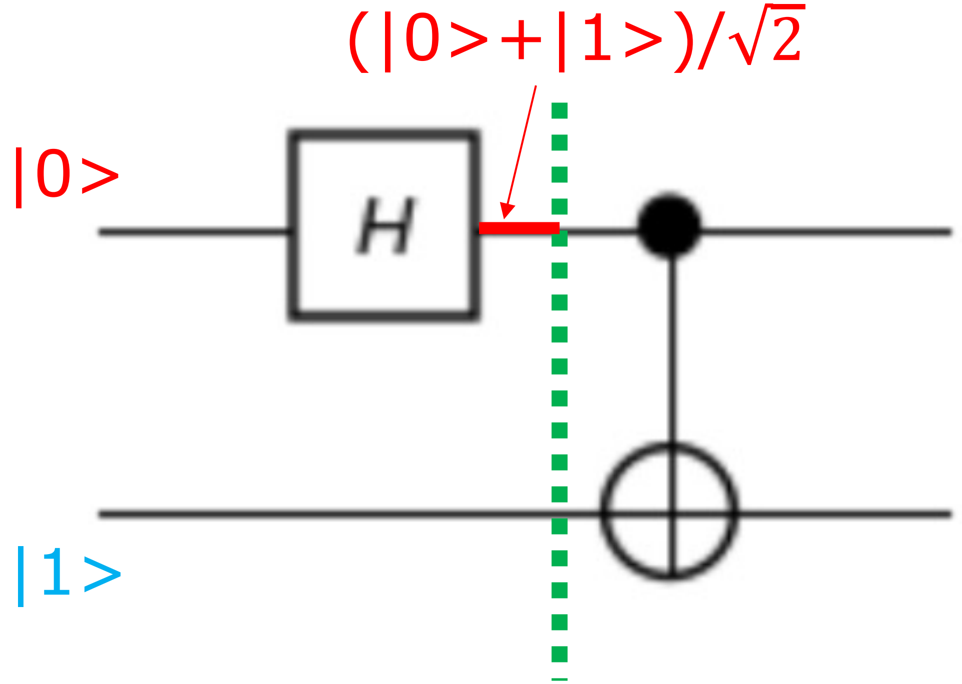
Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合



Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合

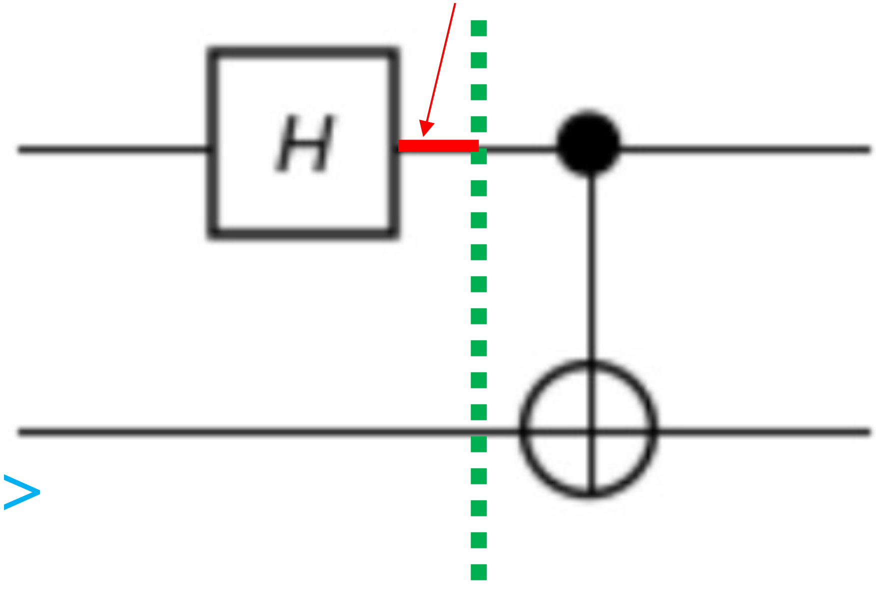


Hは|0>を
(|0>+|1>)/√2に
変える

Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合

$(|0>+|1>)/\sqrt{2}$



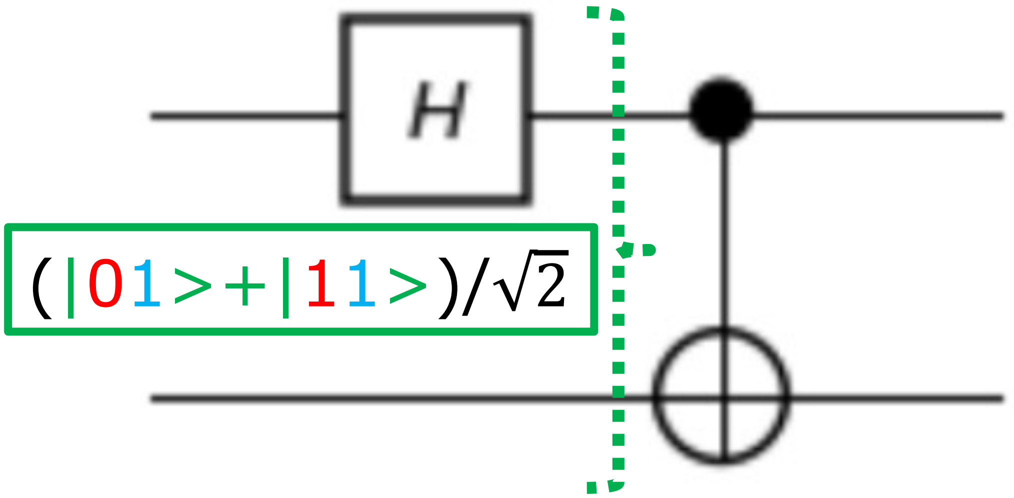
$|1>$

$(|0>+|1>)/\sqrt{2} \otimes |1>$

この時点での
系全体の状態

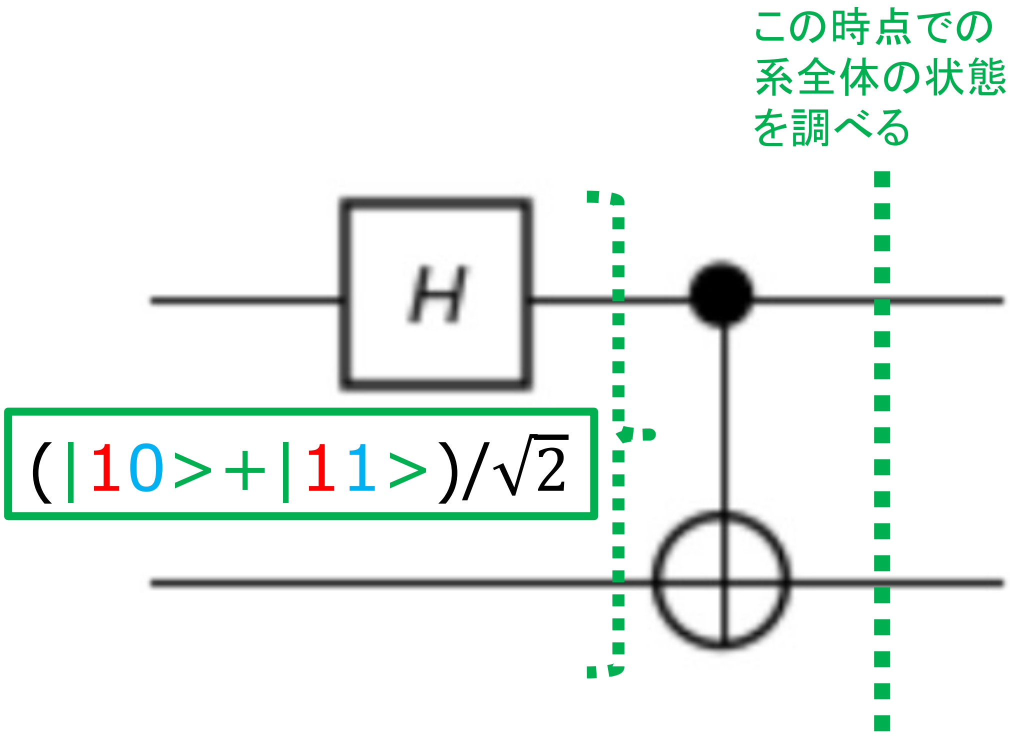
$= \boxed{(|01>+|11>)/\sqrt{2}}$

Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合



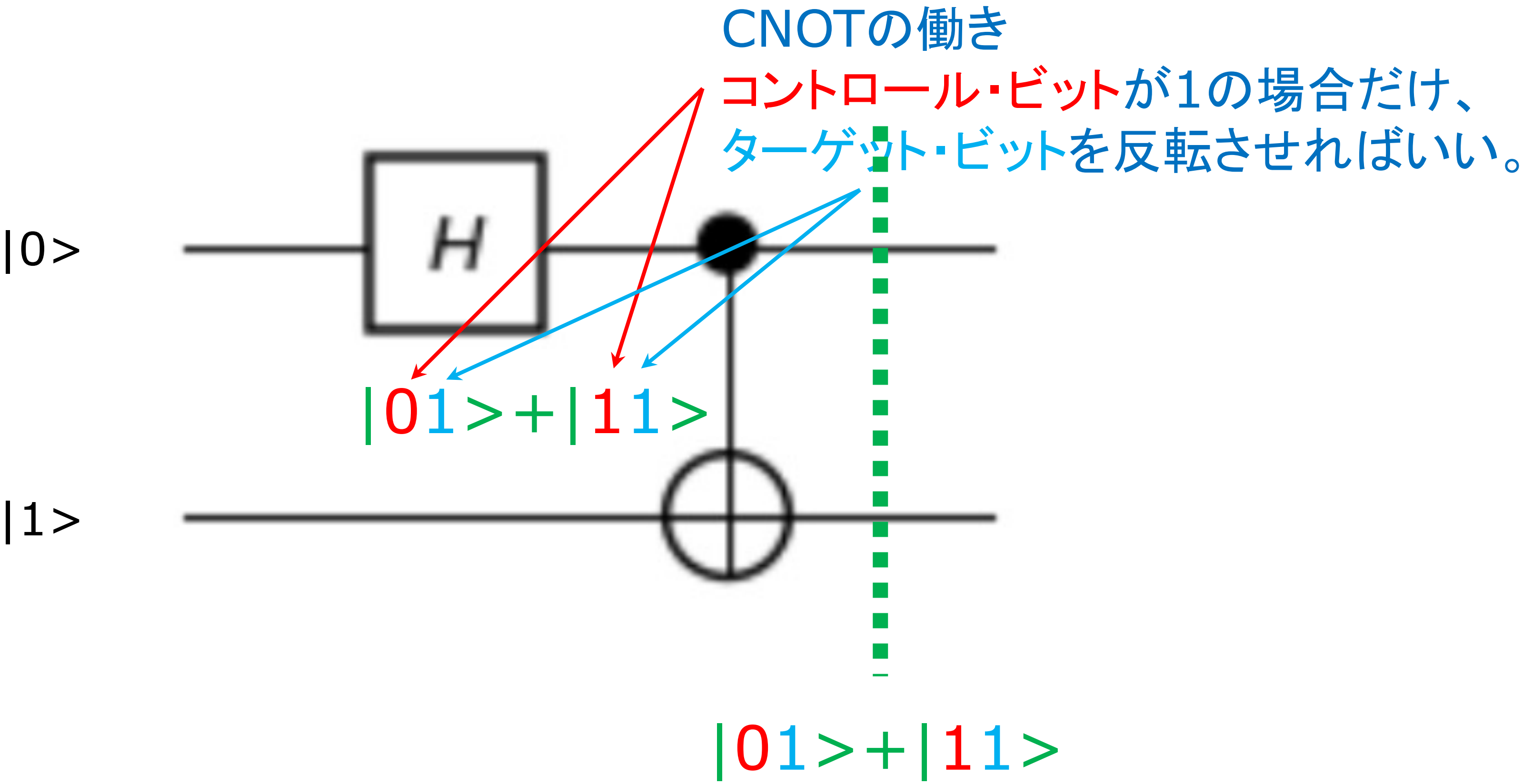
Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合



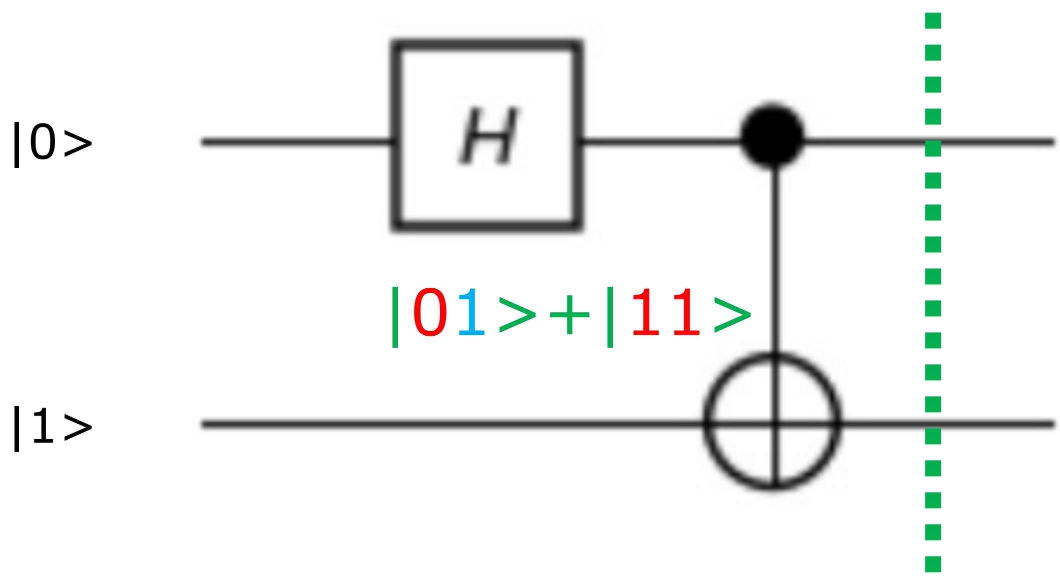
Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合



Bell State ゲートの働き

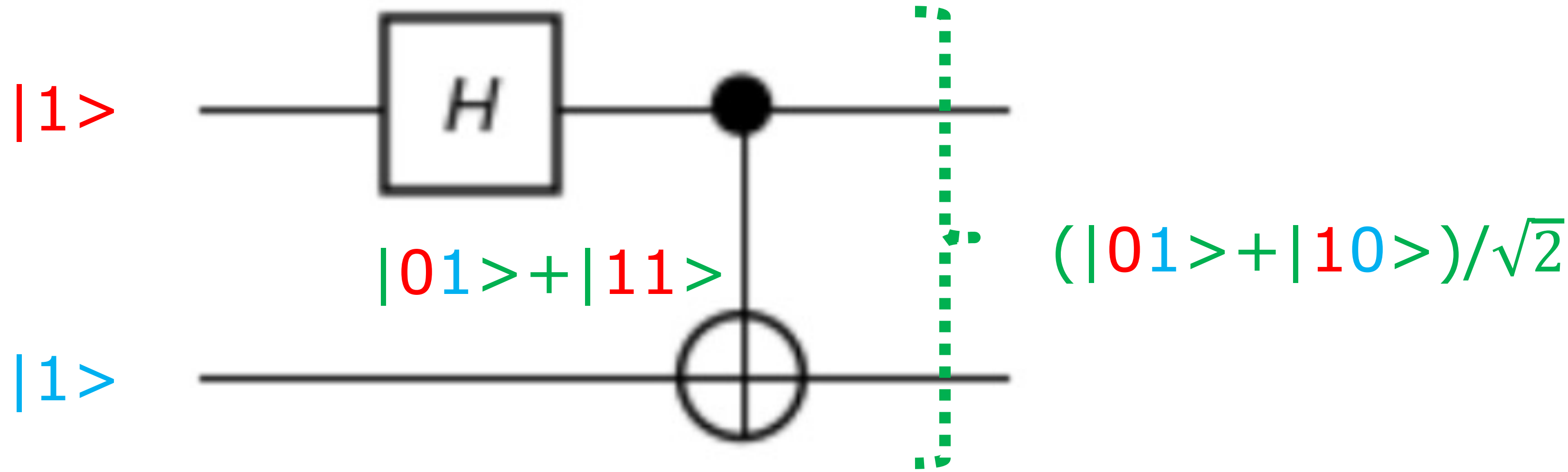
入力|01>の場合



|01>+|11> ➔ |01>+|10>

Bell State ゲートの働き

入力|01>の場合

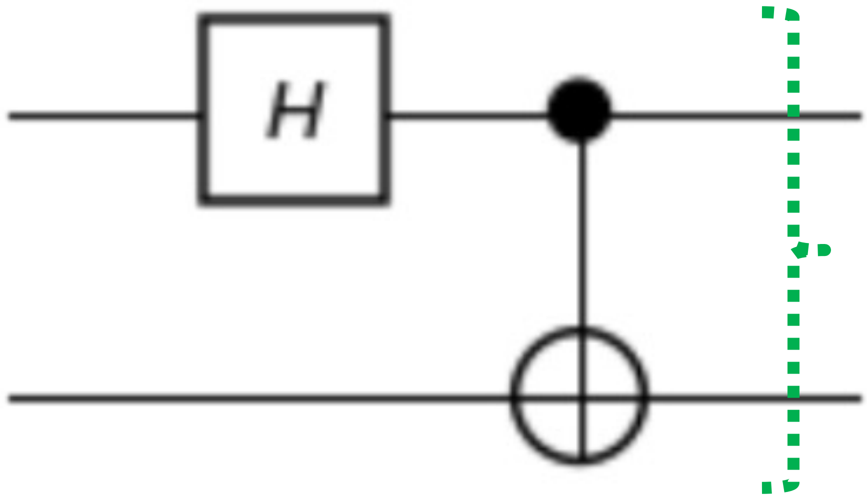


|01>+|11> ➔ |01>+|10>

Bell State ゲートの働き
入力|01>の場合

|0>

|1>



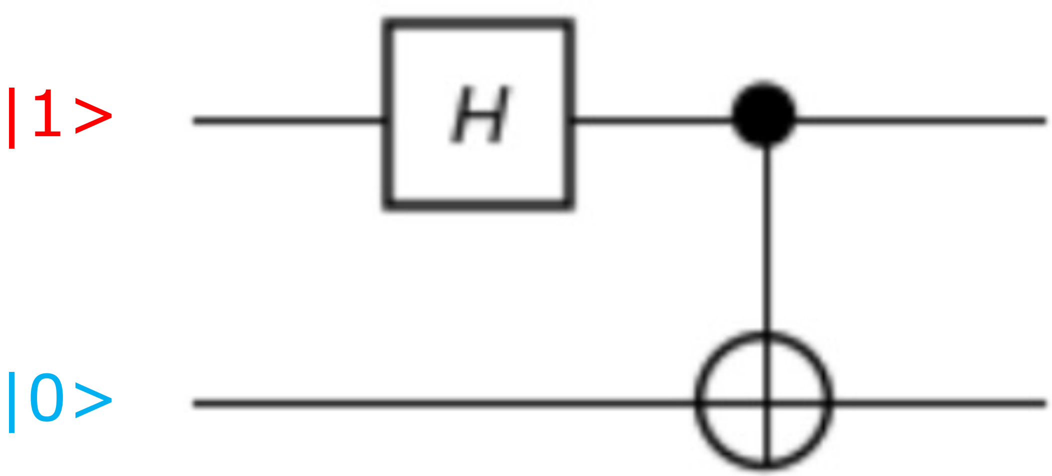
$(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$

これは、エンタングルメント状態の
Bell Stateの一つ$|\Psi^+\rangle$である。

Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合

Bell State ゲートの働き

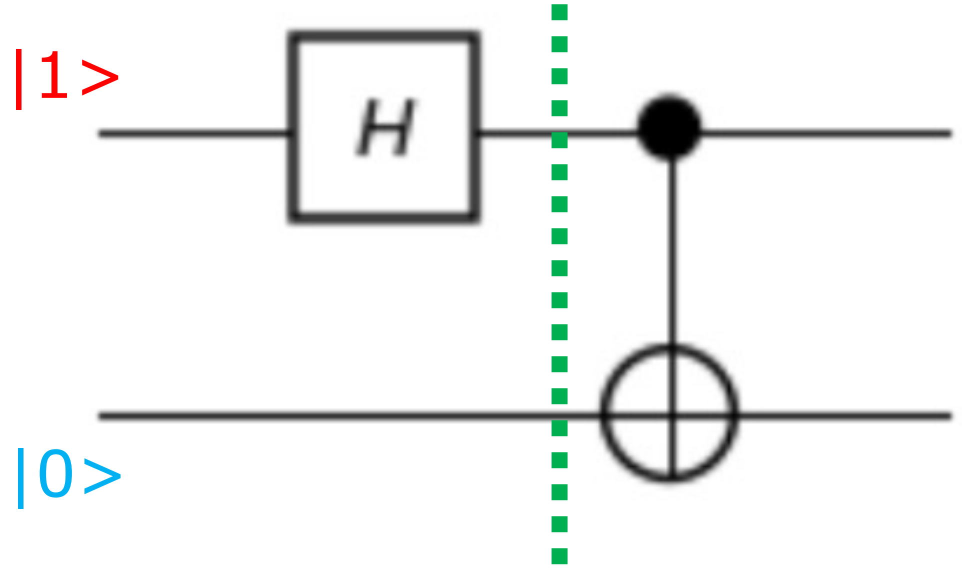
入力|10>の場合



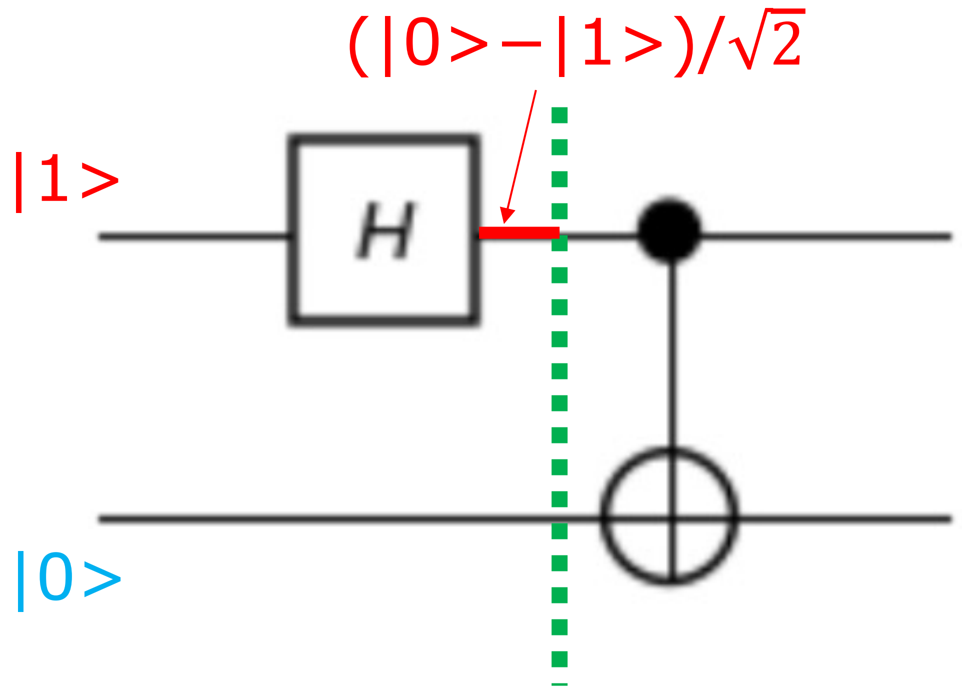
Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる

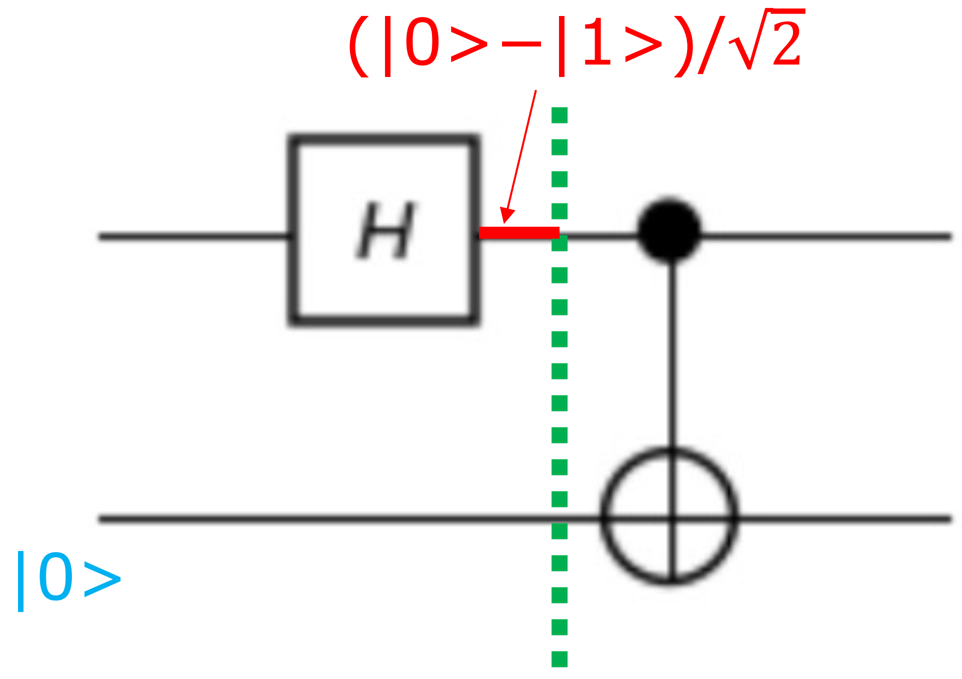


Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合



H は|1>を(|0>−|1>)/√2に変える

Bell State ゲートの働き
入力|10>の場合

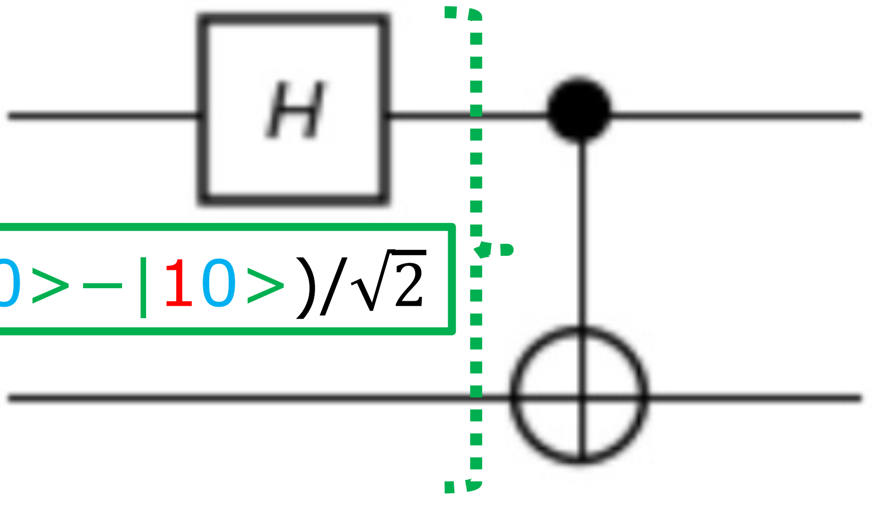


$(|0>-|1>)/\sqrt{2} \otimes |0>$

この時点での系全体の状態 $= \boxed{(|00>-|10>)/\sqrt{2}}$

Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合

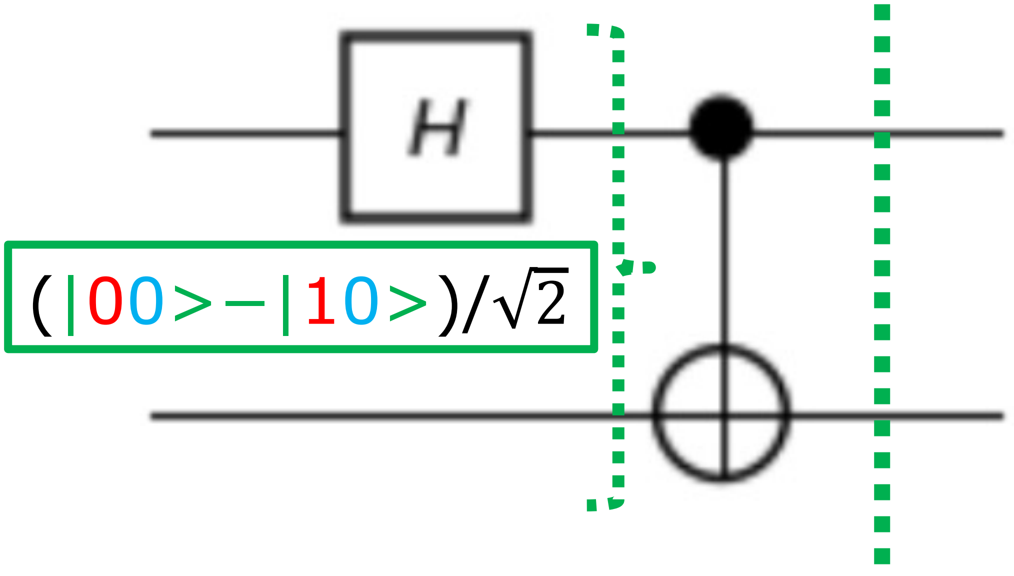


$(|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合

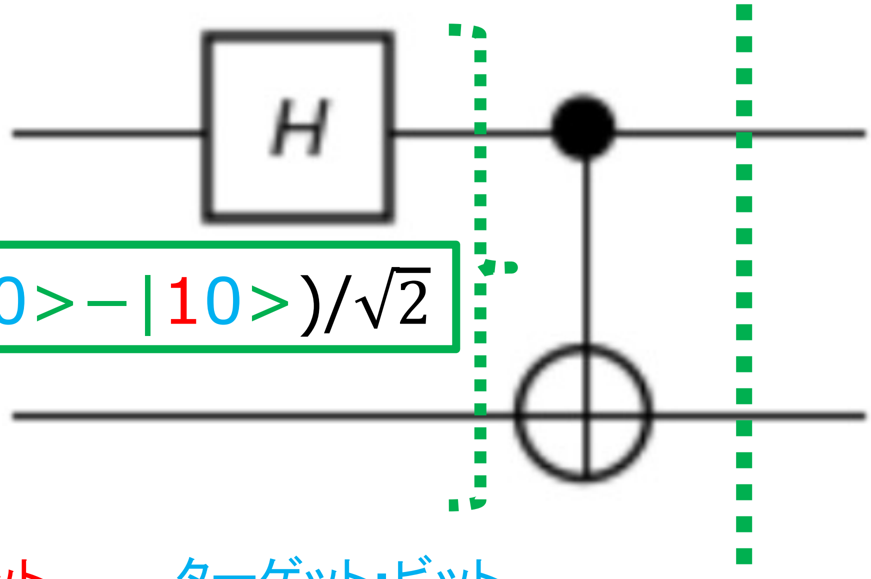
この時点での
系全体の状態
を調べる



Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|00>-|10>)/\sqrt{2}$

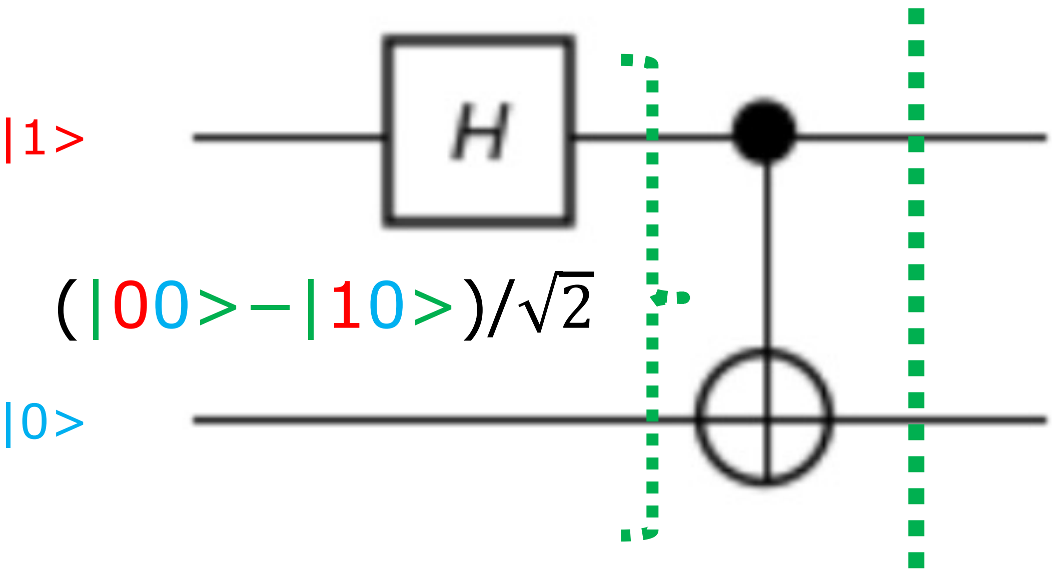
コントロール・ビット　　ターゲット・ビット

$|00>-|\boxed{1}0>$

CNOTの働き
コントロール・ビットが1の場合だけ、
ターゲット・ビットを反転させればいい。

Bell State ゲートの働き

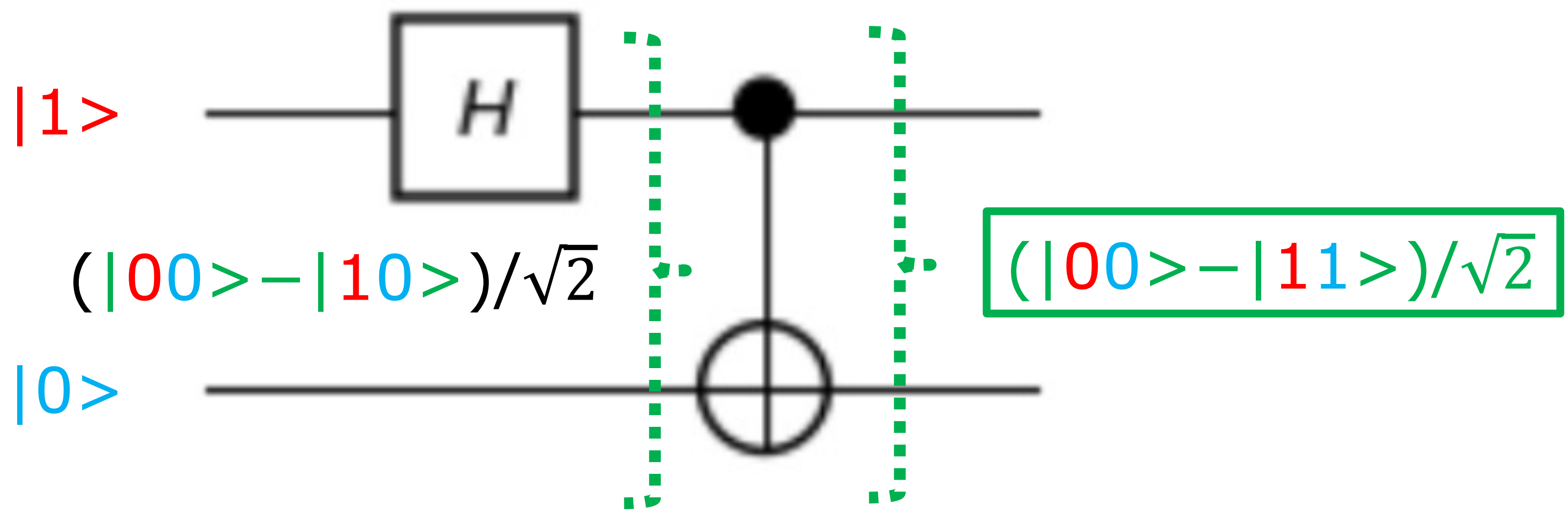
入力|10>の場合



|00>−|10> ➔ |00>−|11>

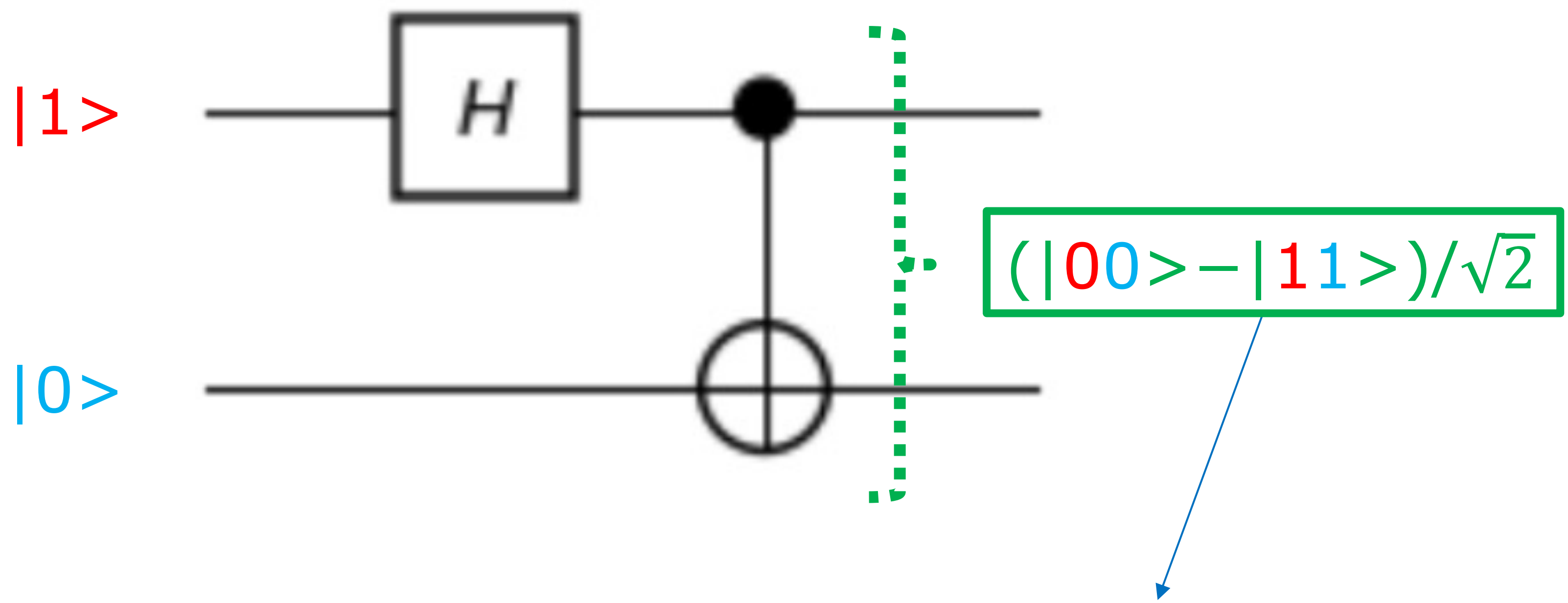
Bell State ゲートの働き

入力|10>の場合



Bell State ゲートの働き

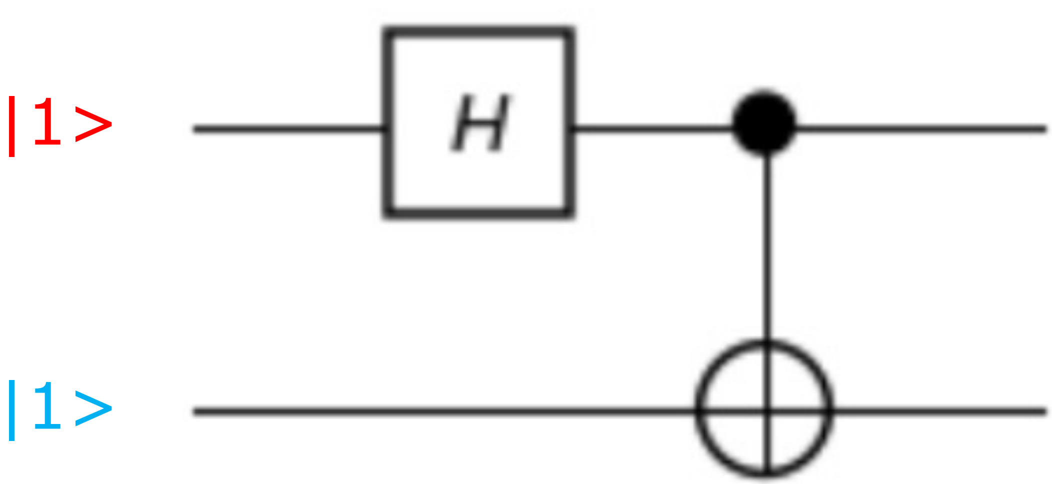
入力|10>の場合　出力 |Φ⁻>



これは、エンタングルメント状態のBell Stateの一つ|Φ⁻>である。

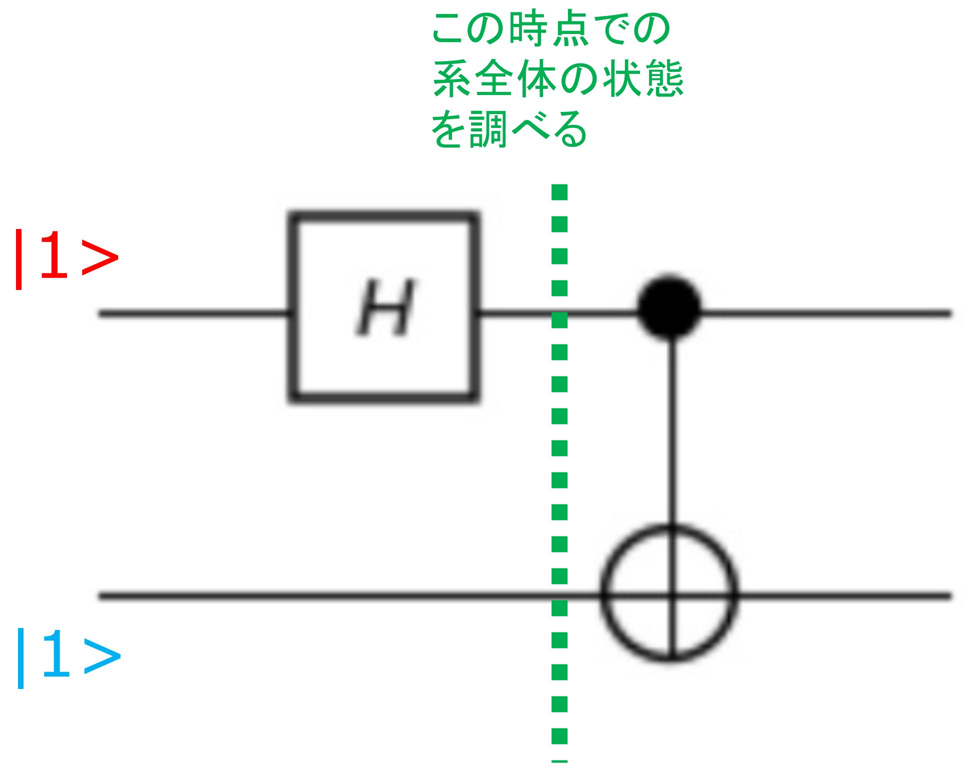
Bell State ゲートの働き
入力|11>の場合

Bell State ゲートの働き
入力|11>の場合



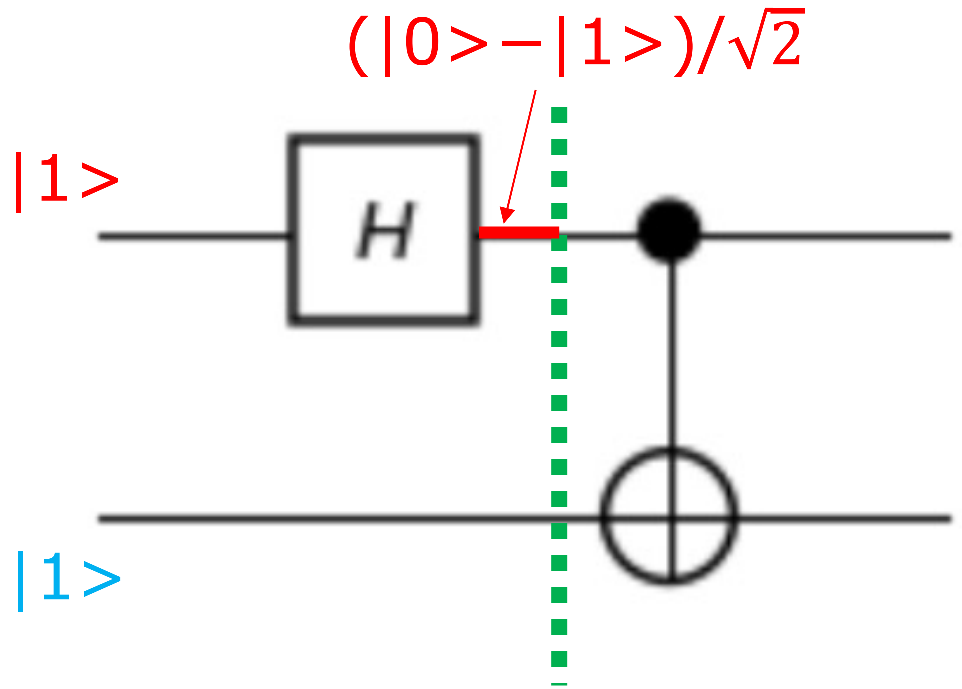
Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合



Bell State ゲートの働き
入力|11>の場合

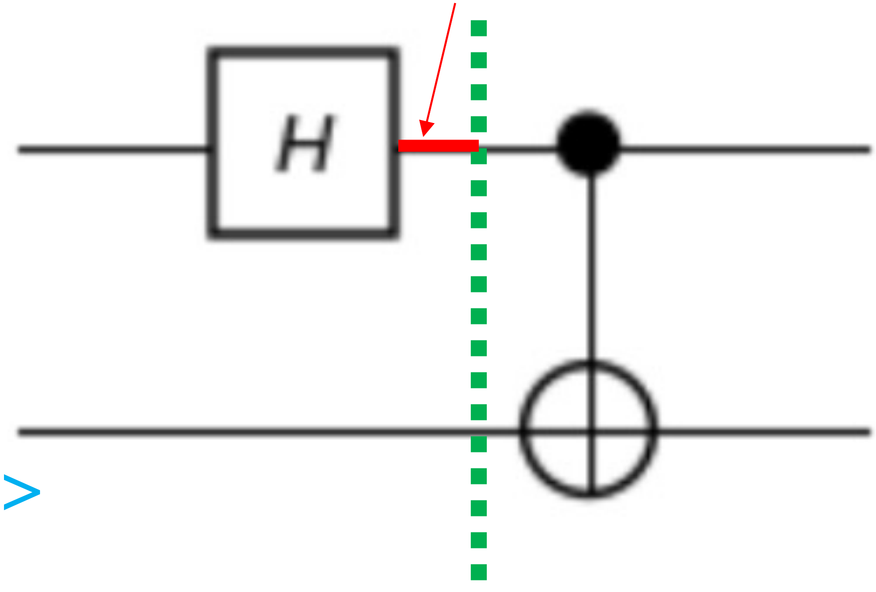
Hは|1>を
$(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$に
変える



Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

$(|0>-|1>)/\sqrt{2}$



$|1>$

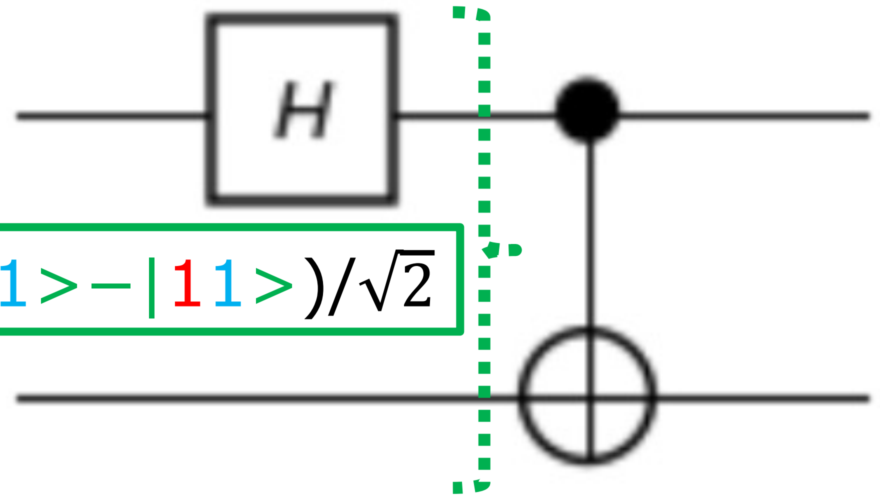
$(|0>-|1>)/\sqrt{2} \otimes |1>$

この時点での
系全体の状態

$= \boxed{(|01>-|11>)/\sqrt{2}}$

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

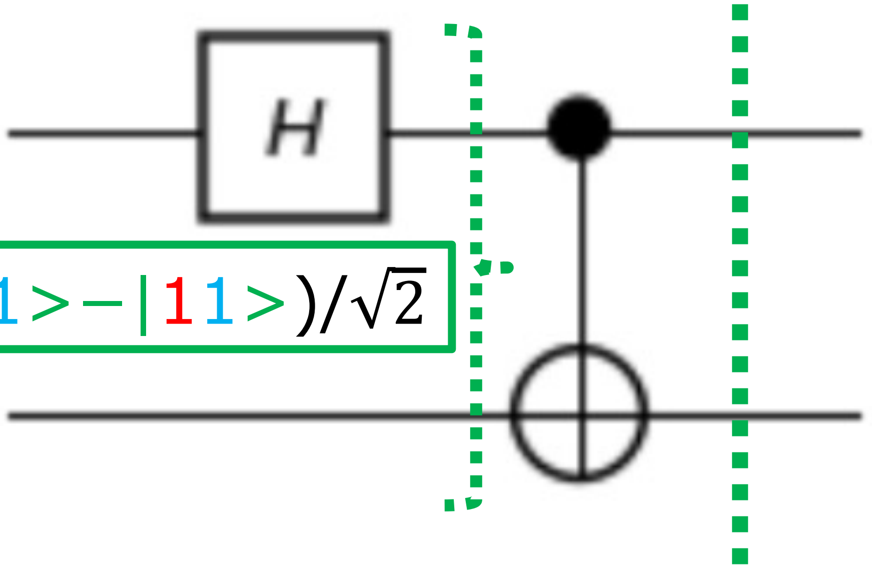


$(|01> - |11>)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる

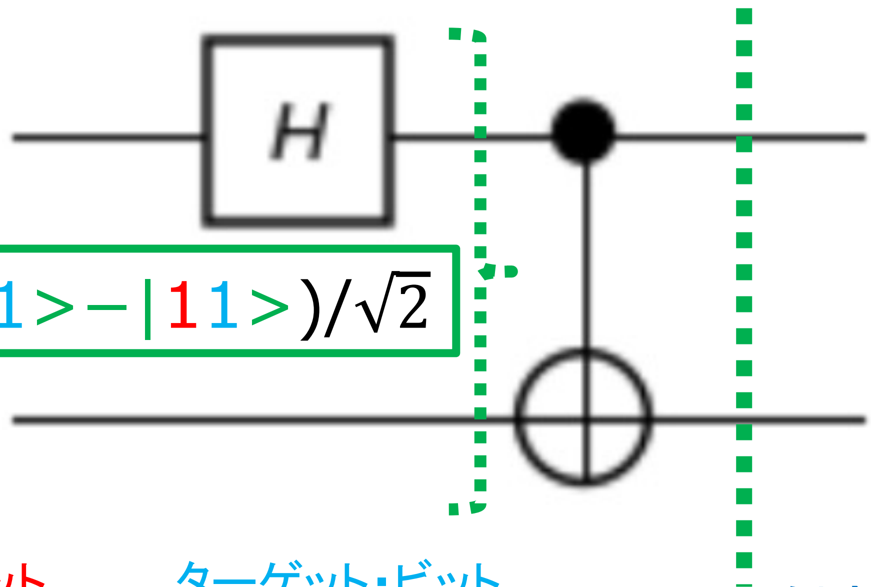


$(|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

この時点での
系全体の状態
を調べる



$(|01>-|11>)/\sqrt{2}$

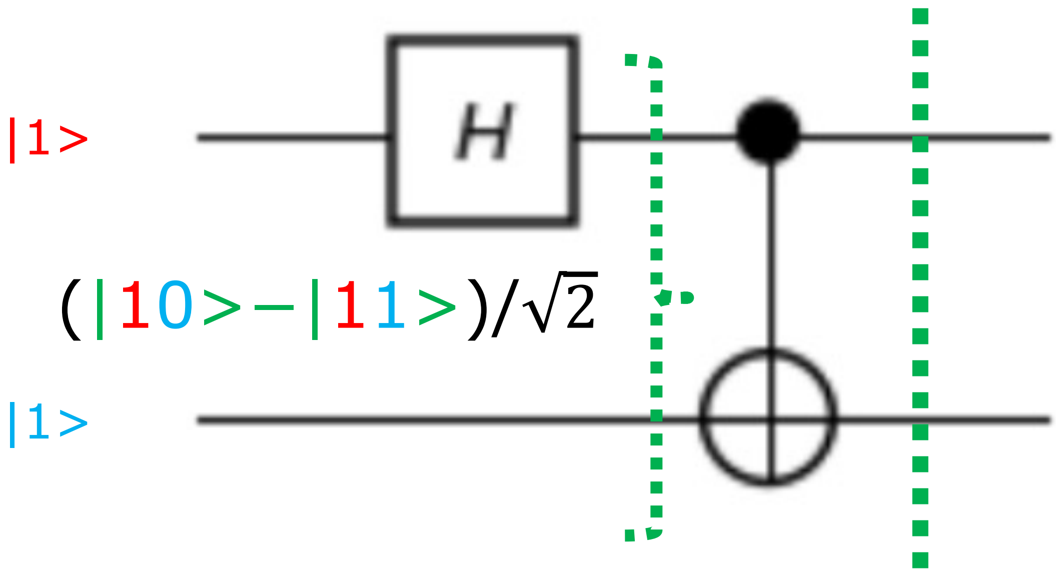
コントロール・ビット　ターゲット・ビット

$|01>-|\boxed{1}1>$

CNOTの働き
コントロール・ビットが1の場合だけ、
ターゲット・ビットを反転させればいい。

Bell State ゲートの働き

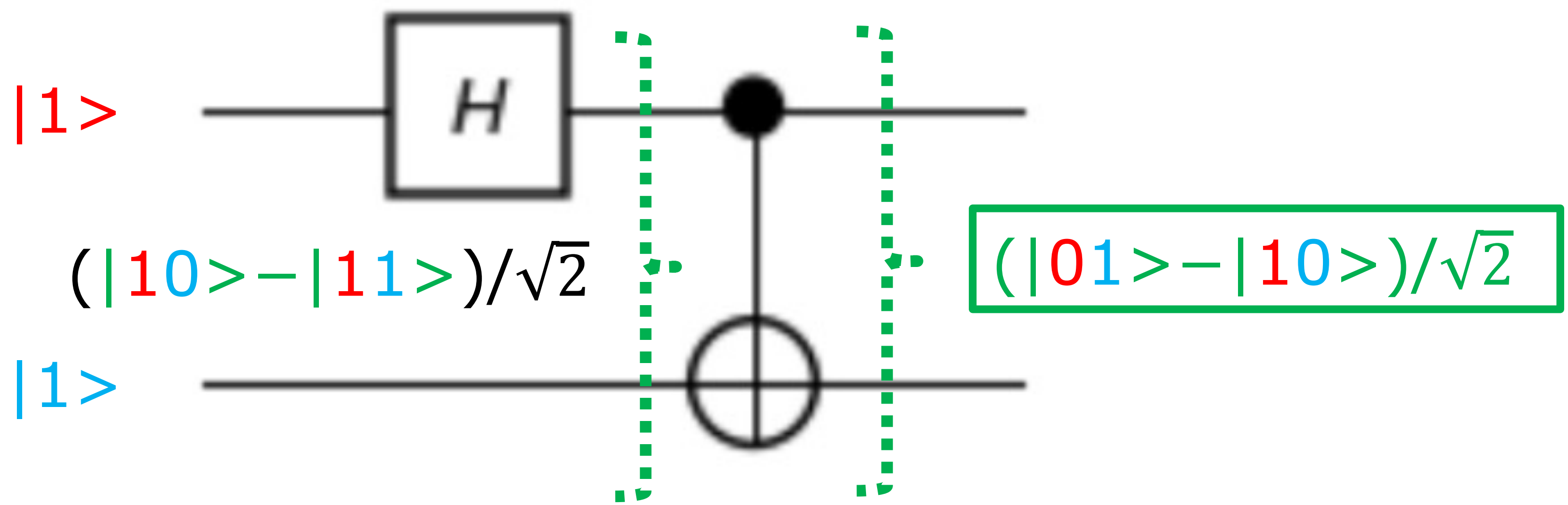
入力|11>の場合



|01>−|11> ➔ |01>−|10>

Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合

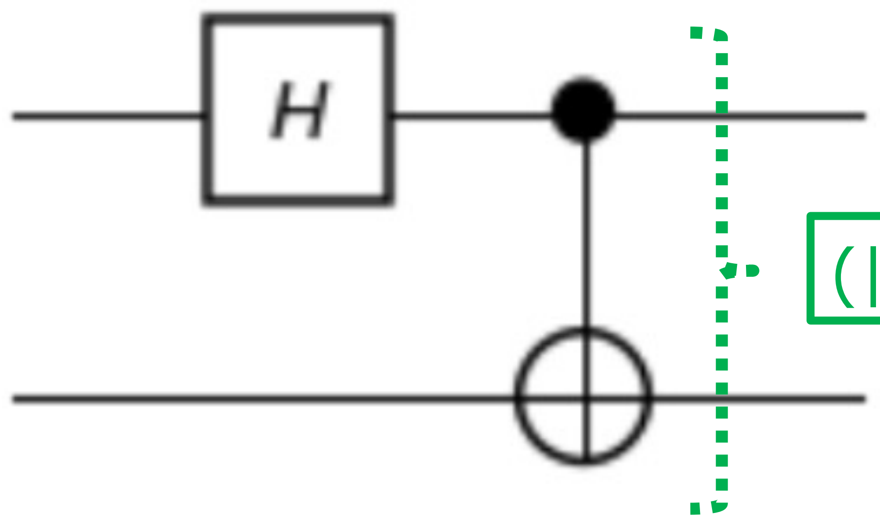


Bell State ゲートの働き

入力|11>の場合　　出力 $|\Psi^{-}>$

|1>

|1>



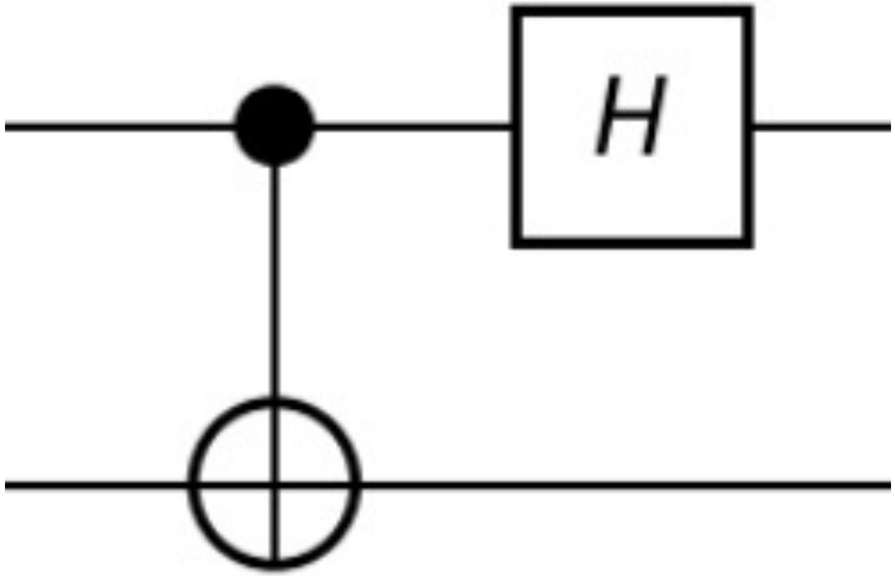
$(|01>-|10>)/\sqrt{2}$

これは、エンタングルメント状態の
Bell Stateの一つ$|\Psi^{-}>$である。

Bell State を計測する
Bell Measure Gate

Bell Measure Gateの構成

Bell Measure ゲートとは、次のような回路である



この節で明らかにすること

$$\mathrm{BMG}|\Phi^{+}> = |00>$$

$$\mathrm{BMG}|\Phi^{-}> = |10>$$

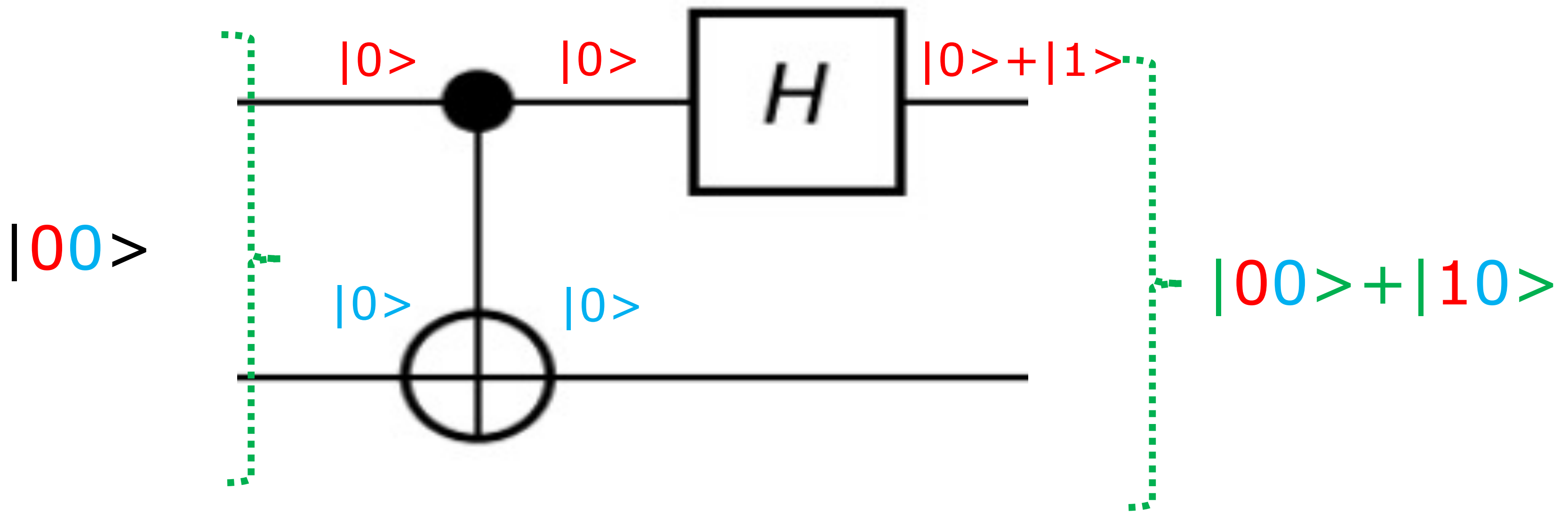
$$\mathrm{BMG}|\Psi^{+}> = |01>$$

$$\mathrm{BMG}|\Psi^{-}> = |11>$$

2-qubits の計算基底に対する Bell Measure Gateの働き

Bell Measure ゲートの働き

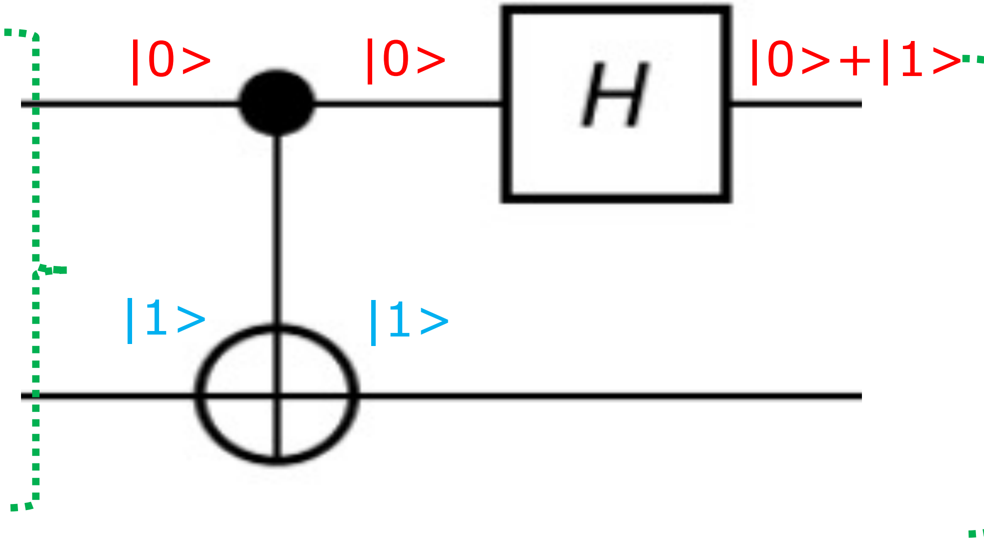
入力|00>の場合



BMG|00> = (|00>+|10>)/$\sqrt{2}$

Bell Measure ゲートの働き
入力|01>の場合

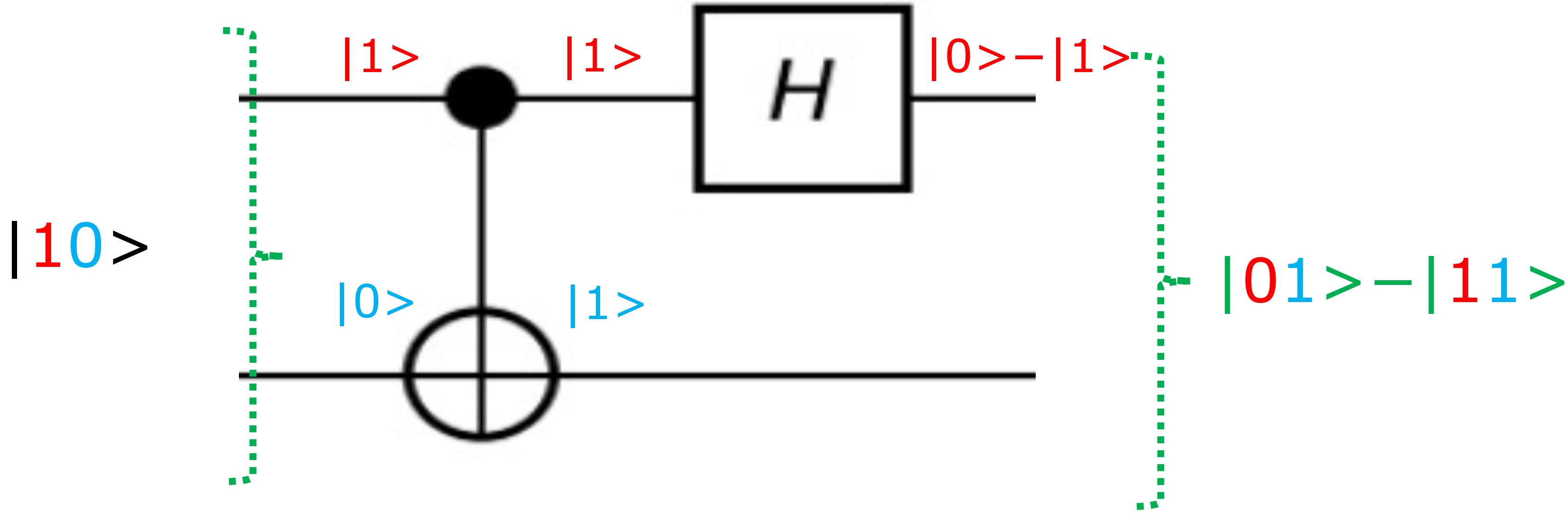
|01>



|01>+|11>

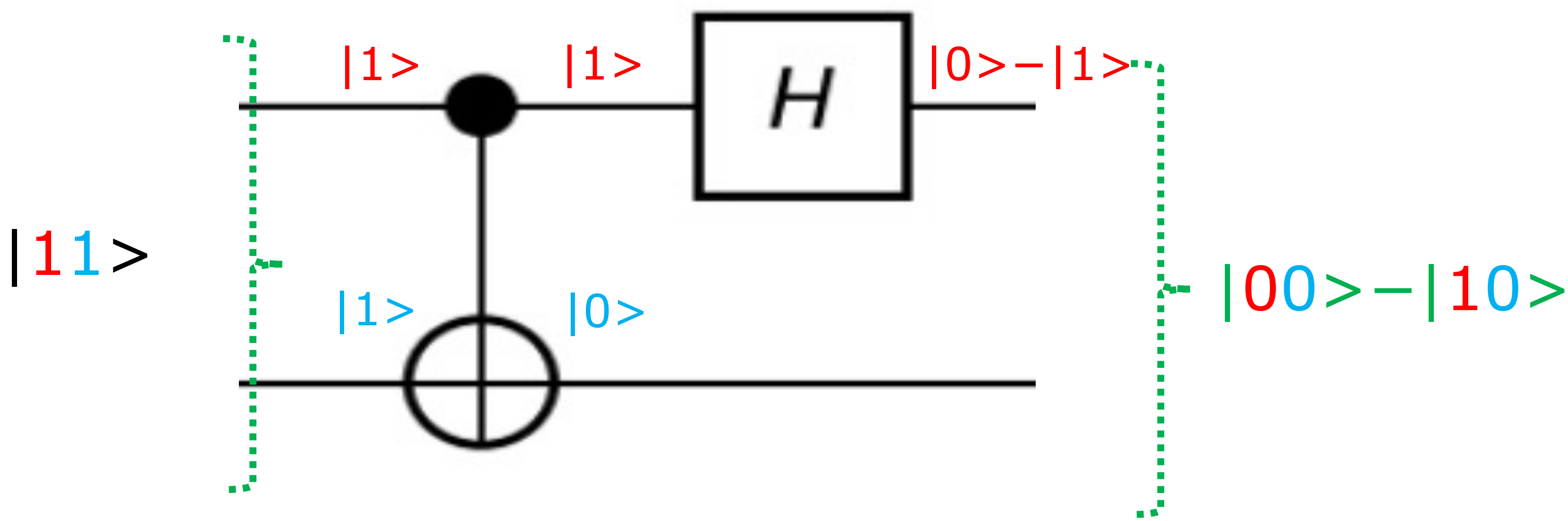
BMG|01> = (|01>+|11>)/$\sqrt{2}$

Bell Measure ゲートの働き
入力|10>の場合



BMG|10> = (|01>−|11>)/$\sqrt{2}$

Bell Measure ゲートの働き
入力|11>の場合



BMG|11> = (|00>−|10>)/$\sqrt{2}$

2-qubits の計算基底に対する Bell Measure ゲートの働き まとめ

BMG|00> = (|00>+|10>) /$\sqrt{2}$

BMG|01> = (|01>+|11>) /$\sqrt{2}$

BMG|10> = (|01>−|11>) /$\sqrt{2}$

BMG|11> = (|00>−|10>) /$\sqrt{2}$

Bell Stateに対する Bell Measure Gateの働き

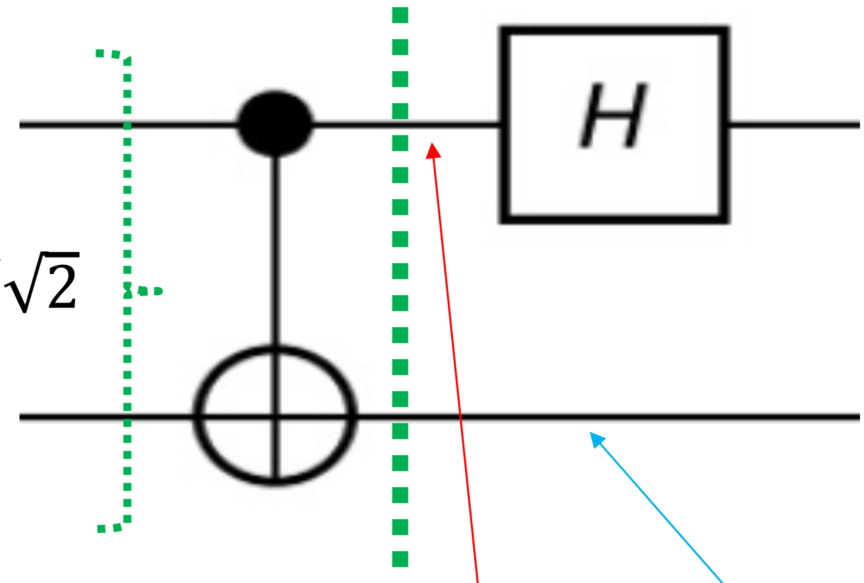
Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Phi^+>$の場合

Bell Measure ゲートの働き

入力Bell State $|\Phi^+>$の場合

$|\Phi^+>$

$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$



$$\mathbf{CNOT}(|00>+|11>)/\sqrt{2} = \boxed{(|00>+|10>)/\sqrt{2}}$$

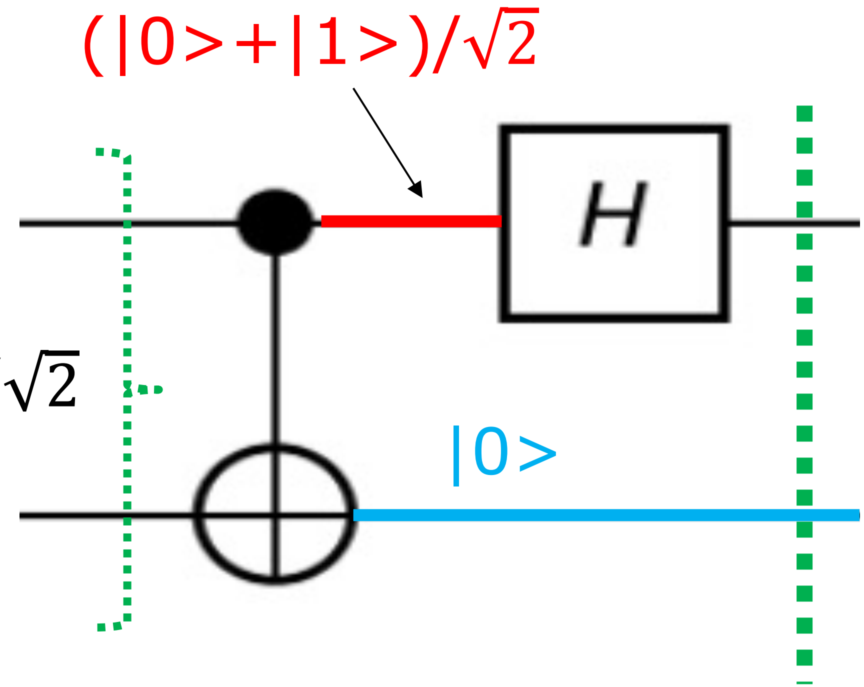
$$= (|0>+|1>)/\sqrt{2} \otimes |0>$$

分離可能！

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Phi^+>$の場合

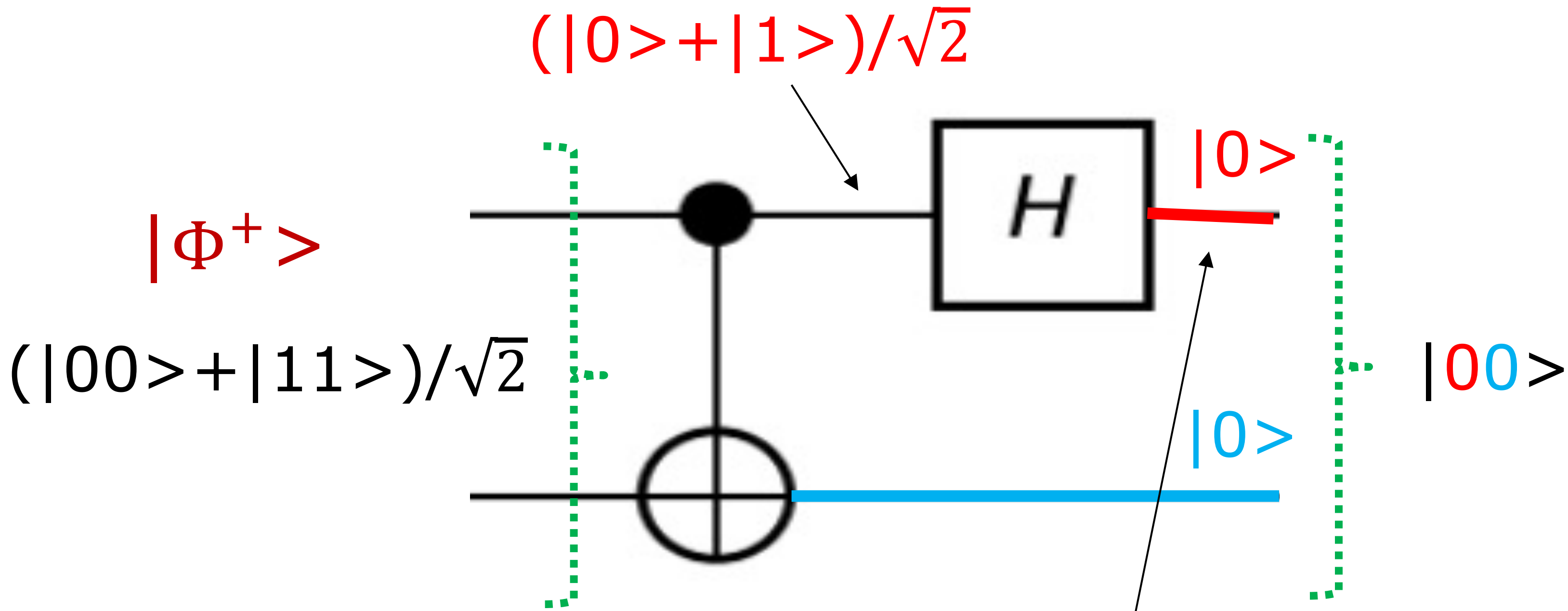
$|\Phi^+>$

$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$



H $(|0>+|1>)/\sqrt{2}$ = $|0>$

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Phi^+>$の場合



H $(|0>+|1>)/\sqrt{2} = |0>$

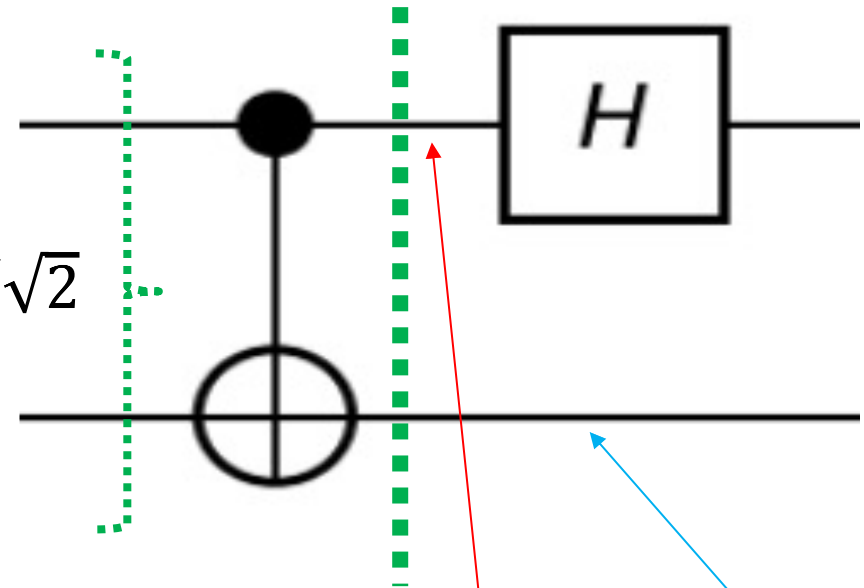
$\boxed{\mathrm{BMG}|\Phi^+> = |00>}$

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Phi^-\rangle$の場合

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Phi^->$の場合

$|\Phi^->$

$(|00>-|11>)/\sqrt{2}$

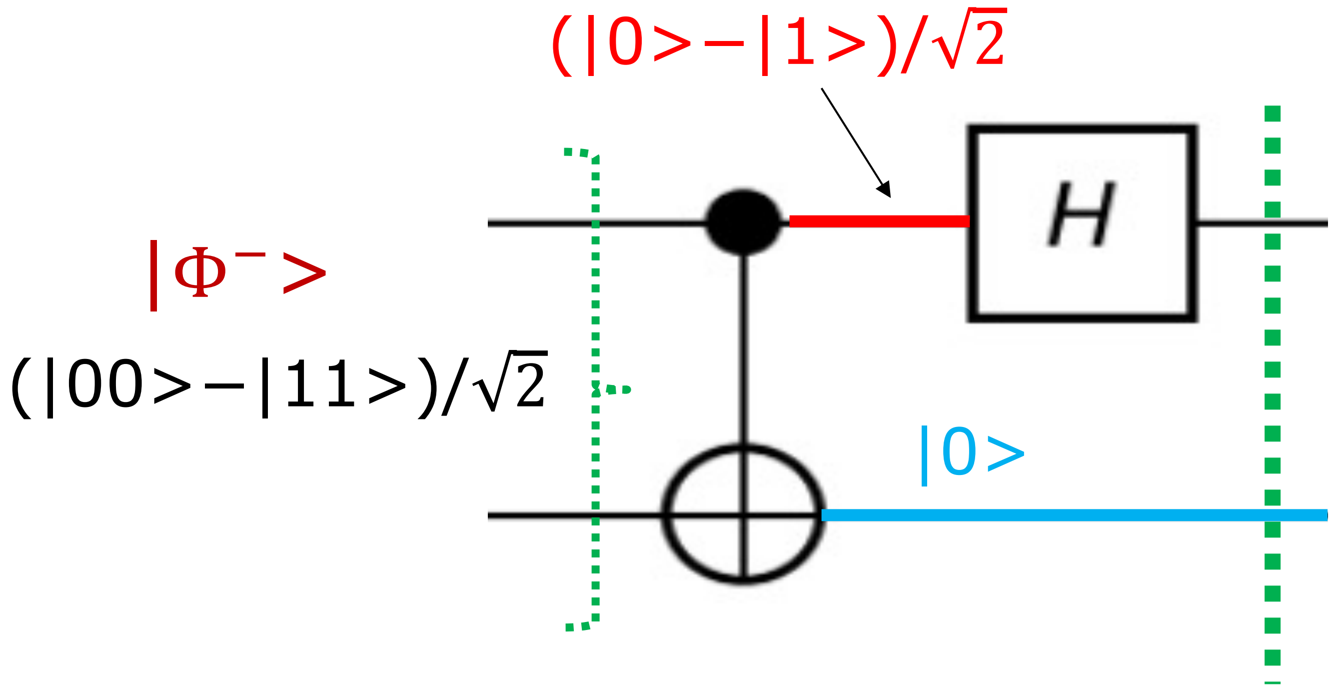


$$\textbf{CNOT}(|00>-|11>)/\sqrt{2} = \boxed{(|00>-|10>)/\sqrt{2}}$$

$$= (|0>-|1>)/\sqrt{2} \otimes |0>$$

分離可能！

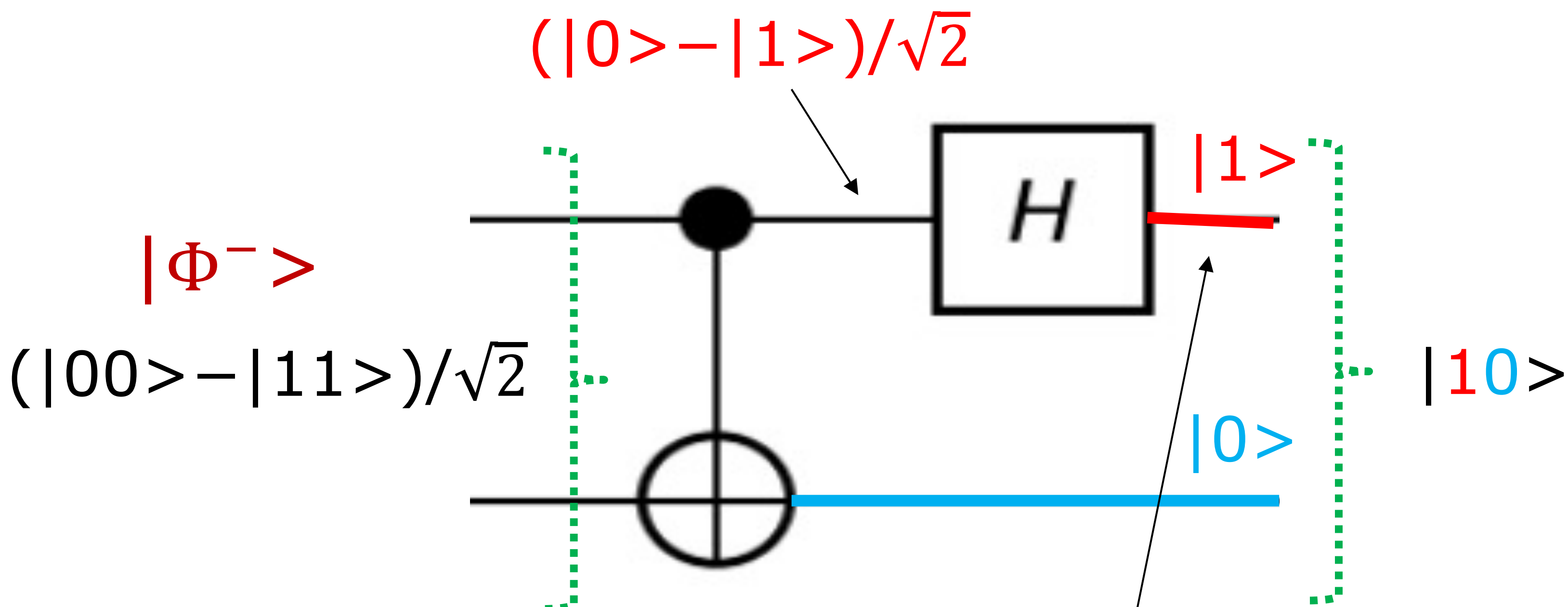
Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Phi^->$の場合



H $(|0>-|1>)/\sqrt{2}$ = $|1>$

Bell Measure ゲートの働き

入力Bell State $|\Phi^{-}>$の場合



$\mathbf{H}\ (|0>-|1>)/\sqrt{2}\ =\ |1>$

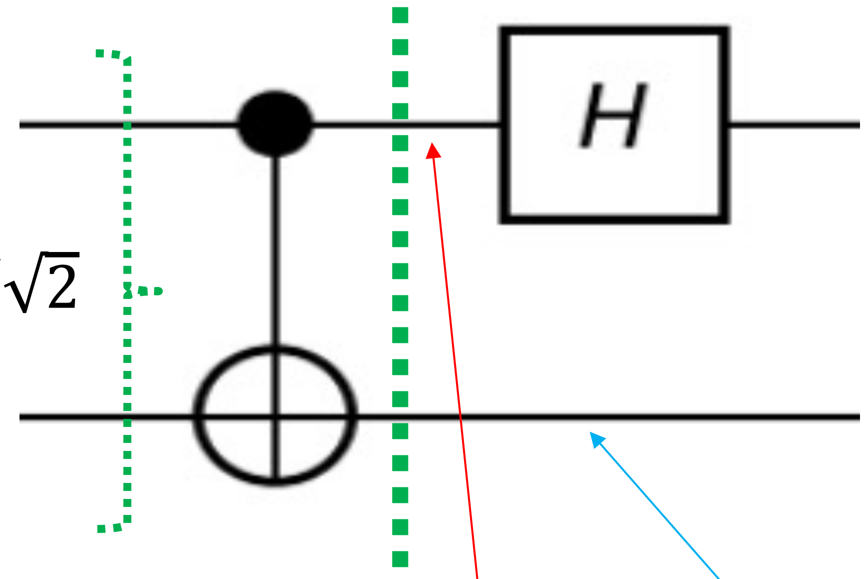
$\boxed{\mathrm{BMG}|\Phi^{-}>\ =\ |10>}$

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Psi^{+}>$の場合

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Psi^+>$の場合

$|\Psi^+>$

$(|01>+|10>)/\sqrt{2}$

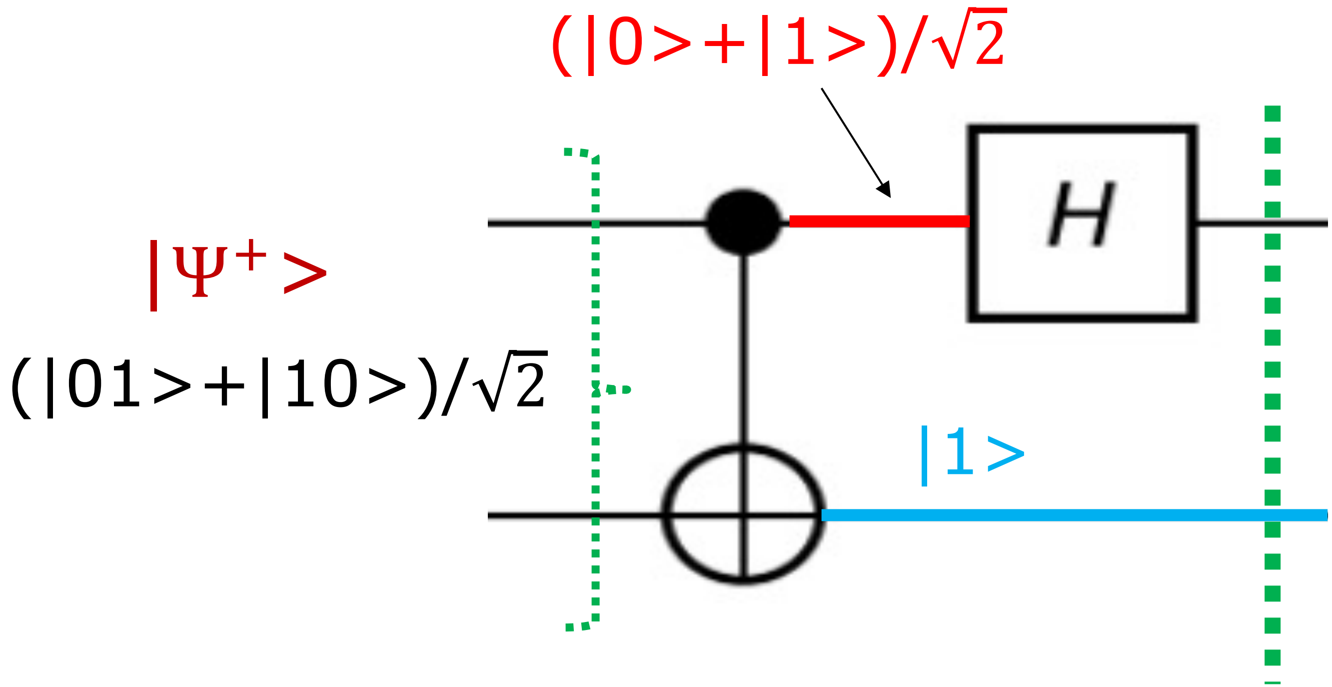


$$\textbf{CNOT}(|01>+|10>)/\sqrt{2} = \boxed{(|01>+|11>)/\sqrt{2}}$$

$$= (|0>+|1>)/\sqrt{2} \otimes |1>$$

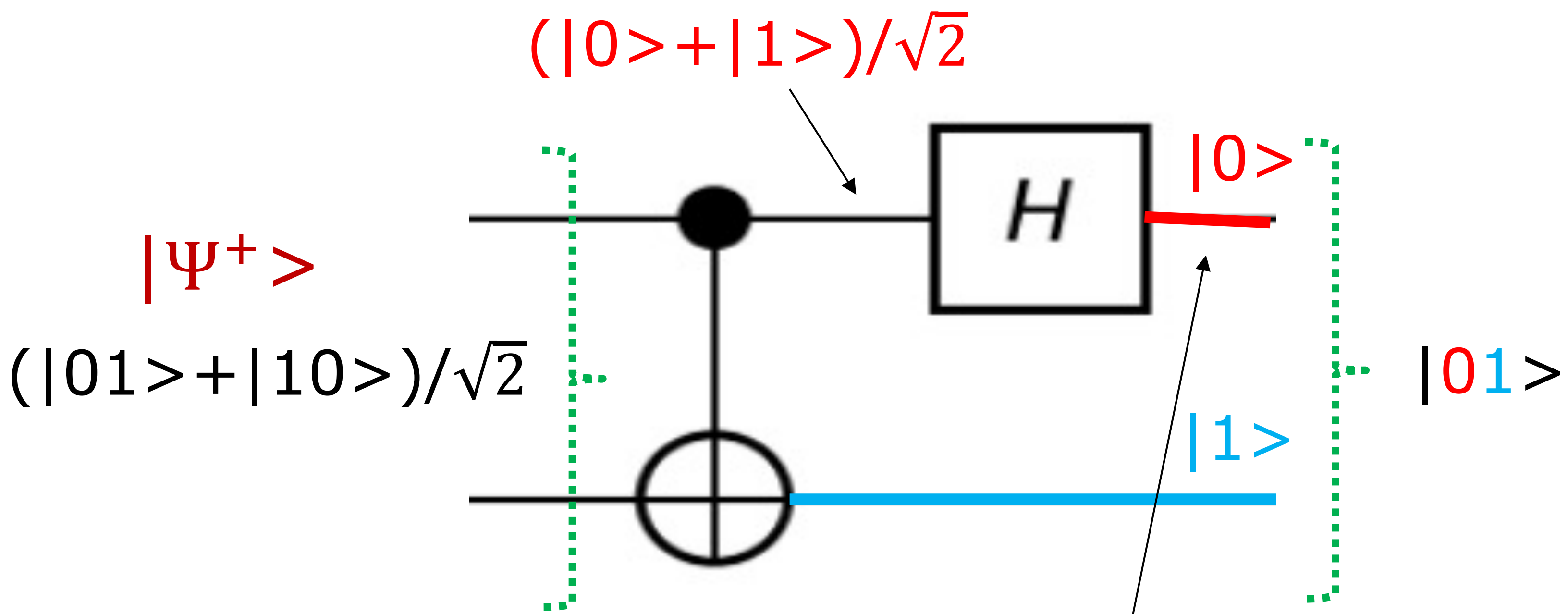
分離可能！

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State |Ψ⁺>の場合



H (|0>+|1>)/√2 = |0>

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Psi^+>$の場合



H $(|0>+|1>)/\sqrt{2} = |0>$

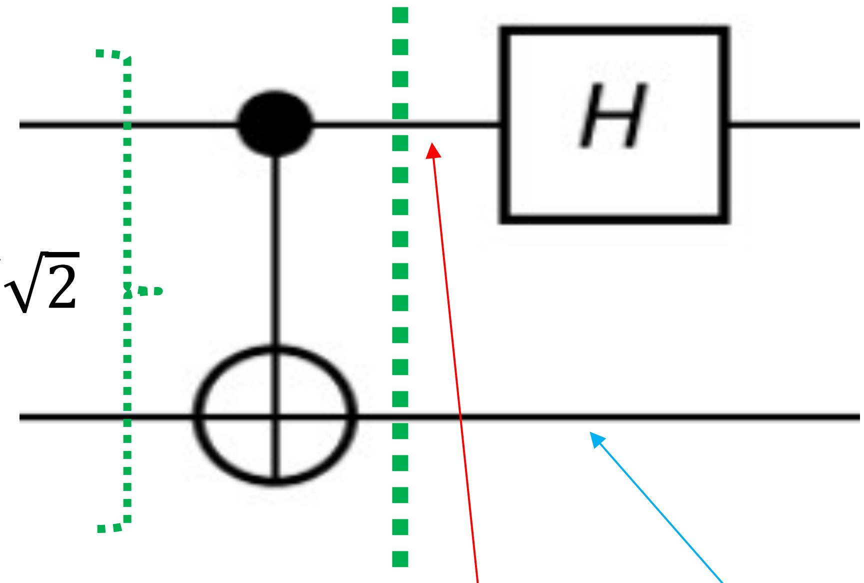
$\boxed{BMG|\Psi^+> = |01>}$

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Psi^-\rangle$の場合

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Psi^-\rangle$の場合

$|\Psi^-\rangle$

$(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$

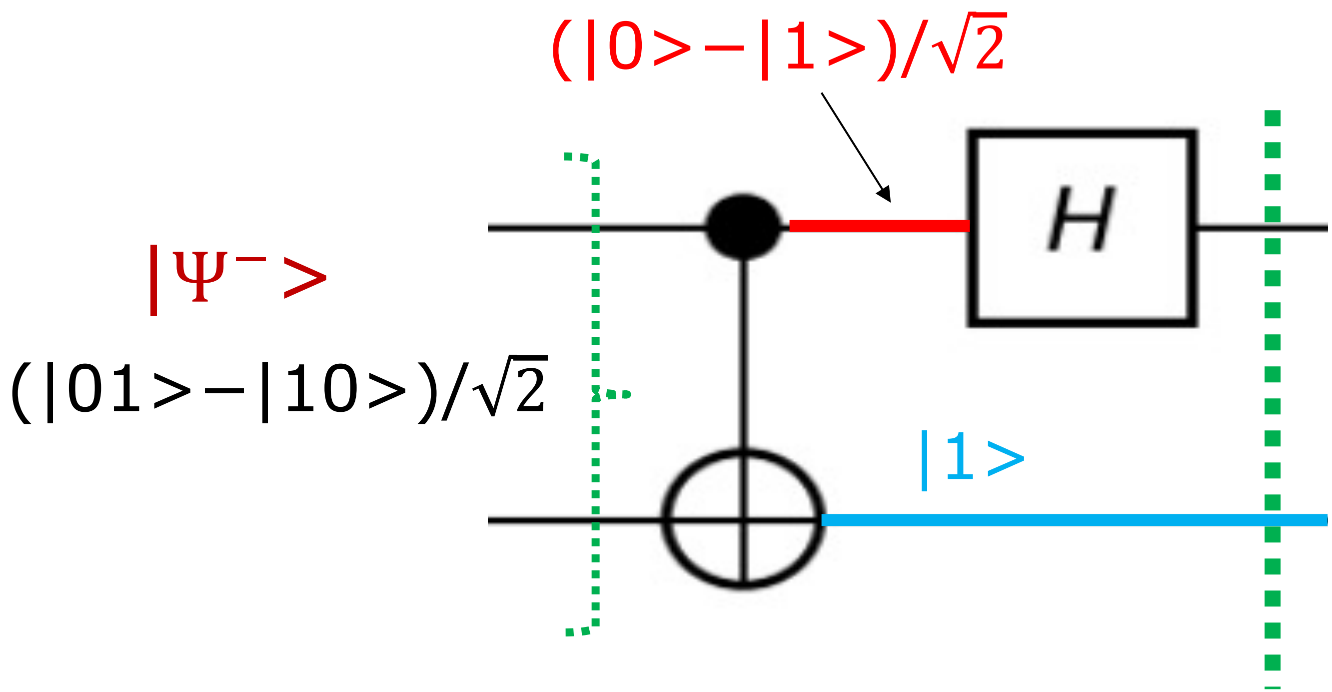


$$\textbf{CNOT}(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2} = \boxed{(|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}}$$

$$= (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \otimes |1\rangle$$

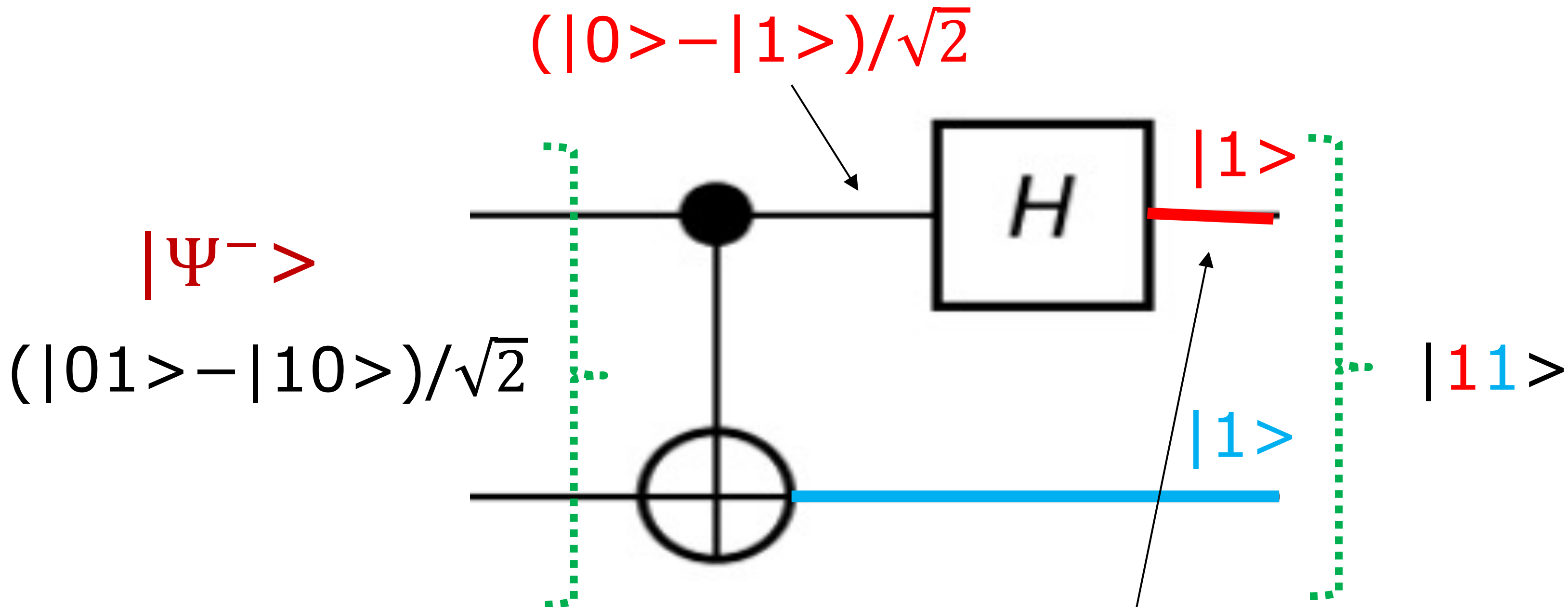
分離可能！

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State |Ψ⁻>の場合



H (|0>−|1>)/√2 = |1>

Bell Measure ゲートの働き
入力Bell State $|\Psi^-\rangle$の場合



H $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} = |1\rangle$

$\boxed{\mathrm{BMG}|\Psi^-\rangle = |11\rangle}$

Bell Stateに対する
Bell Measure Gateの働き まとめ

$$BMG|\Phi^{+}> = BMG\ (|00>+|11>)\ /\sqrt{2} = |00>$$

$$BMG|\Phi^{-}> = BMG\ (|00>-|11>)\ /\sqrt{2} = |10>$$

$$BMG|\Psi^{+}> = BMG\ (|01>+|10>)\ /\sqrt{2} = |01>$$

$$BMG|\Psi^{-}> = BMG\ (|01>-|10>)\ /\sqrt{2} = |11>$$

Bell Stateに対する
Bell Measure Gateの働き
もう一つの計算方法

先に求めた、2-qubits の計算基底に対する次のようなBell Measure ゲートの働きを利用する

$$BMG|00\rangle = (|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$$

$$BMG|01\rangle = (|01\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$$

$$BMG|10\rangle = (|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$$

$$BMG|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell Measure ゲートの働き
入力 $|\Phi^{+}\rangle = (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$の場合

$\mathrm{BMG}((|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2})$

$= (\mathrm{BMG}|00\rangle+\mathrm{BMG}|11\rangle)/\sqrt{2}$

$= (|00\rangle+|10\rangle)/2 + (|00\rangle-|10\rangle)/2$

$= |00\rangle$

Bell Measure ゲートの働き
入力 $|\Phi^{-}> = (|00> - |11>)/\sqrt{2}$ の場合

$$BMG((|00> - |11>)/\sqrt{2})$$
$$= (BMG|00> - BMG|11>)/\sqrt{2}$$
$$= (|00> + |10>)/2 - (|00> - |10>)/2$$
$$= |10>$$

Bell Measure ゲートの働き
入力 $|\Psi^{+}>$ = $(|01>+|10>)/\sqrt{2}$の場合

$\mathrm{BMG}((|01>+|10>)/\sqrt{2})$

$= (\mathrm{BMG}|01>+\mathrm{BMG}|10>)/\sqrt{2}$

$= (|01>+|11>)/2 + (|01>-|11>)/2$

$= |01>$

Bell Measure ゲートの働き
入力 $|\Psi^{-}\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$の場合

$BMG((|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2})$

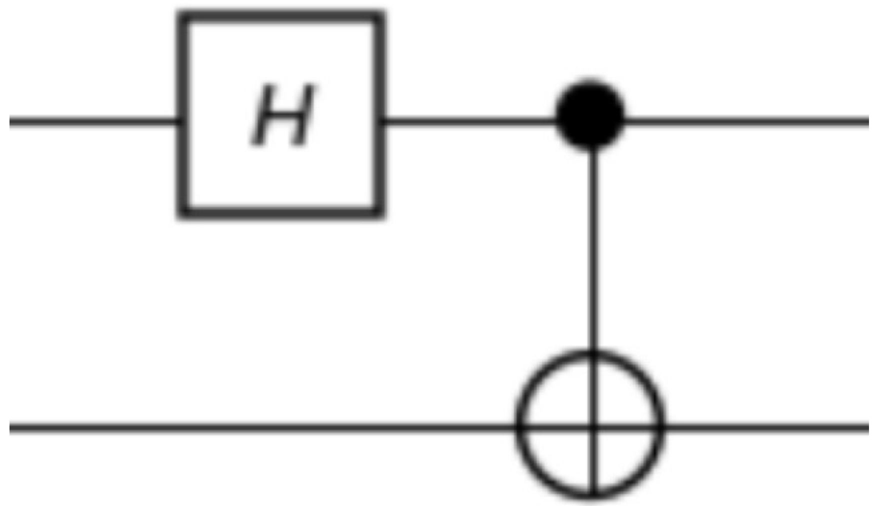
$= (BMG|01\rangle - BMG|10\rangle)/\sqrt{2}$

$= (|01\rangle + |11\rangle)/2 - (|01\rangle - |11\rangle)/2$

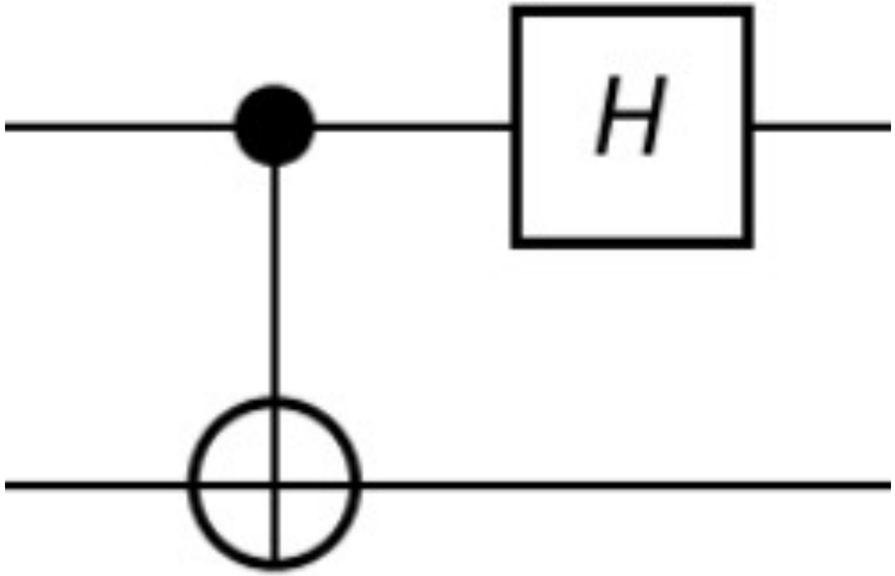
$= |11\rangle$

Bell State ゲートと Bell Measure ゲート

Bell State ゲート

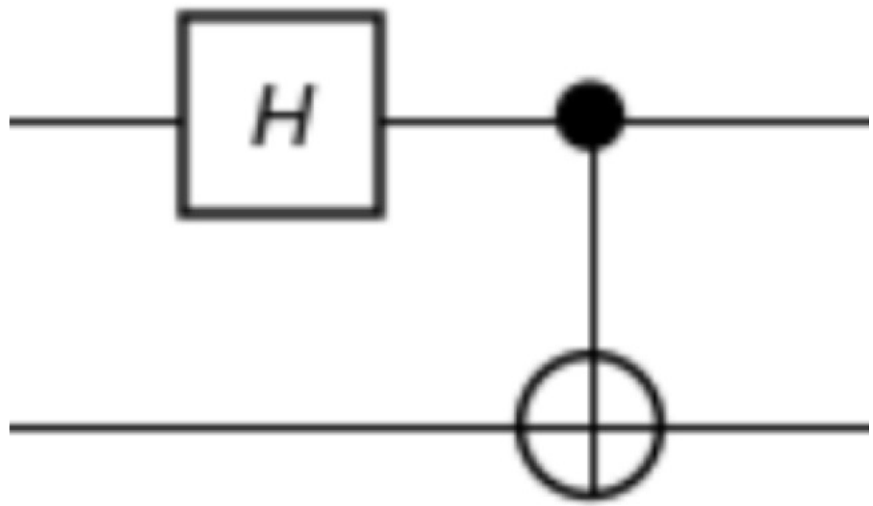


Bell Measure ゲート



Bell State ゲート

Bell State ゲート



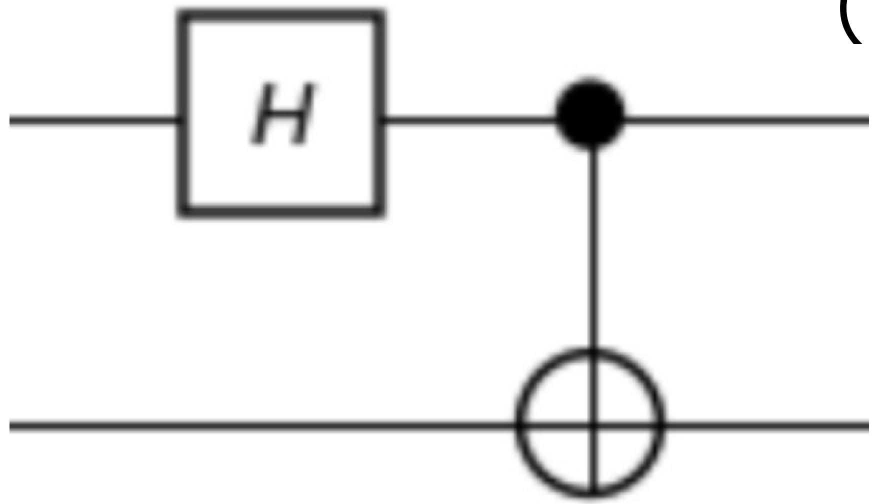
Bell State ゲート

入力

出力

$|00>$

$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

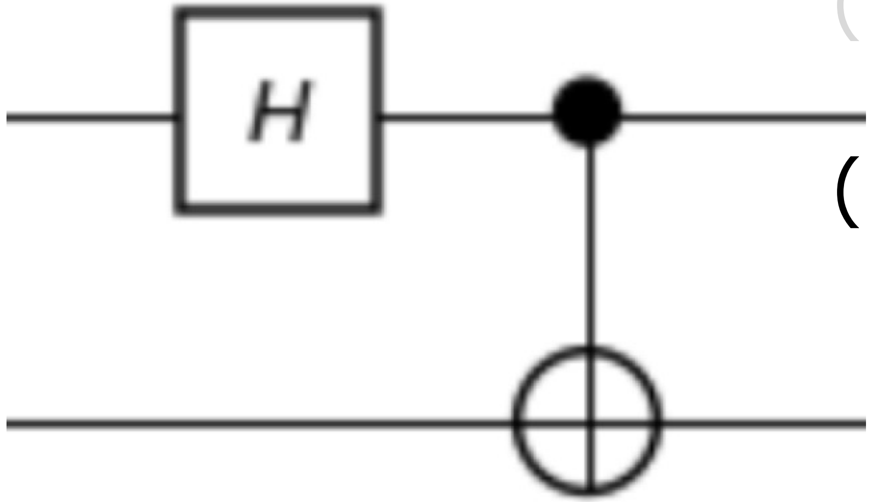


Bell State ゲート

入力

出力

$|00>$ $\rightarrow$ $(|00>+|11>)/\sqrt{2}$



$|01>$ $\rightarrow$ $(|01>+|10>)/\sqrt{2}$

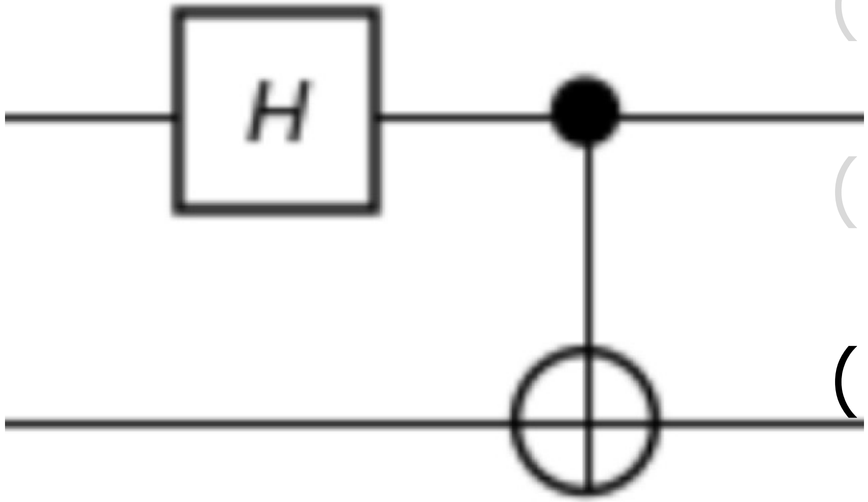
Bell State ゲート

入力

$|00\rangle$

$|01\rangle$

$|10\rangle$



出力

$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State ゲート

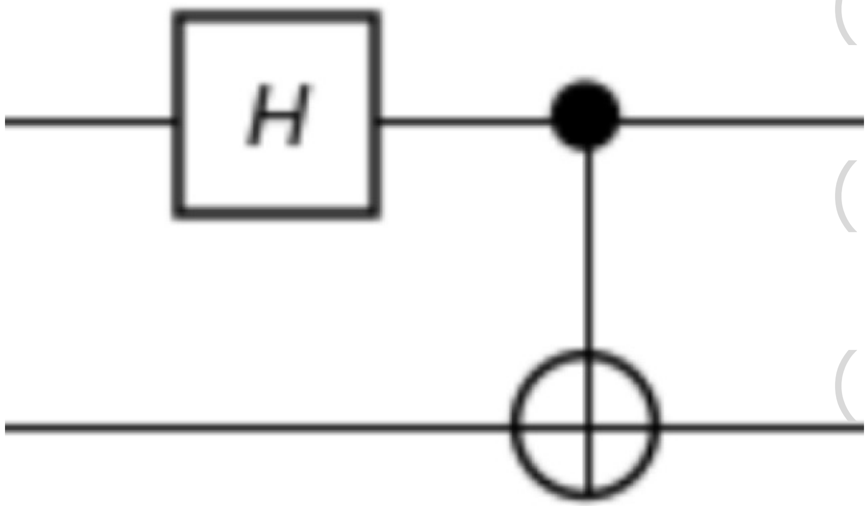
入力

$|00>$

$|01>$

$|10>$

$|11>$



出力

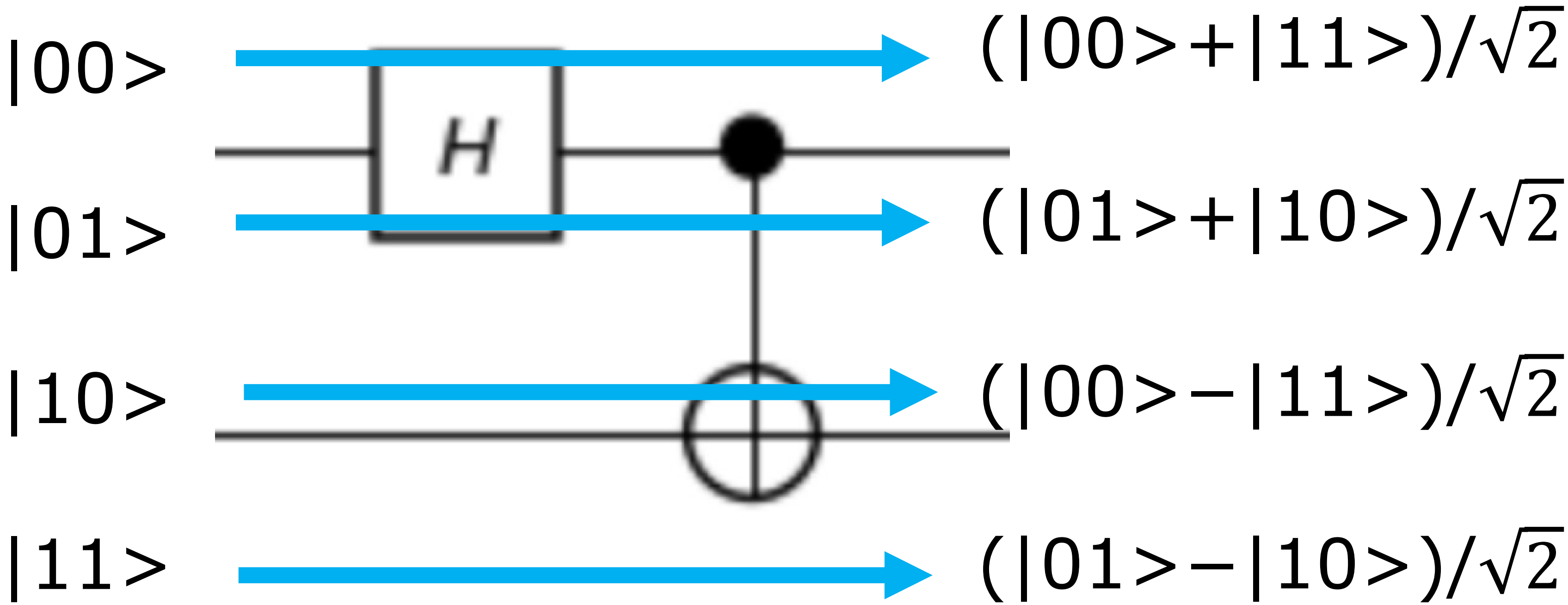
$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

$(|00>-|11>)/\sqrt{2}$

$(|01>+|10>)/\sqrt{2}$

$(|01>-|10>)/\sqrt{2}$

Bell State ゲート



Bell State ゲートの働き

$|00> \longrightarrow |\Phi^{+}>$

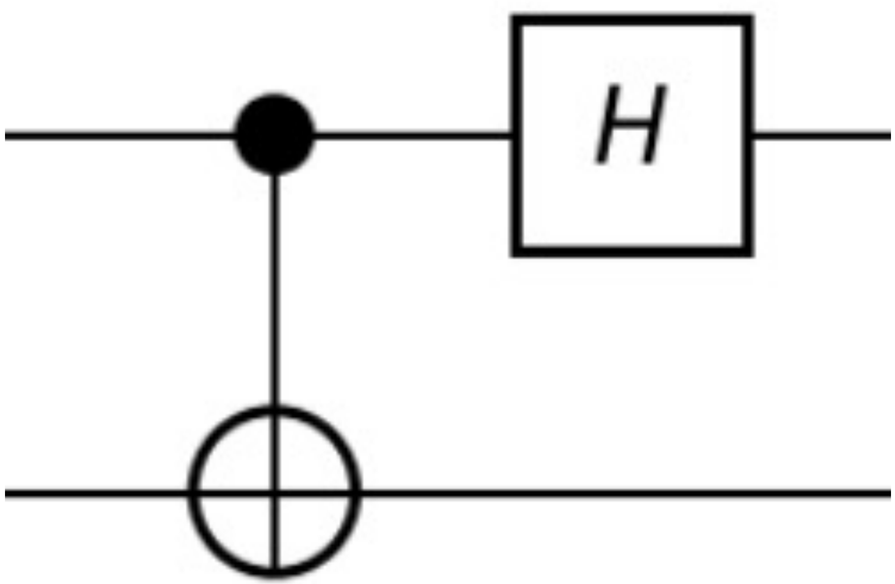
$|01> \longrightarrow |\Psi^{+}>$

$|10> \longrightarrow |\Phi^{-}>$

$|11> \longrightarrow |\Psi^{-}>$

Bell Measure ゲート

Bell Measure ゲート



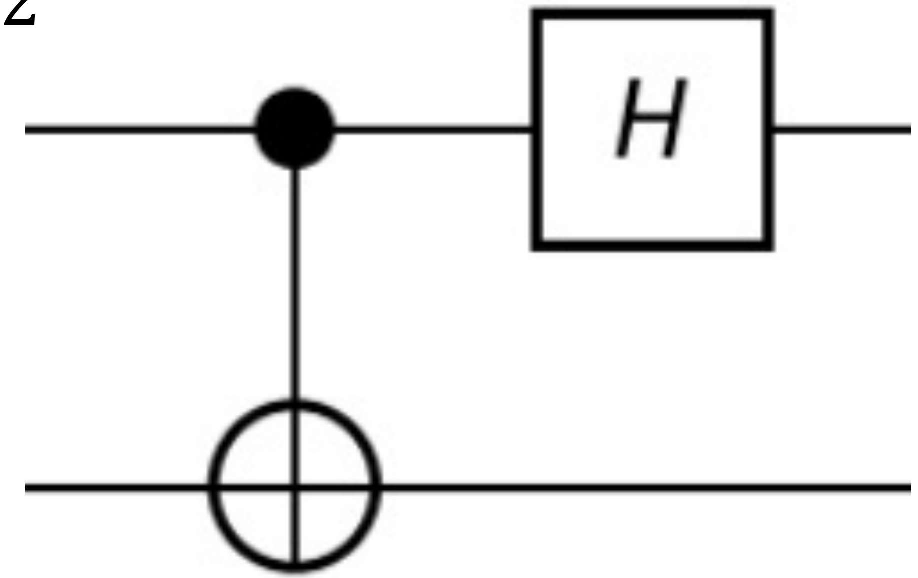
Bell Measure ゲート

入力

$(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$

出力

$|00\rangle$

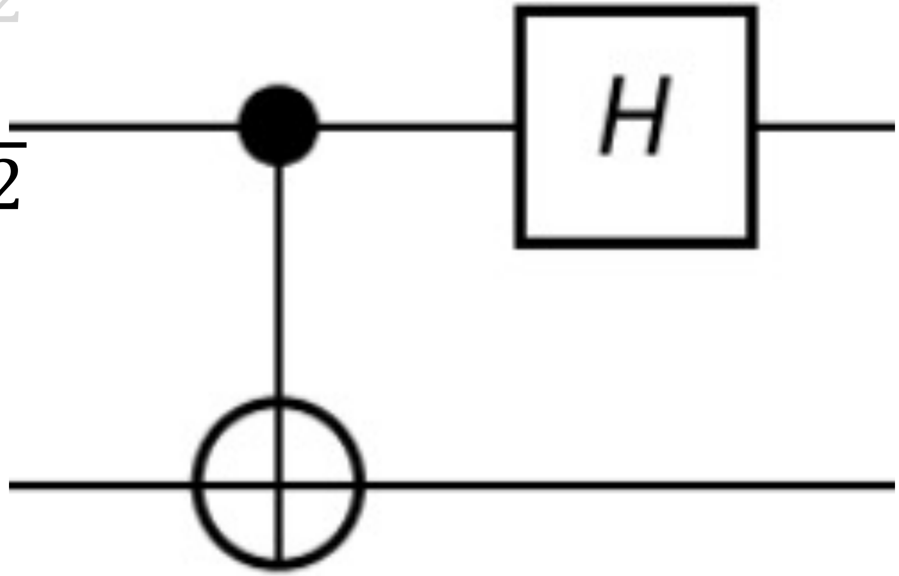


Bell Measure ゲート

入力

$(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

$(|01>+|10>)/\sqrt{2}$



出力

$|00>$

$|01>$

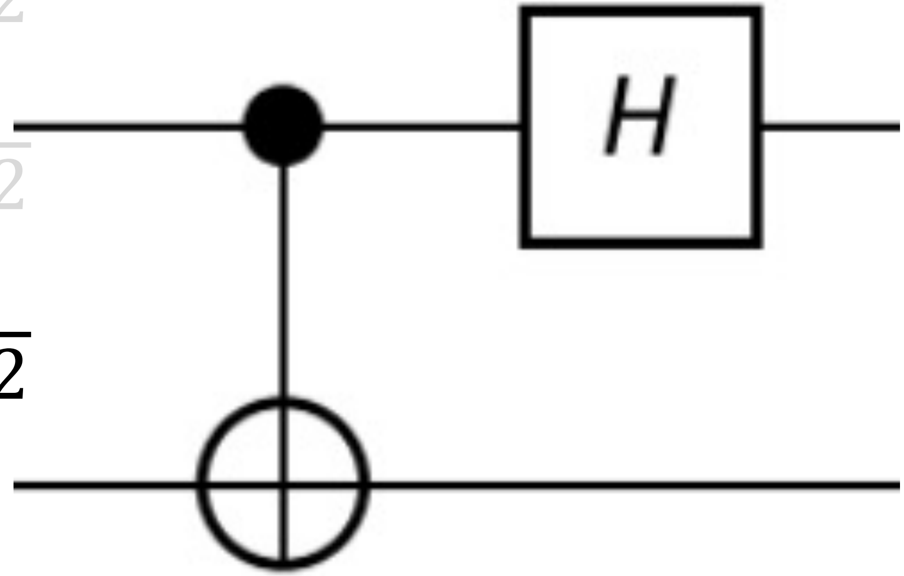
Bell Measure ゲート

入力

$(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$

$(|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$



出力

$|00\rangle$

$|01\rangle$

$|10\rangle$

Bell Measure ゲート

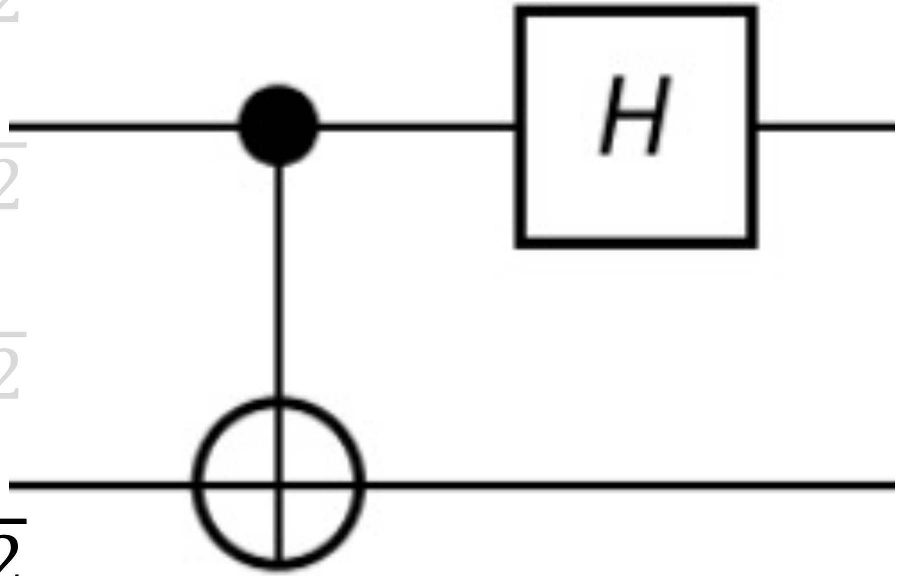
入力 出力

$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$ $|00\rangle$

$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2}$ $|01\rangle$

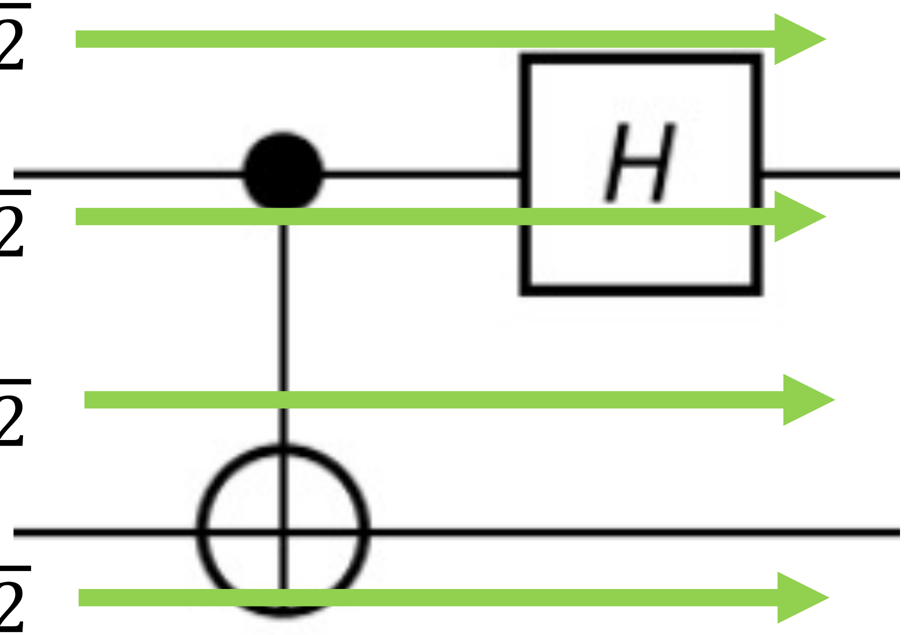
$(|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2}$ $|10\rangle$

$(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2}$ $|11\rangle$



Bell Measure ゲート

入力	出力
$(\vert 00\rangle + \vert 11\rangle)/\sqrt{2}$	$\vert 00\rangle$
$(\vert 00\rangle - \vert 11\rangle)/\sqrt{2}$	$\vert 01\rangle$
$(\vert 01\rangle + \vert 10\rangle)/\sqrt{2}$	$\vert 10\rangle$
$(\vert 01\rangle - \vert 10\rangle)/\sqrt{2}$	$\vert 11\rangle$



Bell Measure ゲートの働き

$$|\Phi^{+}> \longrightarrow |00>$$

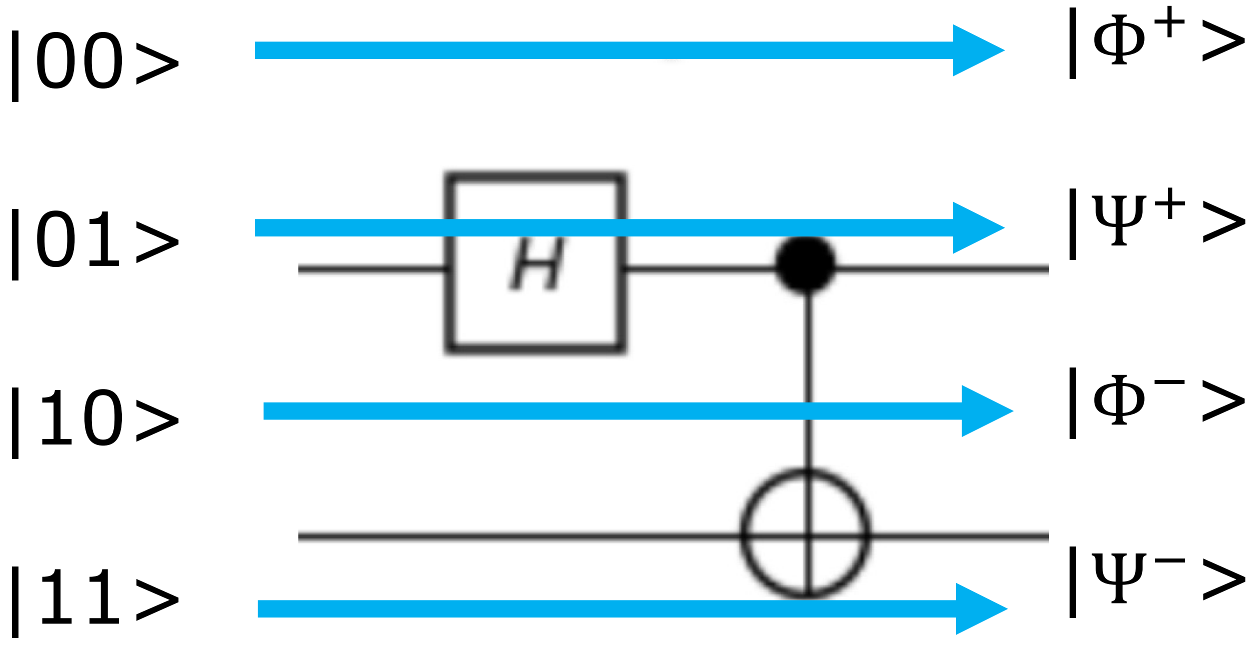
$$|\Psi^{+}> \longrightarrow |01>$$

$$|\Phi^{-}> \longrightarrow |10>$$

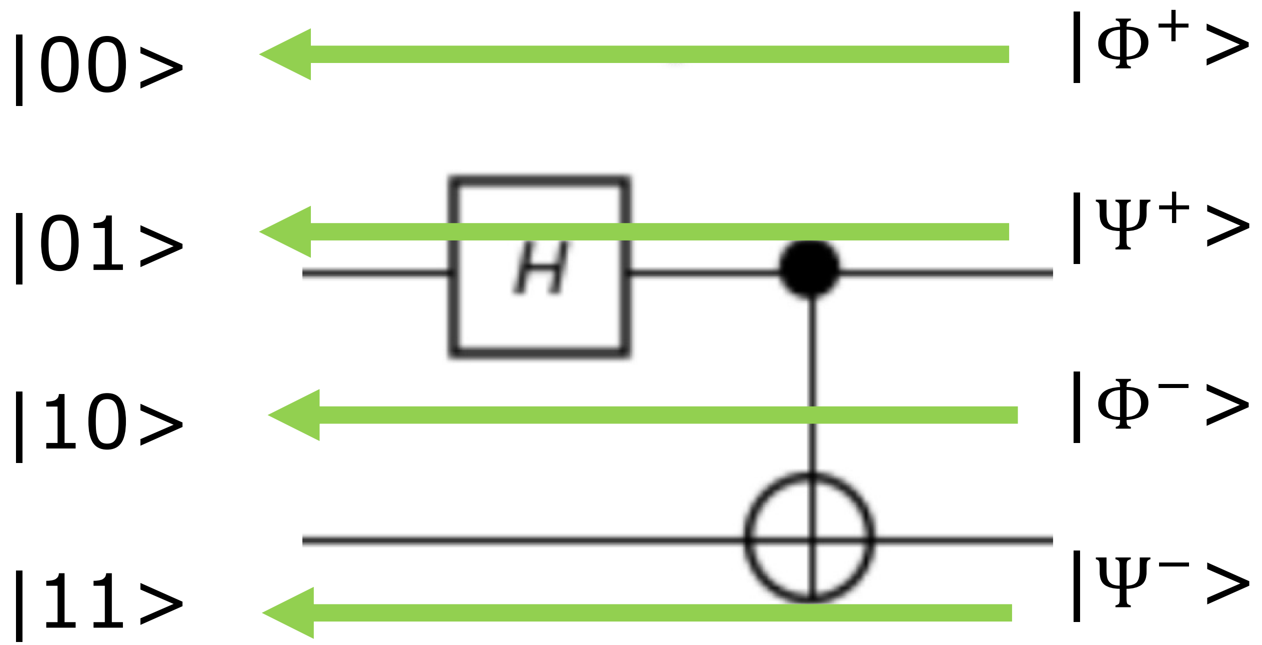
$$|\Psi^{-}> \longrightarrow |11>$$

Bell State Gateと
Bell Measure Gate の関係

Bell State Gate

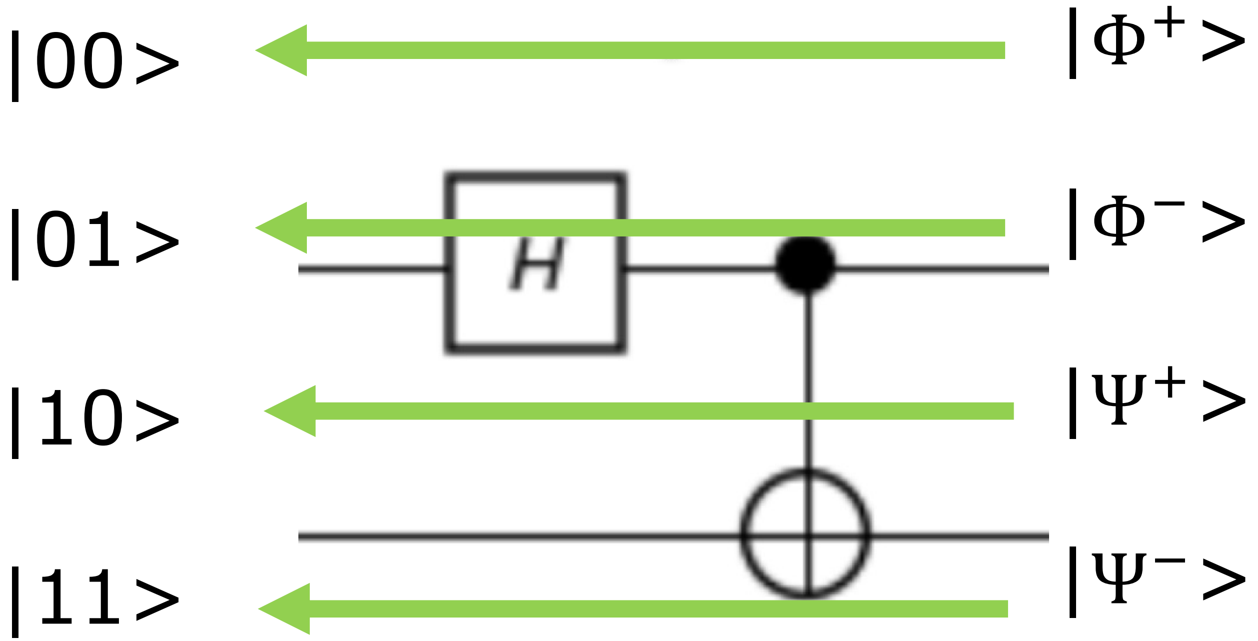


Bell Measure Gate



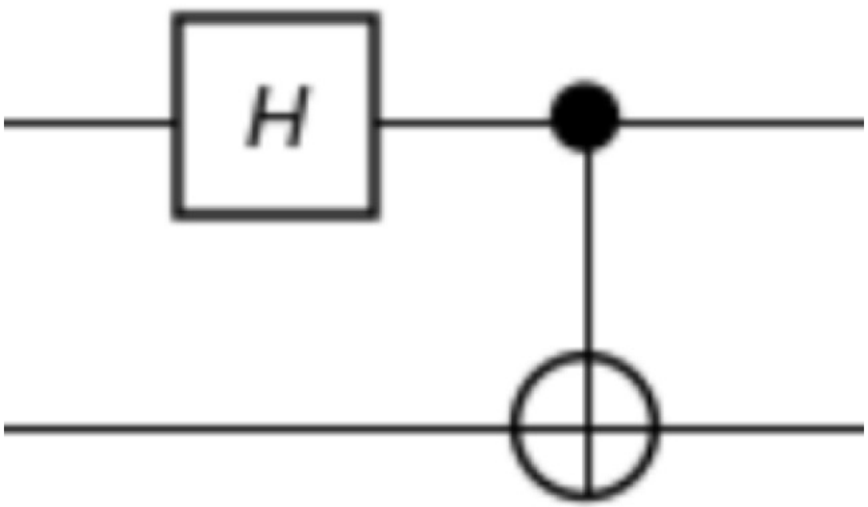
Bell Measure Gate

=(Bell State Gate)$^{-1}$ =(Bell State Gate)†

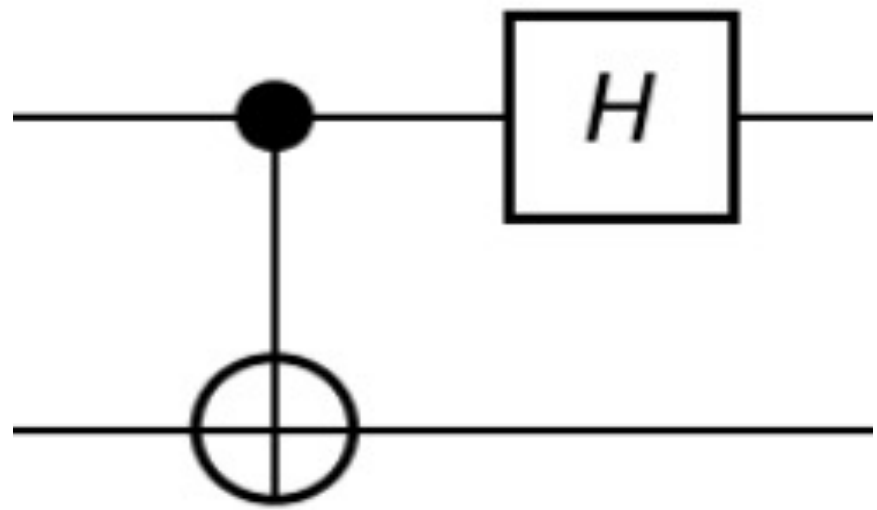


Bell State Gateと
Bell Measure Gate

Bell State Gate

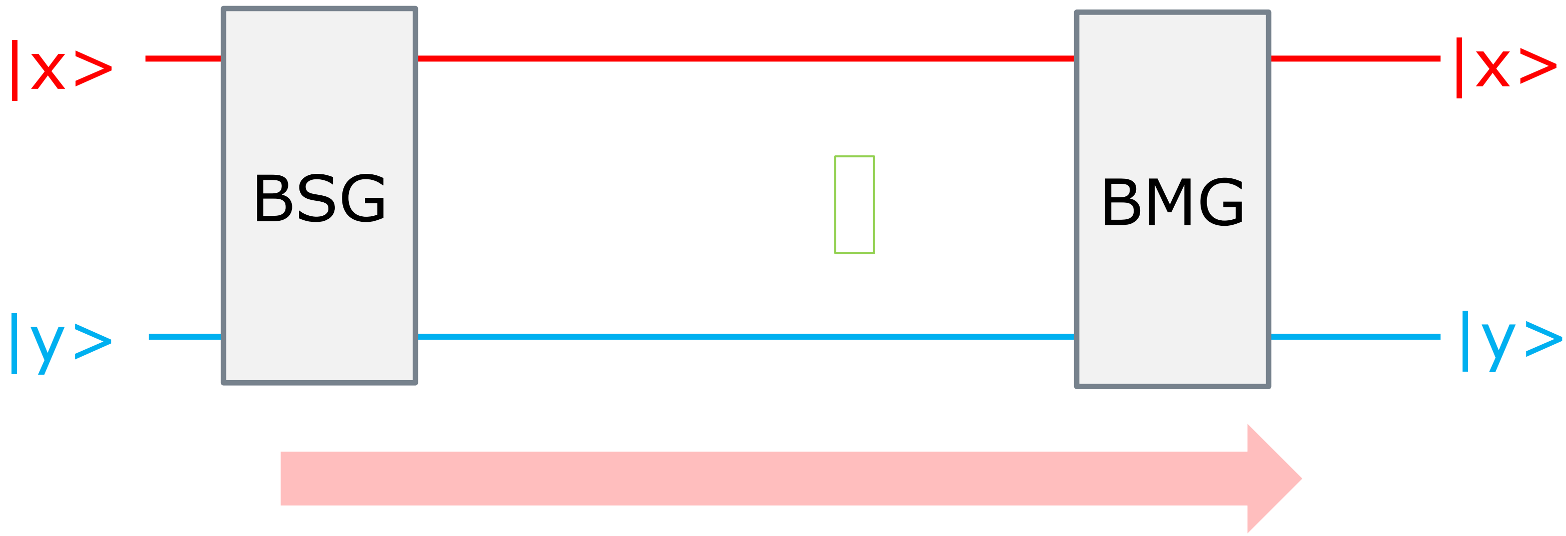


Bell Measure Gate



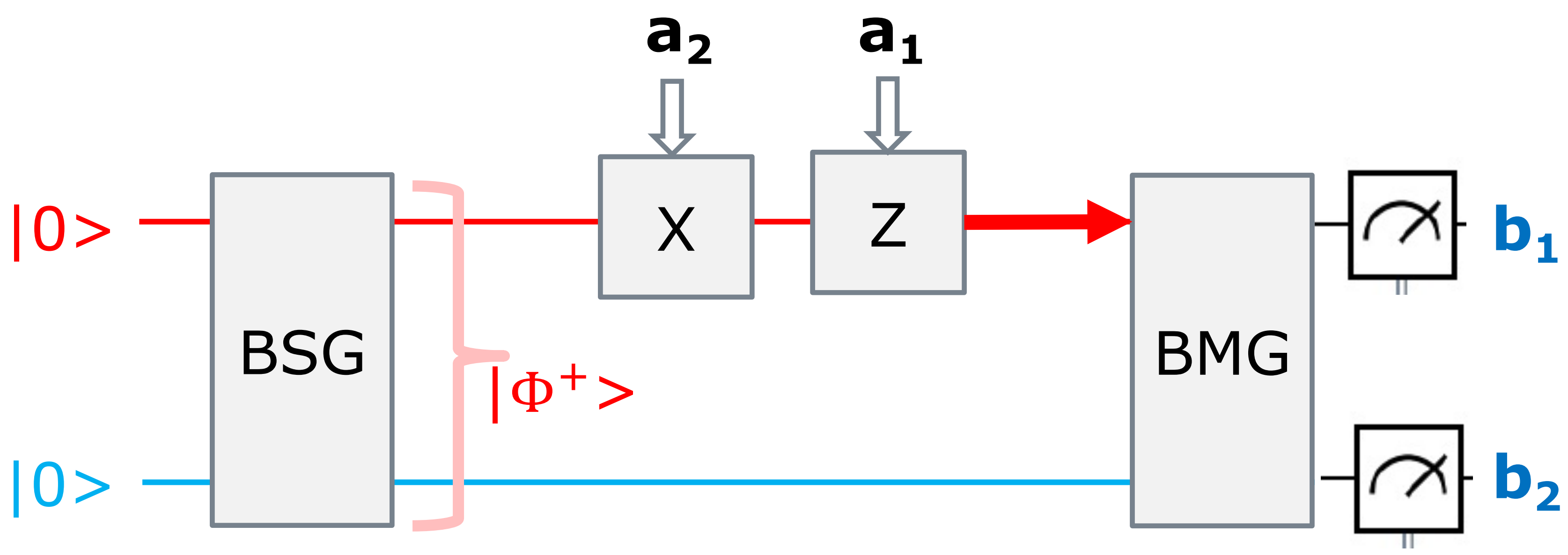
基本的な量子通信回路と
Bell State Gate / Bell Measure Gate

Superdence Codingの基本的な考え方

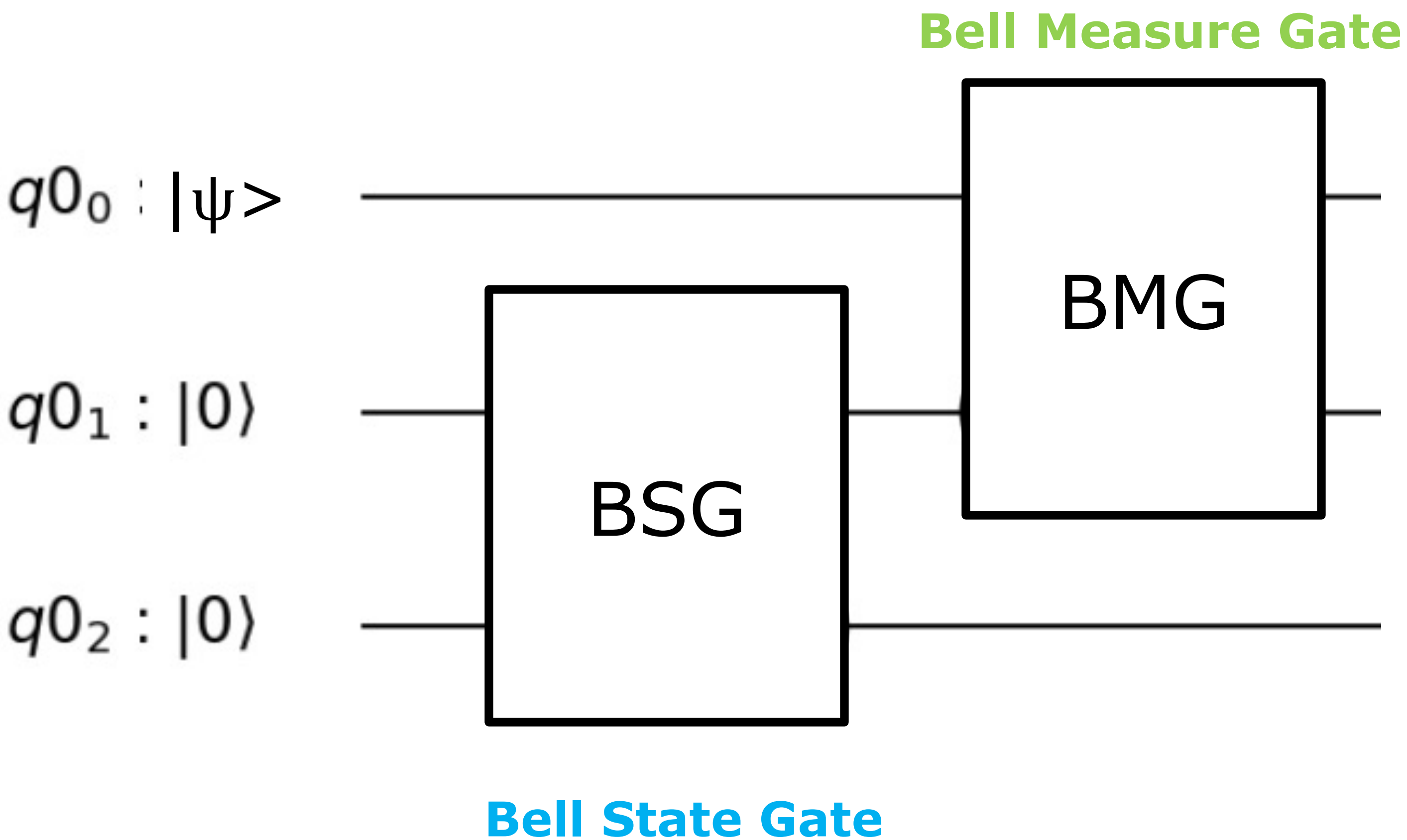


BSG∘BMG=BMG∘BSG=I

Superdense Coding回路

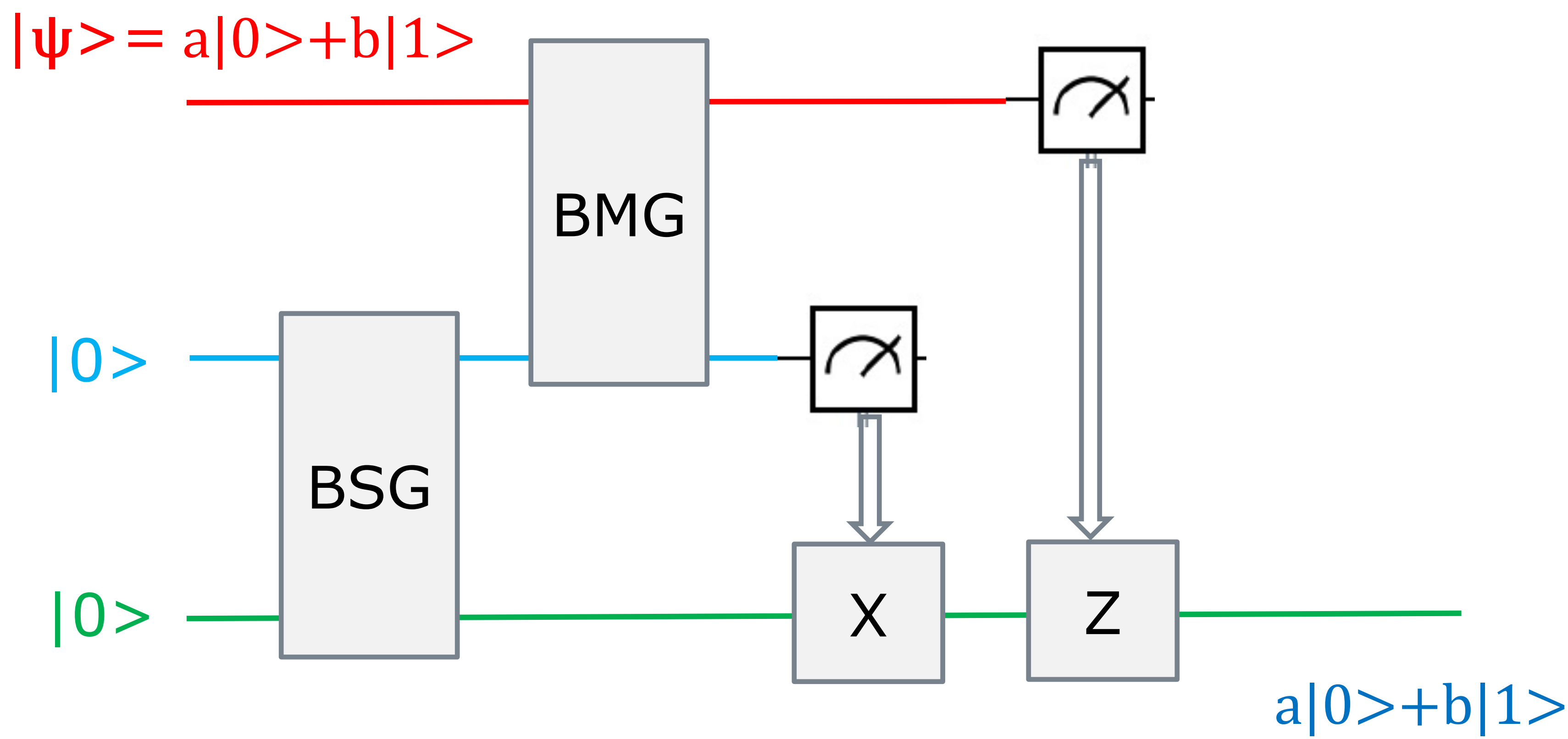


量子テレポーテーション回路は、
Bell State ゲートとBell Measure ゲートから構成される

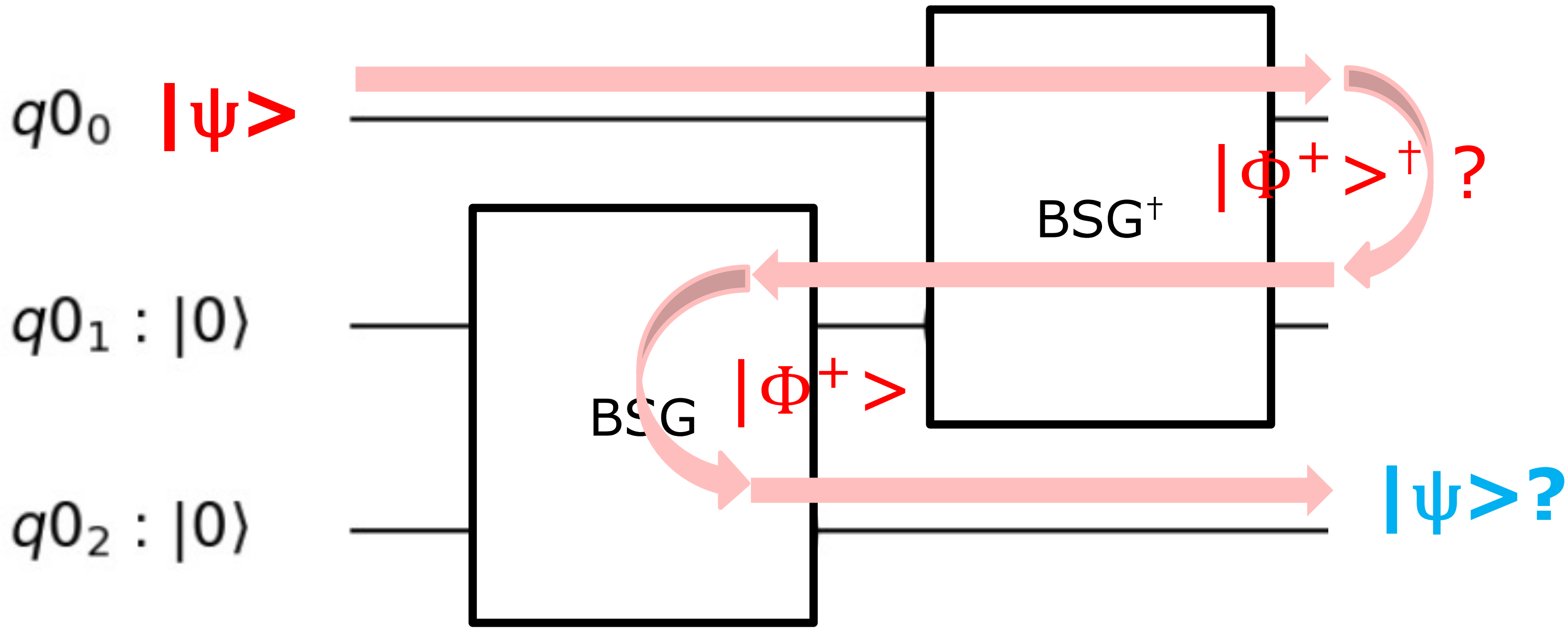


量子テレポーテーション回路の一部

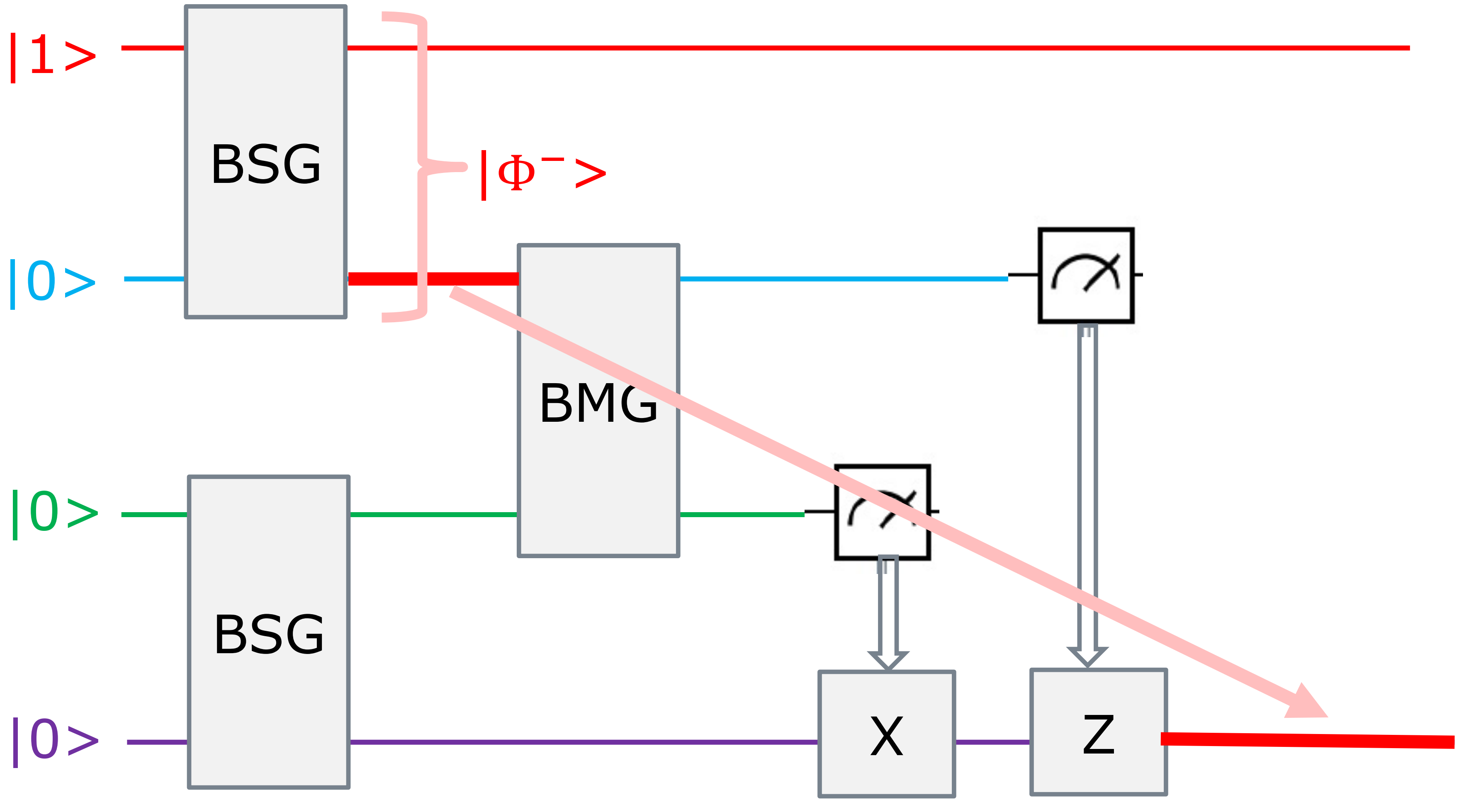
量子テレポーテーション回路



量子テレポーテーション回路の一部
String Diagram的解釈



Entanglement Swapping回路





Part II

量子回路上での量子状態の「交換」

「量子通信入門」**Part II**
量子回路上での量子状態の「交換」

- CNOTを使った量子状態の「交換」
- 計算の準備
  - 演算子のテンソル積の作用
  - Bit Flipper X と Phase Flipper Z
- BSG / BMGを使った量子状態の「交換」
  - Bell State Gate を使った量子状態の「交換」
  - Bell Measure Gate を使った量子状態の「交換」

量子回路上での量子状態の「交換」

量子テレポーテーションと
量子回路上での量子状態の「交換」

量子テレポーテーション

Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$

$$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$$

Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle)$

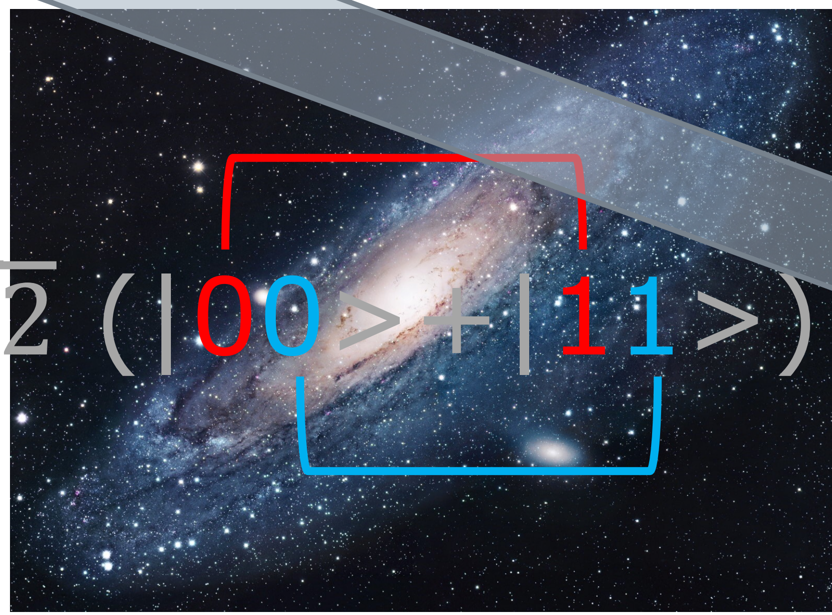
AliceとBobは、エンタングルメント状態の
量子を共有している

量子テレポーテーション

|Ψ>

Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00> + |11>)$



$1/\sqrt{2}\ (|00> + |11>)$

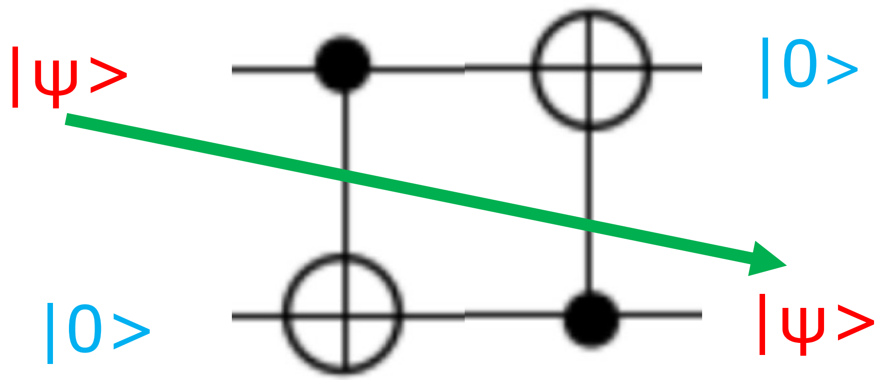
|Ψ>

Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00> + |11>)$

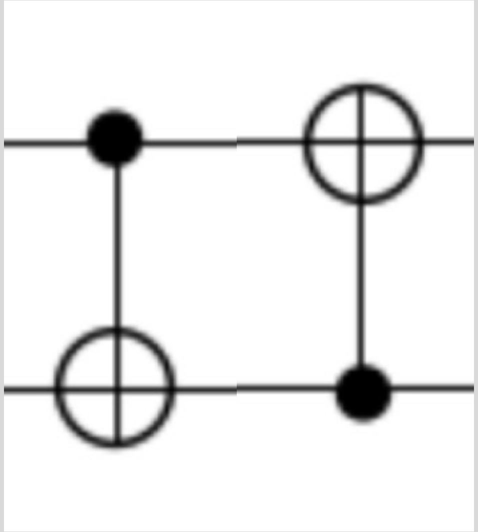
それを利用して、Aliceは、量子の状態|Ψ>を、Bobに送ることができる。

それは、次のような回路で、第一レジスター上の
量子の状態を、第二レジスターに送るのと、似ている。
ここでは、こうしたswap回路のバリエーションを見ておこう。

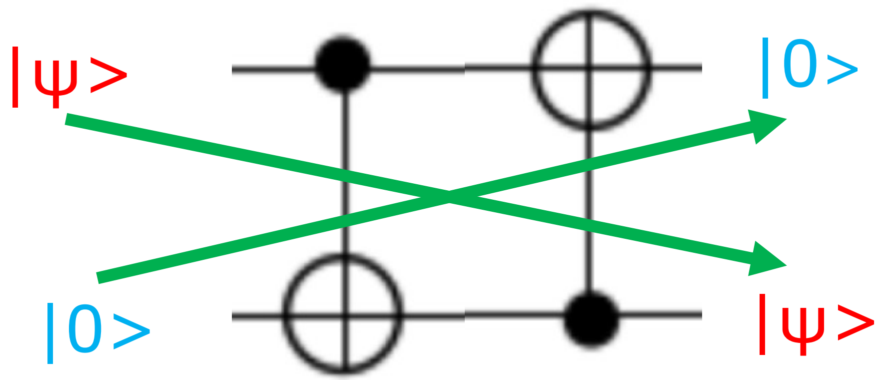


CNOTを使った量子状態の「交換」

CNOTを使ったswap回路 1



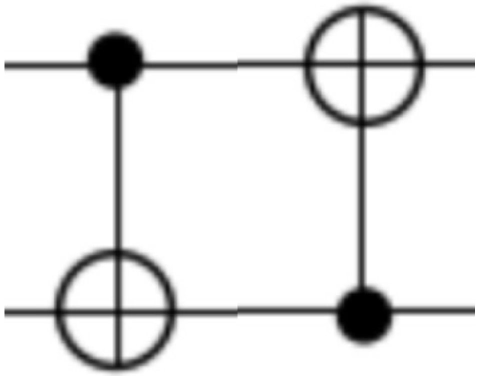
CNOTを使ったswap回路 1



CNOTを使ったswap回路 1

$|\psi\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$

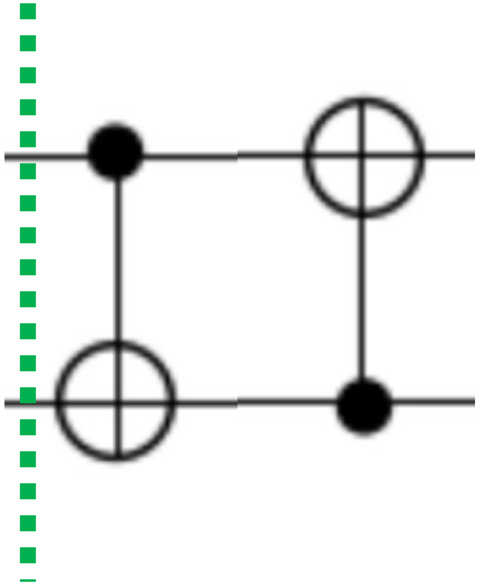
$|0\rangle$



CNOTを使ったswap回路 1

$|\psi\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$

$|0\rangle$

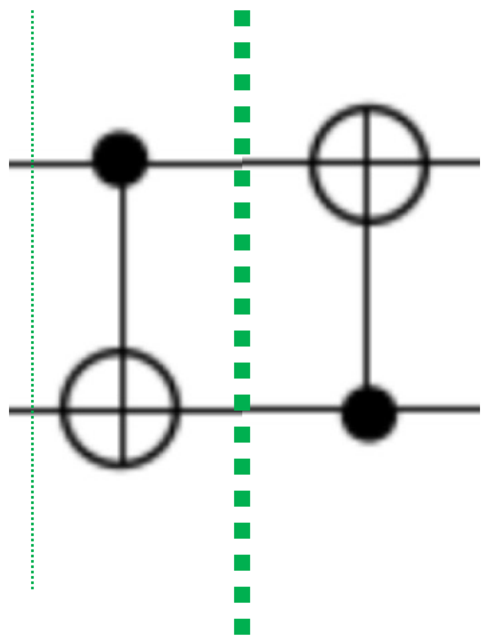


$a|00\rangle+b|10\rangle$

CNOTを使ったswap回路 1

$|\psi\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$

$|0\rangle$



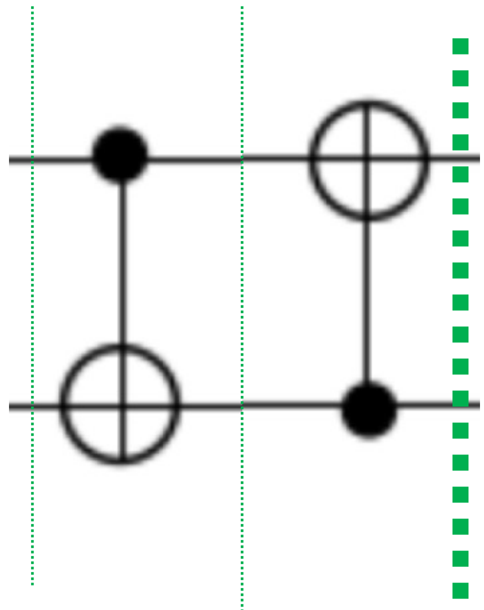
$a|00\rangle+b|10\rangle$

$a|00\rangle+b|11\rangle$

CNOTを使ったswap回路 1

|ψ> = a|0>+b|1>

|0>



a|00>+b|10>

a|00>+b|01>

a|00>+b|11>

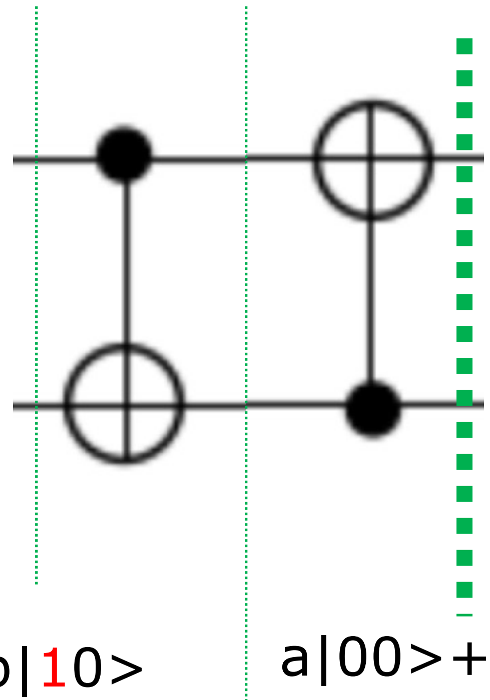
第二ビットがコントロール・ビット

第一ビットが反転するターゲット・ビット

CNOTを使ったswap回路 1

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$|0\rangle$



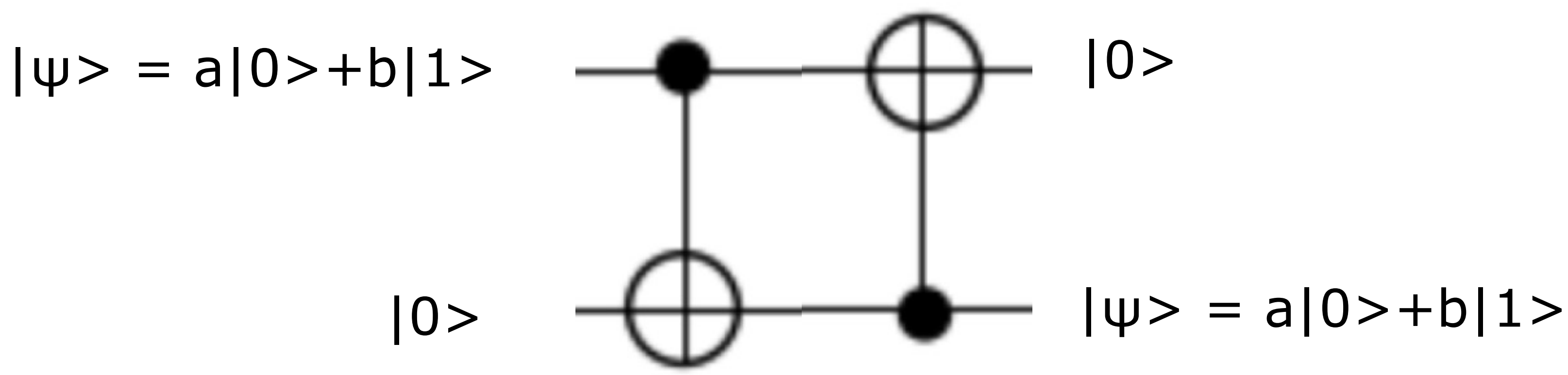
$a|00\rangle + b|10\rangle$

$a|00\rangle + b|11\rangle$

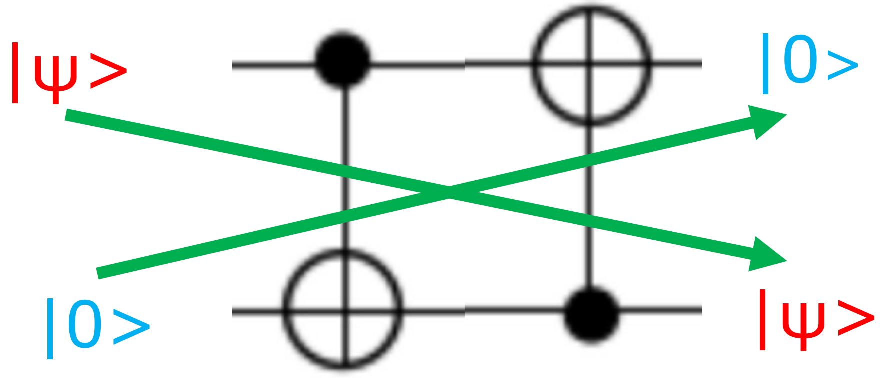
$a|00\rangle + b|01\rangle = |0\rangle \otimes a|0\rangle b|1\rangle$

分離可能

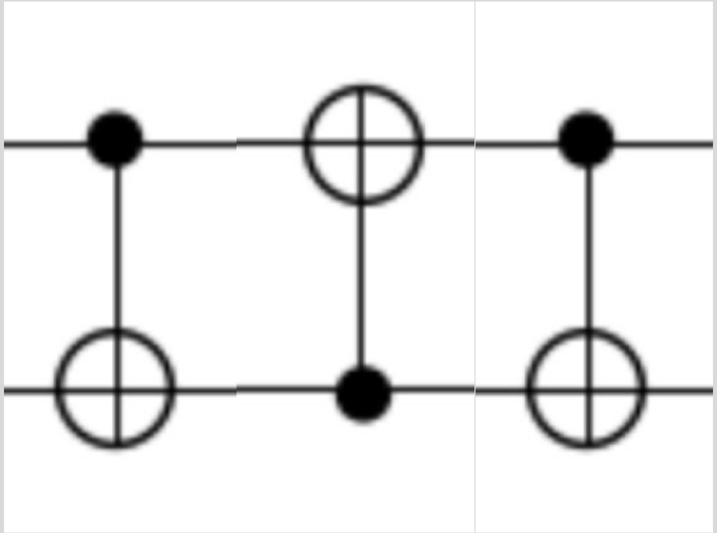
CNOTを使ったswap回路 1



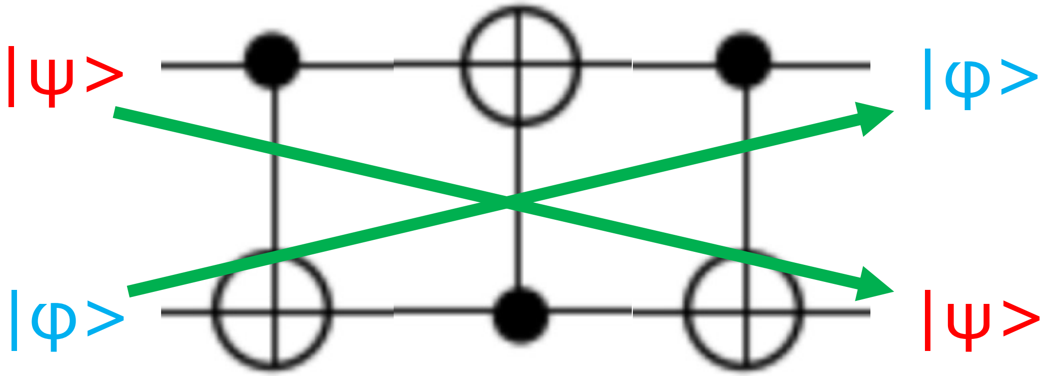
CNOTを使ったswap回路 1



CNOTを使ったswap回路 2



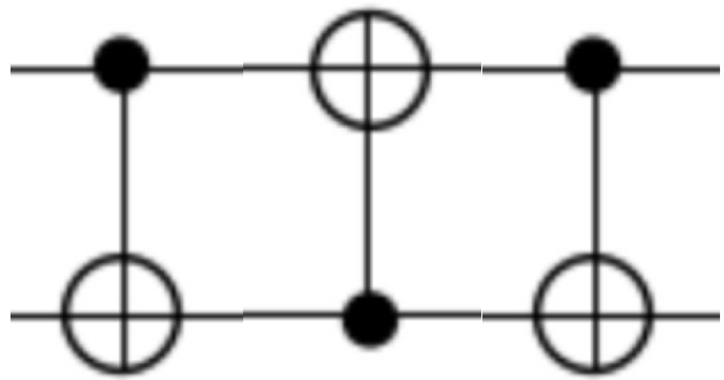
CNOTを使ったswap回路 2



CNOTを使ったswap回路 2

|ψ> = a|0>+b|1>

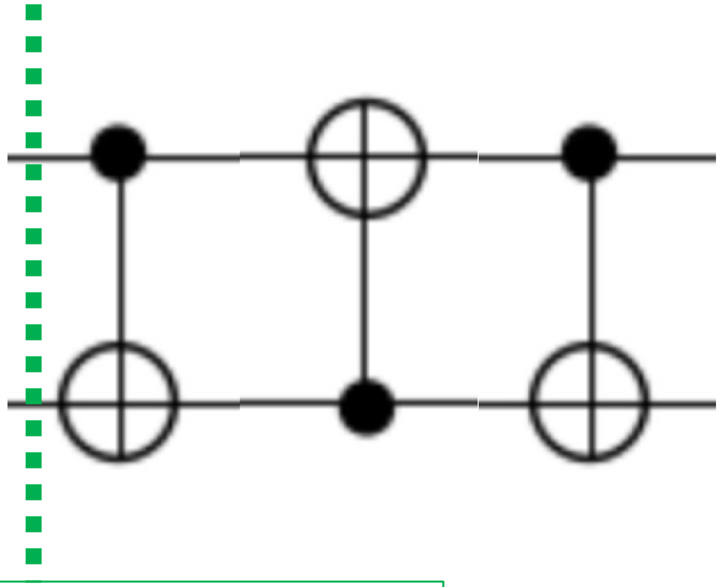
|φ> = c|0>+d|1>



CNOTを使ったswap回路 2

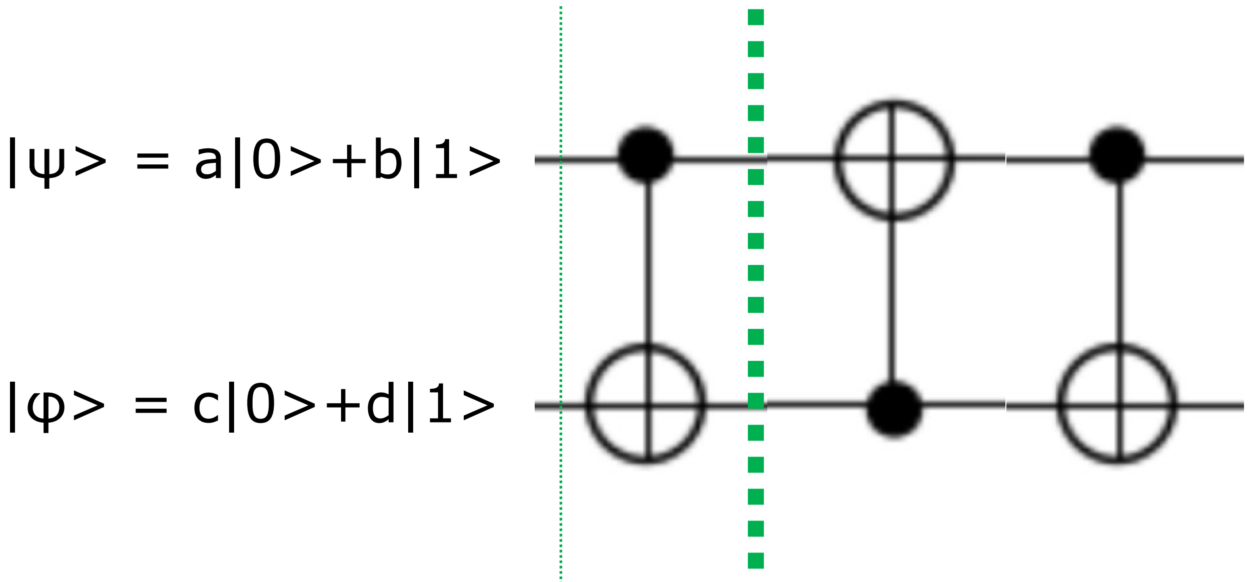
|ψ> = a|0>+b|1>

|φ> = c|0>+d|1>



ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

CNOTを使ったswap回路 2



$$ac|00\rangle+ad|01\rangle+bc|10\rangle+bd|11\rangle$$

$$ac|00\rangle+ad|01\rangle+bc|11\rangle+bd|10\rangle$$

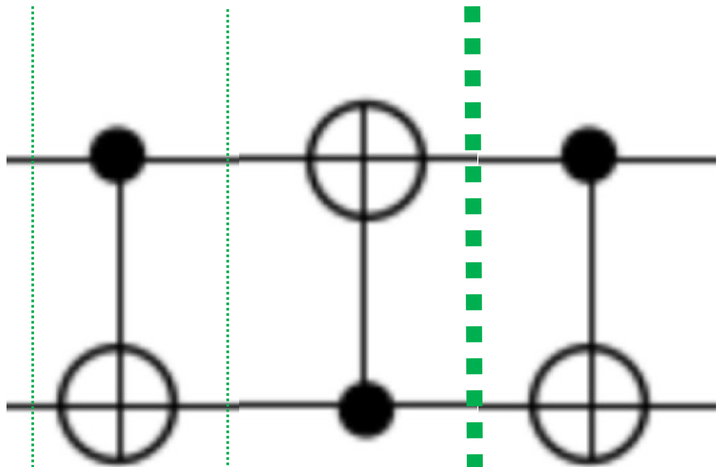
$$\boxed{= ac|00\rangle+ad|01\rangle+bc|11\rangle+bd|10\rangle}$$

第二ビットがコントロール・ビット
第一ビットが反転するターゲット・ビット

CNOTを使ったswap回路 2

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$|\varphi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$



$ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$

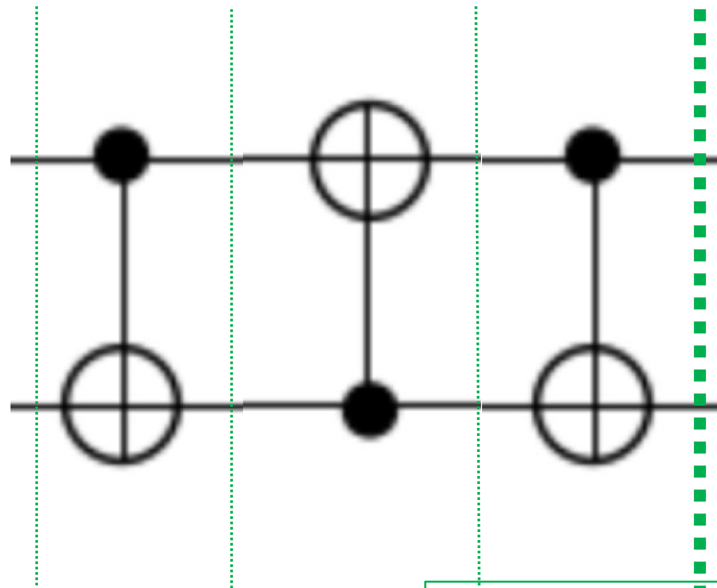
$ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|11\rangle + bd|10\rangle$
$= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|11\rangle + bd|10\rangle$

$ac|00\rangle + ad|11\rangle + bc|01\rangle + bd|10\rangle$
$\boxed{= ac|00\rangle + ad|11\rangle + bc|01\rangle + bd|10\rangle}$

CNOTを使ったswap回路 2

|ψ> = a|0>+b|1>

|φ> = c|0>+d|1>



ac|00>+ad|01>+bc|10>+bd|11>

ac|00>+ad|10>+bc|01>+bd|11>

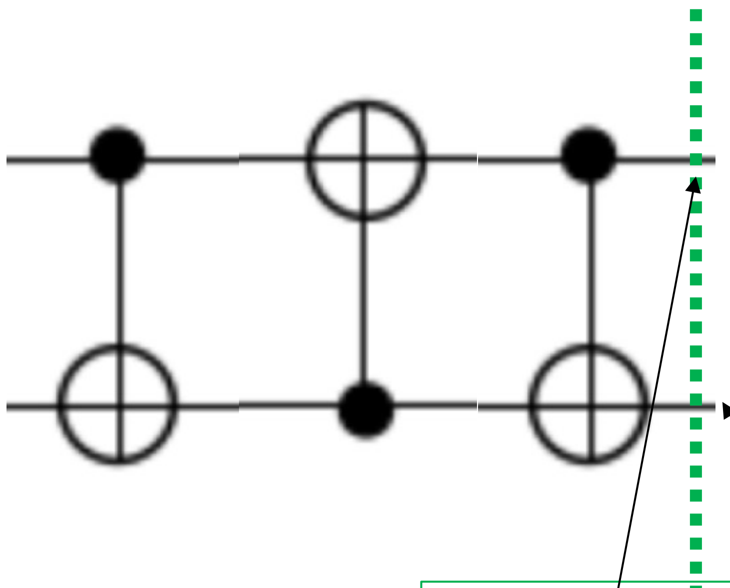
ac|00>+ad|01>+bc|11>+bd|10>
= ac|00>+ad|01>+bc|11>+bd|10>

ac|00>+ad|01>+bc|11>+bd|10>
= ac|00>+ad|11>+bc|01>+bd|10>

CNOTを使ったswap回路 2

$|\psi\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$

$|\varphi\rangle = c|0\rangle+d|1\rangle$



$$\boxed{ac|00\rangle+ad|10\rangle+bc|01\rangle+bd|11\rangle}$$

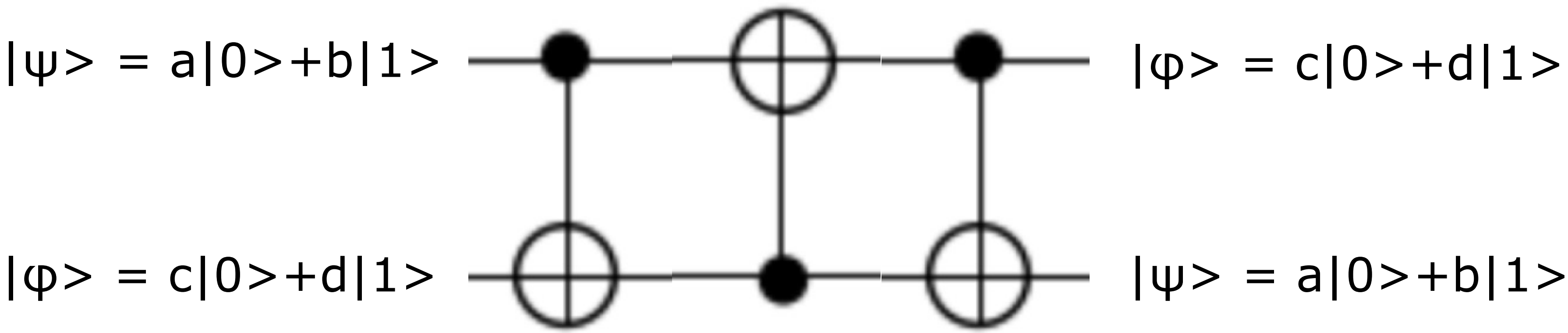
$$= ac|00\rangle+ad|10\rangle+bc|01\rangle+bd|11\rangle$$

$$= ca|00\rangle+cb|01\rangle+da|10\rangle+db|11\rangle$$

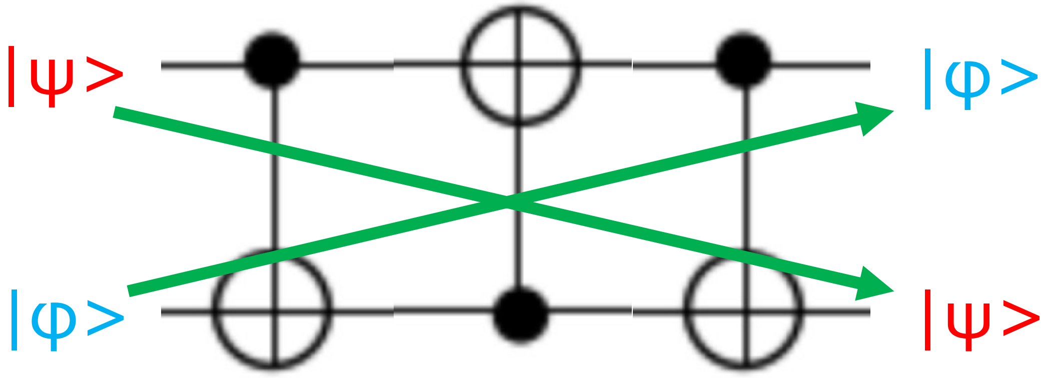
$$= (c|0\rangle+d|1\rangle)\otimes(a|0\rangle+b|1\rangle)$$

分離可能

CNOTを使ったswap回路 2



CNOTを使ったswap回路 2

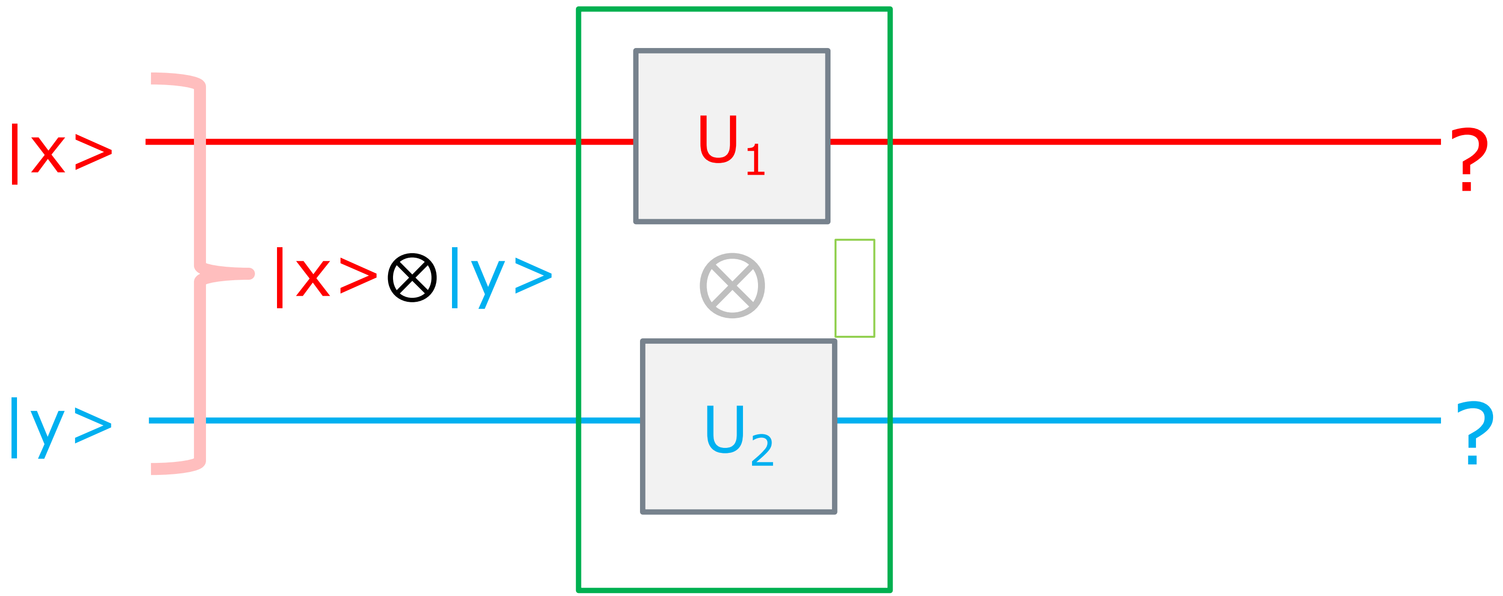


計算の準備

演算子のテンソル積の作用

演算子のテンソル積の作用

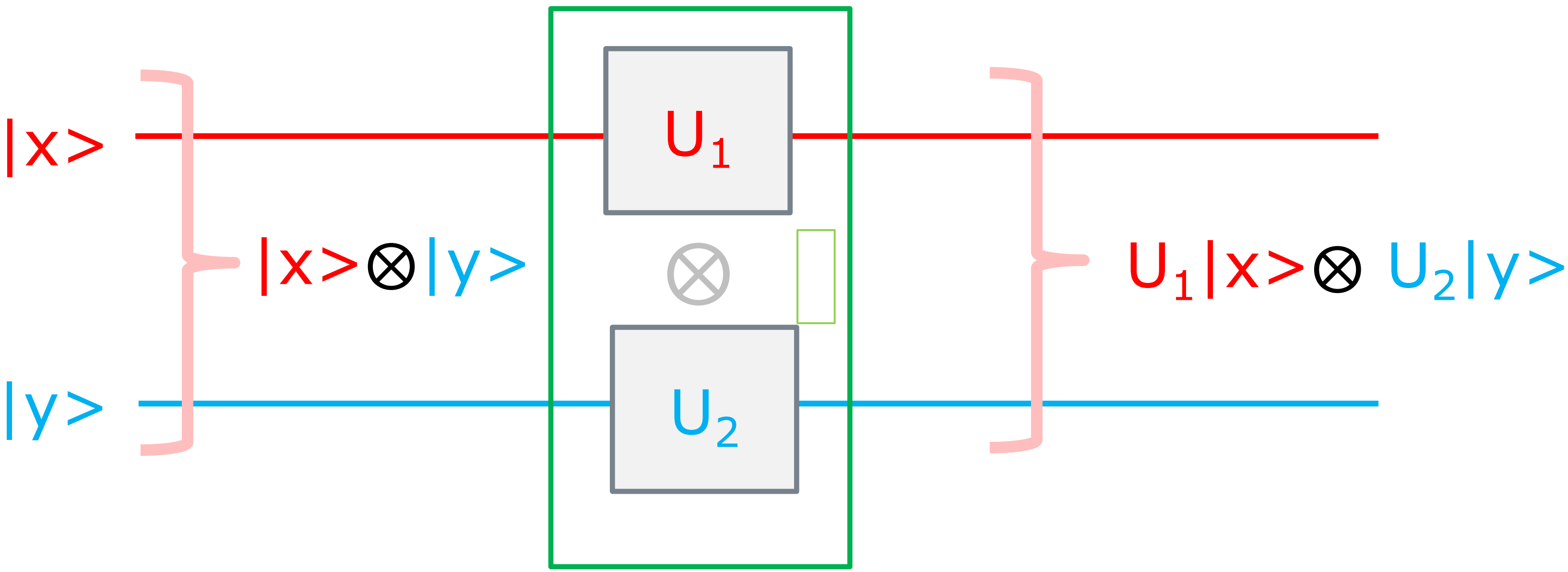
$U_1 \otimes U_2$



演算子のテンソル積の作用

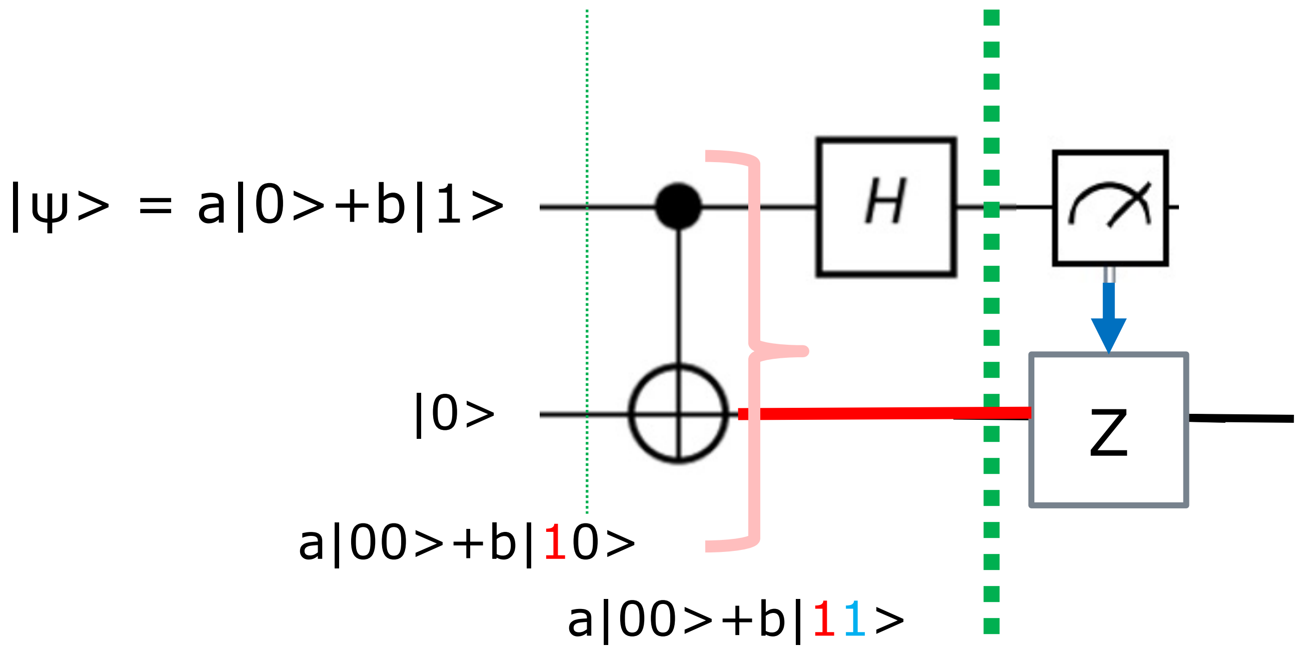
分離した入力

$U_1 \otimes U_2$



$$(U_1 \otimes U_2)(|x> \otimes |y>) = U_1|x> \otimes U_2|y>$$

演算子のテンソル積の作用
エンタングルした入力



$(\mathbf{H} \otimes \mathrm{I})(a|00\rangle+b|11\rangle)$
$=(a\mathbf{H}|0\rangle \otimes \mathrm{I}\,|0\rangle+b\mathbf{H}|1\rangle \otimes \mathbf{I}|1\rangle)$
$=a(|00\rangle+|10\rangle)+b(|01\rangle-|11\rangle)$

Bit Flipper X と Phase Flipper Z

Bit Flipper X と Phase Flipper Z

$$X(\,a|0>+b|1>\,) = b|0>+a|1>$$

$$Z(\,a|0>+b|1>\,) = a|0>-b|1>$$

$$XZ(\,a|0>+b|1>\,) = X(a|0>-b|1>) = -b|0>+a|1>$$

$$ZX(\,a|0>+b|1>\,) = Z(b|0>+a|1>) = \quad b|0>-a|1>$$

$$\begin{tikzcd}
a|0>+b|1> \arrow[r, "X"] \arrow[d, "Z"'] & b|0>+a|1> \arrow[d, "Z"] \\
a|0>-b|1> \arrow[r, "X"] & \begin{array}{c} -b|0>+a|1> \\ b|0>-a|1> \end{array}
\end{tikzcd}$$

Bit Flipper X と Phase Flipper Z

$$
\begin{tikzcd}
a|0\rangle+b|1\rangle & b|0\rangle+a|1\rangle \arrow[l, "X"'] \\
a|0\rangle-b|1\rangle \arrow[u, "Z"] & -b|0\rangle+a|1\rangle \arrow[l, "X"'] \arrow[u, "Z"']
\end{tikzcd}
$$

$$X^2 = Z^2 = I$$

$$X(b|0\rangle+a|1\rangle) = a|0\rangle+b|1\rangle$$

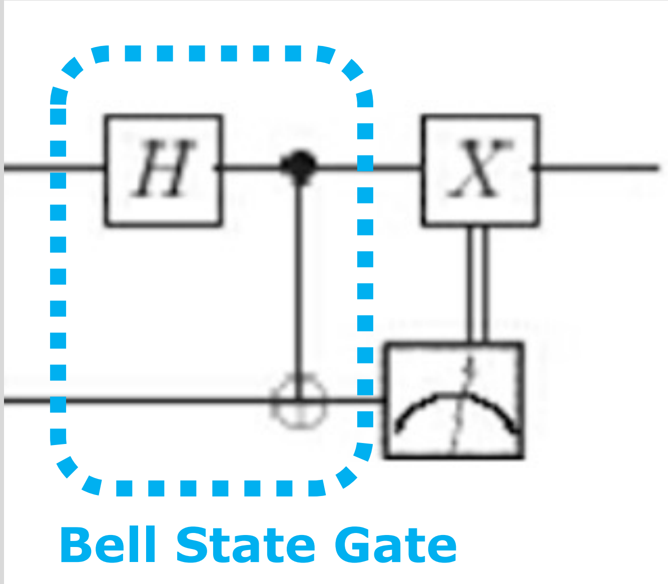
$$Z(a|0\rangle-b|1\rangle) = a|0\rangle+b|1\rangle$$

$$ZX(-b|0\rangle+a|1\rangle) = Z(a|0\rangle-b|1\rangle) = a|0\rangle+b|1\rangle$$

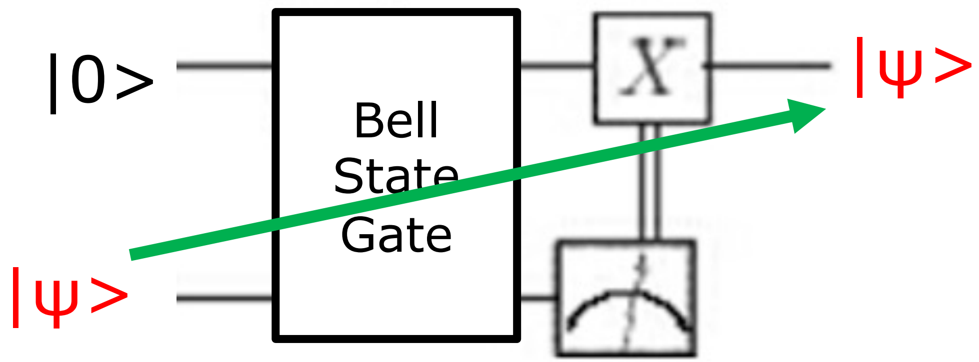
$$XZ(-b|0\rangle+a|1\rangle) = X(-b|0\rangle-a|1\rangle) = -a|0\rangle-b|1\rangle$$

BSG / BMGを使った量子状態の「交換」

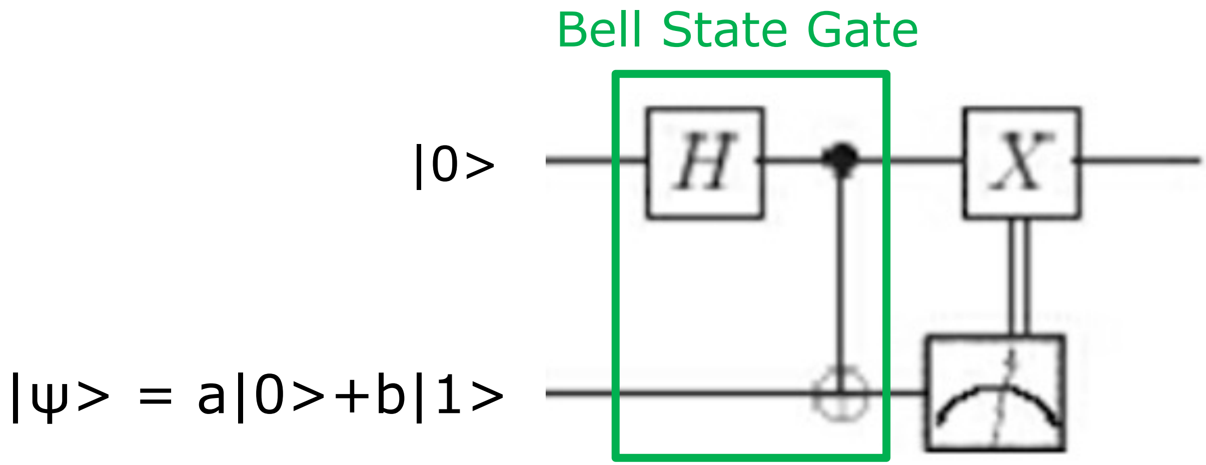
Bell State Gate を使った量子状態の「交換」



Bell State Gate を使った swap回路



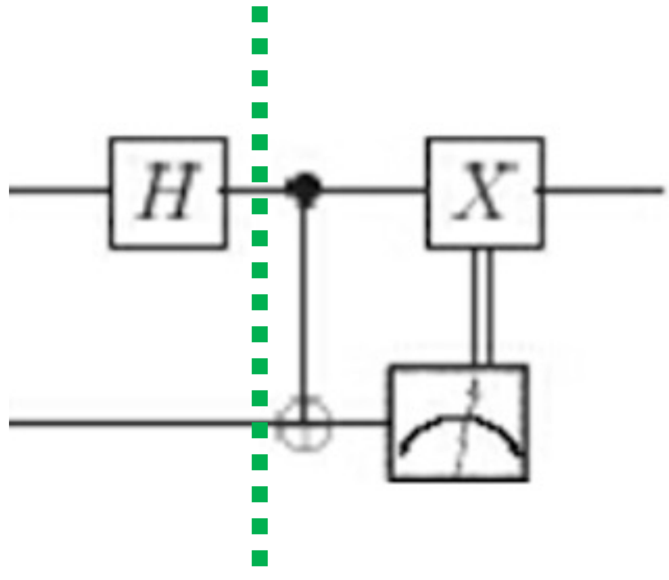
Bell State Gate を使った swap回路



Bell State Gate を使った swap回路

|0>

|ψ> = a|0>+b|1>

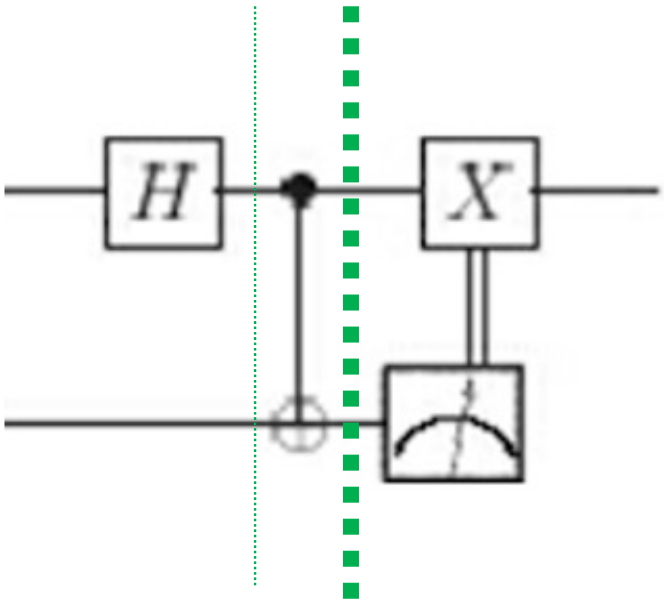


$$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2} \otimes (a|0\rangle+b|1\rangle)$$
$$= (a|00\rangle+b|01\rangle+a|10\rangle+b|11\rangle)/\sqrt{2}$$

Bell State Gate を使った swap回路

|0>

|ψ> = a|0>+b|1>

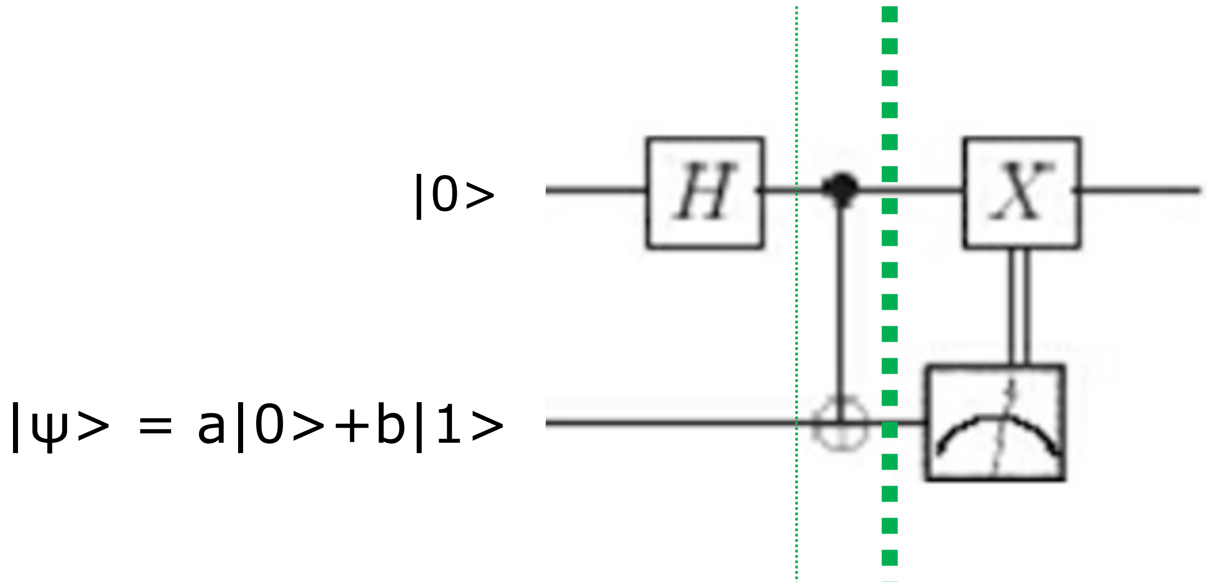


$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2} \otimes (a|0\rangle+b|1\rangle)$

$= (a|00\rangle+b|01\rangle+a|10\rangle+b|11\rangle)/\sqrt{2}$

$(a|00\rangle+b|01\rangle+a|11\rangle+b|10\rangle)/\sqrt{2}$

Bell State Gate を使った swap回路



(|0>+|1>)/$\sqrt{2}$ ⊗ (a|0>+b|1>)

= (a|00>+b|01>+a|10>+b|11>)/$\sqrt{2}$

(a|00>+b|01>+a|11>+b|10>)/$\sqrt{2}$

第二ビットが0の場合　a|00>+b|10> = (a|0>+b|1>) ⊗ |0>

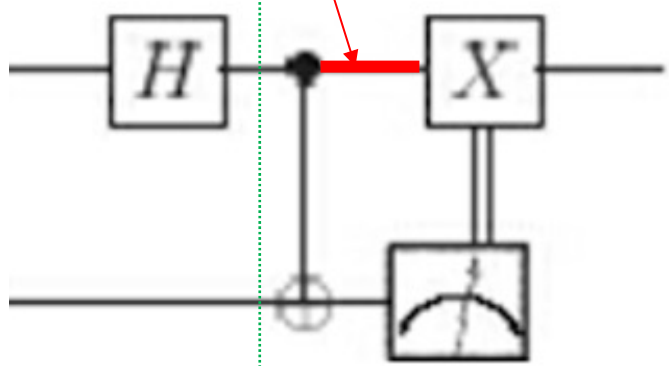
第二ビットが1の場合　a|11>+b|01> = (a|1>+b|0>) ⊗ |1>

Bell State Gate を使った swap回路

第二ビットが0の場合　$a|0\rangle+b|1\rangle$
第二ビットが1の場合　$a|1\rangle+b|0\rangle$

$|0\rangle$

$|\psi\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$



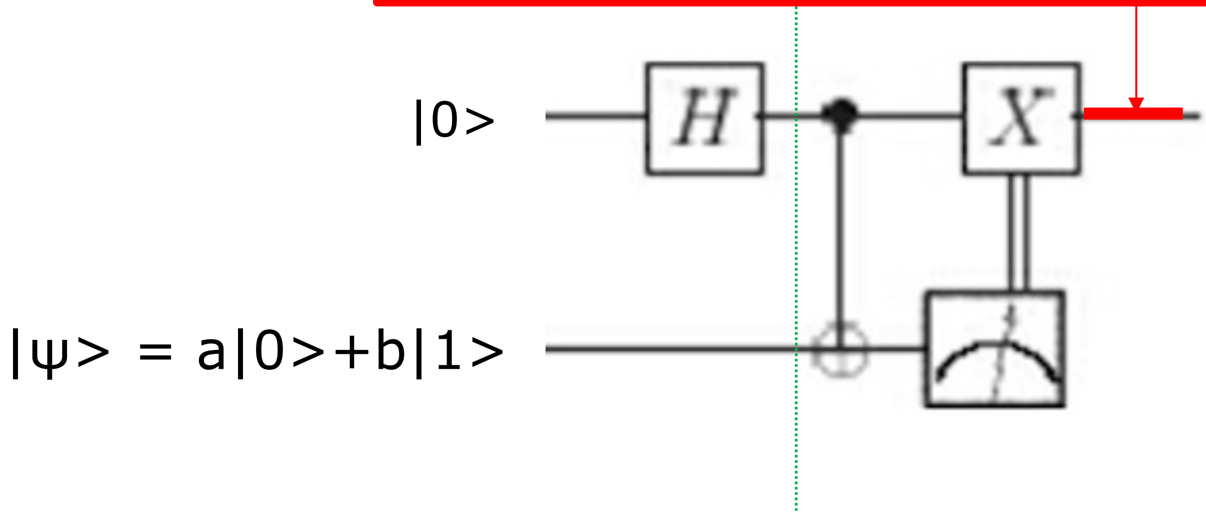
$$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2} \otimes (a|0\rangle+b|1\rangle)$$
$$= (a|00\rangle+b|01\rangle+a|10\rangle+b|11\rangle)/\sqrt{2}$$

$$(a|00\rangle+b|01\rangle+a|11\rangle+b|10\rangle)/\sqrt{2}$$

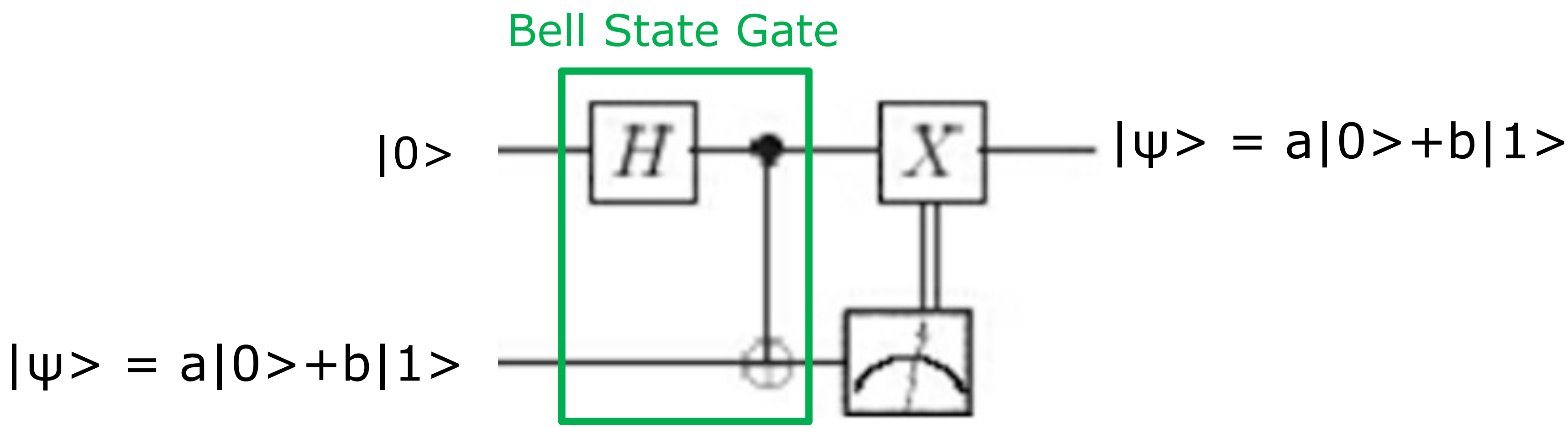
第二ビットが0の場合　$a|00\rangle+b|10\rangle = (a|0\rangle+b|1\rangle) \otimes |0\rangle$
第二ビットが1の場合　$a|11\rangle+b|01\rangle = (a|1\rangle+b|0\rangle) \otimes |1\rangle$

Bell State Gate を使った swap回路

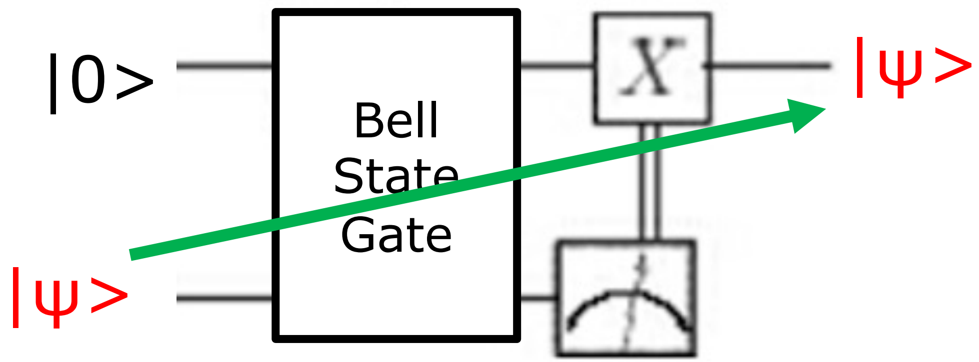
第二ビットが0の場合　a|0>+b|1>
第二ビットが1の場合　X(a|1>+b|0>) = a|0>+b|1>



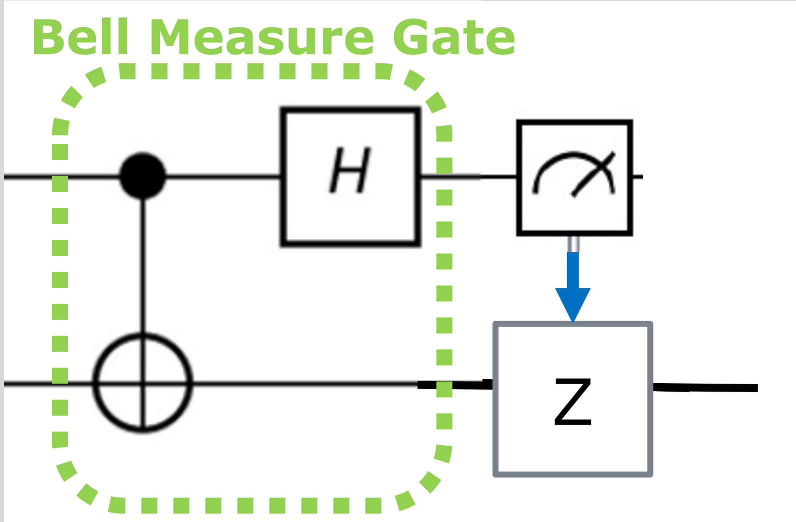
Bell State Gate を使った swap回路



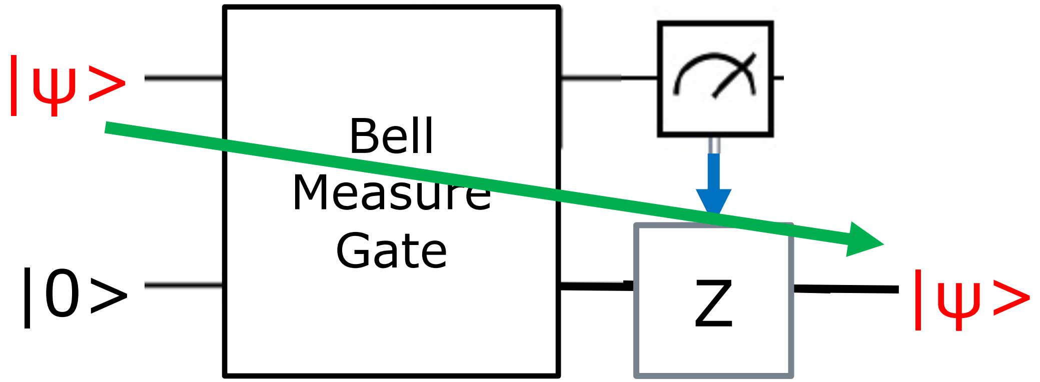
Bell State Gate を使った swap回路



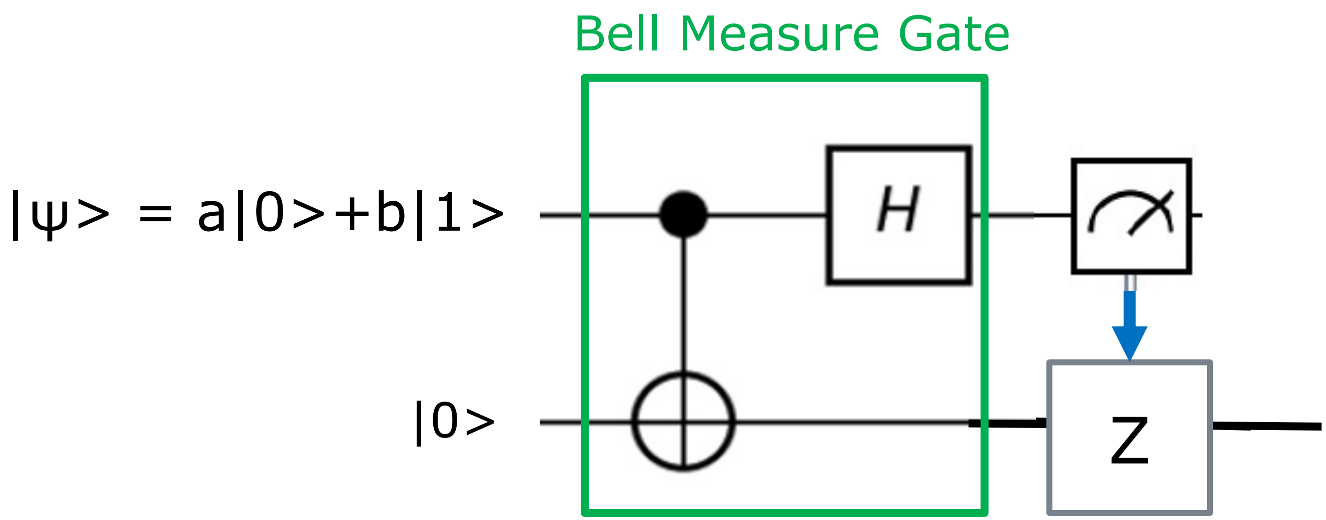
Bell Measure Gate を使った
量子状態の「交換」



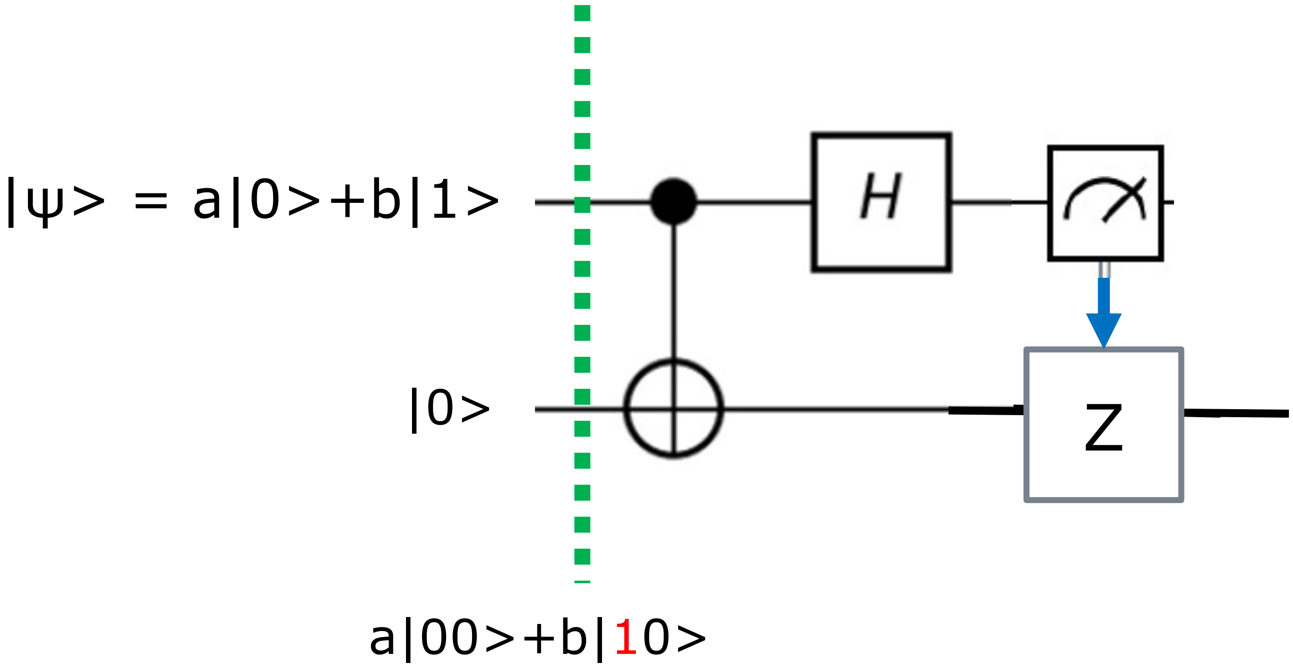
Bell Measure Gate を使った swap回路



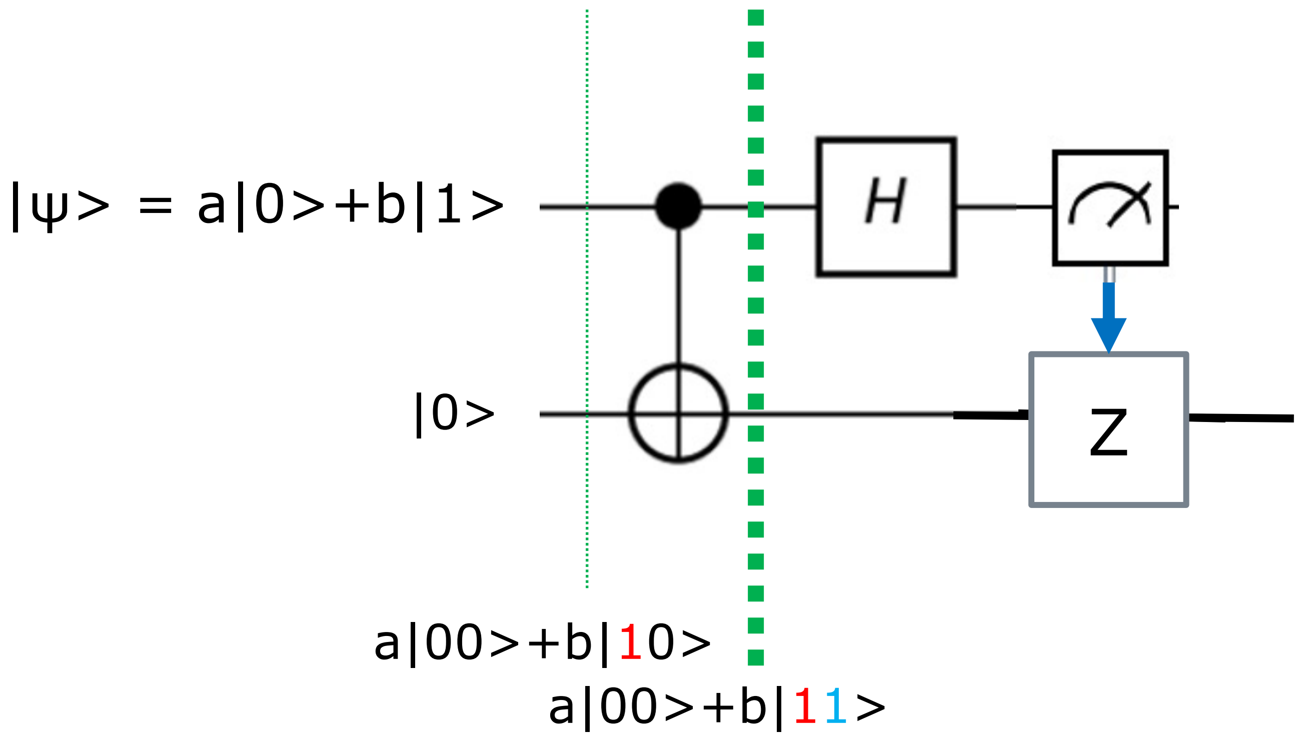
Bell Measure Gate を使った swap回路



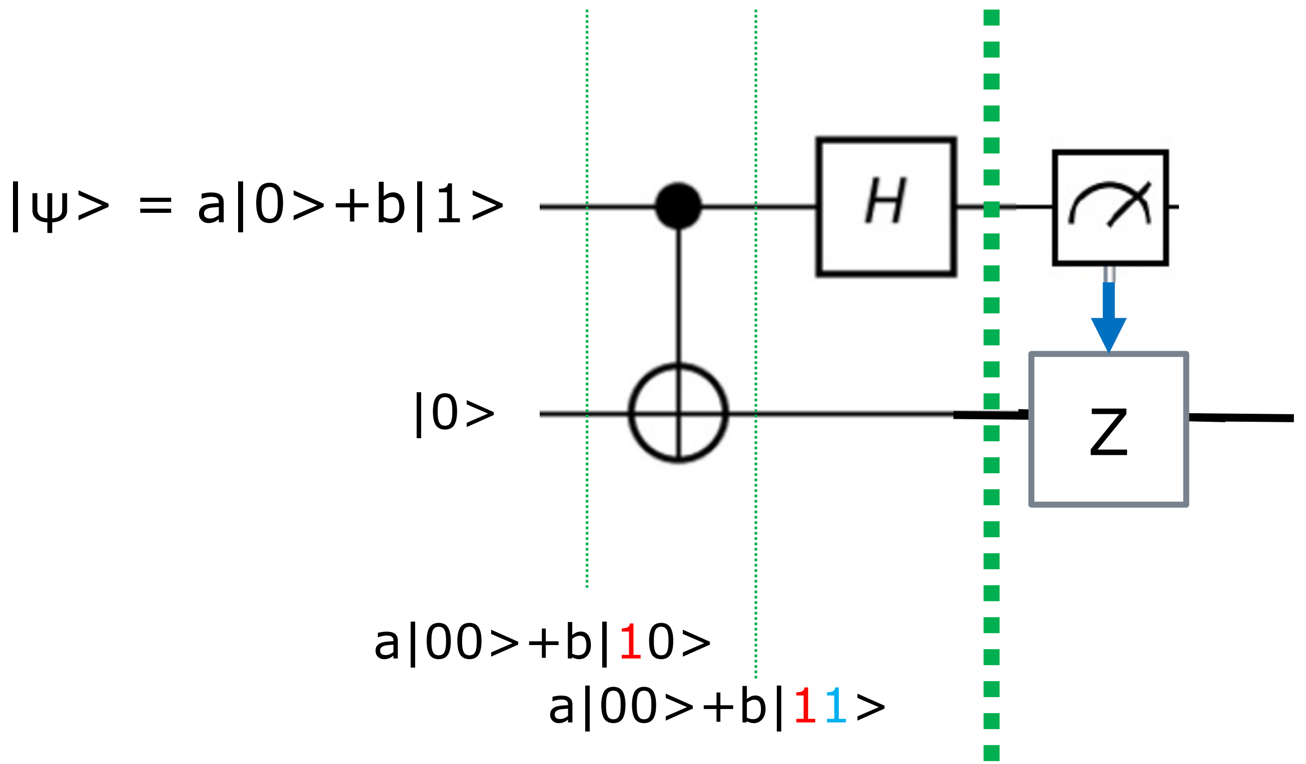
Bell Measure Gate を使った swap回路



Bell Measure Gate を使った swap回路



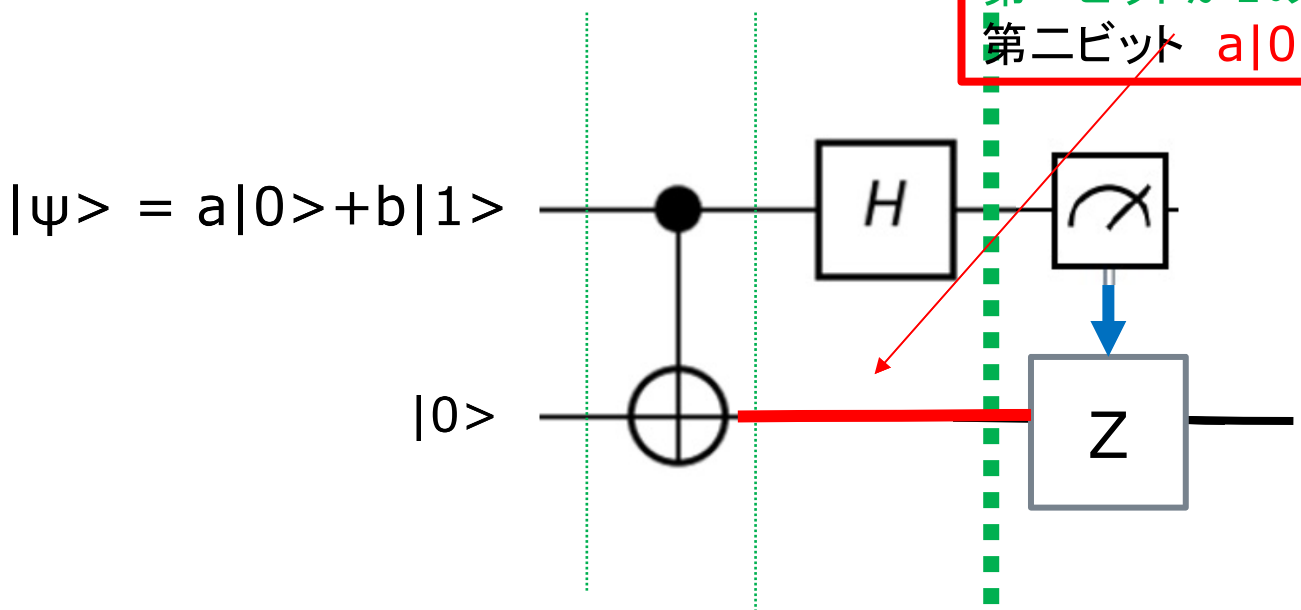
Bell Measure Gate を使ったswap回路



$$(\mathbf{H} \otimes \mathrm{I})\ a|00\rangle+b|11\rangle$$
$$=(a\mathbf{H}|0\rangle \otimes \mathrm{I}\,|0\rangle+b\mathbf{H}|1\rangle \otimes \mathbf{I}|1\rangle)$$
$$=a(|00\rangle+|10\rangle)+b(|01\rangle-|11\rangle)$$

Bell Measure Gate を使った swap回路

第一ビットが0の時　a|00>+b|01>
第二ビット　a|0>+b|1>
第一ビットが1の時　a|10>−b|11>
第二ビット　a|0>−b|1>



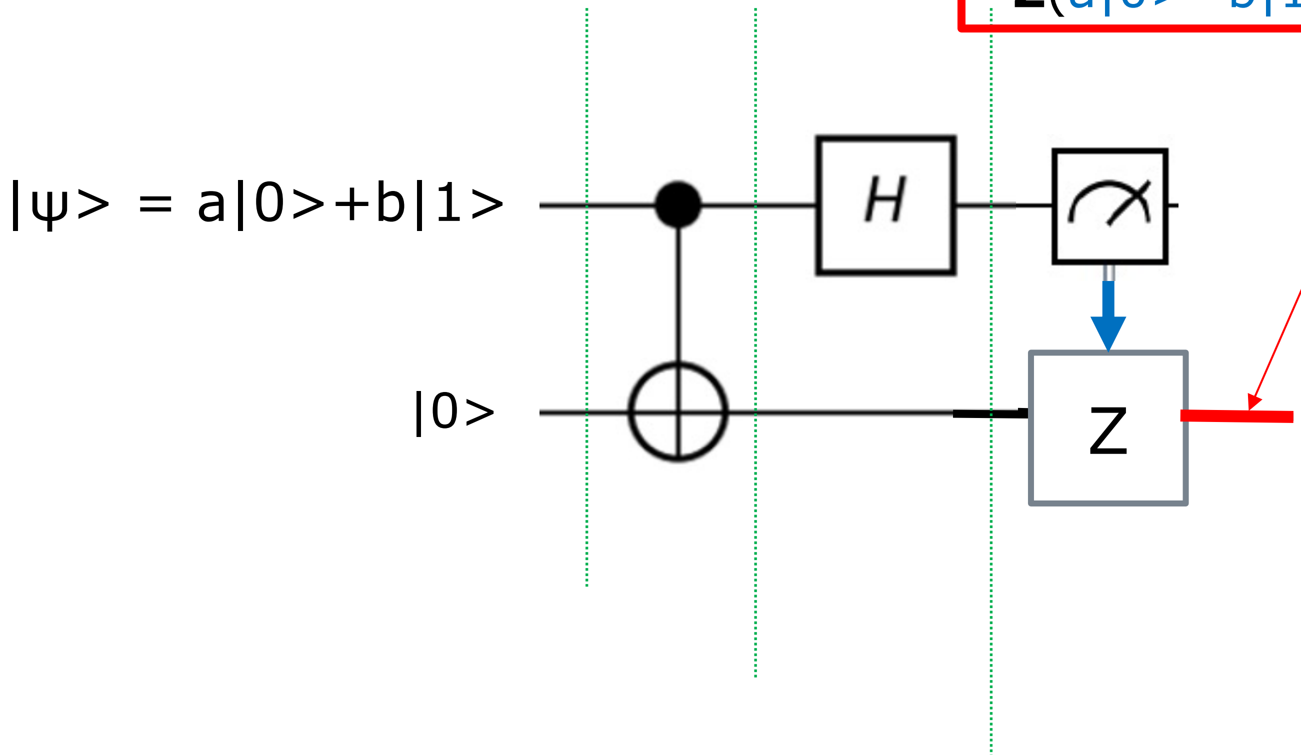
a|00>+b|10>

a|00>+b|11>

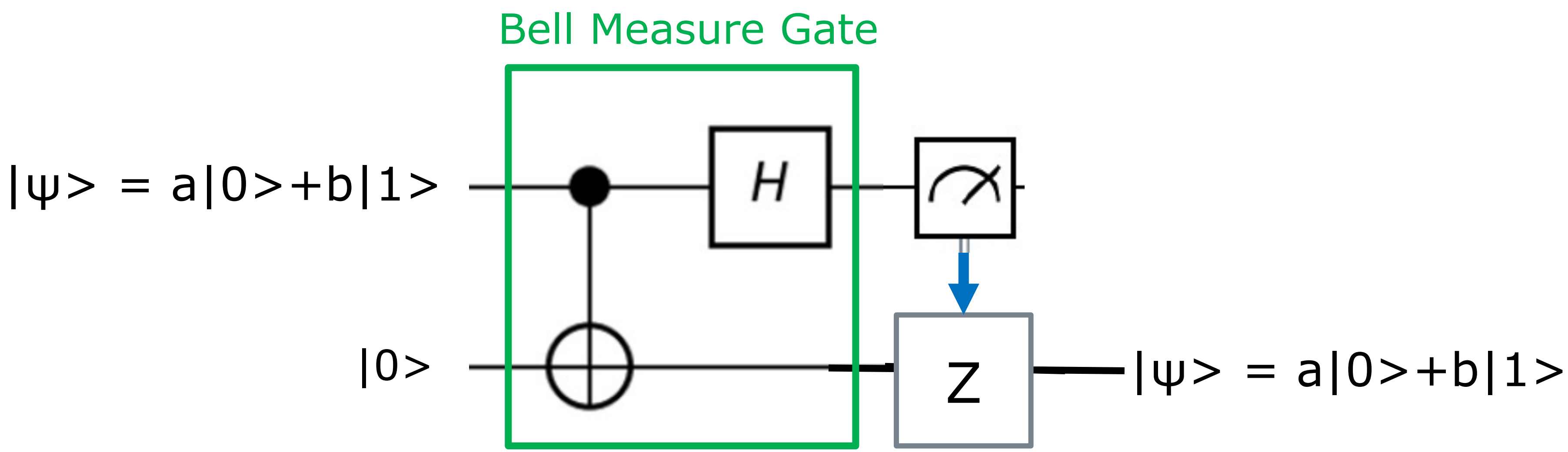
(**H** ⊗ I) a|00>+b|11>
=(a**H**|0> ⊗I |0>+b**H**|1> ⊗ **I**|1>)
=a(|00>+|10>)+b(|01>−|11>)

Bell Measure Gate を使った swap回路

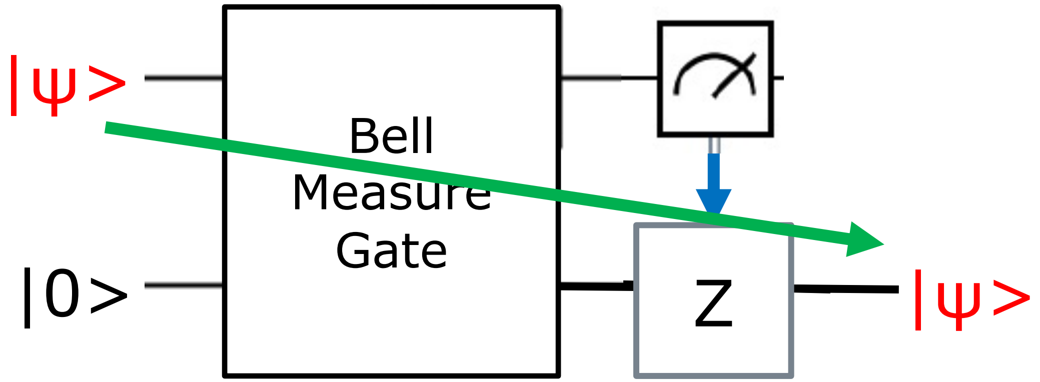
第一ビットが0の時　　a|0>+b|1>
第一ビットが1の時
Z(a|0>−b|1>) = a|0>+b|1>



Bell Measure Gate を使った swap回路



Bell Measure Gate を使った swap回路



Part III

量子テレポーテーション

「量子通信入門」Part III
量子テレポーテーション

- □ Superdense Coding
  - 基本的な考え方
  - $|\Phi^+>$から他のBell Stateを作る方法
  - Superdense Coding回路
- □ 量子テレポーテーション
  - 量子テレポーテーション回路の概観
  - 実際に計算するための準備
  - 量子テレポーテーション回路の前段部を計算する
  - 量子テレポーテーション回路の後段部を計算する
  - 他のBell State を使ってテレポーテーション回路を作る
- □ Entanglement Swapping

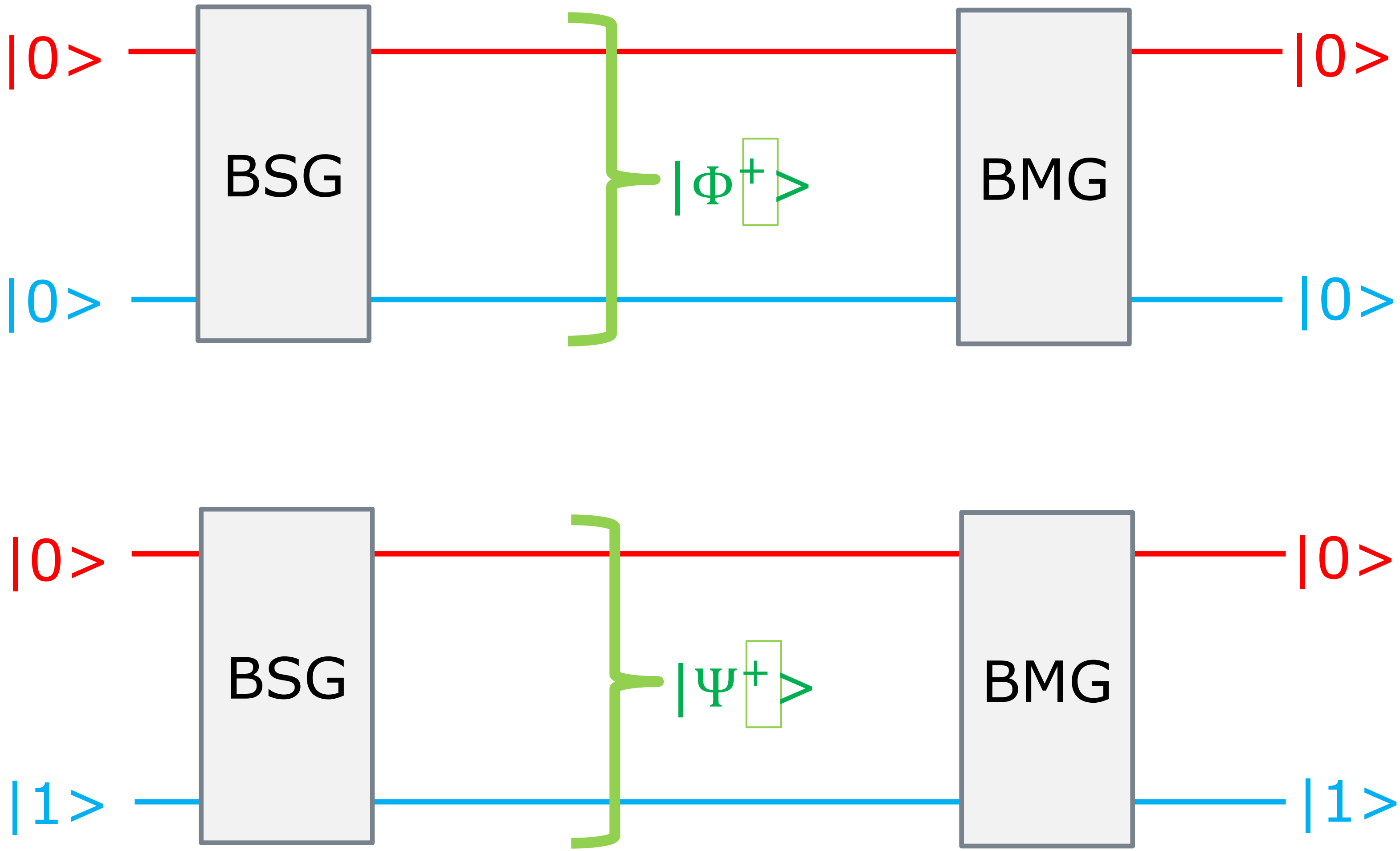
Superdense Coding

Superdense Coding

- Superdense Coding は、AからBに一個のqubitを送ることで、AからBに二個の古典ビットを送る。
- 量子テレポーテーションは、AからBに二個の古典ビットを送ることで、AからBに一個のqubitを送る。
- いずれの量子通信も、AとBのあいだでエンタングルメント状態の量子を共有する。
- 基本となる量子回路は、BSG（Bell State Gate）とBMG(Bell Measure Gate)である。

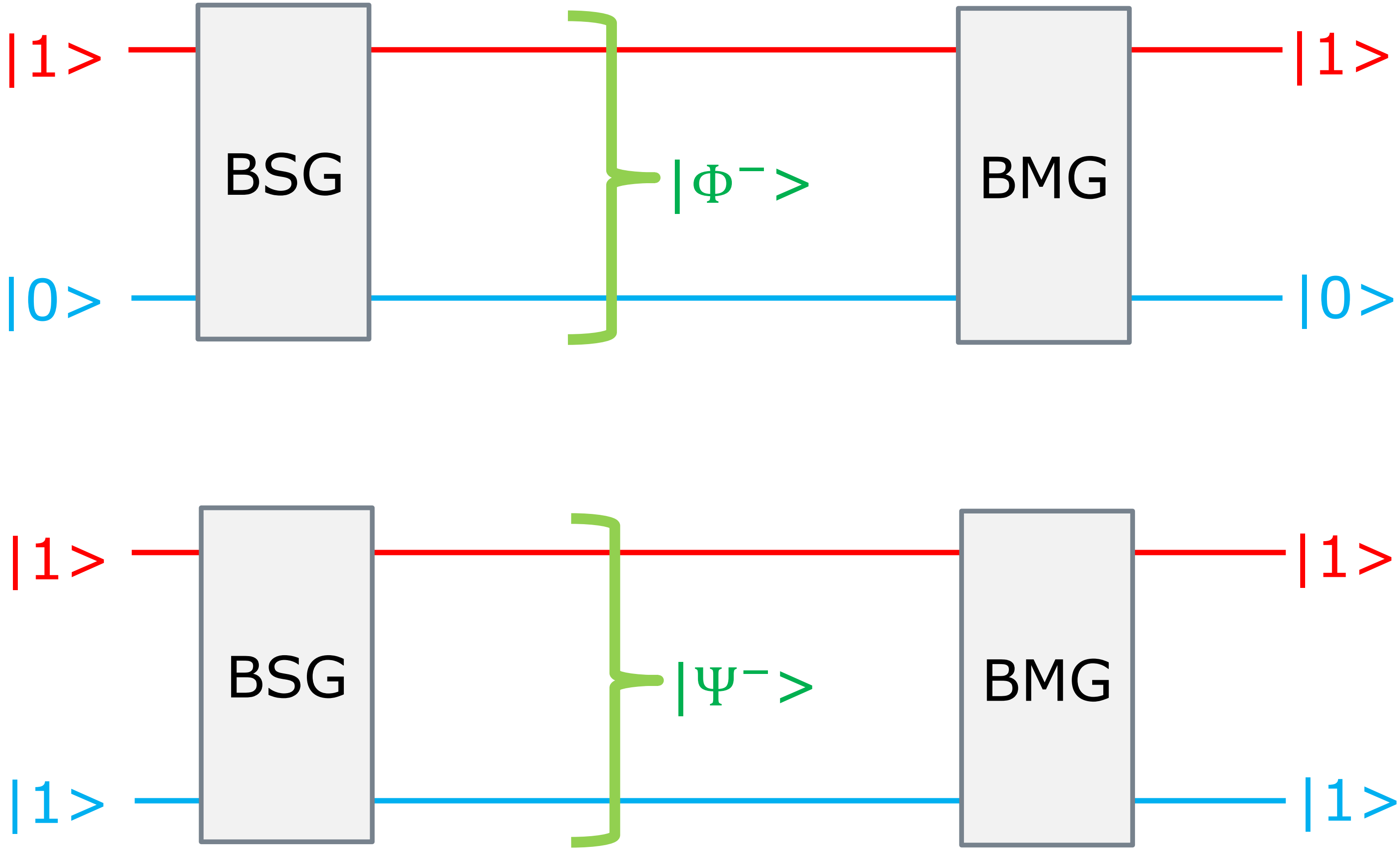
基本的な考え

$BSG=BMG^{\dagger}$ かつ $BMG=BSG^{\dagger}$
$BSG \circ BMG=BMG \circ BSG=I$



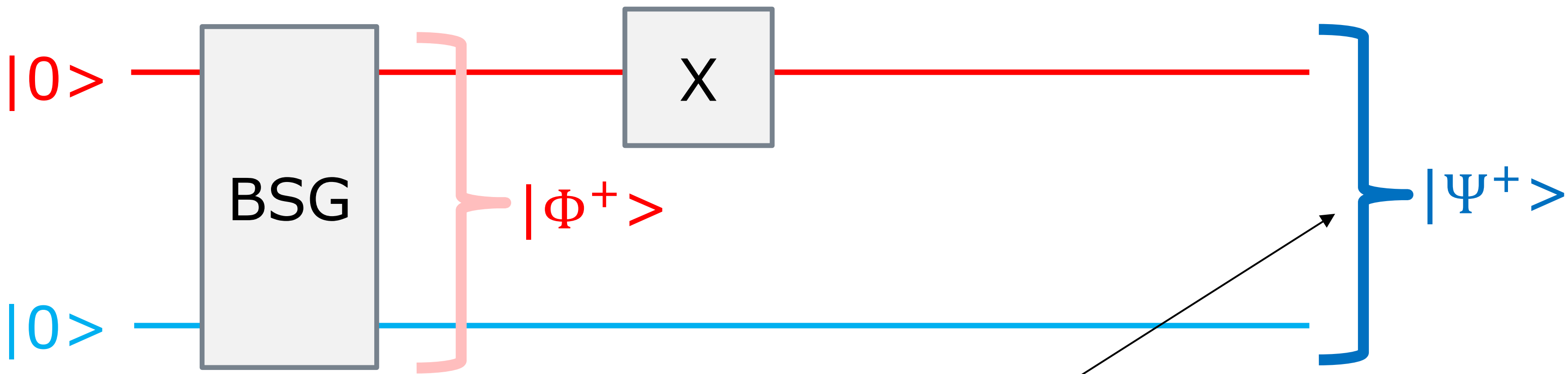
BSG=BMG† かつ BMG=BSG†

BSG∘BMG=BMG∘BSG=I



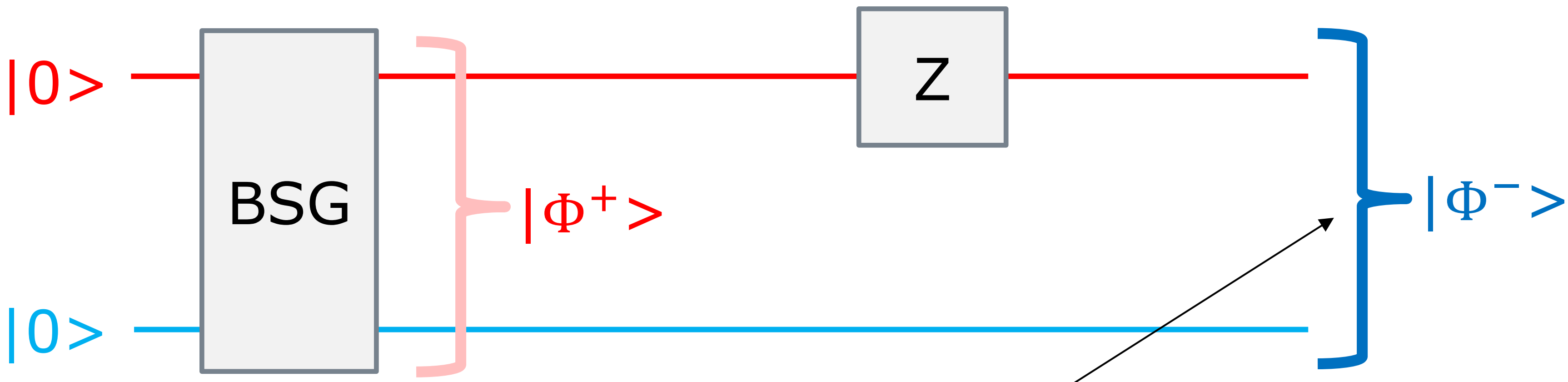
$|\Phi^+>$から他のBell Stateを作る方法

$|\Phi^+>$から$|\Psi^+>$を作る



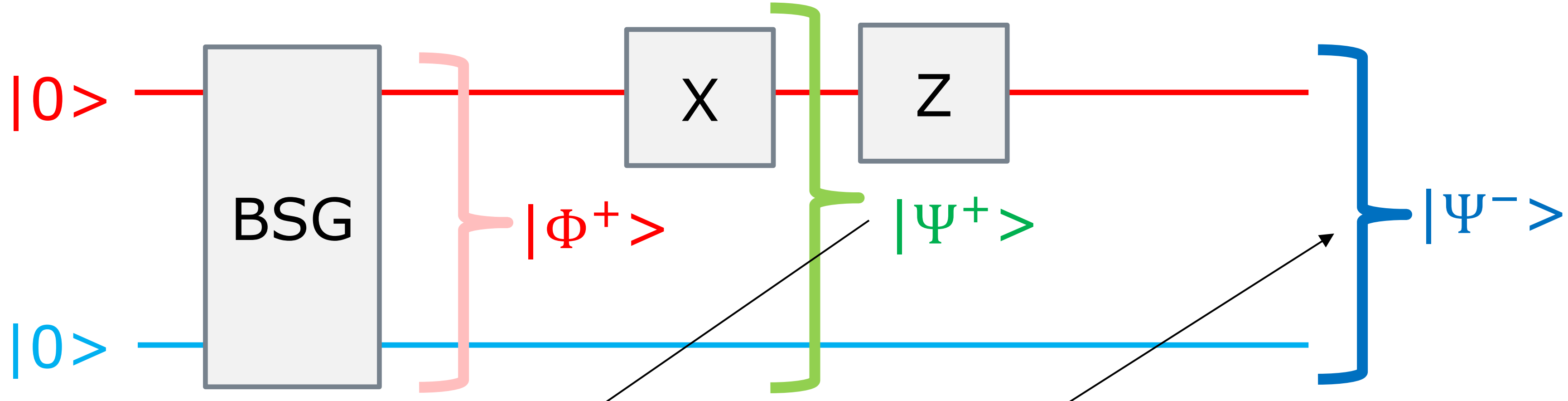
$$
\begin{aligned}
&(X \otimes I)|\Phi^+> = (X \otimes I)(|00>+|11>)/\sqrt{2} \\
&= (X|0> \otimes I|0> + X|1> \otimes I|1>)/\sqrt{2} \\
&= (|1> \otimes |0> + |0> \otimes |1>)/\sqrt{2} \\
&= (|10>+|01>)/\sqrt{2} \\
&= |\Psi^+>
\end{aligned}
$$

$|\Phi^+\rangle$から$|\Phi^-\rangle$を作る



$$
\begin{aligned}
(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (Z \otimes I)(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (Z|0\rangle \otimes I|0\rangle + Z|1\rangle \otimes I|1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2} \\
&= |\Phi^-\rangle
\end{aligned}
$$

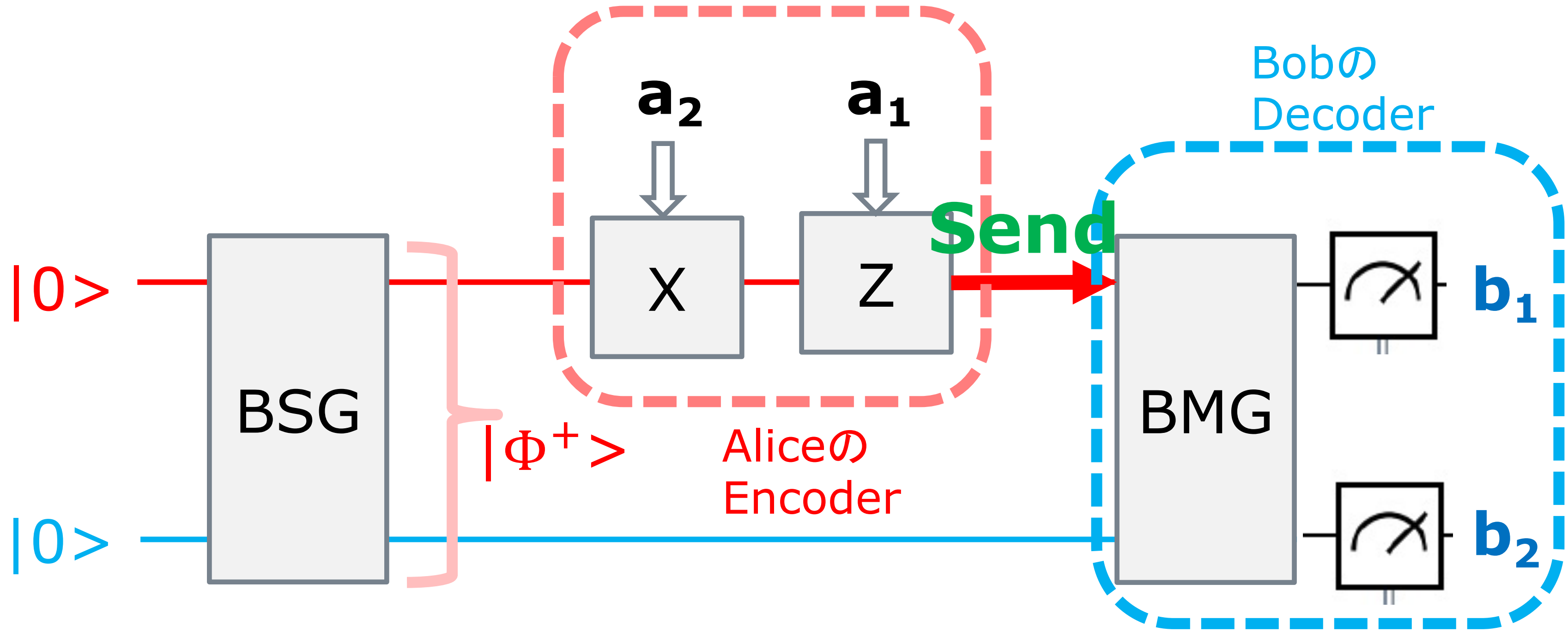
$|\Phi^+>$から$|\Psi^->$を作る



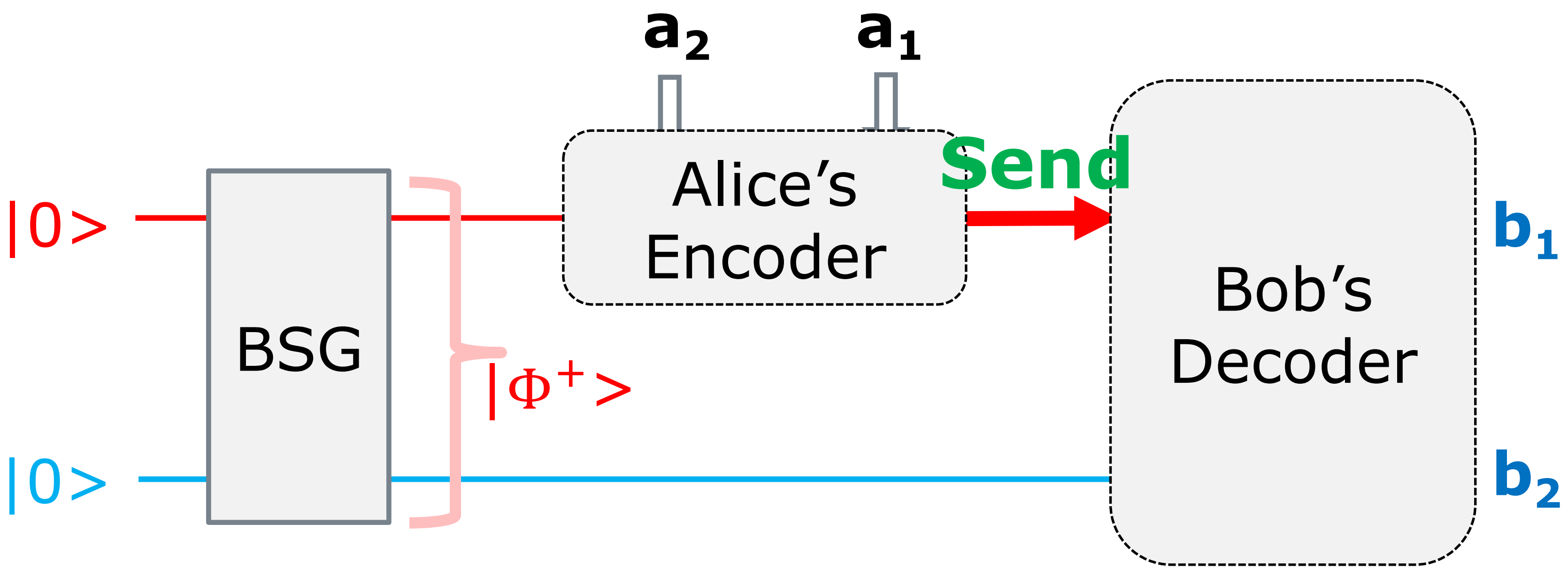
$$(Z \otimes I)|\Psi^+> = (Z \otimes I)(|01>+|10>)/\sqrt{2}$$
$$= (Z|0> \otimes I|1> + Z|0> \otimes I|0>)/\sqrt{2}$$
$$= (|0> \otimes |1> - |1> \otimes |0>)/\sqrt{2}$$
$$= (|01> - |10>)/\sqrt{2}$$
$$= |\Psi^->$$

Superdense Coding回路

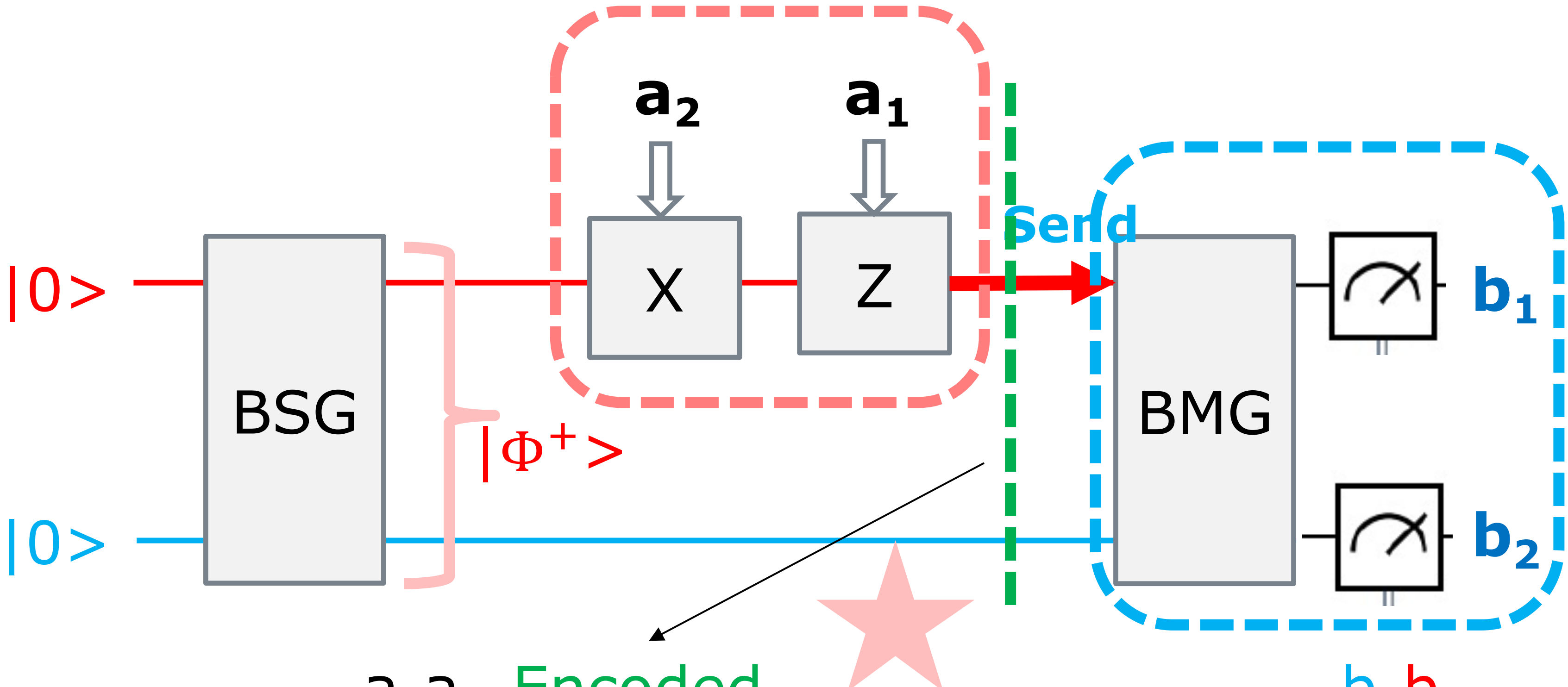
Superdense Coding回路



Superdense Coding回路

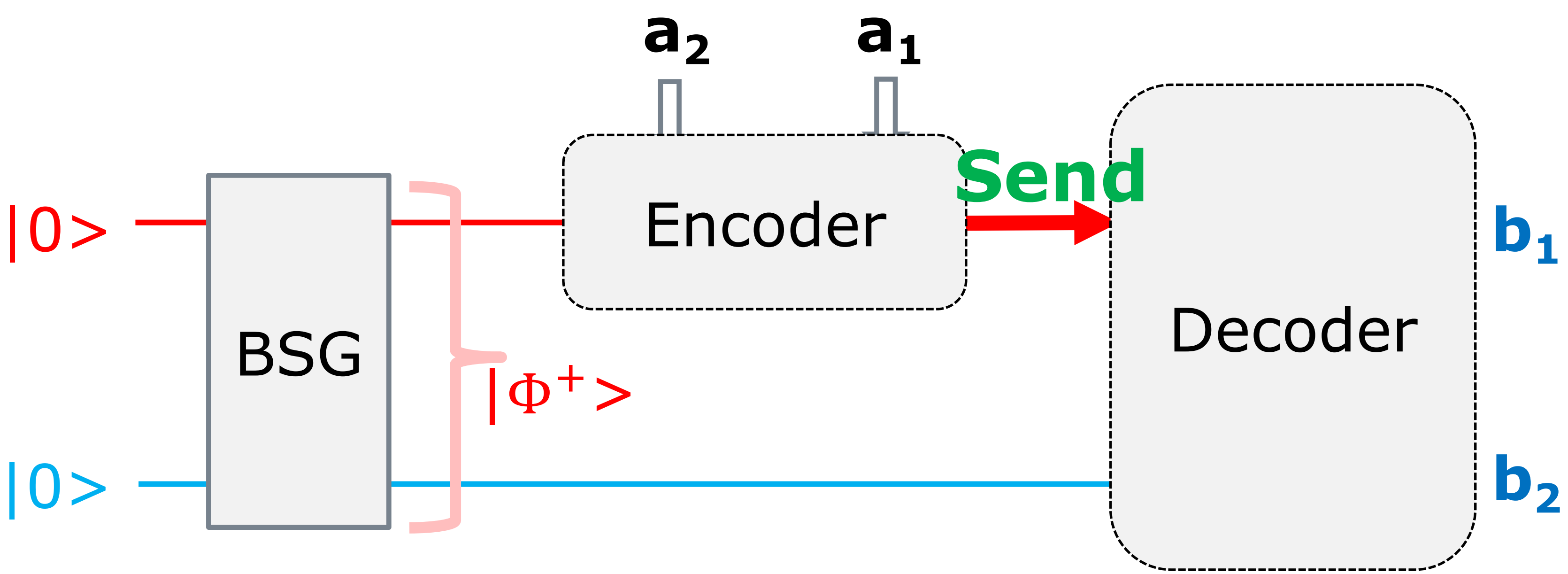


$BMG \circ BSG = I$



$a_2 a_1$	Encoded		$b_2 b_1$
0 0	$\|\Phi^+>$	$BMG\|\Phi^+> = \|00>$	0 0
0 1	$\|\Phi^->$	$BMG\|\Phi^-> = \|10>$	0 1
1 0	$\|\Psi^+>$	$BMG\|\Psi^+> = \|01>$	1 0
1 1	$\|\Psi^->$	$BMG\|\Psi^-> = \|11>$	1 1

AliceからBobにqubit を送ることで、Aliceの古典ビットa_2a_1 はBobのb_2b_1に送られる



a_2a_1	b_2b_1
0 0	0 0
0 1	0 1
1 0	1 0
1 1	1 1

量子テレポーテーション

量子テレポーテーション

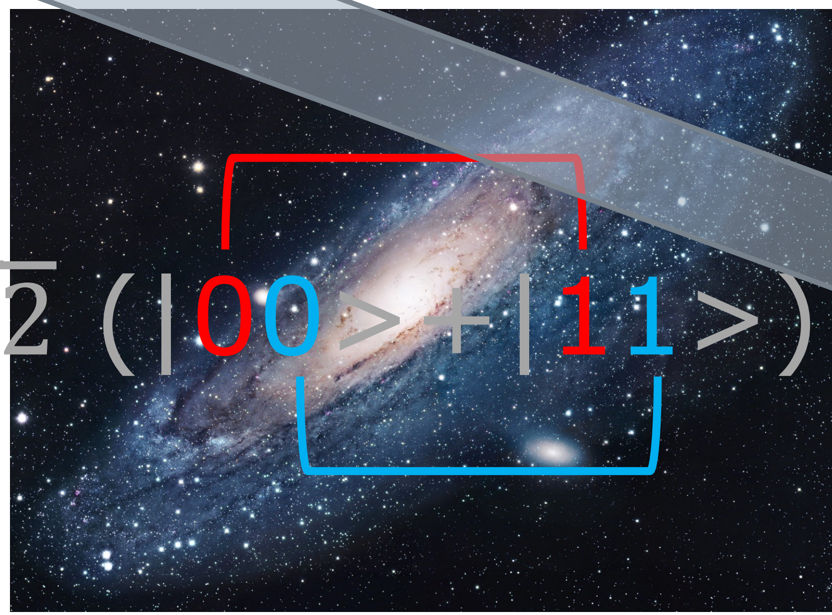
- AliceとBobは、ずいぶん昔にあっていたのだが、今は、遠くに離れて住んでいる。
- 一緒にいた時に、EPRペアを作って、別れる時に、それぞれがEPRペアの一つのqubitを持つようにした。
- 数年経ってから、Bobは遠くにいるのだが、Aliceのミッションは受け取ったqubit $|\psi>$をBobに送ることだった。
- 彼女は、qubitの状態を知らない。さらに、Bobには、古典的な手段でしか情報を送れない。
- この時、Aliceは、このミッションを遂行できるだろうか？

量子テレポーテーション

$|\Psi>$

Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$



$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$

$|\Psi>$?

Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$

量子テレポーテーションが可能とすること

- Aliceは、Bobに送らなければならない そのqubit $|\Psi\rangle$ の状態を知らない。知ろうとして、それを観測すれば、その状態は失われてしまう。
- たとえ彼女が$|\Psi\rangle$の状態を知っていたとしても、$|\Psi\rangle$の状態を正確に記述するには、無限の量の古典情報が必要になる。それをBobに伝えるには無限の時間が必要になる。

- 量子テレポーテーションは、エンタングルしたEPRペアを利用して、ほんの少しの古典的コミュニケーションの手間だけで、AliceがBobに $|\Psi\rangle$ の状態を送ることを可能にする。

量子テレポーテーション Aliceが行うこと

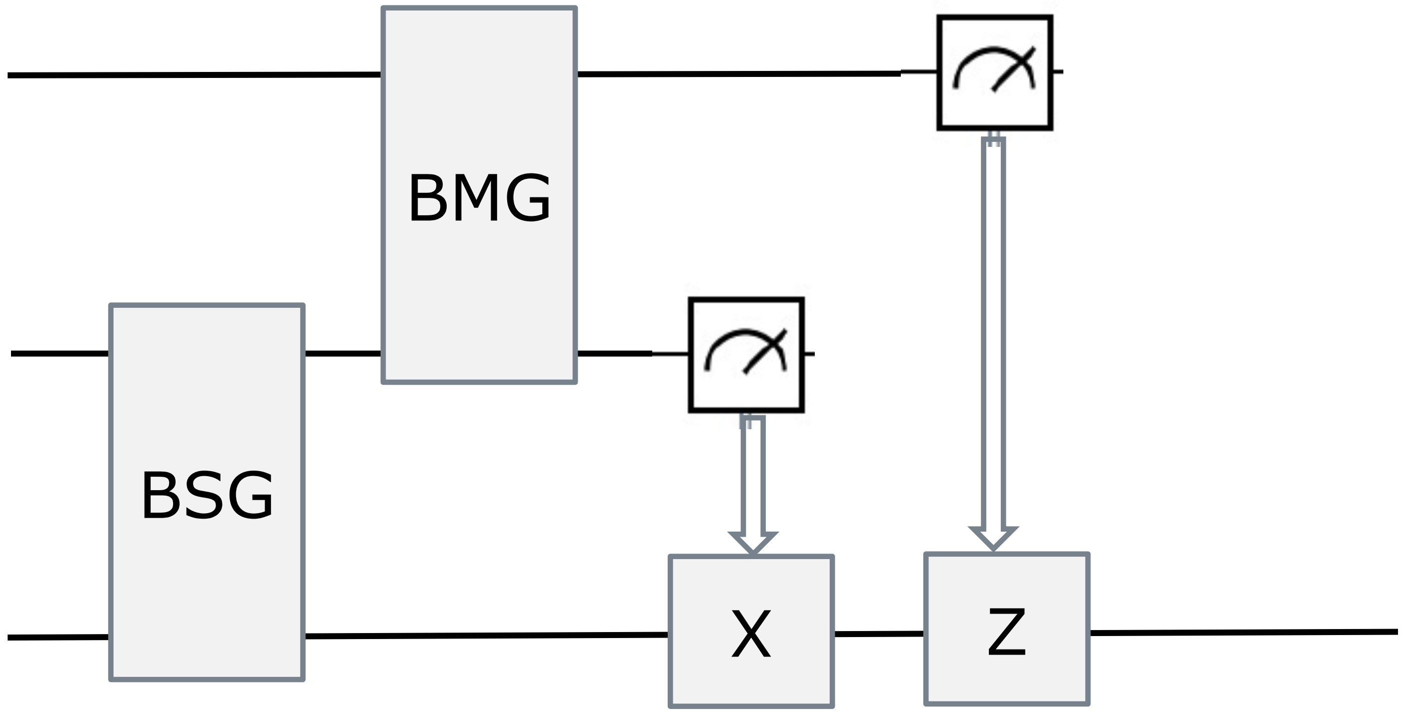
- Aliceは、彼女の持つEPRペアの片方に作用して、彼女が持つ二つのqubitを測定して、四つの可能な古典的結果 00, 01, 10, 11 を得る。
- 彼女は、この情報を、古典的な手段でBobに送る。
- Aliceの古典的なメッセージに基づいて、Bobは四つのうち一つの操作を選んで彼のEPRペアの片方に適応する。
- 驚くべきことに、それだけで、Bobはオリジナルの状態 $|\Psi\rangle$ を復元できるのである。

量子テレポーテーション Bobが行うこと

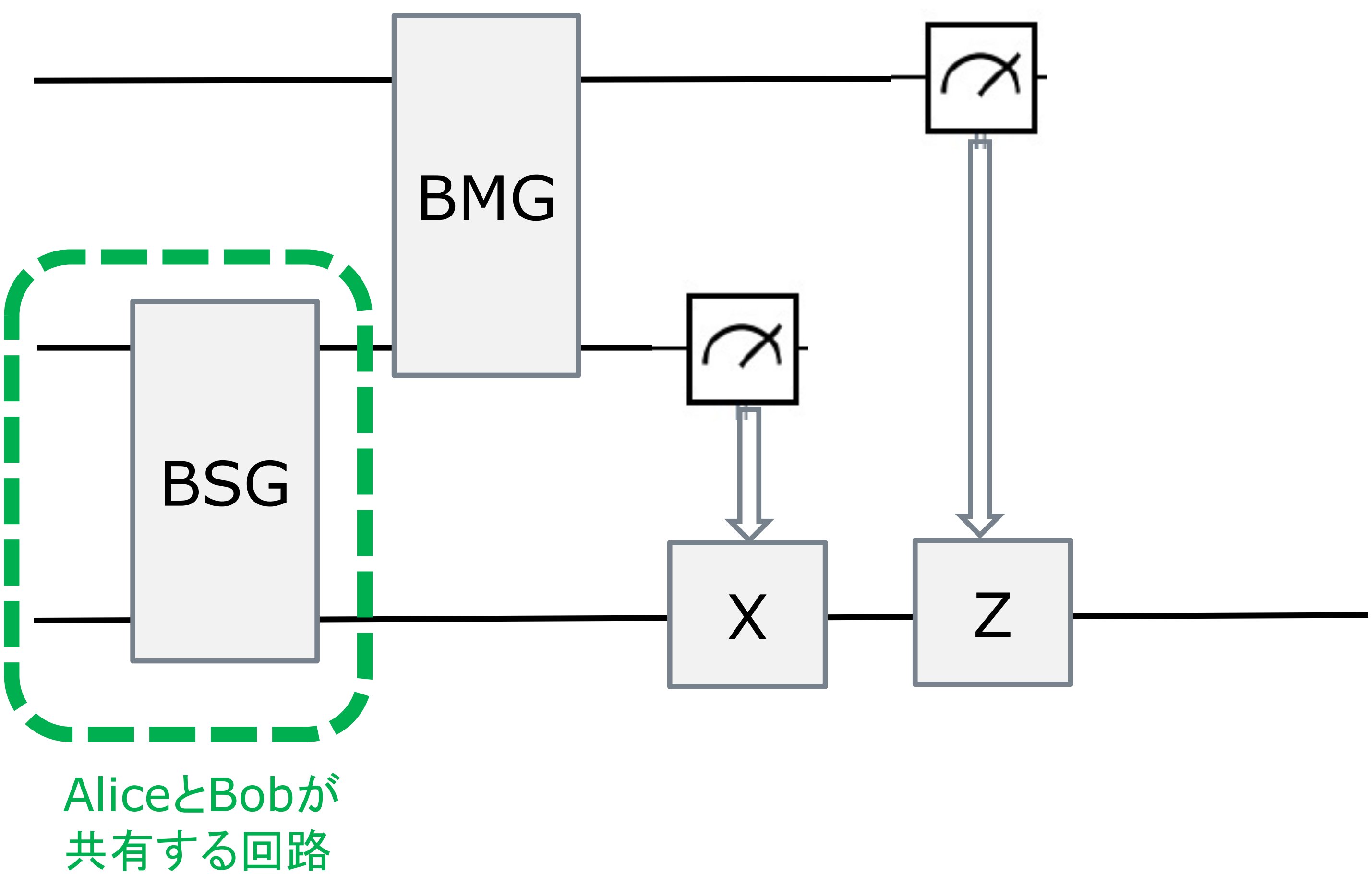
- Aliceの出力の測定に従って、Bobのqubitは四つの可能な状態をとることがわかる。
- もちろん、どの状態にあるかを知るためには、BobはAliceの測定の結果を知らされていなければならない。この事実によって、情報の伝達が光より速くなることは避けられることになる。
- いったんBobが測定の結果を知れば、Bobはその状態を、適当な量子ゲートを適応して「修正」して$|\Psi\rangle$を復活できる。
- 例えば、測定の結果が00であれば、Bobは何もする必要はない。測定が01の時には、Xゲートを適用すればいい。10ならZゲートを適用すればいい。もし、11ならば、最初にXゲートを、続いてZゲートを適用すればいい。

量子テレポーテーション回路の概観

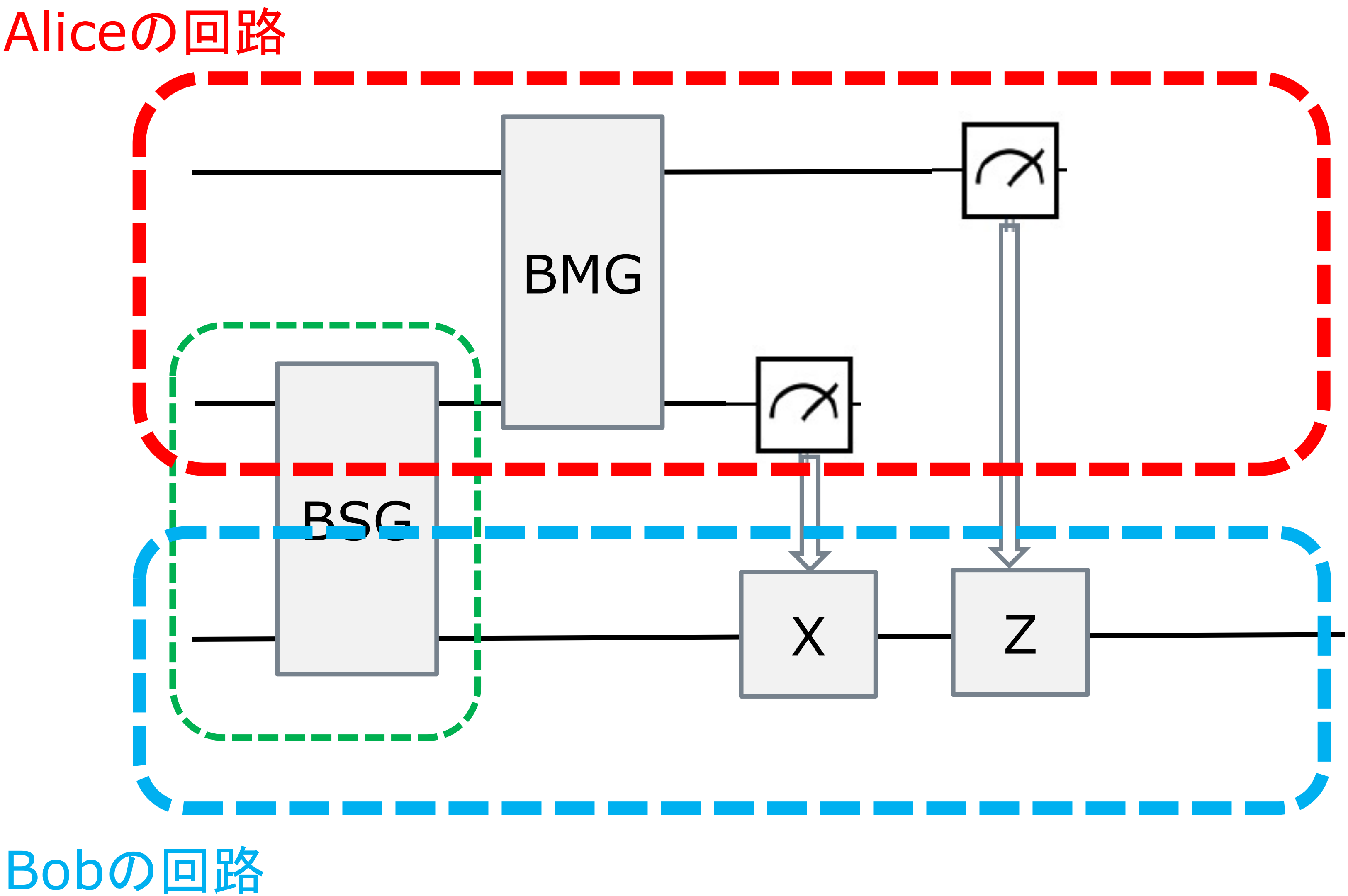
量子テレポーテーション回路



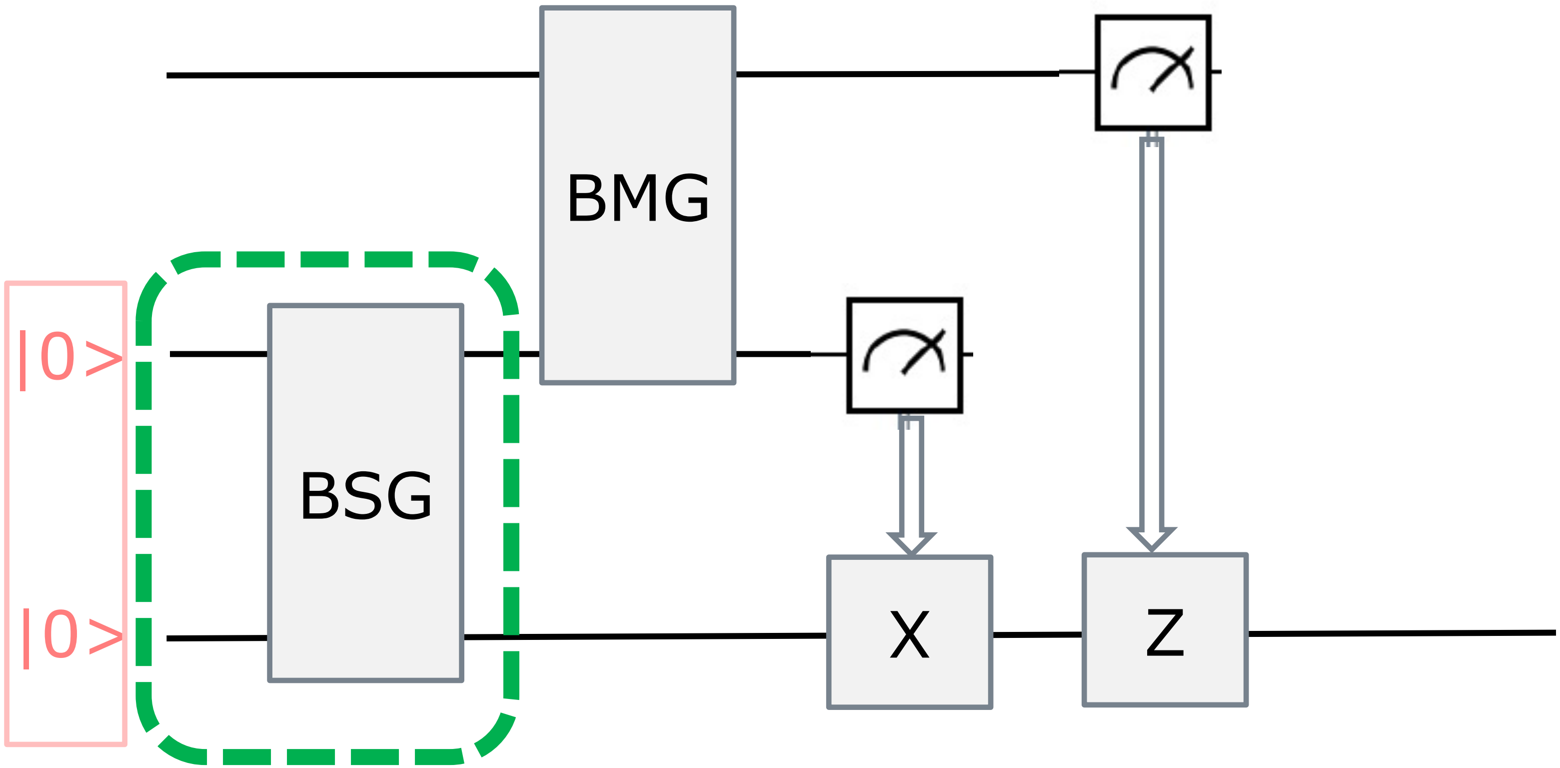
量子テレポーテーション回路



量子テレポーテーション回路

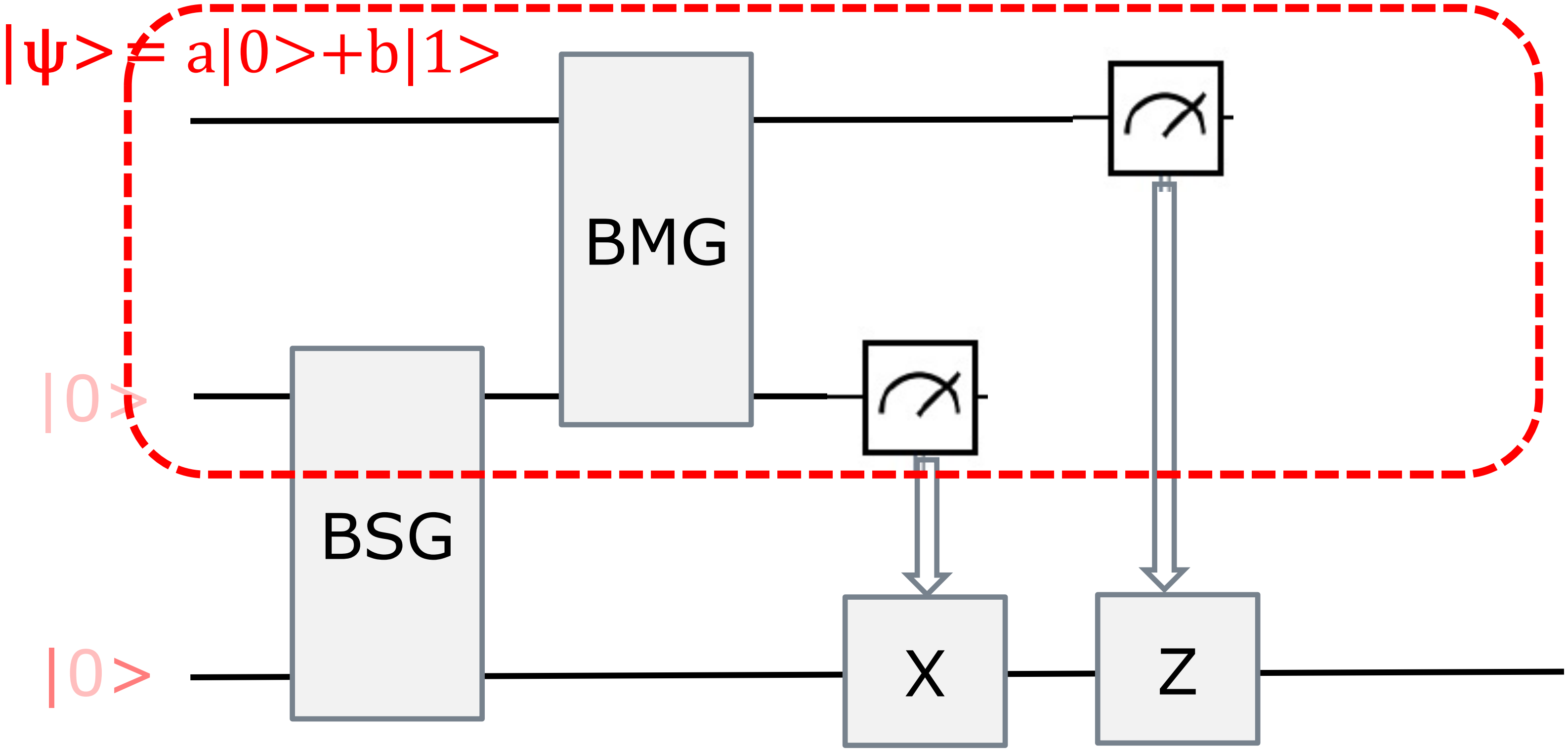


量子テレポーテーション回路への入力
エンタングルメント状態を作る

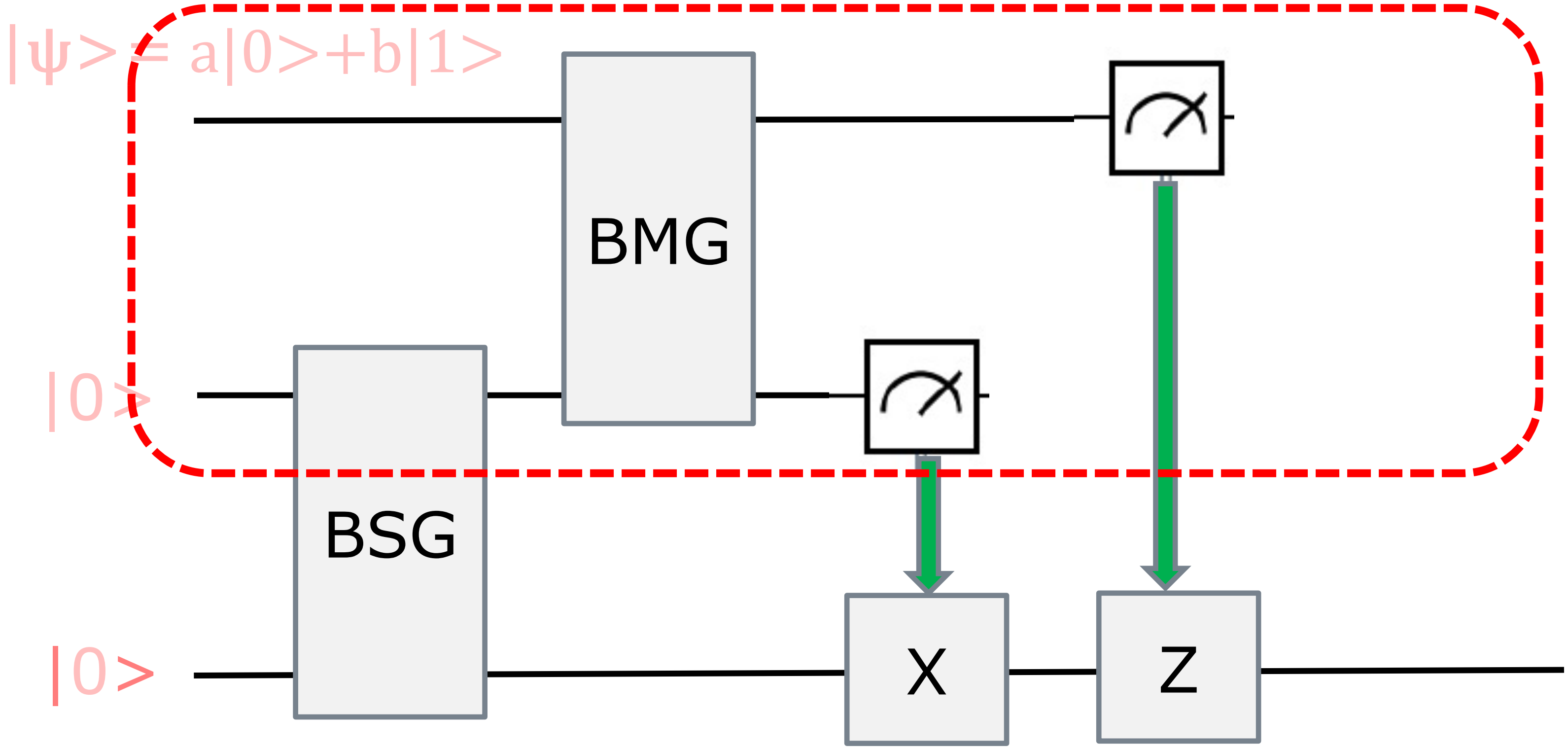


Bell State Gate で
Entanglement 状態
を作るための入力

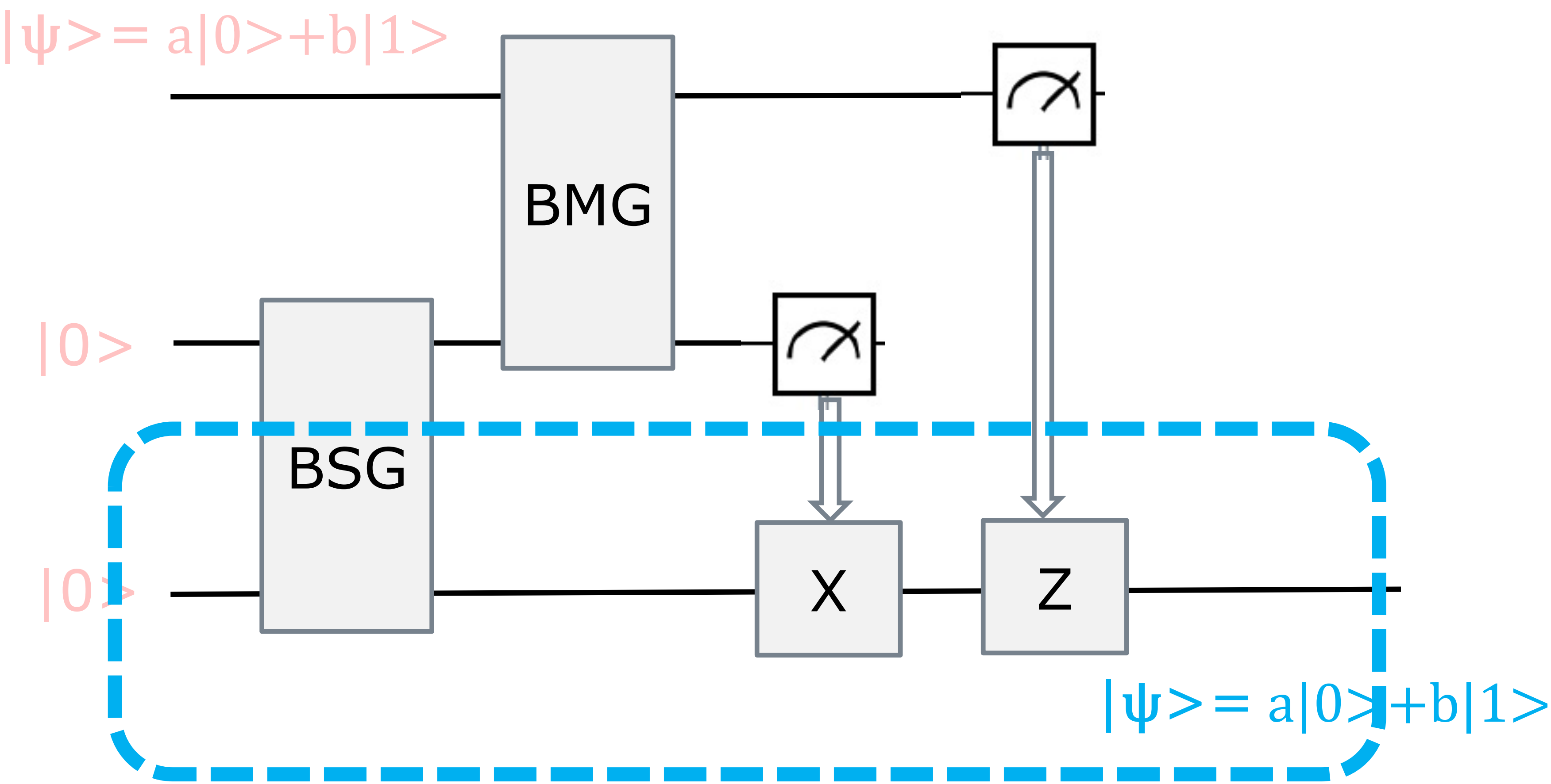
量子テレポーテーション回路へのAliceの入力



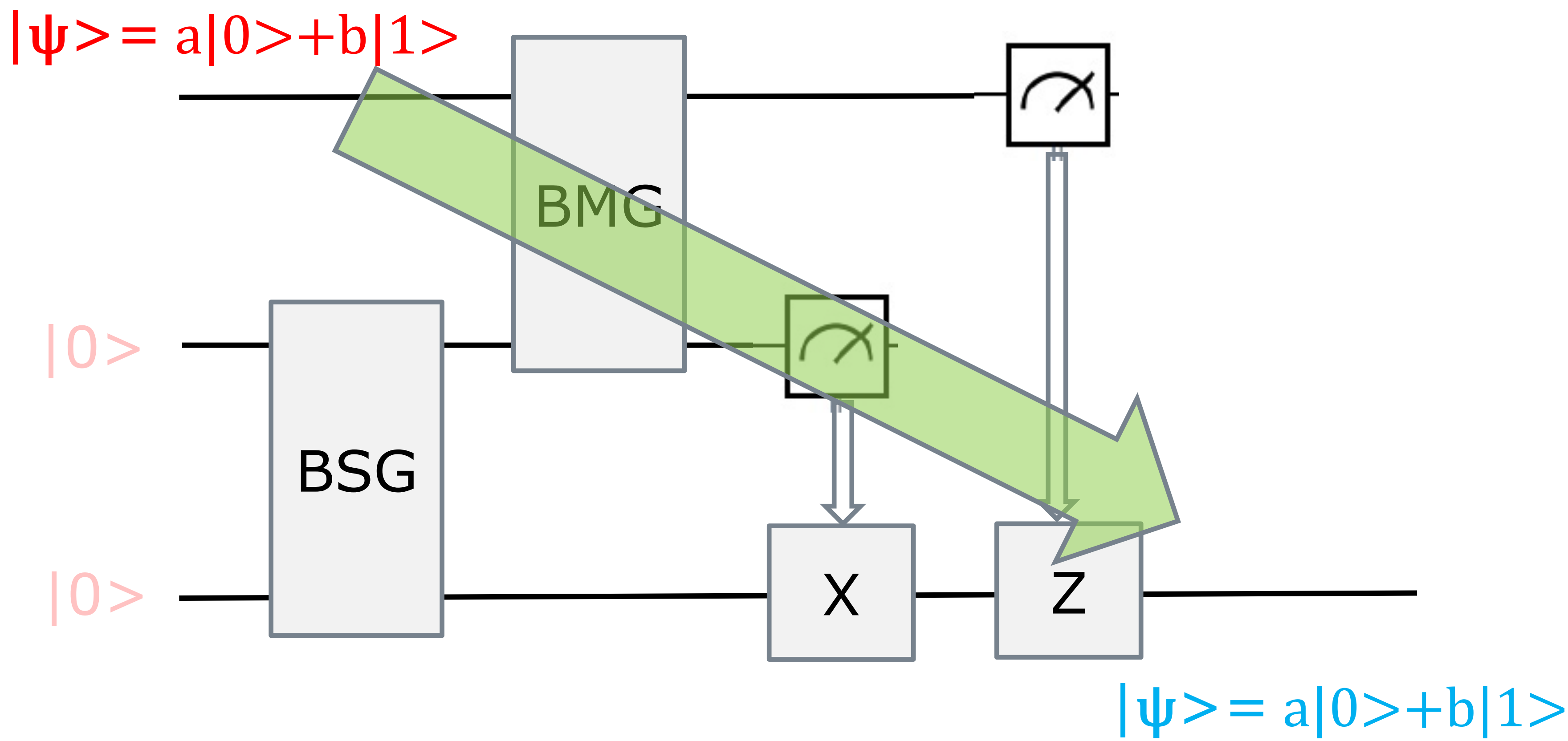
Aliceは、観測結果をBobに送る



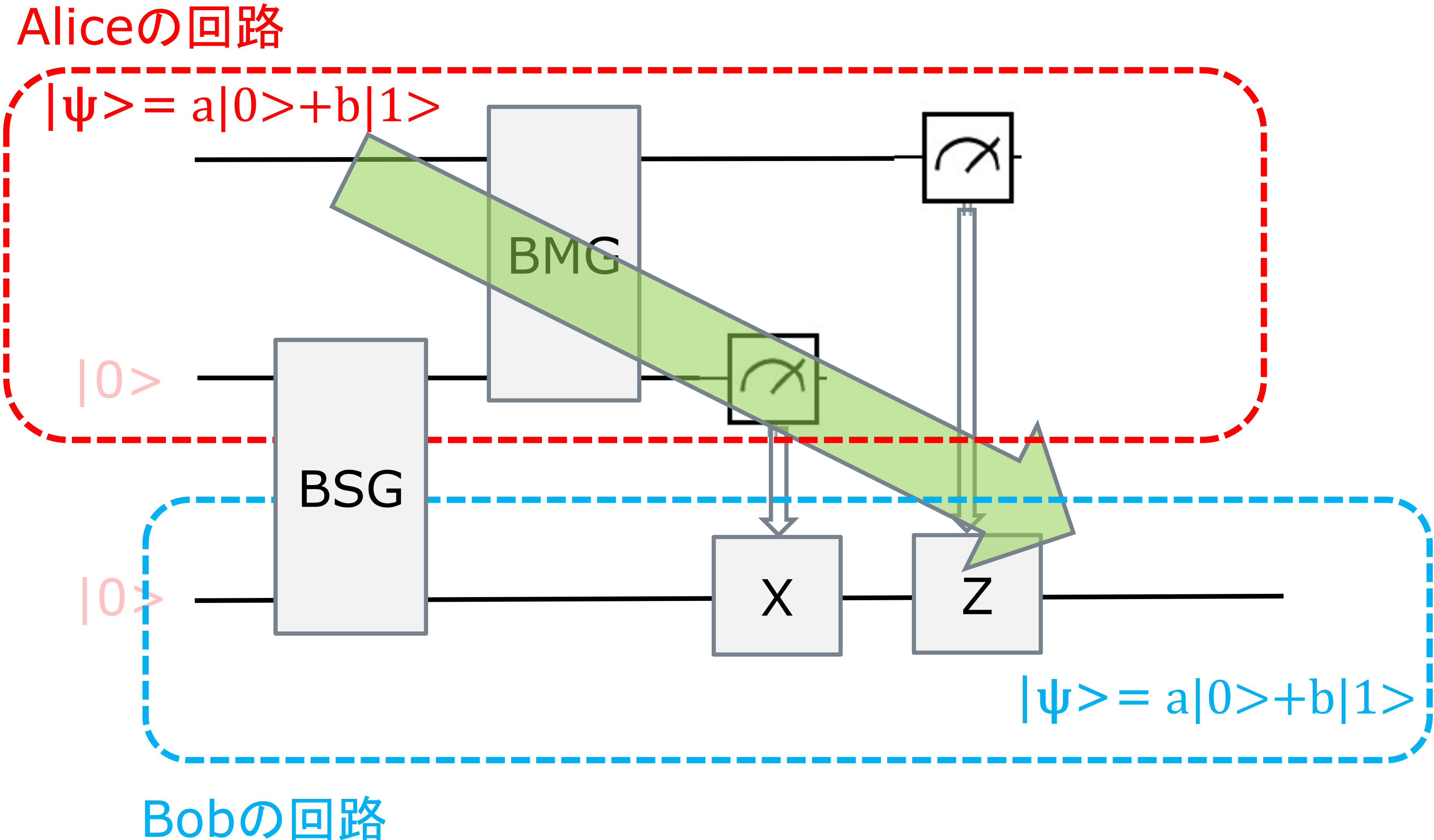
Bobの回路の出力



量子テレポーテーション回路が行ったこと



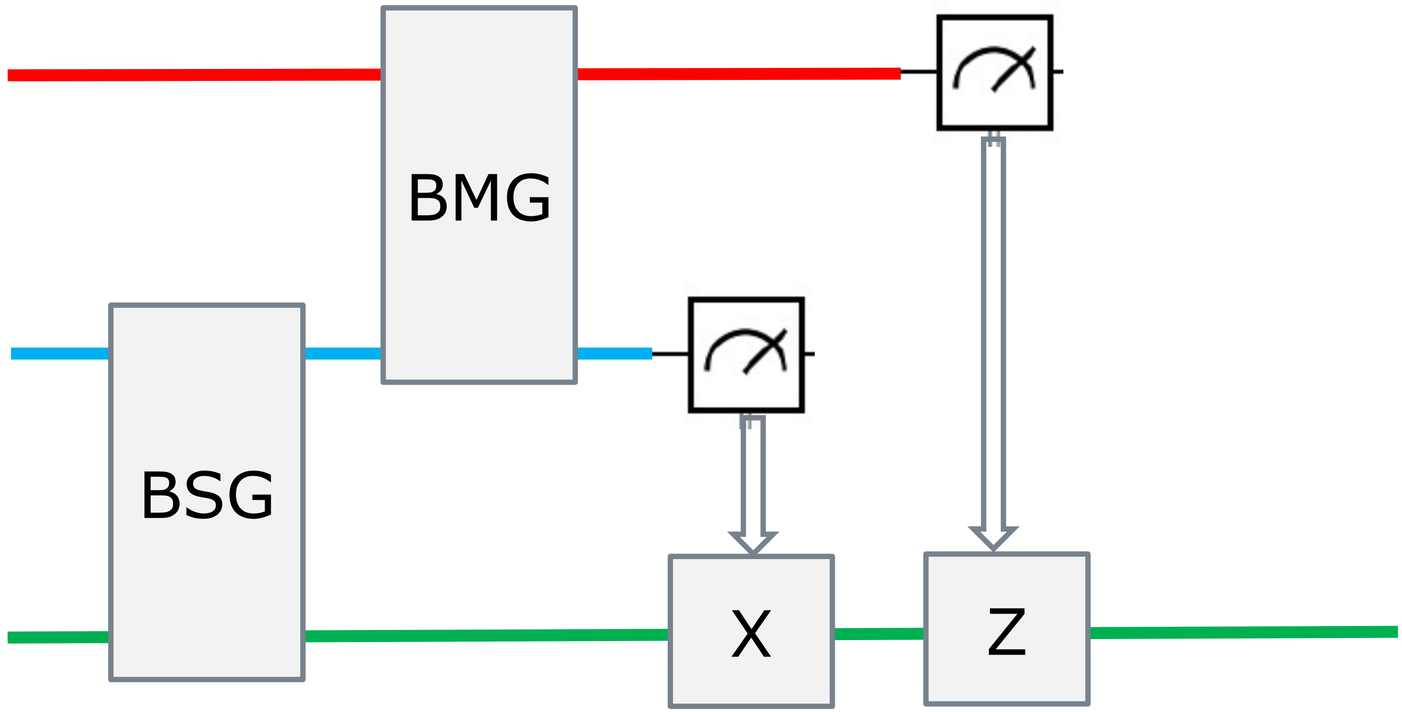
量子テレポーテーション回路が行ったこと



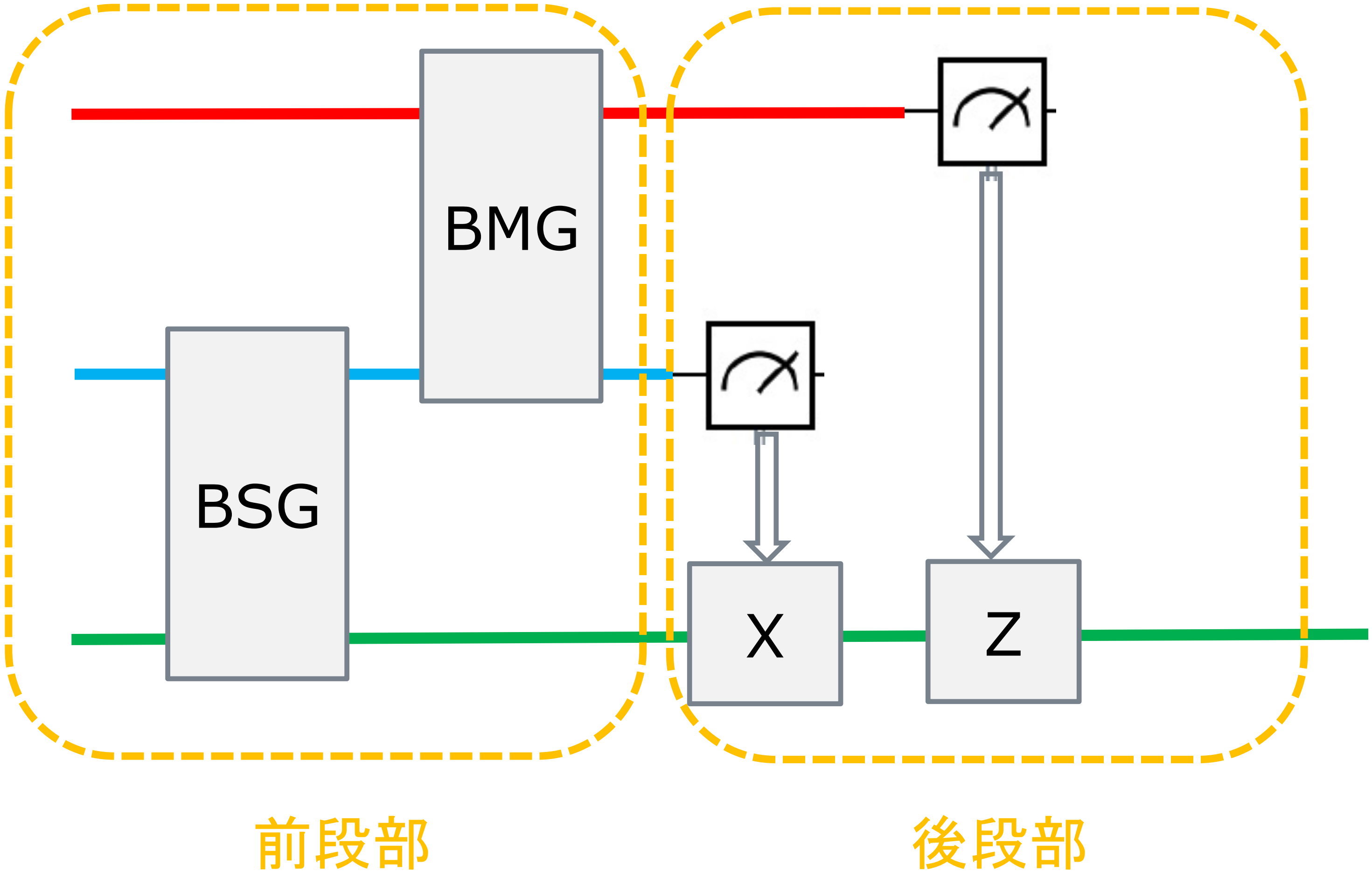
AliceとBobは、いくら離れていてもいい

実際に計算するための準備

計算を分かりやすくするために
レジスターごとに、色をつけておこう



回路を前段部と後段部にわけて計算する



最も基本的な2-qubittsの
エンタングルメント状態をBell Stateと呼ぶ

- 最も基本的な2-qubittsのエンタングルメント状態をBell Stateと呼ぶ。次の四つがある。

$$(|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^+\rangle$$

$$(|00\rangle-|11\rangle)/\sqrt{2} = |\Phi^-\rangle$$

$$(|01\rangle+|10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^+\rangle$$

$$(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2} = |\Psi^-\rangle$$

Bell Stateを出力するゲート
Bell State Gate

- Bell Stateを出力するゲートをBell State Gateと呼ぶ。
  Bell State Gate を**BSG**で表すと、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{BSG}|00> = (|00>+|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^{+}>$$

$$\mathbf{BSG}|01> = (|01>+|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^{+}>$$

$$\mathbf{BSG}|10> = (|00>-|11>)/\sqrt{2} = |\Phi^{-}>$$

$$\mathbf{BSG}|11> = (|01>-|10>)/\sqrt{2} = |\Psi^{-}>$$

2-qubits の計算基底に対する Bell Measure ゲートの働き

BMG$|00> = (|00>+|10>)/\sqrt{2}$

BMG$|01> = (|01>+|11>)/\sqrt{2}$

BMG$|10> = (|01>-|11>)/\sqrt{2}$

BMG$|11> = (|00>-|10>)/\sqrt{2}$

Bell Stateに対する Bell Measure Gateの働き

$$\mathrm{BMG}|\Phi^{+}> = \mathrm{BMG}\ (|00>+|11>)\ /\sqrt{2} = |00>$$

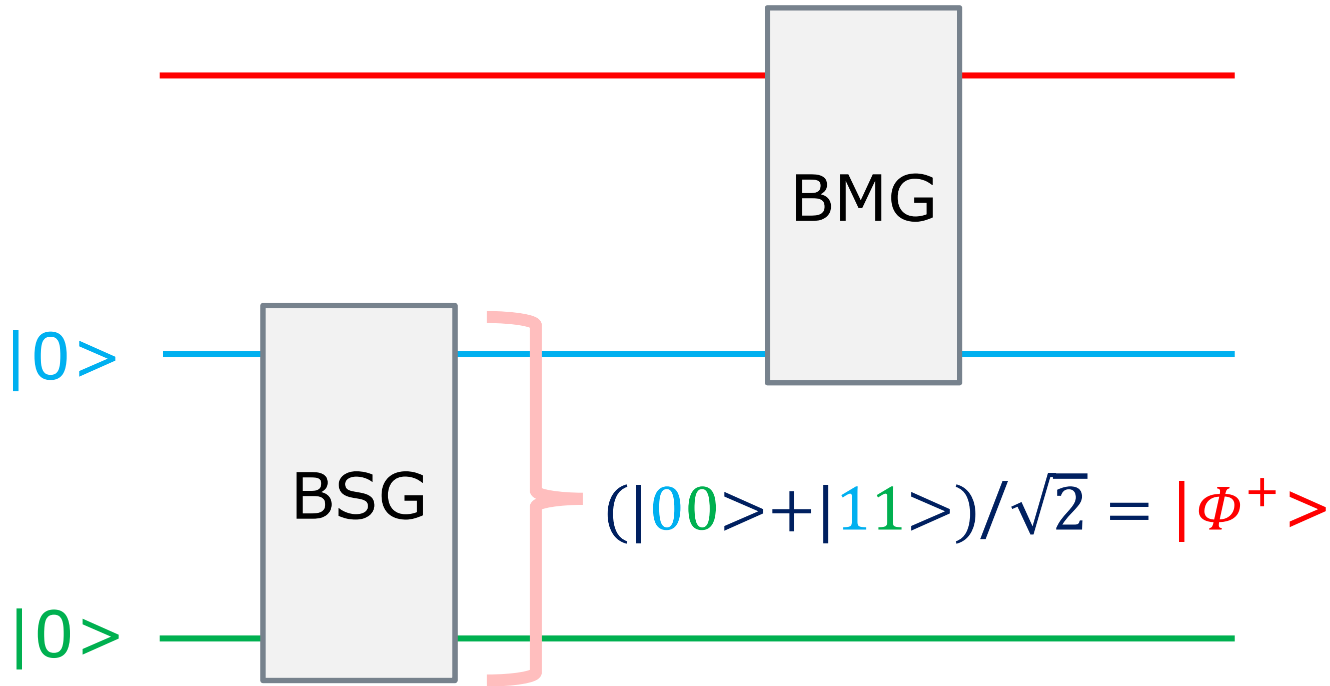
$$\mathrm{BMG}|\Psi^{+}> = \mathrm{BMG}\ (|01>+|10>)\ /\sqrt{2} = |01>$$

$$\mathrm{BMG}|\Phi^{-}> = \mathrm{BMG}\ (|00>-|11>)\ /\sqrt{2} = |10>$$

$$\mathrm{BMG}|\Psi^{-}> = \mathrm{BMG}\ (|01>-|10>)\ /\sqrt{2} = |11>$$

量子テレポーテーション回路の
前段部を計算する

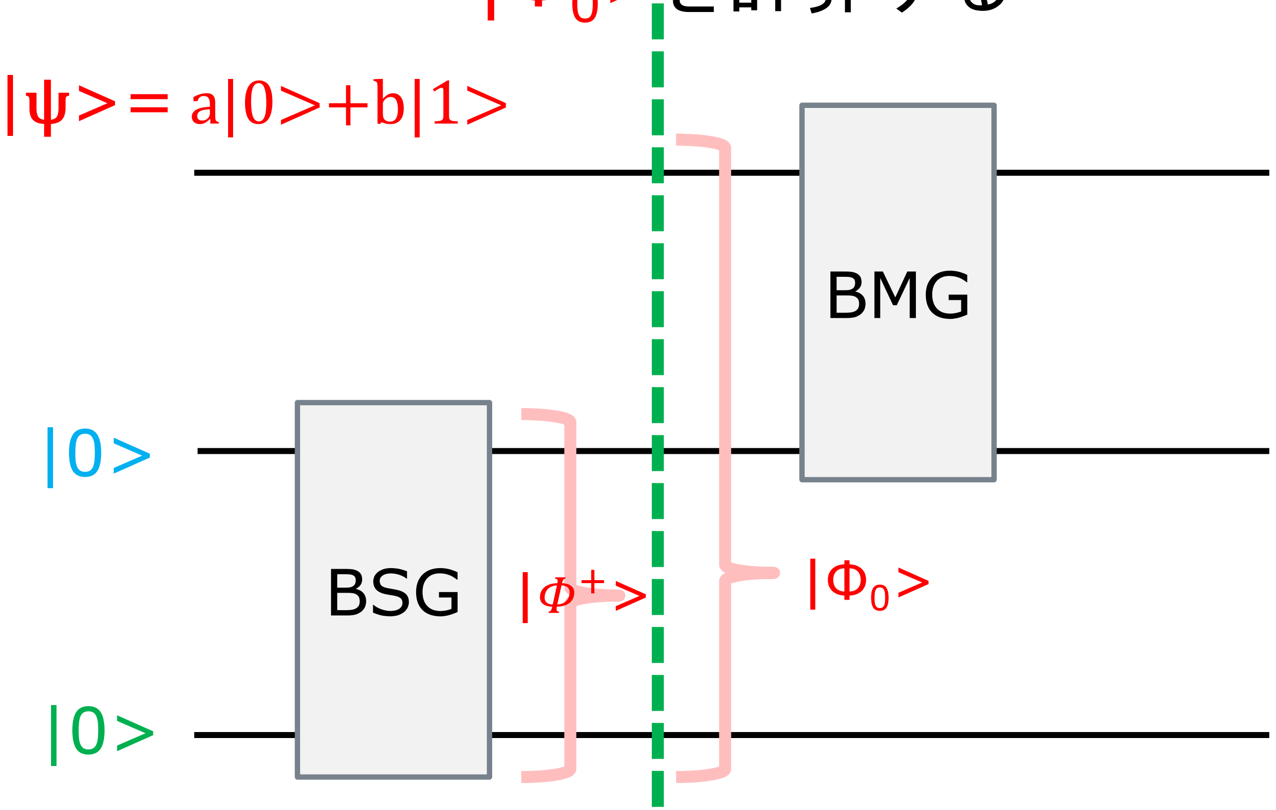
量子テレポーテーション回路の前段部 1
エンタングルメント状態を作る



BSG$|00>=(|00>+|11>)/\sqrt{2}$ エンタングルメント

量子テレポーテーション回路の前段部 2

$|\Phi_0>$を計算する



$$|\Phi_0> \ = \ |\psi>\otimes|\Phi^+ >$$

$|\Phi_0>$を計算する

$|\psi> = a|0>+b|1>$, $|\Phi^+> = (|00>+|11>)/\sqrt{2}$ だから、

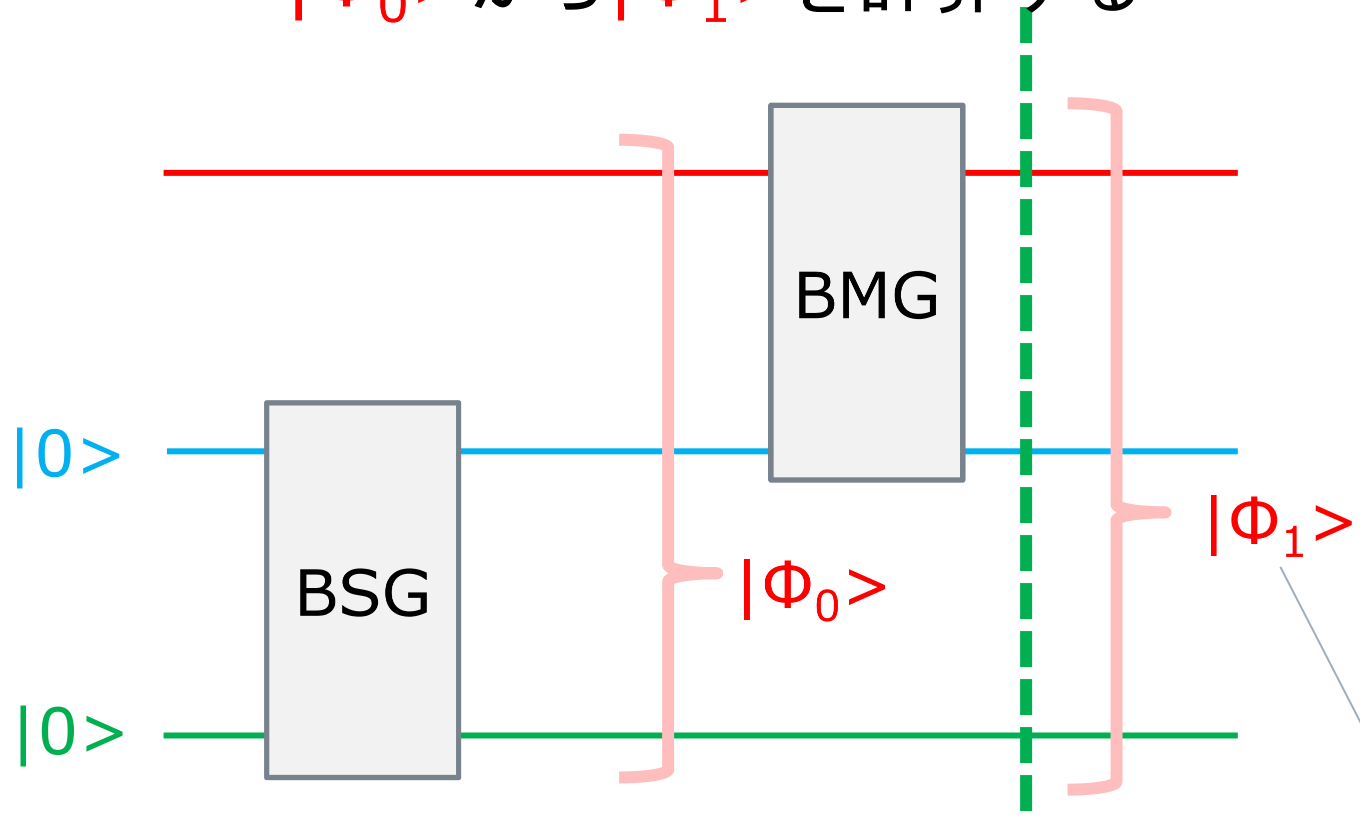
$|\Phi_0> = |\psi>\otimes|\Phi^+>$

$= (a|0>+b|1>)\otimes(|00>+|11>)/\sqrt{2}$

$= (a|000> + a|011> + b|100> + b|111>)/\sqrt{2}$

$= \boxed{(|00>\otimes a|0> + |01>\otimes a|1> + |10>\otimes b|0> + |11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}}$ ★

量子テレポーテーション回路の前段部 3
$|\Phi_0\rangle$から$|\Phi_1\rangle$を計算する



$$|\Phi_0\rangle = (\ |00\rangle \otimes a|0\rangle + |01\rangle \otimes a|1\rangle + |10\rangle \otimes b|0\rangle + |11\rangle \otimes b|1\rangle)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1\rangle$は、$|\Phi_0\rangle$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$|\Phi_0>$から$|\Phi_1>$を計算する

$$|\Phi_0> \ = (\ \ |00>\otimes a|0> + |01>\otimes a|1>$$
$$+ |10>\otimes b|0> + |11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$は、$|\Phi_0>$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$$|\Phi_1> \ = (BMG\,|00>\otimes a|0> + BMG|01>\otimes a|1>$$
$$+ BMG|10>\otimes b|0> + BMG|11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1\rangle$を計算する

$$BMG|00\rangle = (|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$BMG|01\rangle = (|01\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$BMG|10\rangle = (|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$BMG|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$

であるから、

$$|\Phi_1\rangle = (BMG|00\rangle \otimes a|0\rangle + BMG|01\rangle \otimes a|1\rangle + BMG|10\rangle \otimes b|0\rangle + BMG|11\rangle \otimes b|1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$= ((|00\rangle + |10\rangle) \otimes a|0\rangle + (|01\rangle + |11\rangle) \otimes a|1\rangle + (|01\rangle - |11\rangle) \otimes b|0\rangle + (|00\rangle - |10\rangle) \otimes b|1\rangle)/2$$

$$= (|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle))/2$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> \;= (|00>(a|0>+b|1>)+|01>(a|1>+b|0>)$$
$$+\,|10>(a|0>-b|1>)+|11>(a|1>-b|0>))/2$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> \ = (|00> \boxed{(a|0> + b|1>)} + |01> \boxed{(a|1> + b|0>})$$
$$+ \ |10> \boxed{(a|0> - b|1>)} + |11> \boxed{(a|1> - b|0>})\ /2$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> \;=\; \Big(|00> \boxed{(a|0> + b|1>)} + |01> \boxed{(a|1> + b|0>)} + |10> \boxed{(a|0> - b|1>)} + |11> \boxed{(a|1> - b|0>)}\Big)/2$$

$$\mathbf{a|0>+b|1>} \qquad \mathbf{b|0>+a|1>}$$

$$\mathbf{a|0>-b|1>} \qquad \mathbf{-b|0>+a|1>}$$

$|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> = (|00>\boxed{(a|0>+b|1>)} + |01>\boxed{(a|1>+b|0>)}$$
$$+ |10>\boxed{(a|0>-b|1>)} + |11>\boxed{(a|1>-b|0>)})/2$$

$$\begin{tikzcd}
a|0>+b|1> \arrow[r, "X"] \arrow[d, "Z"'] & b|0>+a|1> \\
a|0>-b|1> \arrow[r, "X"] & -b|0>+a|1>
\end{tikzcd}$$

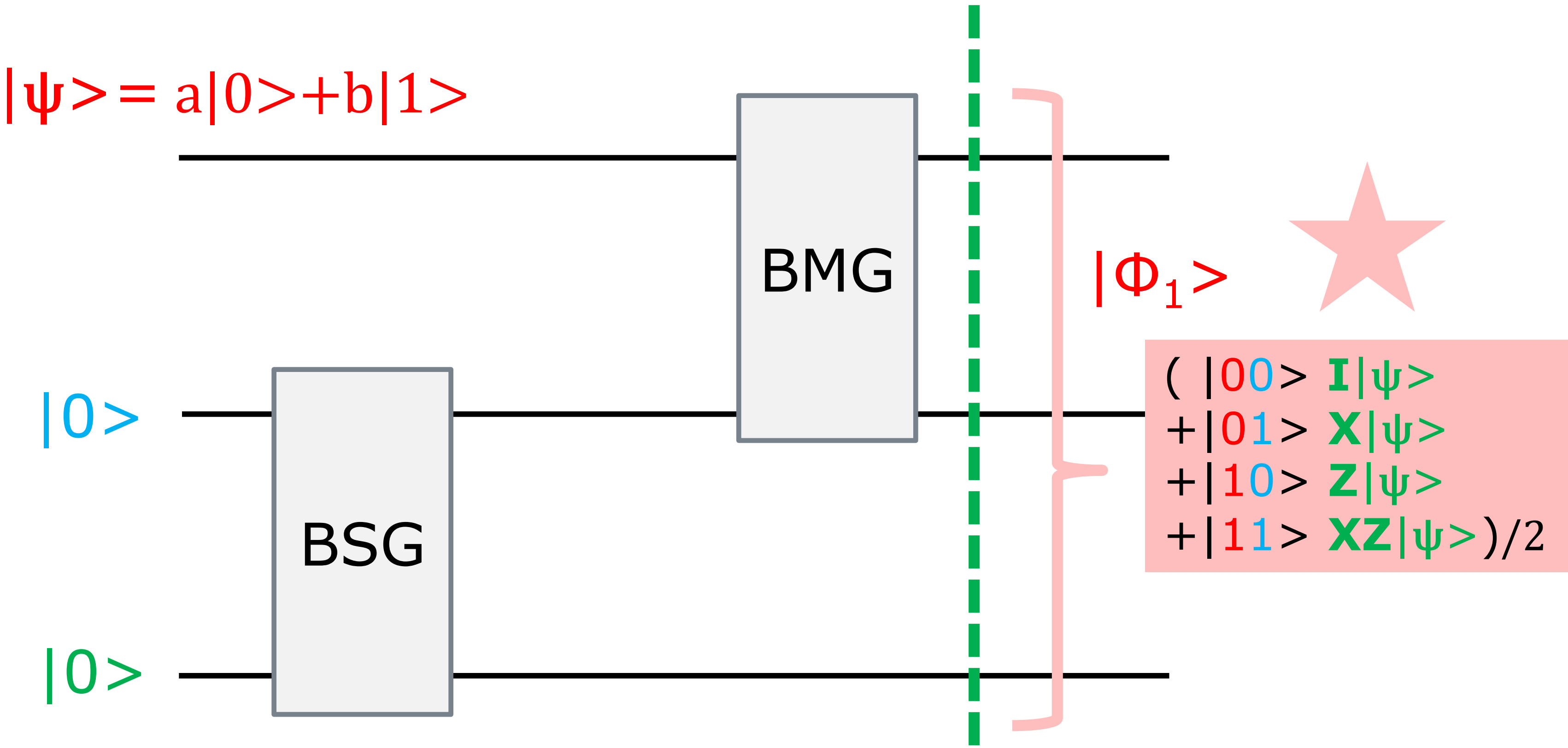
$|\Phi_1>$を変形する

$$
\begin{aligned}
|\Phi_1> \;=\; & (|00>\,(a|0> + b|1>) + |01>\,(a|1> + b|0>) \\
& + |10>\,(a|0> - b|1>) + |11>\,(a|1> - b|0>)\,)\,/2
\end{aligned}
$$

$$
= \boxed{\begin{aligned}
& (|00>\,\mathbf{I}(a|0> + b|1>) + |01>\,\mathbf{X}(a|0> + b|1>) \\
& + |10>\,\mathbf{Z}(a|0> + b|1>) + |11>\,\mathbf{XZ}(a|0> + b|1>)\,/2
\end{aligned}}
$$

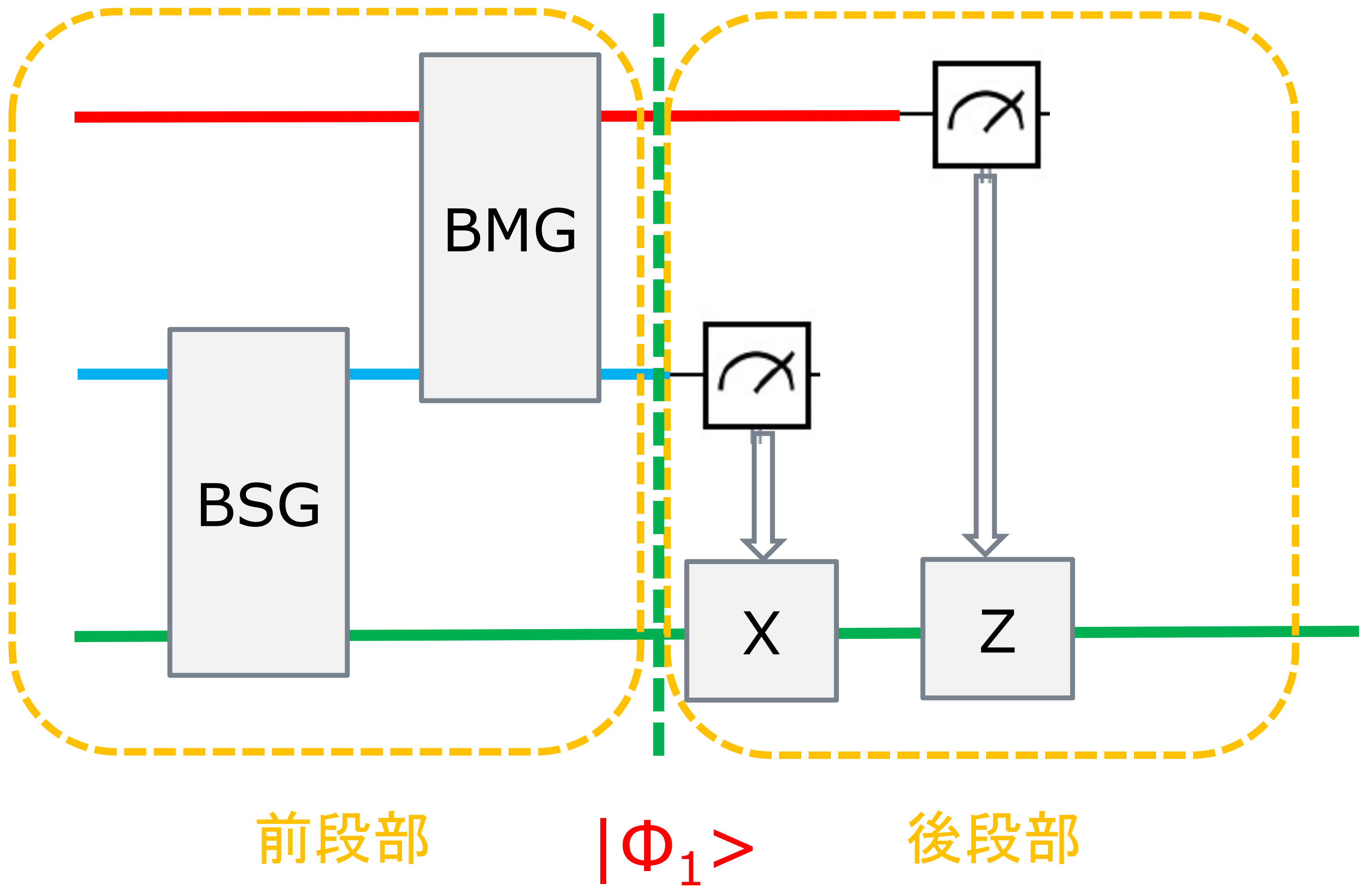
$$
\begin{tikzcd}
a|0>+b|1> \arrow[r, "X"] \arrow[d, "Z"'] & b|0>+a|1> \\
a|0>-b|1> \arrow[r, "X"] & -b|0>+a|1>
\end{tikzcd}
$$

量子テレポーテーション回路の前段部



量子テレポーテーション回路の
後段部を計算する

回路を前段部と後段部にわけて計算する

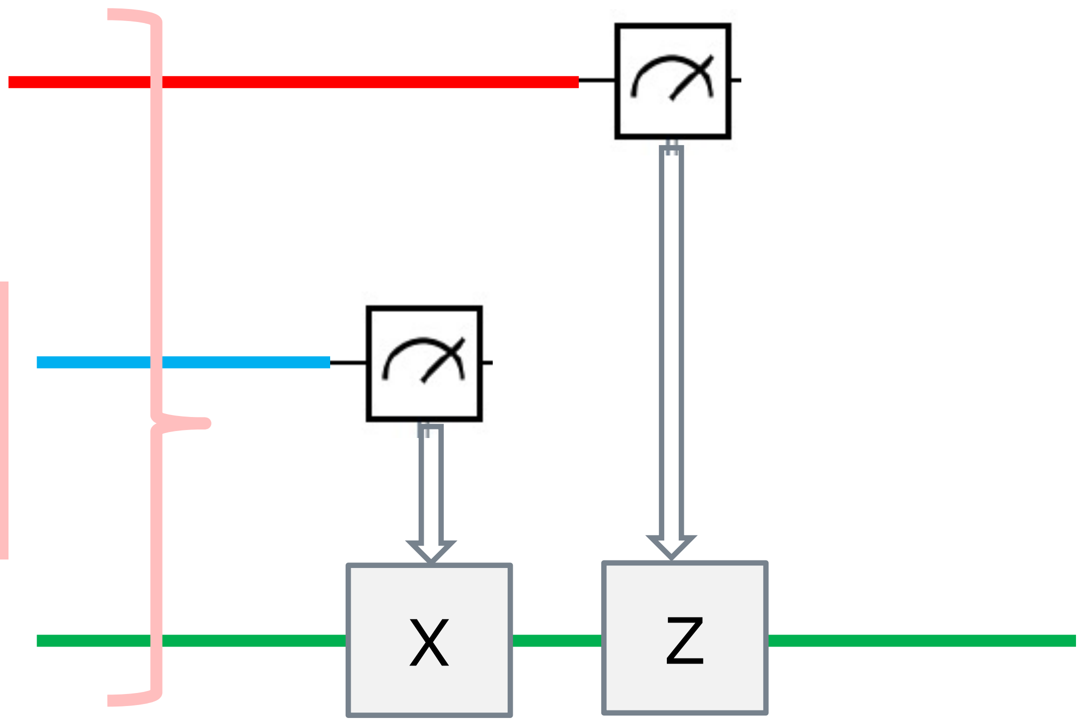


回路の後段部

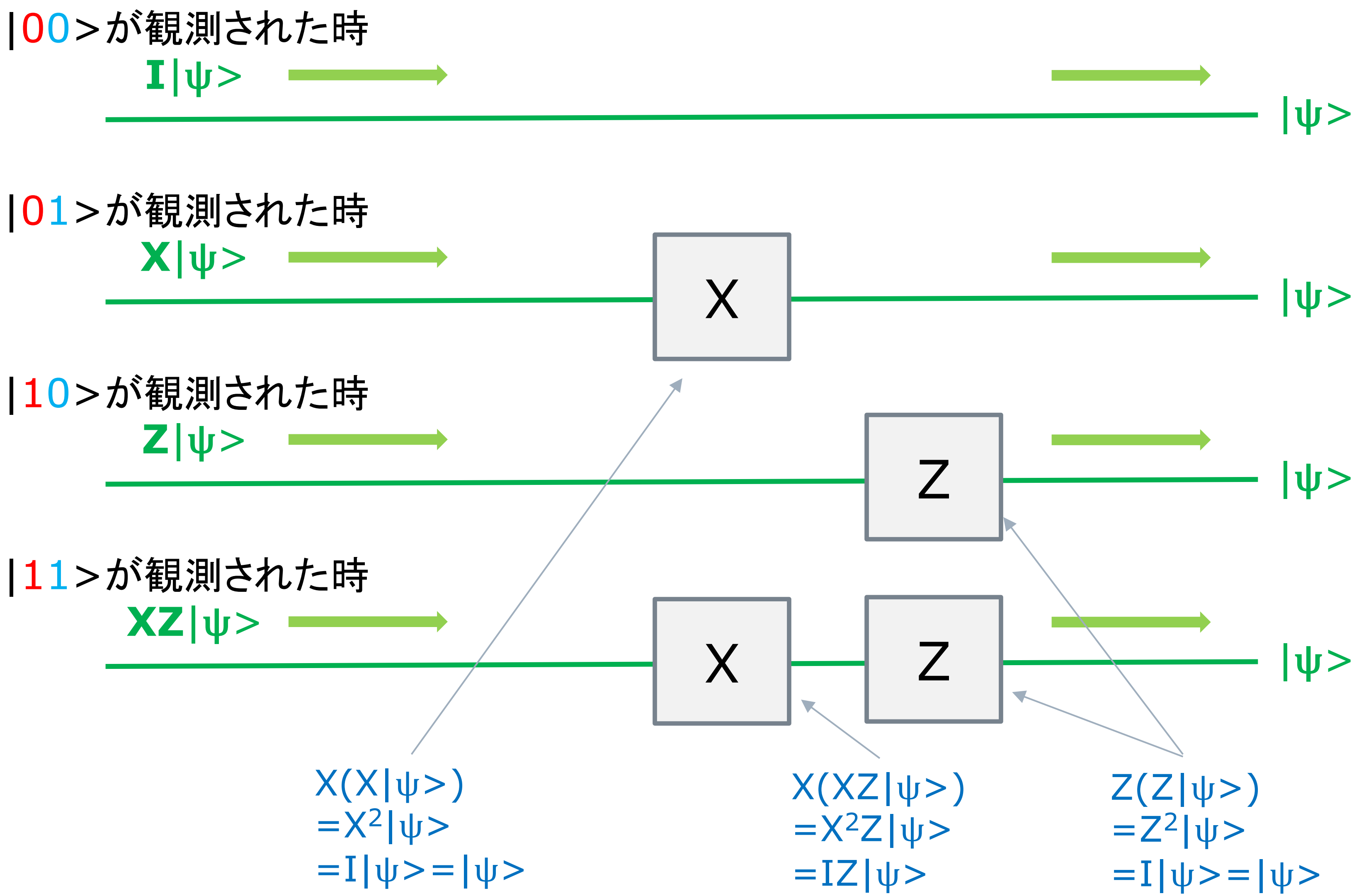
前段部から引き継いだ
回路の状態

$$|\Phi_1\rangle$$

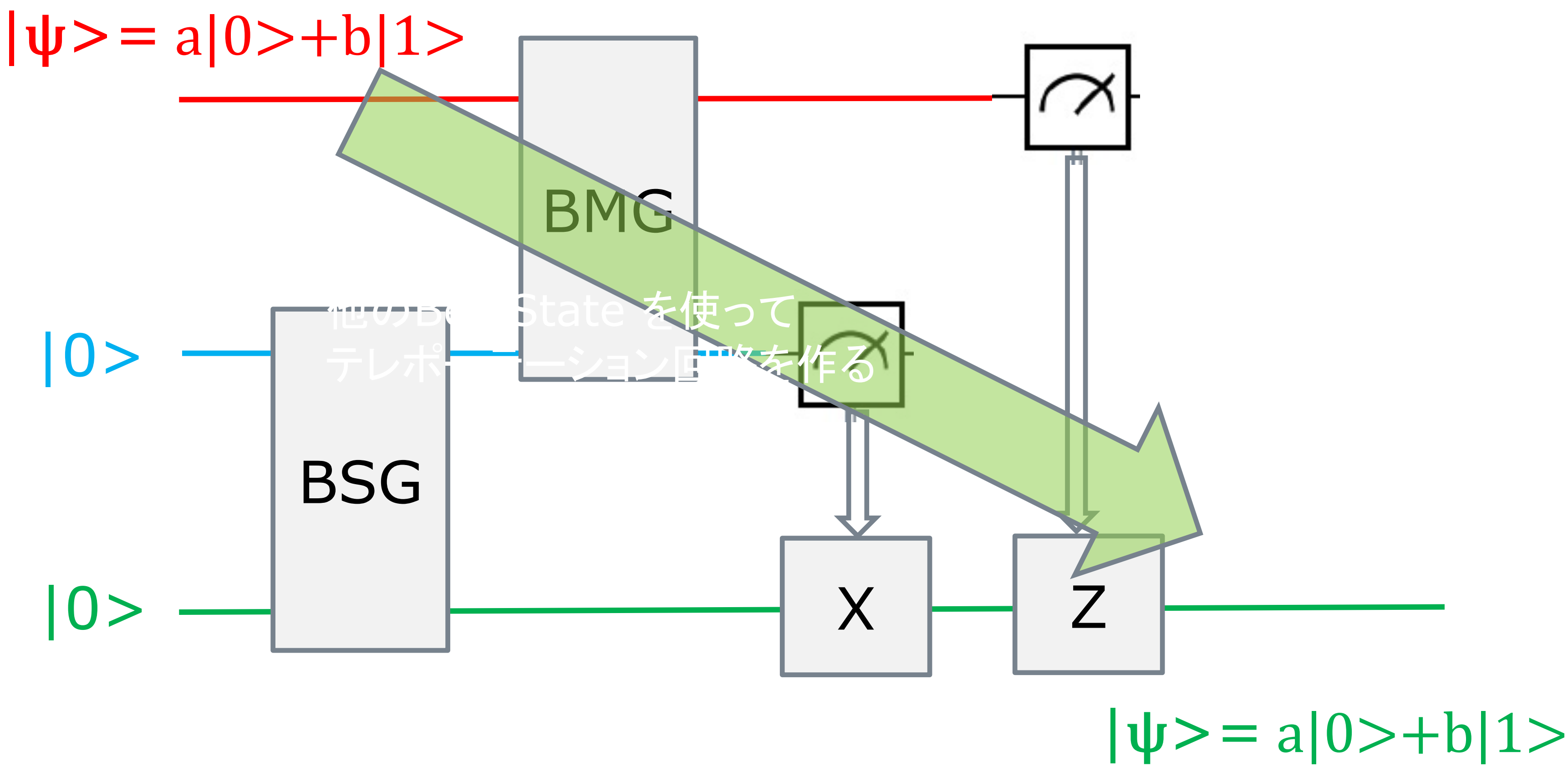
$$\begin{aligned}(&|00\rangle\ \mathbf{I}|\psi\rangle \\ +&|01\rangle\ \mathbf{X}|\psi\rangle \\ +&|10\rangle\ \mathbf{Z}|\psi\rangle \\ +&|11\rangle\ \mathbf{XZ}|\psi\rangle)/2\end{aligned}$$



$X^2 = Z^2 = I$ を使うとどの場合でも、$|\psi>$ が出力されることがわかる



量子テレポーテーション回路

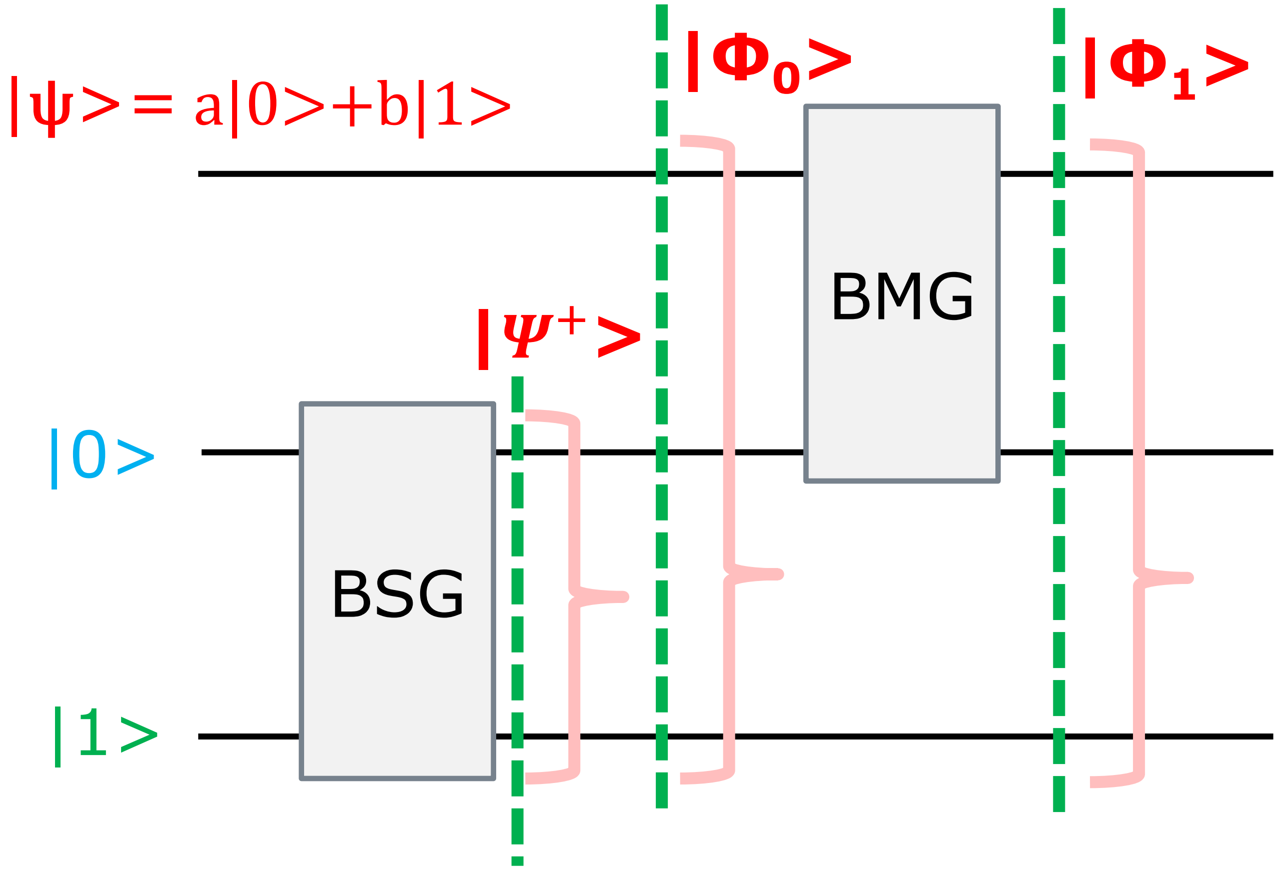


他のBell State を使って
テレポーテーション回路を作る

他のBell State を使って
テレポーテーション回路を作る

- 今まで見てきたテレポーテーション回路は、Bell State Gateに入力 |00>を与えて、エンタングルメント状態 $|\Phi^+>$を作って、それを利用してきた。
- 別のBell Stateを使っても、同様にテレポーテーション回路が作れることを見ておこう。
- Bell State Gateに入力 |01>を与えて、エンタングルメント状態 $|\Psi^+>$を使ってみよう。後段部のゲートが、変わることになる。

量子テレポーテーション回路の前段部



$$|\Phi_0> = |\psi>\otimes|\Psi^+ >$$

Bell State $|\Psi^{+}>$を使って テレポーテーション回路を作る

$|\Psi^+>$を利用した場合の $|\Phi_0>$を計算する

$|\psi> = a|0>+b|1>$, $|\Psi^+> = (|01>+|10>)/\sqrt{2}$ だから、

$|\Phi_0> = |\psi>\otimes|\Psi^+>$
$= (a|0>+b|1>)\otimes(|01>+|10>)/\sqrt{2}$
$= (a|001> + a|010> + b|101> + b|110>)/\sqrt{2}$

$= \boxed{(|00>\otimes a|1> + |01>\otimes a|0> + |10>\otimes b|1> + |11>\otimes b|0>)/\sqrt{2}}$

$|\Psi^+>$を利用した場合
$|\Phi_0>$から$|\Phi_1>$を計算する

$$|\Phi_0> \;=\; (\;\; |00>\otimes a|1> + |01>\otimes a|0> \\ + |10>\otimes b|1> + |11>\otimes b|0>\;)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$は、$|\Phi_0>$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$$|\Phi_1> \;=\; (BMG\,|00>\otimes a|1> + BMG|01>\otimes a|0> \\ + BMG|10>\otimes b|1> + BMG|11>\otimes b|0>\;)/\sqrt{2}$$

$|\Psi^+>$を利用した場合の $|\Phi_1>$を計算する

$BMG|00> = (|00>+|10>)/\sqrt{2}$
$BMG|01> = (|01>+|11>)/\sqrt{2}$
$BMG|10> = (|01>-|11>)/\sqrt{2}$
$BMG|11> = (|00>-|10>)/\sqrt{2}$
であるから、

$$|\Phi_1> = (BMG|00>\otimes a|1> + BMG|01>\otimes a|0> + BMG|10>\otimes b|1> + BMG|11>\otimes b|0>)/\sqrt{2}$$

$$= ((|00> + |10>) \otimes a|1> + (|01> + |11>) \otimes a|0> + (|01> - |11>) \otimes b|1> + (|00> - |10>) \otimes b|0>)/2$$

$$= (|00>(a|1> + b|0>) + |01>(a|0> + b|1>) + |10>(a|1> - b|0>) + |11>(a|0> - b|1>))/2$$

$|\Psi^{+}\rangle$を利用した場合の
$|\Phi_1\rangle$を変形する

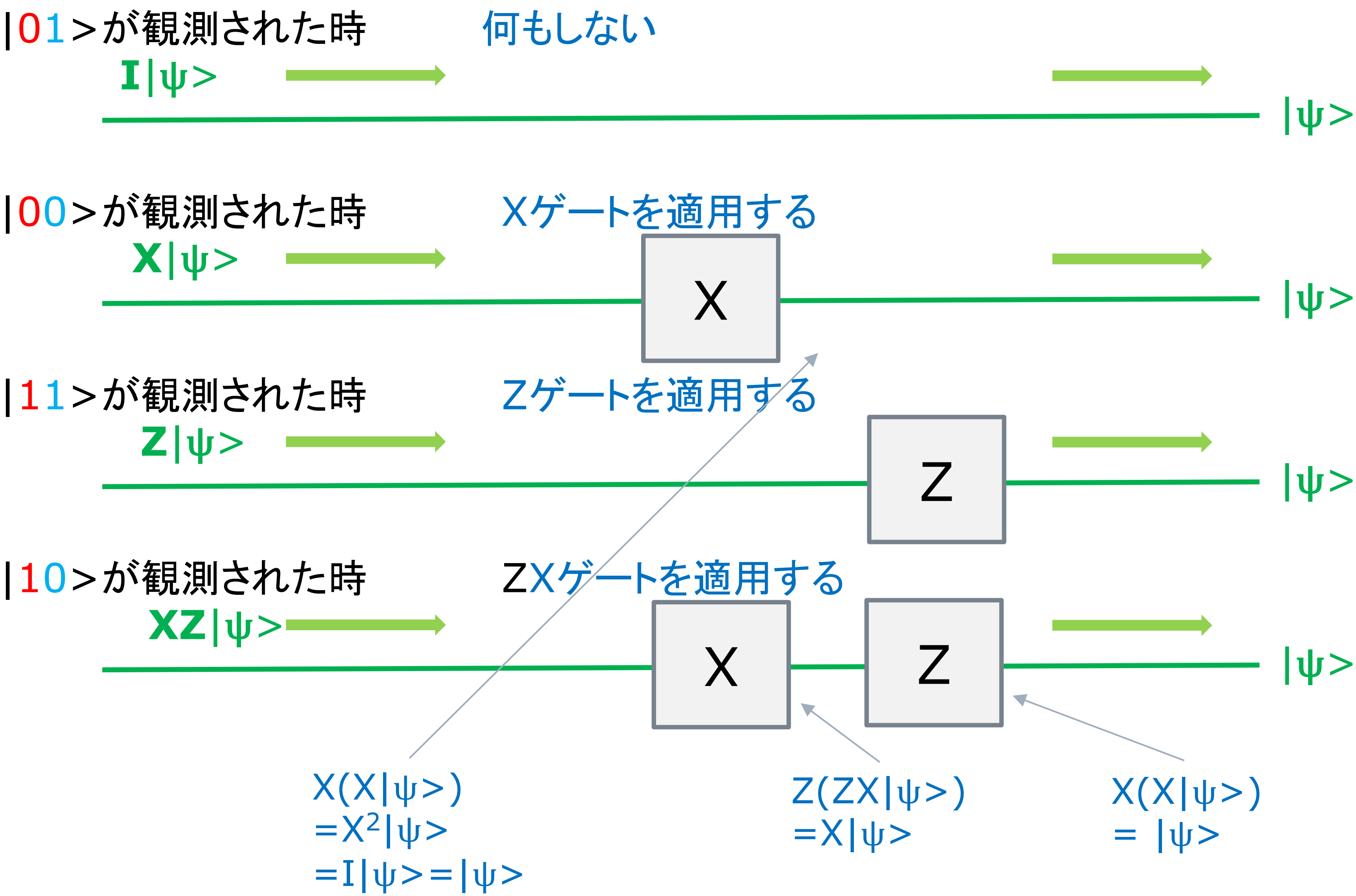
$$
\begin{aligned}
|\Phi_1\rangle &= (|00\rangle\,(a|1\rangle + b|0\rangle) + |01\rangle\,(a|0\rangle + b|1\rangle) \\
&\quad + |10\rangle\,(a|1\rangle - b|0\rangle) + |11\rangle\,(a|0\rangle - b|1\rangle))/2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (|00\rangle\,\mathbf{X}(a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle\,\mathbf{I}(a|0\rangle + b|1\rangle) \\
&\quad + |10\rangle\,\mathbf{XZ}(a|0\rangle + b|1\rangle) + |11\rangle\,\mathbf{Z}(a|0\rangle + b|1\rangle))/2
\end{aligned}
$$

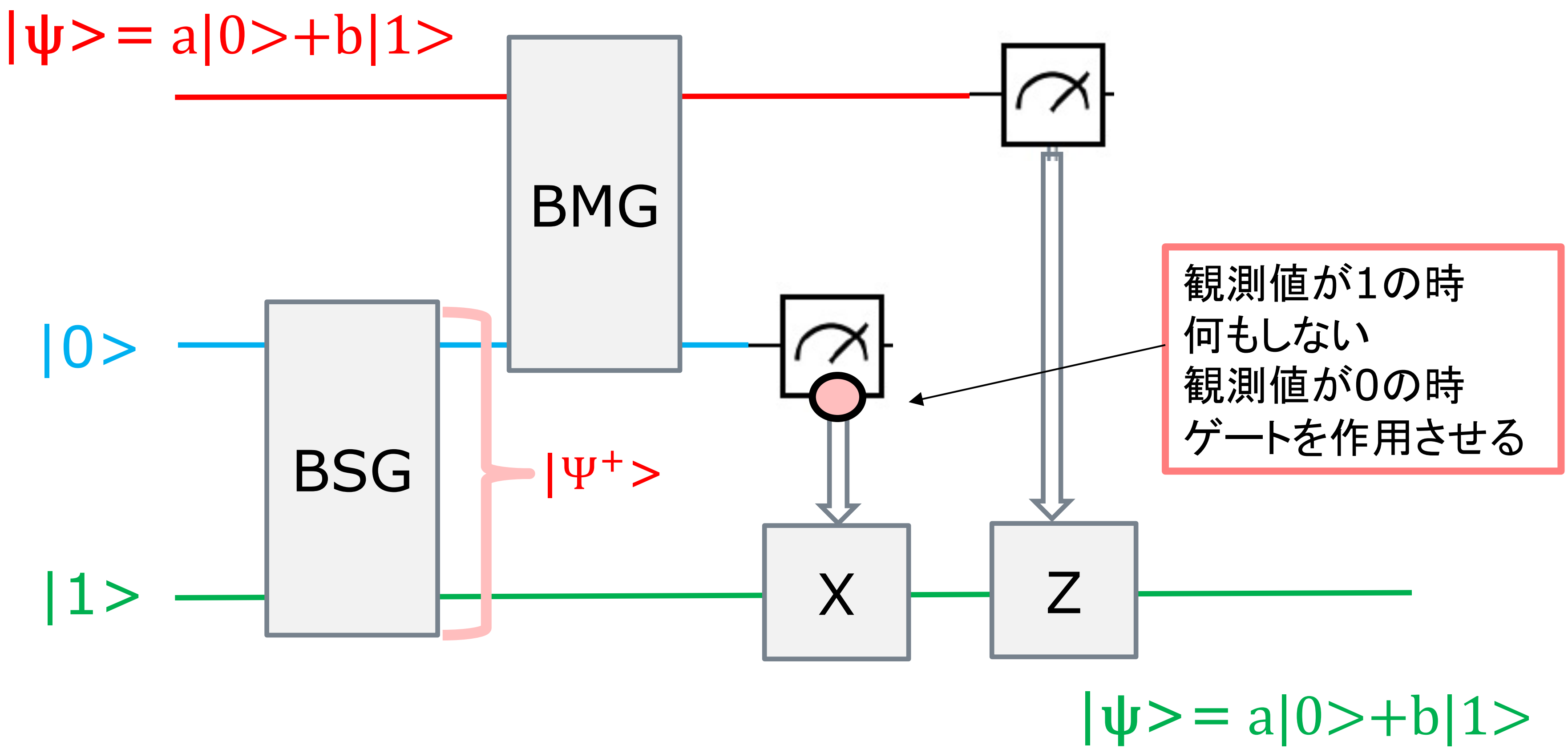
$$
\begin{tikzcd}
a|0\rangle+b|1\rangle \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, "\mathbf{Z}"'] & b|0\rangle+a|1\rangle \\
a|0\rangle-b|1\rangle \arrow[r, "\mathbf{X}"] & -b|0\rangle+a|1\rangle
\end{tikzcd}
$$

|Ψ⁺>を利用した場合

$X^2 = Z^2 = I$ を使うとどの場合でも、|ψ>が出力されることがわかる



|Ψ⁺>を利用した量子テレポーテーション回路



Bell State $|\Phi^{-}>$を使って
テレポーテーション回路を作る

$|\Phi^-\rangle$を利用した場合の $|\Phi_0\rangle$を計算する

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|\Phi^-\rangle = (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$ だから、

$$
\begin{aligned}
|\Phi_0\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\Phi^-\rangle \\
&= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2} \\
&= (a|000\rangle - a|011\rangle + b|100\rangle - b|111\rangle)/\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
= \boxed{\begin{aligned}(\; &|00\rangle \otimes a|0\rangle - |01\rangle \otimes a|1\rangle \\ &+ |10\rangle \otimes b|0\rangle - |11\rangle \otimes b|1\rangle)/\sqrt{2}\end{aligned}}
$$

$|\Phi^->$を利用した場合
$|\Phi_0>$から$|\Phi_1>$を計算する

$$|\Phi_0> \; = (\;\; |00>\otimes a|0> - |01>\otimes a|1>$$
$$+ |10>\otimes b|0> - |11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$は、$|\Phi_0>$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$$|\Phi_1> \; = (BMG\,|00>\otimes a|0> - BMG|01>\otimes a|1>$$
$$+ BMG|10>\otimes b|0> - BMG|11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$|\Phi^{-}>$を利用した場合の $|\Phi_1>$を計算する

$\mathrm{BMG}|00> = (|00>+|10>)/\sqrt{2}$
$\mathrm{BMG}|01> = (|01>+|11>)/\sqrt{2}$
$\mathrm{BMG}|10> = (|01>-|11>)/\sqrt{2}$
$\mathrm{BMG}|11> = (|00>-|10>)/\sqrt{2}$
であるから、

$$|\Phi_1> = (\mathrm{BMG}|00>\otimes a|0> - \mathrm{BMG}|01>\otimes a|1> + \mathrm{BMG}|10>\otimes b|0> - \mathrm{BMG}|11>\otimes b|1>)/\sqrt{2}$$

$$= ((|00> + |10>) \otimes a|0> - (|01> + |11>) \otimes a|1> + (|01> - |11>) \otimes b|0> - (|00> - |10>) \otimes b|1>)/2$$

$$= (|00>(a|0> - b|1>) + |01>(-a|1> + b|0>) + |10>(a|0> + b|1>) + |11>(-a|1> - b|0>))/2$$

$|\Phi^{-}>$を利用した場合の $|\Phi_1>$を変形する

$$|\Phi_1> = (|00>(a|0> - b|1>) + |01>(-a|1> + b|0>) + |10>(a|1> + b|0>) + |11>(-a|1> - b|0>))/2$$

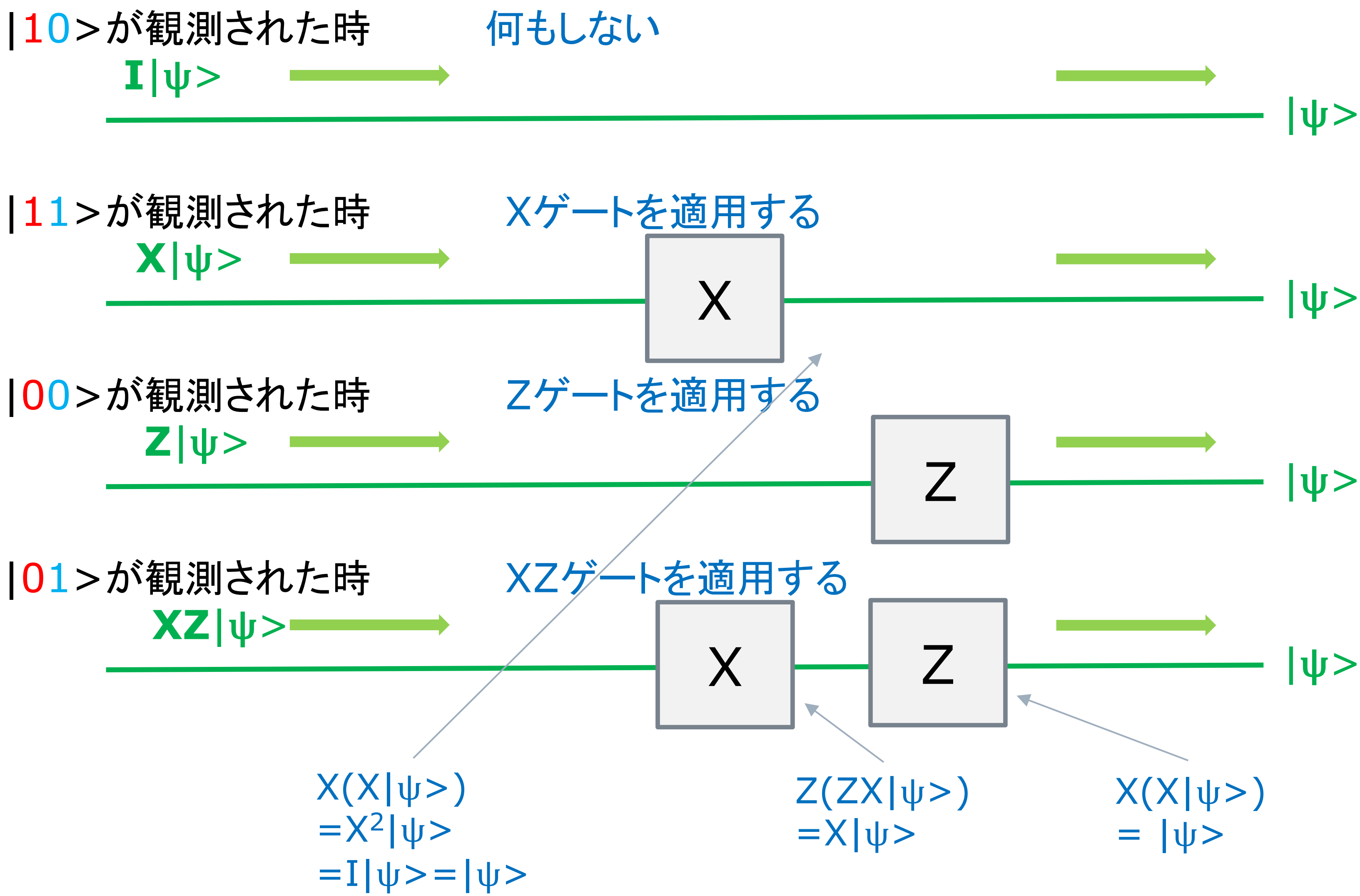
$$= \boxed{(|00>\mathbf{Z}(a|0> + b|1>) - |01>\mathbf{XZ}(a|0> + b|1>) + |10>\mathbf{I}(a|0> + b|1>) - |11>\mathbf{X}(a|0> + b|1>))/2}$$

$$\begin{tikzcd}
a|0>+b|1> \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, "\mathbf{Z}"'] & b|0>+a|1> \\
a|0>-b|1> \arrow[r, "\mathbf{X}"] & -b|0>+a|1>
\end{tikzcd}$$

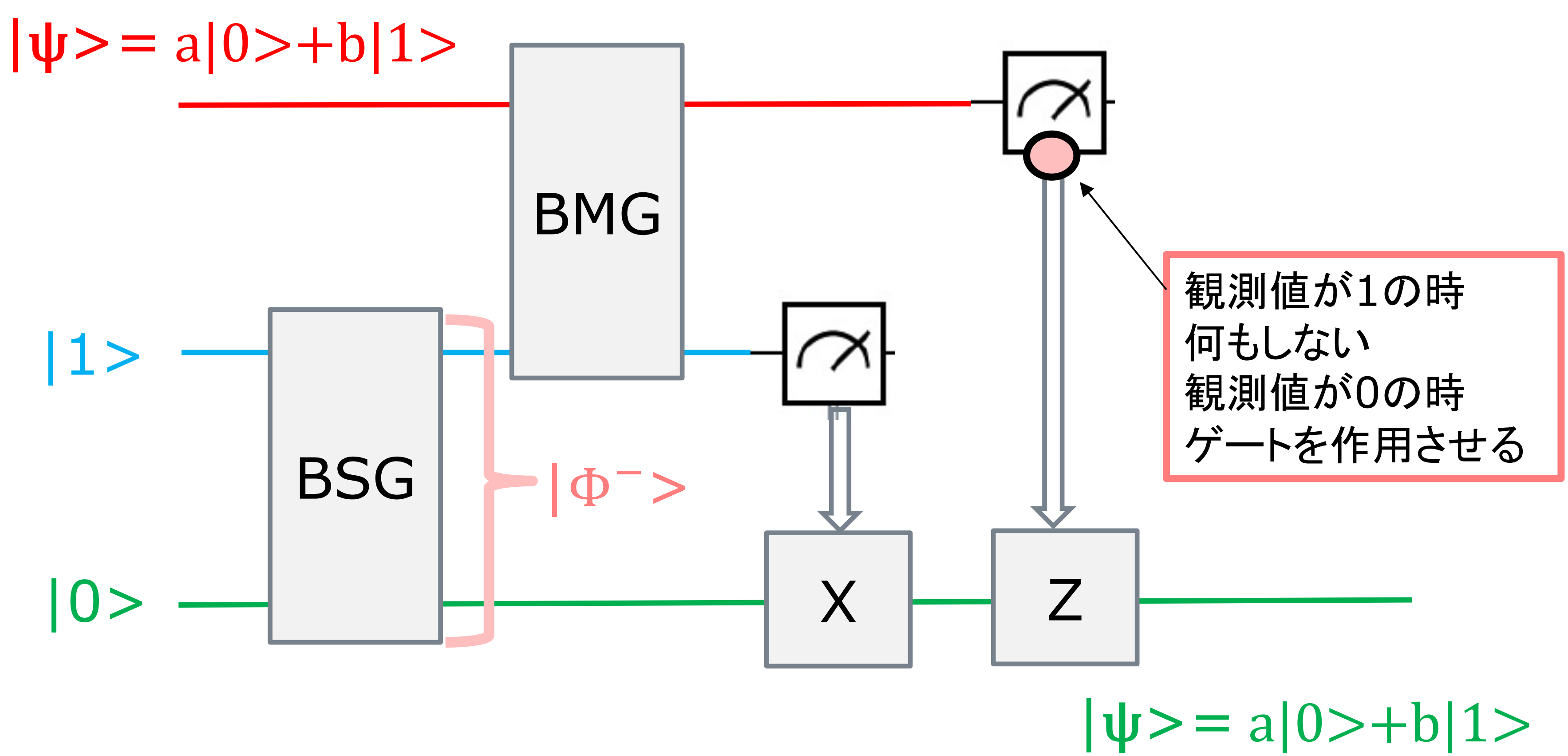
|Φ⁻>を利用した場合

$X^2 = Z^2 = I$ を使うとどの場合でも、

|ψ>が出力されることがわかる



|Φ⁻>を利用した量子テレポーテーション回路



Bell State $|\Psi^{-}>$を使って テレポーテーション回路を作る

$|\Psi^-\rangle$を利用した場合の $|\Phi_0\rangle$を計算する

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|\Psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ だから、

$$|\Phi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Psi^-\rangle$$
$$= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (a|001\rangle - a|010\rangle + b|101\rangle - b|110\rangle)/\sqrt{2}$$

$$= \boxed{(\ |00\rangle \otimes a|1\rangle - |01\rangle \otimes a|0\rangle + |10\rangle \otimes b|1\rangle - |11\rangle \otimes b|0\rangle\ )/\sqrt{2}}$$

$|\Psi^->$を利用した場合
$|\Phi_0>$から$|\Phi_1>$を計算する

$$|\Phi_0> \;=\; (\;\; |00>\otimes a|1> - |01>\otimes a|0>$$
$$+\,|10>\otimes b|1> - |11>\otimes b|0>\;)/\sqrt{2}$$

$|\Phi_1>$は、$|\Phi_0>$の第一、第二qubitにBMGを適用したもの

$$|\Phi_1> \;=\; (BMG\,|00>\otimes a|1> - BMG|01>\otimes a|0>$$
$$+\,BMG|10>\otimes b|1> - BMG|11>\otimes b|0>\;)/\sqrt{2}$$

$|\Psi^-\rangle$を利用した場合の $|\Phi_1\rangle$を計算する

$$\mathrm{BMG}|00\rangle = (|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$\mathrm{BMG}|01\rangle = (|01\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$\mathrm{BMG}|10\rangle = (|01\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$\mathrm{BMG}|11\rangle = (|00\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$

であるから、

$$|\Phi_1\rangle = (\mathrm{BMG}|00\rangle \otimes a|1\rangle - \mathrm{BMG}|01\rangle \otimes a|0\rangle + \mathrm{BMG}|10\rangle \otimes b|1\rangle - \mathrm{BMG}|11\rangle \otimes b|0\rangle)/\sqrt{2}$$

$$= ((|00\rangle + |10\rangle) \otimes a|1\rangle - (|01\rangle + |11\rangle) \otimes a|0\rangle + (|01\rangle - |11\rangle) \otimes b|1\rangle - (|00\rangle - |10\rangle) \otimes b|0\rangle)/2$$

$$= (|00\rangle (a|1\rangle - b|0\rangle) + |01\rangle (-a|0\rangle + b|1\rangle) + |10\rangle (a|1\rangle + b|0\rangle) + |11\rangle (-a|0\rangle - b|1\rangle))/2$$

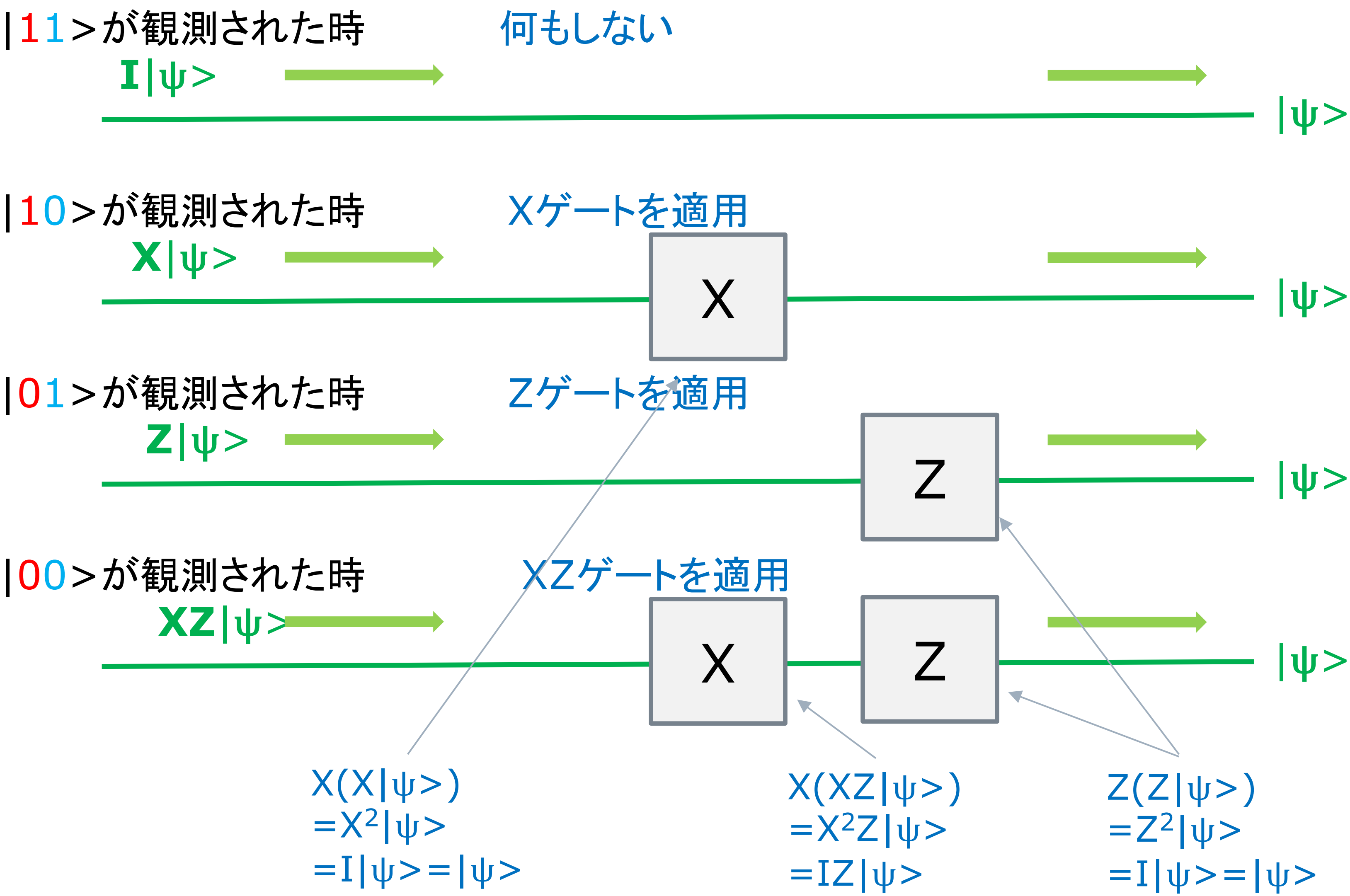
$|\Psi^{-}\rangle$を利用した場合の $|\Phi_1\rangle$を変形する

$$
\begin{aligned}
|\Phi_1\rangle = \big(&|00\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle) + |01\rangle(-a|0\rangle + b|1\rangle) \\
&+ |10\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |11\rangle(-a|0\rangle - b|1\rangle)\big)/2
\end{aligned}
$$

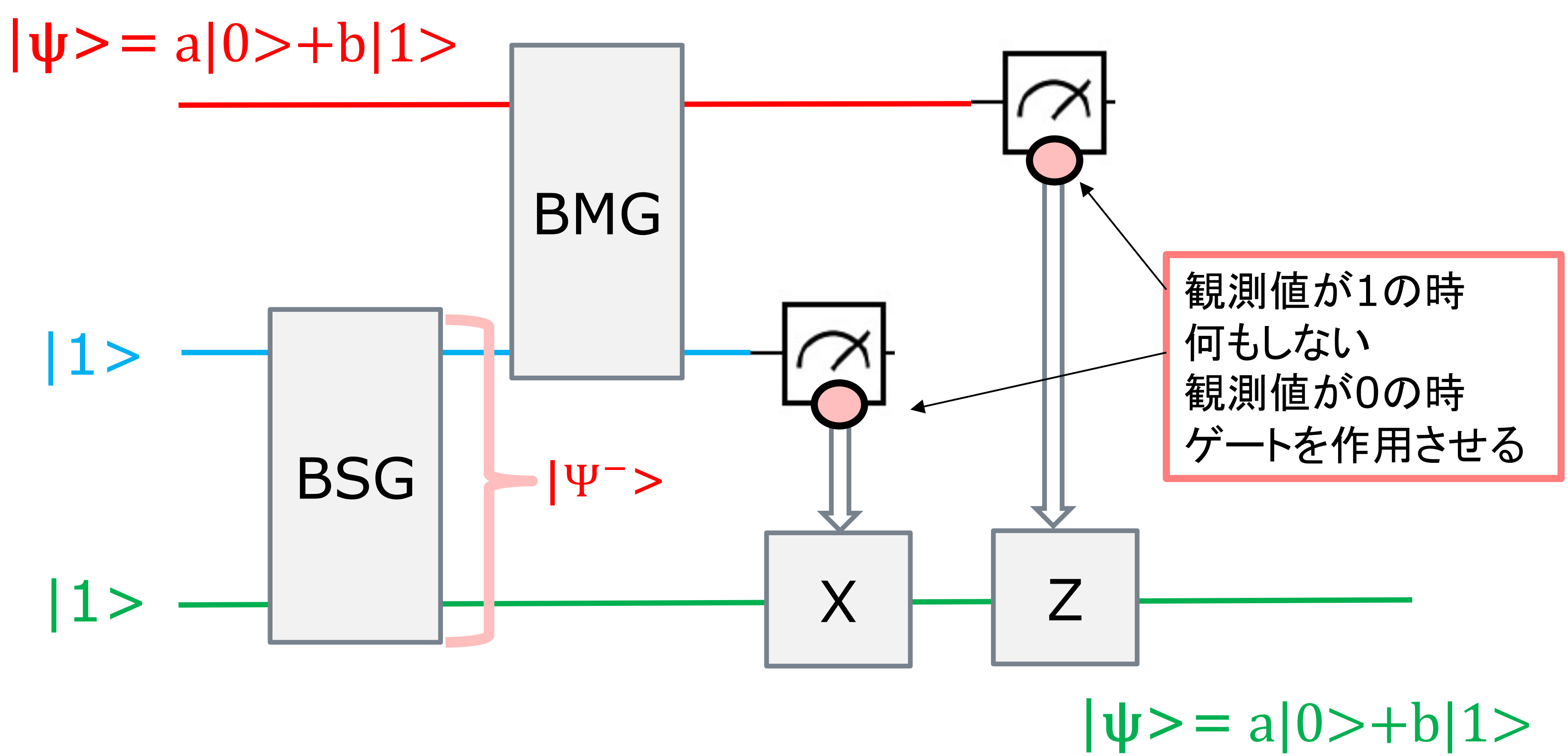
$$
\boxed{
\begin{aligned}
= \big(&|00\rangle\, \mathbf{XZ}(a|0\rangle + b|1\rangle) - |01\rangle\, \mathbf{Z}(a|0\rangle + b|1\rangle) \\
&+ |10\rangle\, \mathbf{X}(a|0\rangle + b|1\rangle) - |11\rangle\, \mathbf{I}(a|0\rangle + b|1\rangle)\big)/2
\end{aligned}
}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a|0\rangle + b|1\rangle \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, "\mathbf{Z}"'] & b|0\rangle + a|1\rangle \\
a|0\rangle - b|1\rangle \arrow[r, "\mathbf{X}"] & -b|0\rangle + a|1\rangle
\end{tikzcd}
$$

$X^2 = Z^2 = I$ を使うとどの場合でも、|ψ>が出力されることがわかる

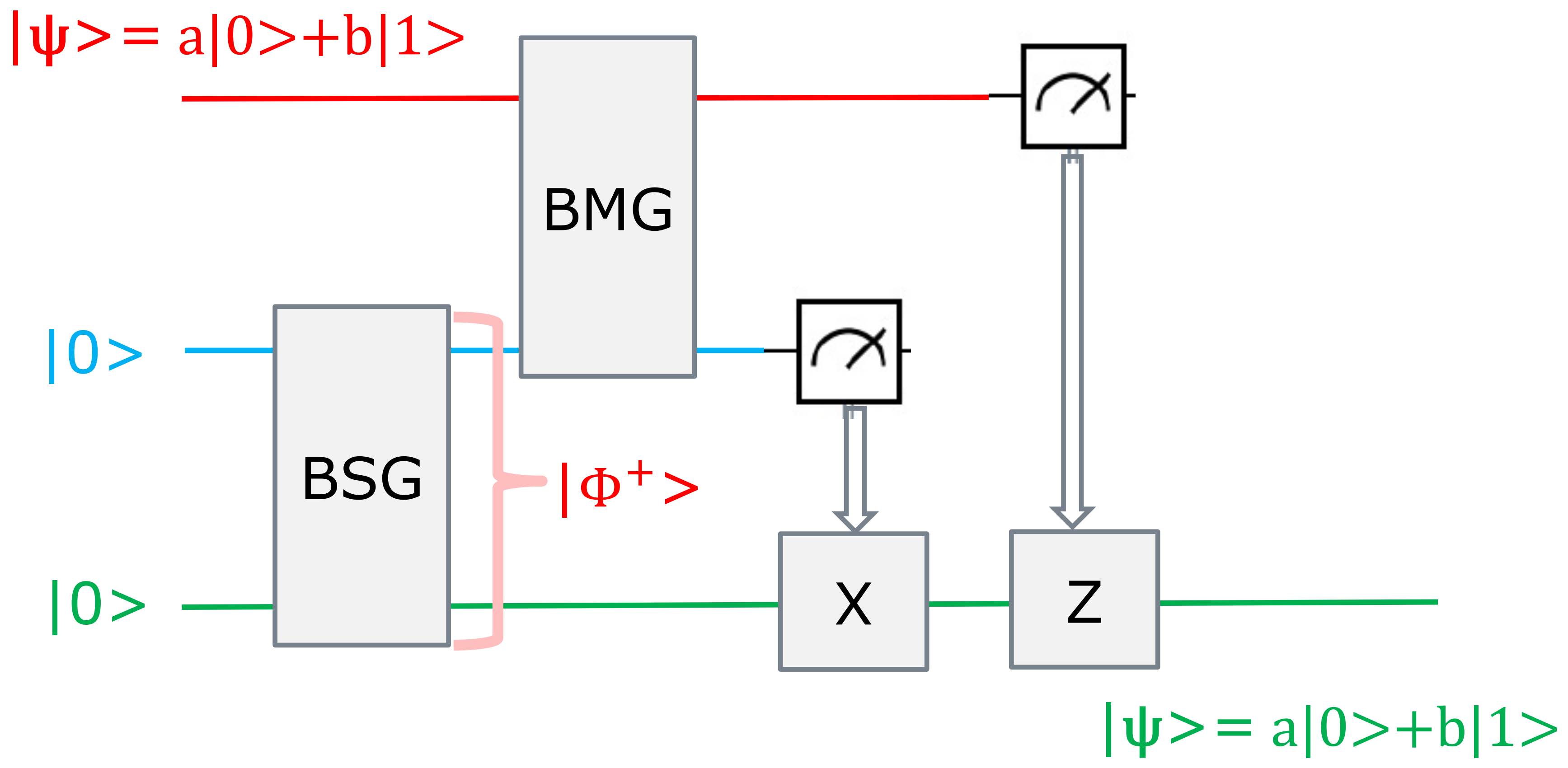


|Ψ⁻>を利用した量子テレポーテーション回路

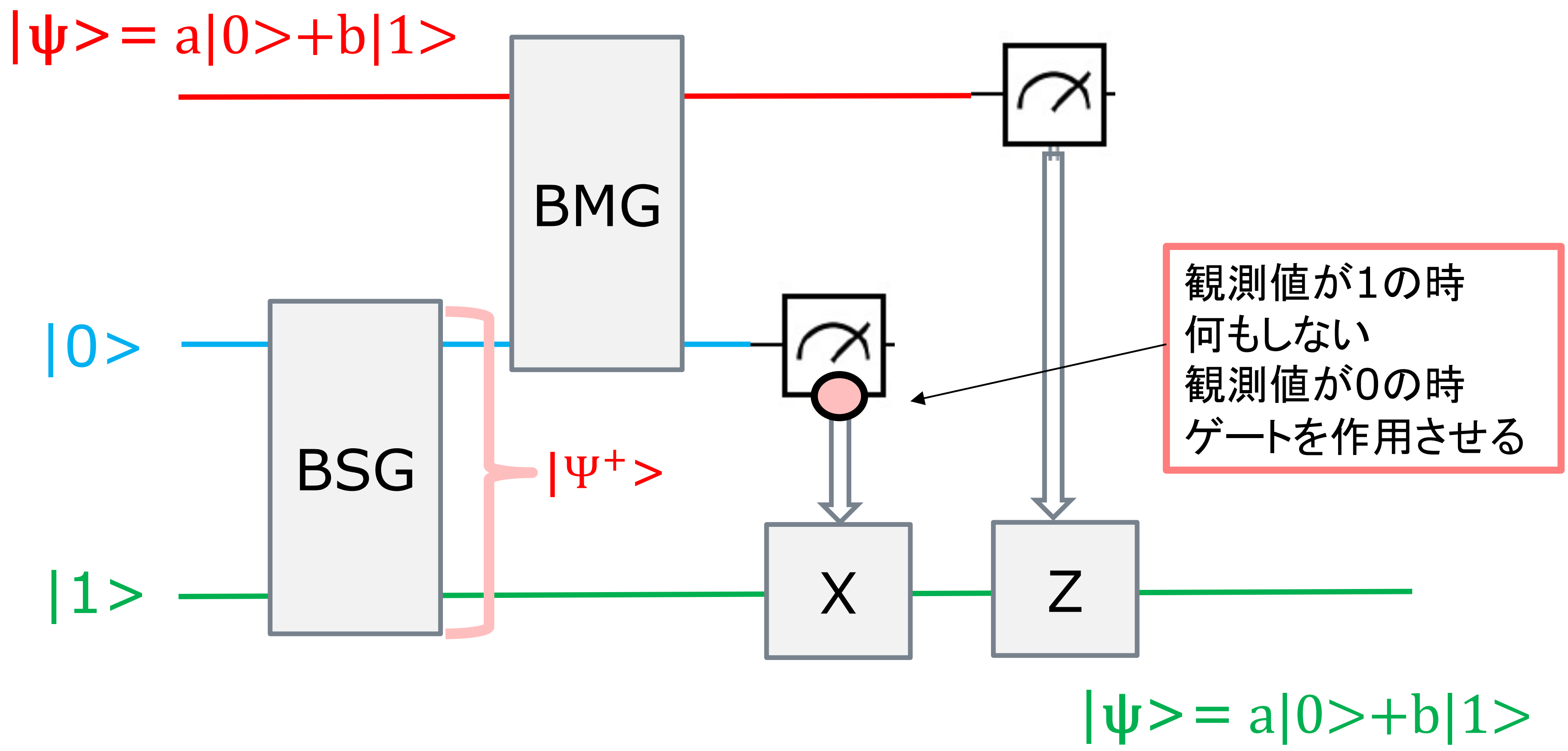


それぞれのBell Stateを利用した量子テレポーテーション回路まとめ

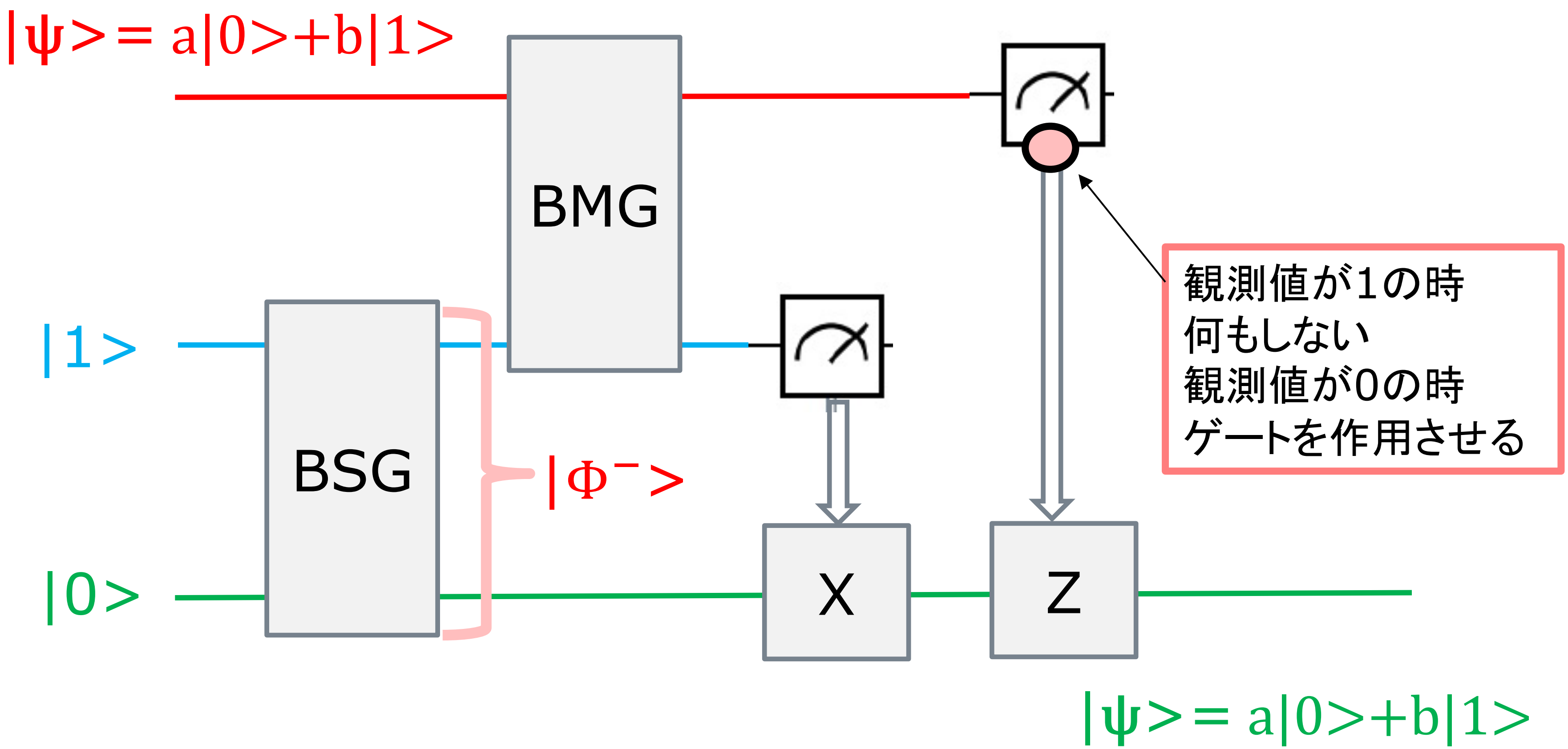
$|\Phi^+>$を利用した量子テレポーテーション回路



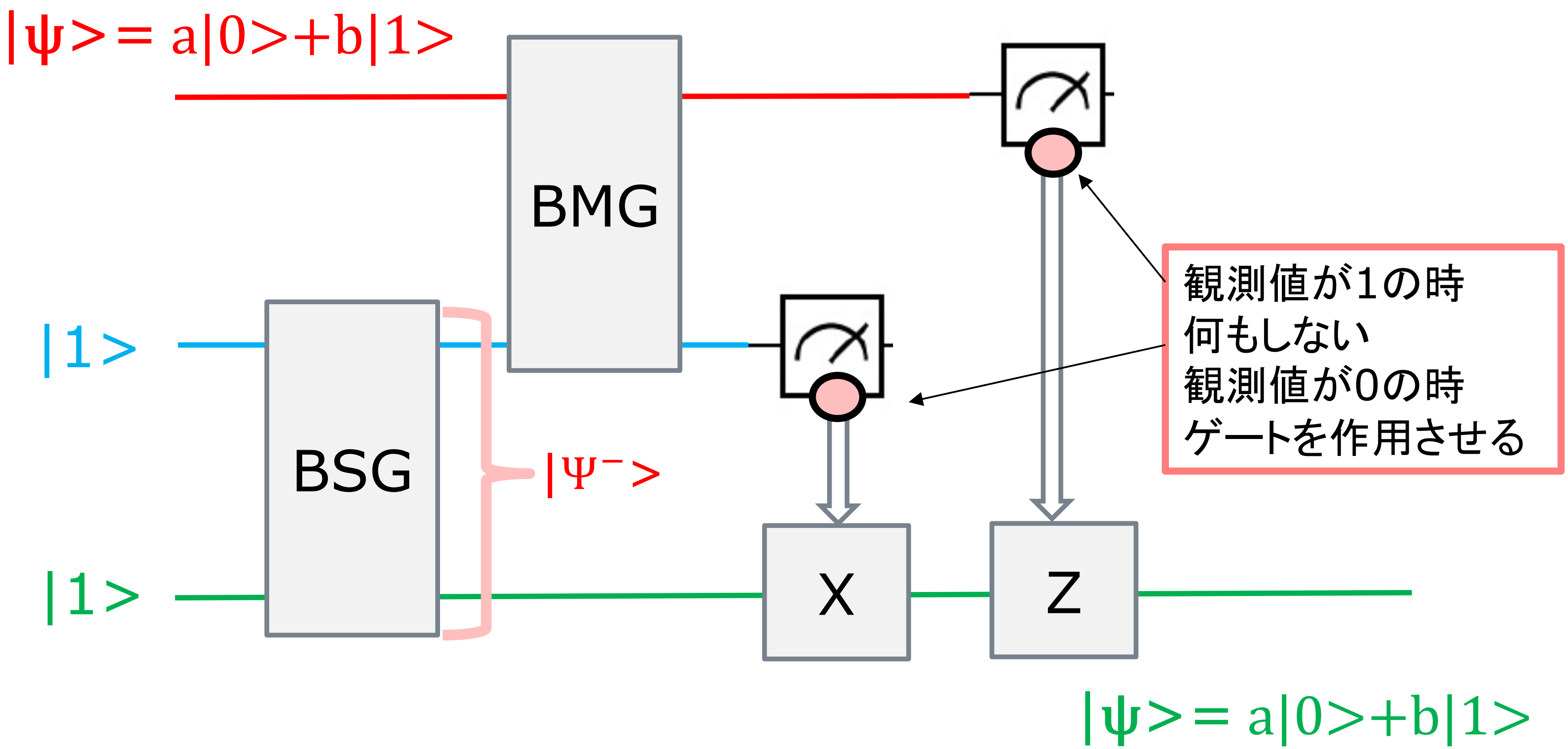
$|\Psi^+>$を利用した量子テレポーテーション回路



|Φ⁻>を利用した量子テレポーテーション回路

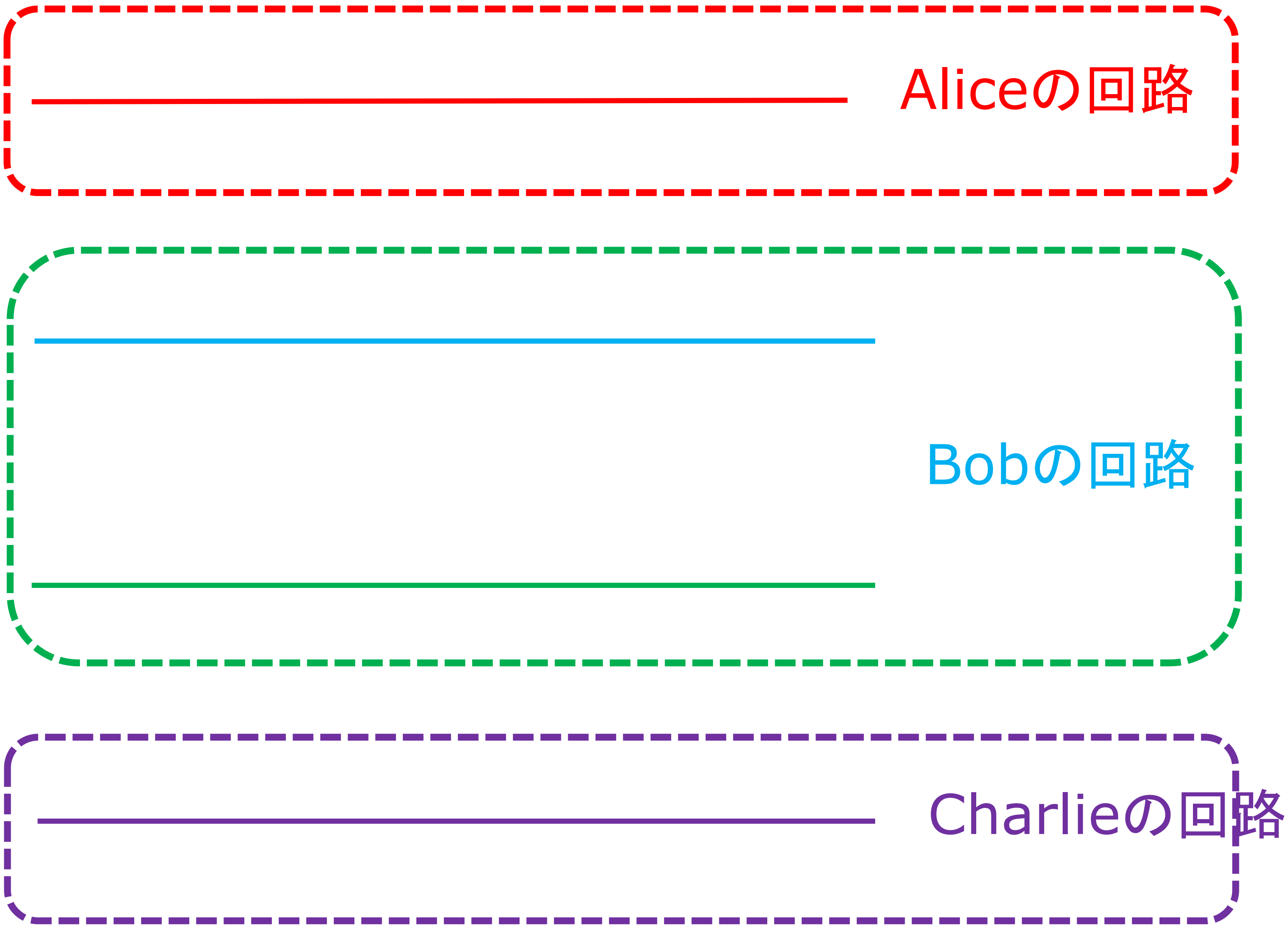


|Ψ⁻>を利用した量子テレポーテーション回路

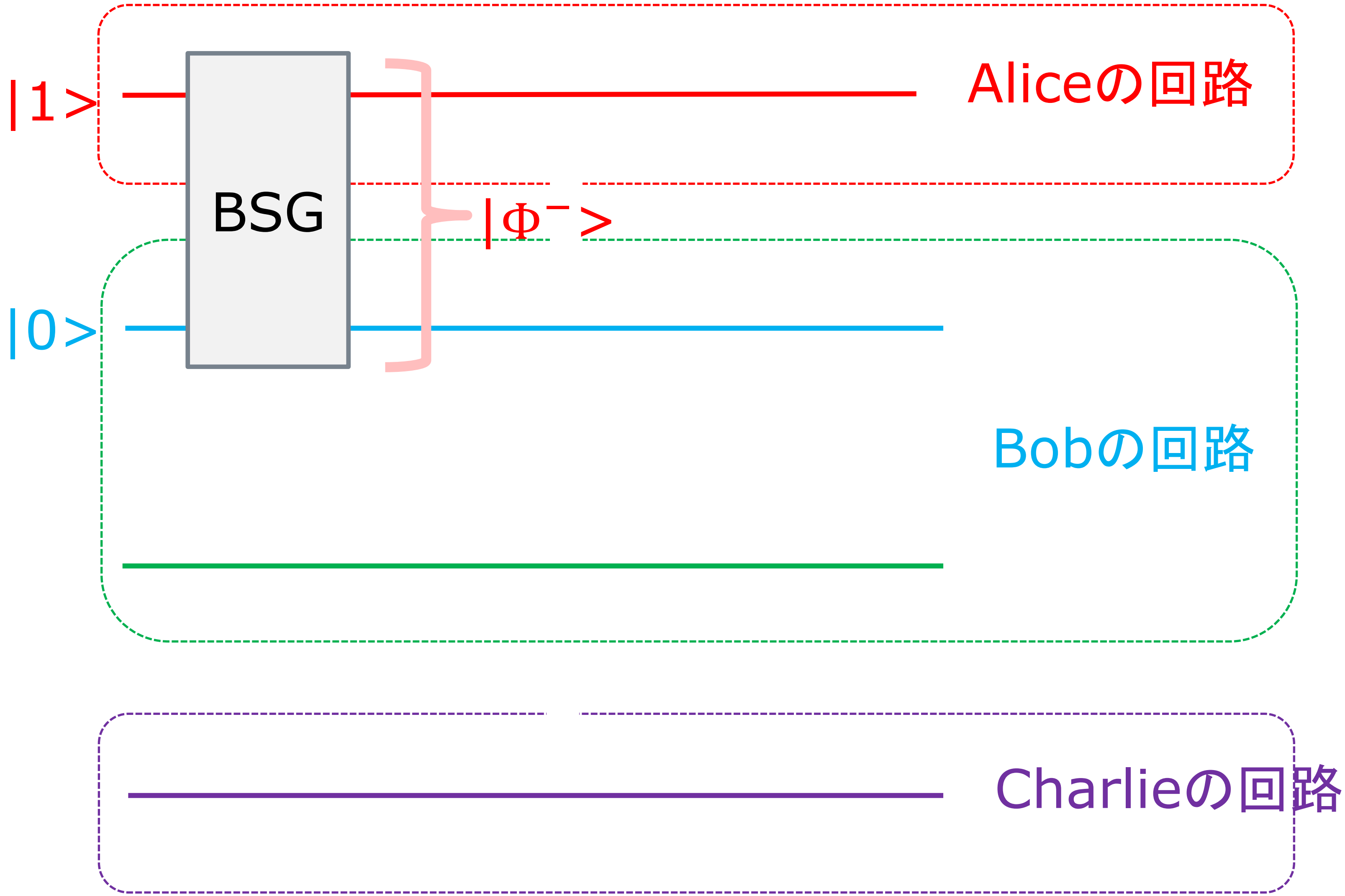


Entanglement Swapping

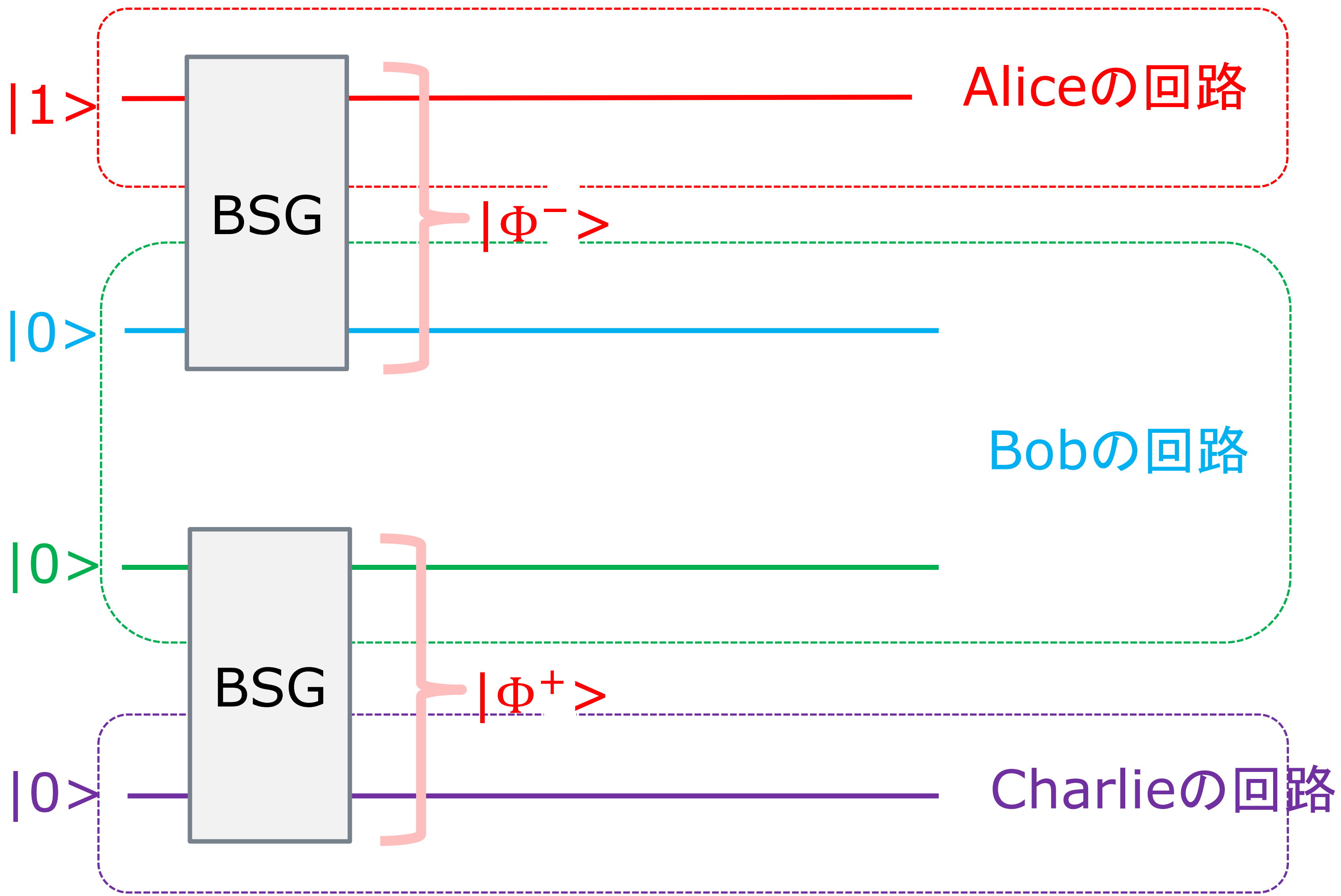
AliceとBobとCharlieが
次のような回路を持っているとしよう



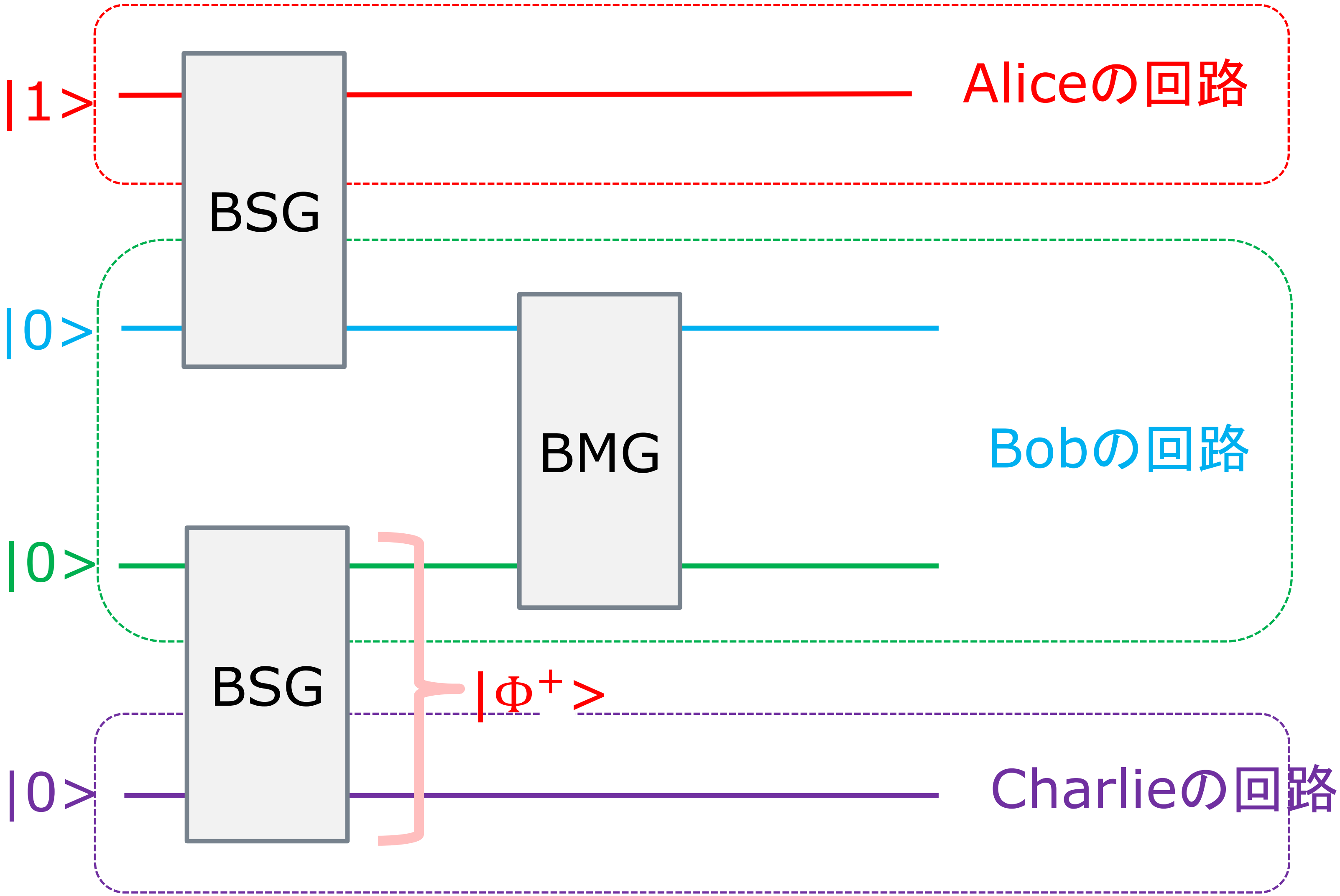
まず、AliceとBobは、Bell State $|\Phi^-\rangle$で、
エンタングルしているとする



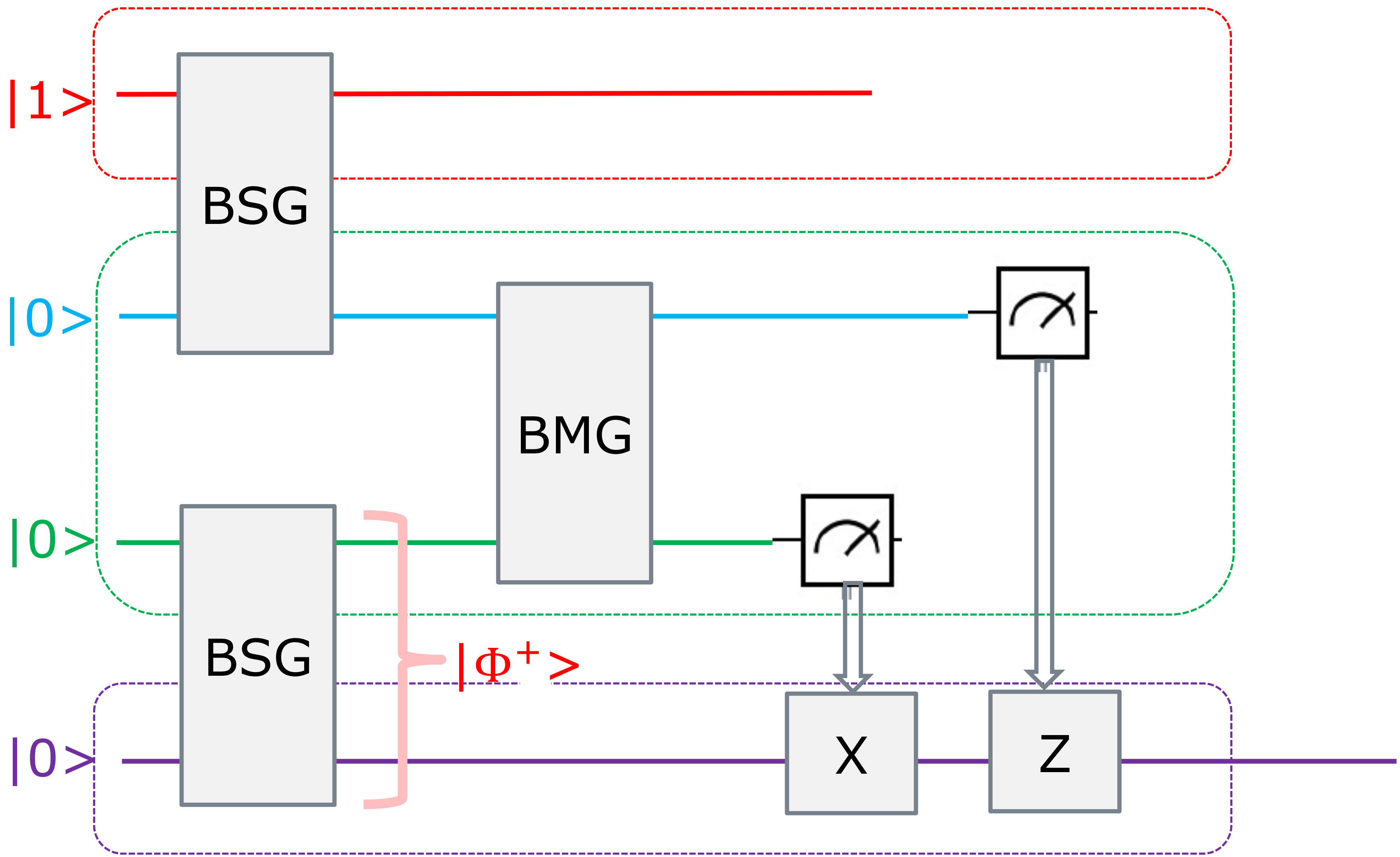
次に、BobとCharlieは、Bell State $|\Phi^+>$で
エンタングルしているとする



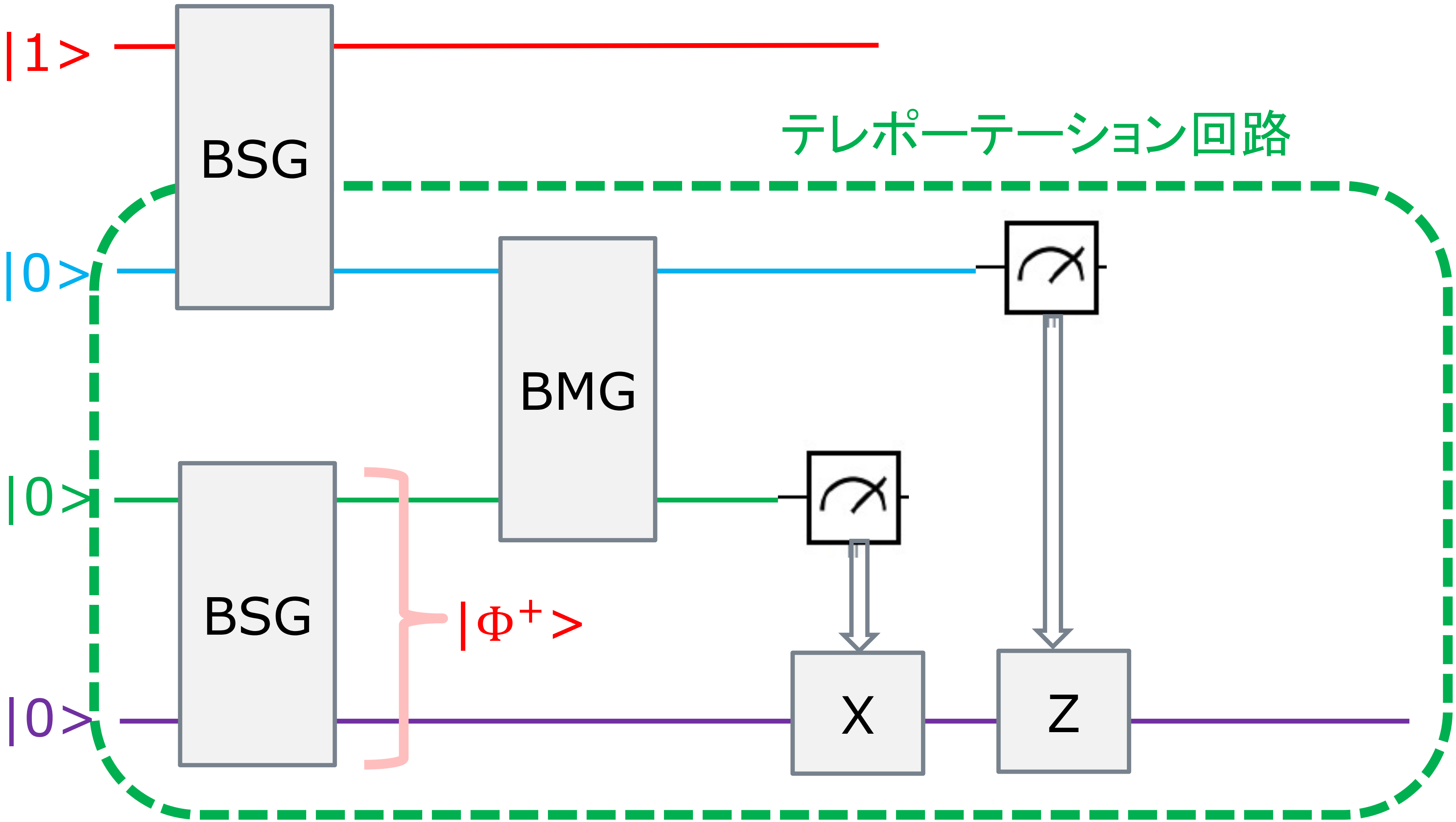
この時、Bobは、|Φ⁺>を利用して テレポーテーション回路を作ることが出来る 前段部



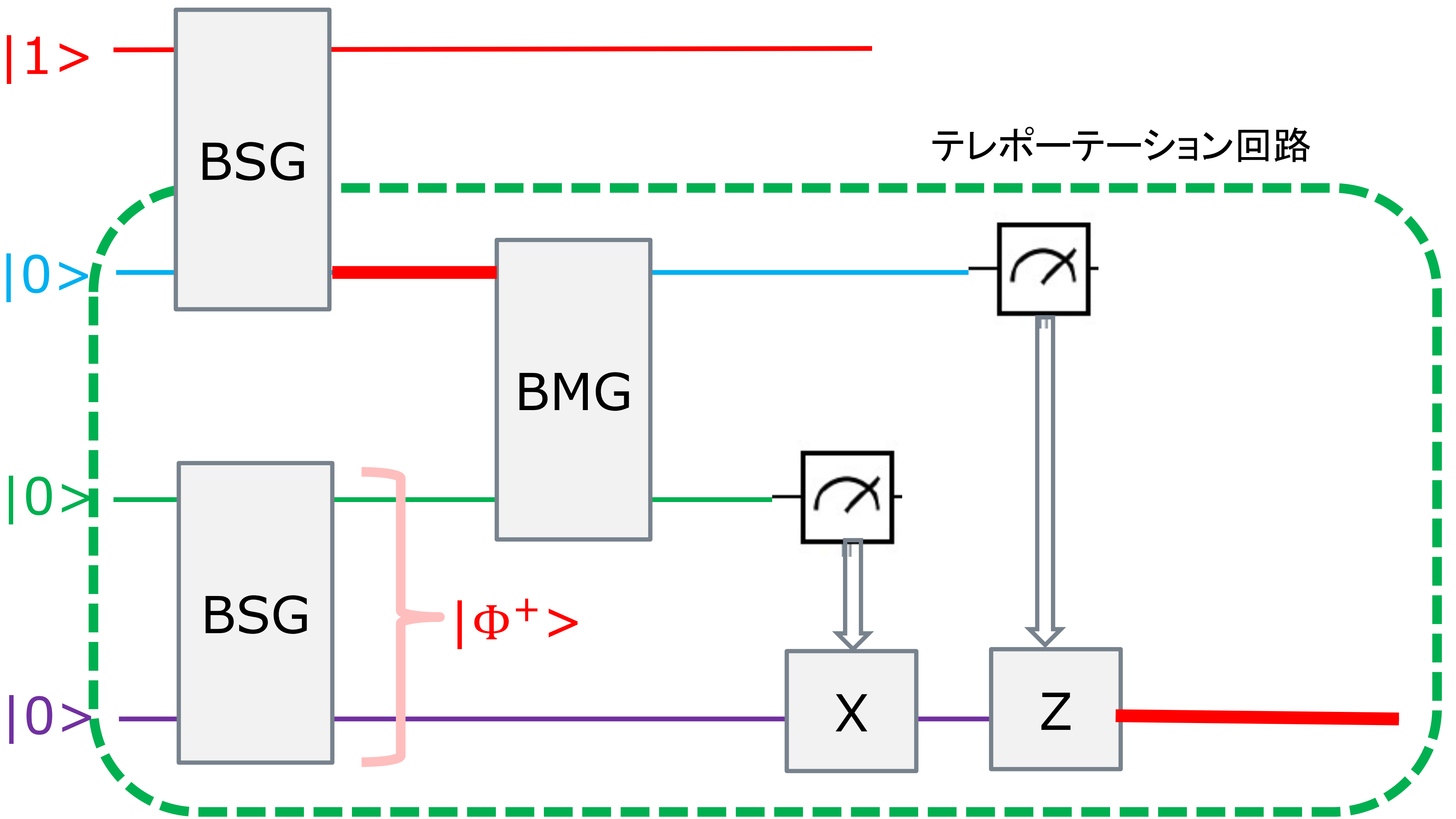
この時、Bobは、|Φ⁺>を利用して
テレポーテーション回路を作ることが出来る
後段部



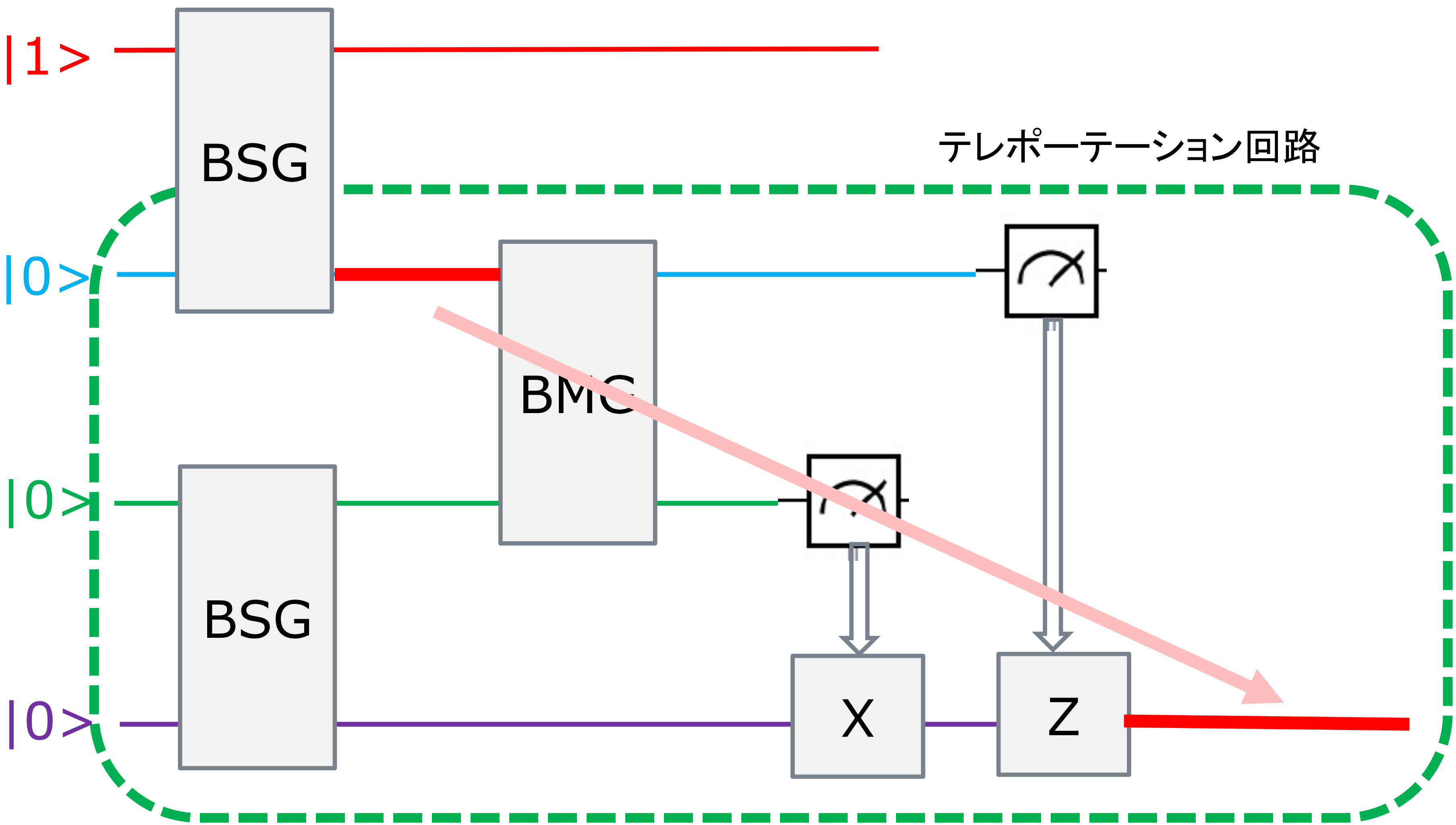
このテレポーテーション回路は、
第二ラインのqubitを第四ラインに送る



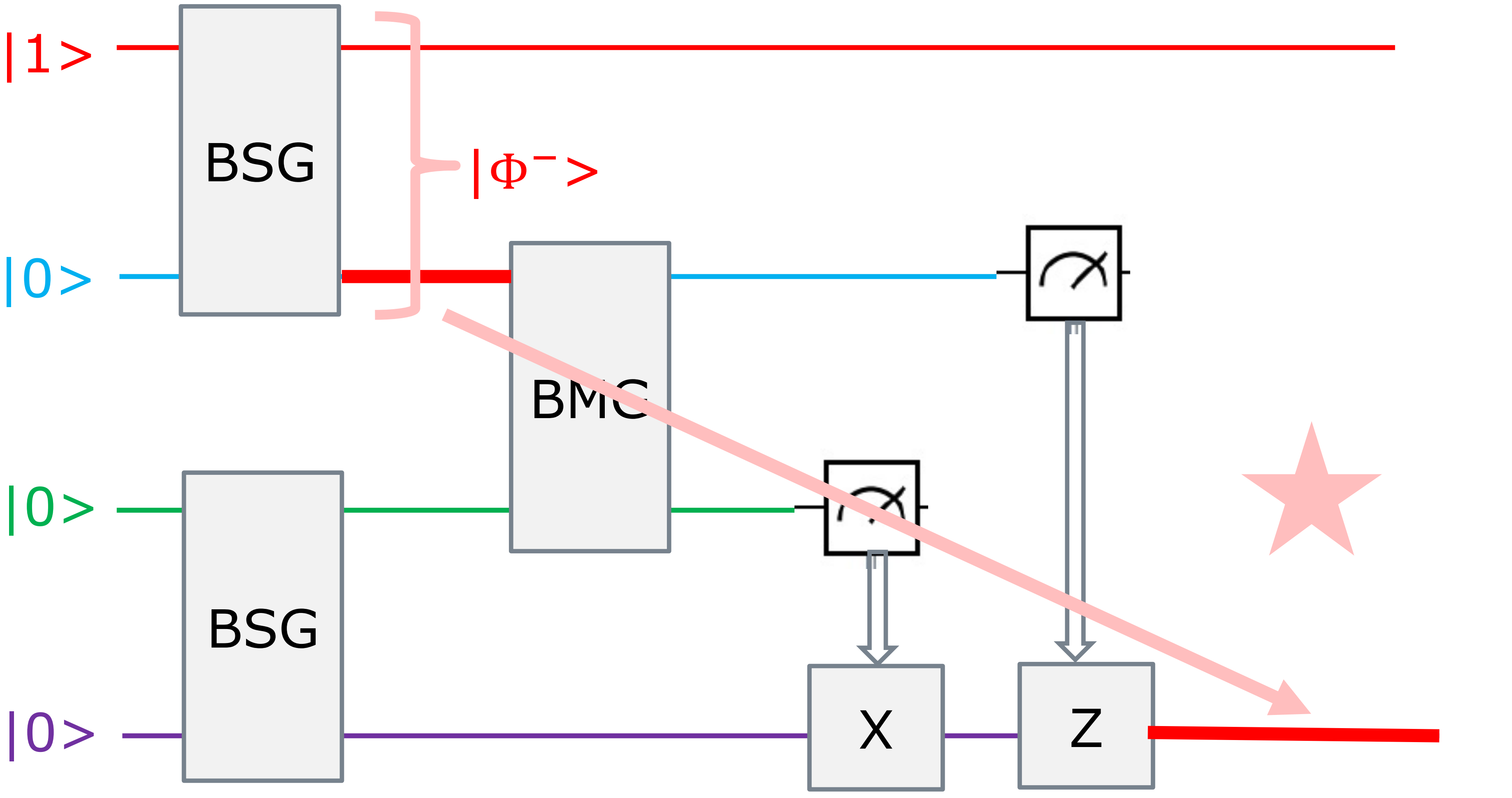
テレポーテーション回路は、
図の赤線部分の状態を転送する



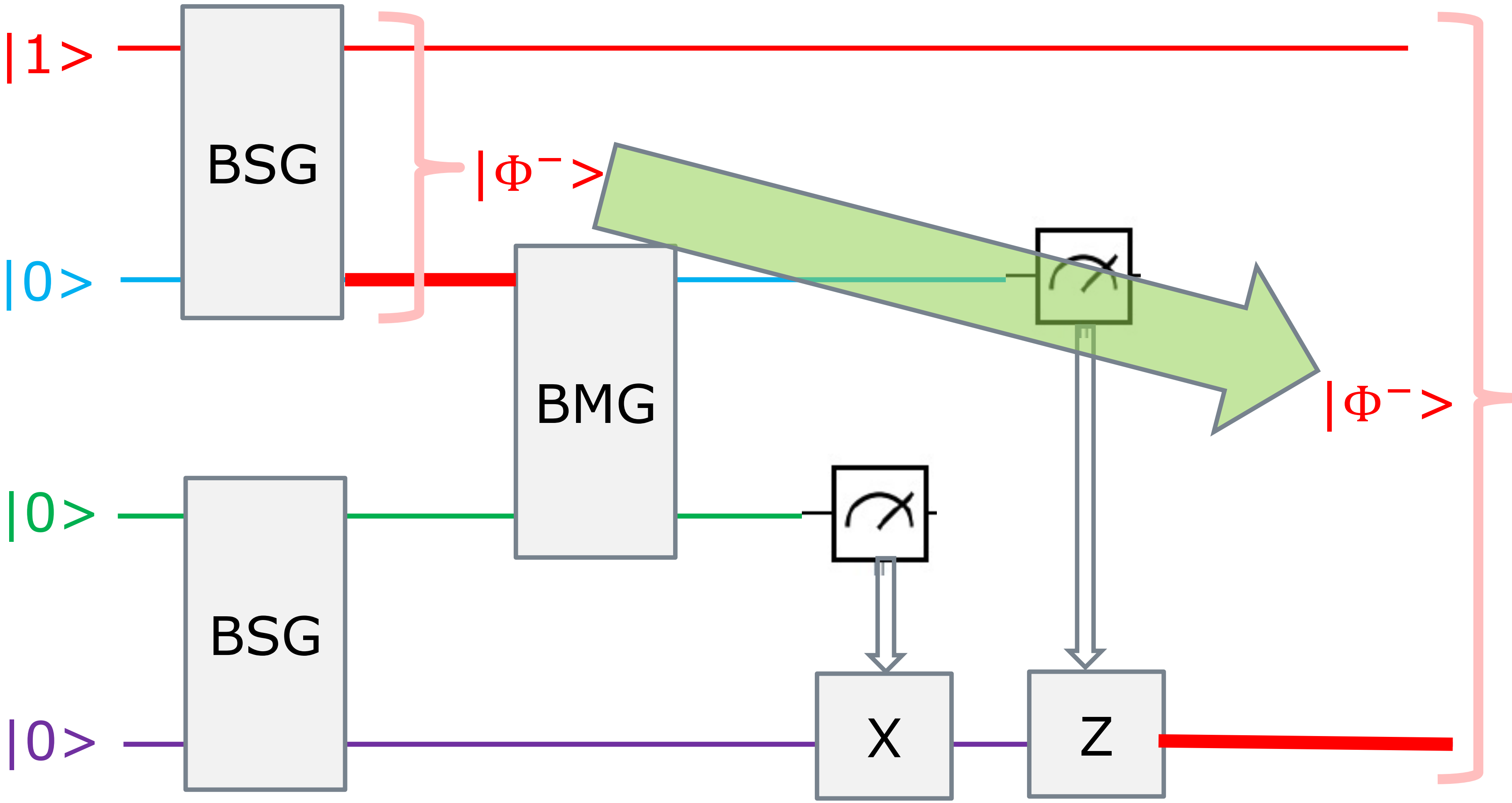
テレポーテーション回路は、Bobの回路からCharlieの回路に図の赤線部分の状態を転送する



Aliceと図の赤線部分の関係は、
$|\Phi^{-}>$ のエンタングルメント状態である



その状態は、Charlieに移った。
AliceとCharlieは、エンタングルメント状態になる。



Entanglement Swappingの奇妙さ

- 最初は、エンタングルメント状態にあったのは、AliceとBobの間と、BobとCharlieの間である。AliceとCharlieはエンタングルメント状態にはない。
- Bobは自分の回路上で、第二ラインと第三ライン上で、観測を行って、その結果をCharlieに送る。Charlieは、その情報で、第四ラインのqubitを操作する。これは、BobとCharlieとの間の量子テレポーテーションである。
- ところが、これらの観測・通信・ゲート操作とは関係のなかった、Aliceが、Charlieとエンタングルメント状態に入る。
- 観測・qubit操作によって、もとの Alice-Bob, Bob-Charlie のエンタングルメント状態は、なくなってしまう。